

Волинський національний університет  
імені Лесі Українки



МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ЩОДО ВИКОНАННЯ  
ПРАКТИЧНИХ РОБІТ З НАВЧАЛЬНОЇ  
ДИСЦИПЛІНИ

**«*Основи GNSS-вимірювань*»**

ДЛЯ СТУДЕНТІВ ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМ НАВЧАННЯ  
ЗІ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 193 – «ГЕОДЕЗІЯ ТА ЗЕМЛЕУСТРІЙ»

Луцьк 2022

УДК 528.02(072)  
ББК 26.114я73-9  
М-48

*Рекомендовано до друку методичною радою  
Волинського національного університету імені Лесі Українки  
(протокол № 10 від 21 червня 2022 р.)*

**Рецензенти:**

**Радзій В.Ф.** – кандидат географічних наук, доцент кафедри геодезії, землевпорядкування та кадастру Волинського національного університету імені Лесі Українки

**Мельник Ю.А.** – кандидат технічних наук, доцент кафедри будівництва та цивільної інженерії Луцького національного технічного університету

Расюн В.Л.

Методичні вказівки щодо виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Основи GNSS-вимірювань» / навчально – методичне видання / В.Л. Расюн – Луцьк, Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2022. – 53 с.

У виданні розкриваються зміст, порядок і методика виконання описово - розрахункових робіт із курсу «Основи GNSS-вимірювань».

Викладено такі основні питання: системи координат в супутниковій геодезії та їх взаємне перетворення, шкали часу, перетворення Хельмерта, обрахунок елементів орбіти ШСЗ за двома геоцентричними положеннями. Розв'язання робіт ілюструється числовими прикладами та наведено відповідні алгоритми.

Для студентів, аспірантів спеціальності 193 – «Геодезія та землеустрій» вищих учбових закладів.

УДК 528.02(072)  
ББК 26.114я73-9  
М-48

© Расюн В.Л. 2022  
© Волинський національний  
університет імені Лесі Українки, 2022

## ЗМІСТ

Вступ.....	6
Системи координат.....	7
Шкали часу.....	17
Перетворення координат.....	22
Перетворення координат методом Хельмерта.....	24
Обчислення прямокутних просторових координат точки $X, Y, Z$ за геодезичними $B, L, H$ .....	28
Обчислення геодезичних координат $B, L, H$ за прямокутними просторовими $X, Y, Z$ .....	31
Неітеративний метод перетворення координат.....	32
Обчислення попередніх значень кеплерових елементів незбуреної орбіти за двома геоцентричними положеннями.....	37
Обчислення прямокутних координат і складових швидкості ШСЗ в заданий момент часу за відомими значеннями кеплерових елементів його орбіти.....	44
Визначення координат пункту земної поверхні за результатами радіотехнічних спостережень навігаційних ШСЗ.....	46
Література.....	54

## ВСТУП

Методичні вказівки щодо виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Основи GNSS-вимірювань» відповідають навчальній програмі відповідного курсу спеціальності «Геодезія та землеустрій».

Відповідно до навчальної програми на практичних заняттях вивчаються такі теми: системи координат, шкали часу, перетворення координат, обрахунок елементів орбіти ШСЗ.

Алгоритми, приведені у вказівках, відповідають літературним джерелам із списку літератури, а усі приклади – оригінальні.

Тема «Системи координат» узгоджена з фундаментальними працями професора Куштїна І.Ф. та Гофмана-Велленгофа, а також з прийнятими в Україні системами координат.

Навчально-методичне видання розраховане на студентів третього курсу очної форми навчання і четвертого курсу заочної та з метою підготовки до іспитів. Виконання обчислювальних робіт не потребує залучення додаткових літературних джерел.

# СИСТЕМИ КООРДИНАТ

## 1. Системи координат у космічній геодезії й зв'язок між ними

У космічній геодезії використовують різні системи координат і виміру часу, тобто різні системи відліку. Система координат, що використовує зірки, близька до інерціальної, що переміщається в просторі прямолінійно й рівномірно. У зв'язку з тим, що методами космічної геодезії визначають координати пунктів, розташованих на поверхні Землі, необхідна система координат, жорстко пов'язана з фігурою Землі. Для визначення руху штучних супутників Землі (ШСЗ) доцільна система координат, координатна площина якої збігається або паралельна площині орбіти ШСЗ.

Для визначення положення пунктів на земній поверхні використовують астрономічні, геодезичні й геоцентричні координати. Варто відмітити, що астрономічна система координат пов'язана із прямовисною лінією в даному пункті, тобто є локальною координатною системою. Зв'язок між астрономічними координатами в різних пунктах утруднений через необхідність додаткових даних для зв'язку між собою положення прямовисних ліній у просторі. Тому, тіло Землі апроксимують еліпсоїдом обертання й використовують геодезичні координати, тобто геодезичну широту  $B$  і геодезичну довготу  $L$ . Нагадаємо, що геодезичною широтою називають кут між нормаллю до поверхні еліпсоїда в даній точці й площиною екватора, а геодезичною довготою – двограний кут між площинами початкового (грінвіцького) і геодезичного меридіана, який проходить через даний пункт.

При вирішенні багатьох завдань космічної геодезії використовують прямокутну просторову систему координат  $OXYZ$ , у якій координатна площина  $OXY$  збігається із площиною екватора, вісь  $OX$  – з лінією перетину площини початкового (грінвіцького) меридіана із площиною екватора, вісь  $OZ$  – з малою віссю еліпсоїда, а для загальноземного

еліпсоїда – і з віссю обертання Землі, вісь  $OY$  доповнює систему до правої.

На рис. 1 маємо

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L; \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L. \end{aligned} \quad (1)$$

Враховуючи  $On_a = Ne^2 \sin B$ , знаходимо

$$Z = (N + H) \sin B - Ne^2 \sin B = \left[ N(1 - e^2) + H \right] \sin B, \quad (2)$$

де  $N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$  – радіус кривини першого вертикала;

$a$ ,  $b$  – велика й мала півосі еліпсоїда, крім того,  $a$  називають екваторіальним радіусом Землі;

$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  – перший ексцентриситет меридіанного еліпса;

$H$  – геодезична висота пункту, тобто висота пункту над поверхнею еліпсоїда.

Для вирішення геодезичних задач у даній країні часто використовують референц-еліпсоїд, найбільш відповідний території країни.

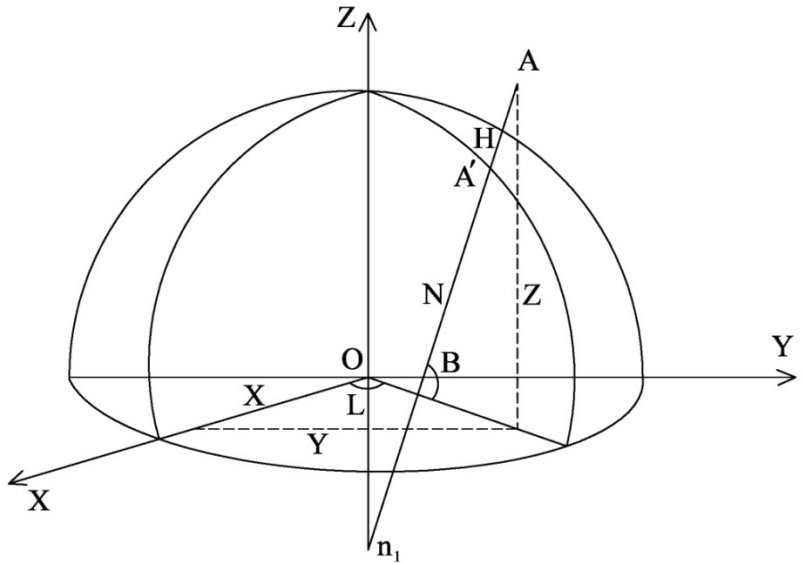


Рис. 1. Геодезична система координат

Систему координат, пов'язану з референц-еліпсоїдом, називають референсною, її початок не збігається із центром мас Землі, тому її, крім того, називають квазігеоцентричною. Осі референсної системи  $X_2Y_2Z_2O_2$  не паралельні осям загальноземної геодезичної системи координат.

Астрономічні  $(\varphi, \lambda)$  і геодезичні  $(B, L)$  координати зв'язані між собою отриманими раніше формулами

$$B = \varphi - \xi, \quad L = \lambda - \eta \sec \varphi \quad (3)$$

де  $\xi, \eta$  – складові відхилення прямовисної лінії в площині меридіана й площині першого вертикала відповідно.

У геоцентричній системі координат (рис. 2)

$$\begin{aligned} X &= \rho \cos \Phi \cos \Lambda, \\ Y &= \rho \cos \Phi \sin \Lambda, \\ Z &= \rho \sin \Phi, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\rho = R + H$ ,  $R$  – середній радіус Землі,  $H$  – висота пункту М над

поверхнею еліпсоїда;  $\Phi, \Lambda$  – геоцентричні широта й довгота.

Варто відмітити, що в теперішній час отримані параметри, що дозволяють зв'язувати системи різних референц-еліпсоїдів і переходити до єдиної системи координат з початком у центрі мас Землі.

Для визначення положення небесних об'єктів часто використовують другу екваторіальну систему координат: пряме сходження  $\alpha$ , яке відраховують по дузі небесного екватора від точки весняного рівнодення  $Y$  проти ходу годинникової стрілки до основи круга схилення  $CoP$ , і схилення  $\delta$ , рівне дузі  $Co$ .

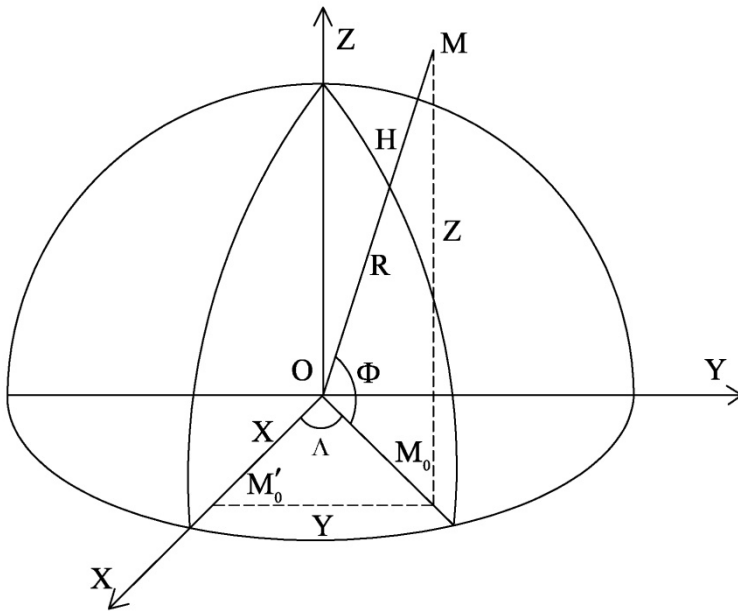


Рис. 2. Геоцентрична система координат

Значення  $\alpha$  вимірюють у часовій мірі від 0 до 24 год,  $\delta$  змінюється від  $-90^\circ$  у південній півкулі до  $+90^\circ$  у північній. Точка  $Y$  знаходиться на перетині небесного екватора з екліптикою.

Прямокутні координати при радіусі сфери, рівному  $r$ , визначають по



формулах:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \delta \cos \alpha, \\y &= r \cos \delta \sin \alpha, \\z &= r \sin \delta,\end{aligned}\tag{5}$$

Для зворотного переходу, поділивши другий вираз (5) на перший, маємо

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\tag{6}$$

На рис. 3

$$\begin{aligned}\delta &= \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}\tag{7}$$

Значення  $\alpha$  і  $\delta$  не залежать від обертання Землі. Є різні зоряні каталоги, що містять від декількох тисяч до сотень тисяч зірок, координати  $\alpha$  і  $\delta$  у яких дані з точністю від секунд до десятих і навіть сотих часток секунди дуги. Каталог, що має найвищу точність і узгодженість, називають фундаментальним. У наш час таким каталогом є FK 5, у якому наведені координати 4500 яскравих зірок, розташованих на всій небесній сфері, на епоху початку року 2000,0. У FK 5 наведені дані, що дозволяють переобчислювати координати на момент спостереження або на який-небудь інший час.

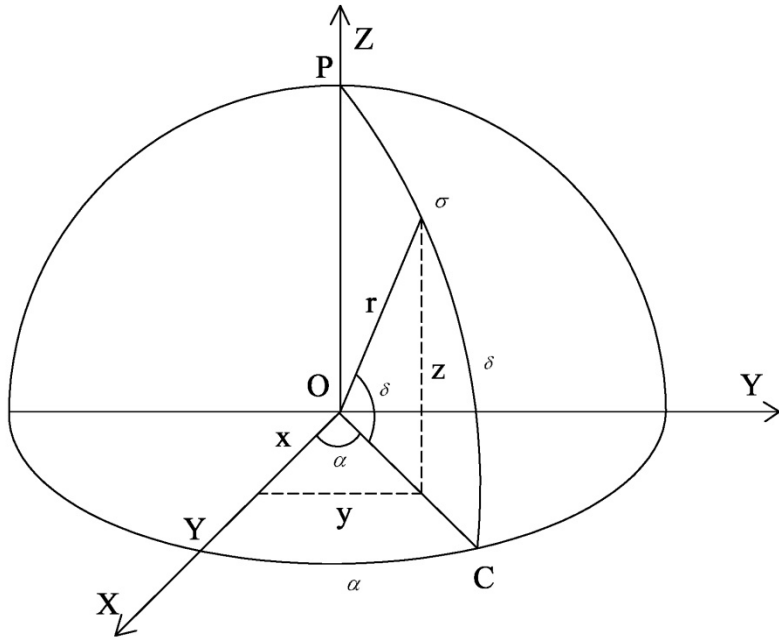


Рис. 3. Друга екваторіальна система координат

Крім того, для обробки фотографічних спостережень ШСЗ використовують каталоги, що мають координати великої кількості зірок, наприклад каталог Смітсоніанської астрофізичної обсерваторії США, що має близько 260 тис. зірок.

## **2. Огляд референцих систем координат, що використовуються в супутникових методах позиціювання.**

При застосуванні супутникових методів позиціювання для розв'язання геодезичних задач доводиться мати справу як із загально земними референциними системами координат WGS-84, ITRS, ETRS89, так і з національними чи місцевими системами. Розглянемо детальніше кожен із вказаних груп.

## 1. Загальноземна геодезична референцна система WGS-84.

Загальноземна геодезична референцна система координат WGS-84 (World Geodetic System – 84) розроблена Військово-картографічним агентством Міністерства оборони США. На відміну від локальних систем вона є єдиною системою для всієї планети.

Початок системи WGS-84 знаходиться в центрі мас Землі. У системі WGS-84 за нульовий меридіан прийнято «IERS Reference Meridian». Він розташований на 5,31” на схід від Грінвічського меридіану. За основу взято сфероїд з великим радіусом – 6 378137 м (екваторіальний) і меншим – 6 356752,314 м (полярний).

З 23 січня 1987 р. система координат WGS-84 використовується для бортових ефемерид супутників GPS. В 1994 р. Міністерство оборони США ввело реалізацію WGS-84, яка повністю базувалася на GPS вимірах. Ця реалізація відома як WGS-84 (G730), де буква G означає GPS, а 730 – номер GPS-тижня (починаючи з 0h UTC2 січня 1994 р.), коли національне Управління з відображення та картографування почало представляти свої орбіти в цій системі.

В 2001 р. Управління з відображення та картографування спільно з Дальгренівським дивізійним військово-морським центром надводного озброєння провело 15-ти добовий сеанс спостережень, в ході яких виконало прив’язку своєї глобальної мережі з 11 постійних станцій та 6 станцій Контрольного сегменту до мережі Міжнародної GPS служби. Координати цих станцій склали оперативну реалізацію системи WGS-84, яку використовує МО США для високоточних геодезичних робіт (в тому числі і для визначення орбіт). Стандартні відхилення по кожній координаті станцій складають близько 1 см.

## 2. Міжнародна земна референцна система координат ITRS.

Міжнародна земна референцна система координат (ITRS) задається та уточнюється Міжнародною службою обертання Землі (IERS). Початком

відліку є центр мас Землі (включаючи океани і атмосферу). Система ITRF виражається каталогом координат та швидкостей їх зміни перманентних станцій, розміщених по всій земній кулі. З 1988 по 2010 роки реалізовано 12 її варіантів (ITRF88 – ITRF2008), кожний з яких перевершував свій попередній по точності.

Точність сучасних вимірів настільки висока, що дозволяє вимірювати швидкість переміщення пунктів до 0,5 мм/рік і дає можливість визначати швидкість руху літосферних плит. ITRF2000 реалізується координатами і швидкостями більше ніж 800 опорних точок жорстко пов'язаних з корою Землі.

### 3. Загальноєвропейська земна референційна система координат ETRS89.

За аналогією з ITRS система отримала назву ETRS, а її реалізація ETRS<sub>YY</sub> або ETRS89, оскільки координати пунктів у цій системі є ідентичними координатам системи ITRS для 1989 року. Ключовим інструментом у підтримці ETRS89 є мережа перманентних станцій EURFF-EPN, яка охоплює європейський континент порівняно рівномірним покриттям.

### 4. Національні та місцеві референційні системи координат.

З широким впровадженням супутникових технологій для задач позиціонування виникла проблема співіснування загальноземних референційних систем координат з традиційними національними (класичними) референційними системами, що асоціюються з неомогенністю побудованих класичними технологіями геодезичних мереж. Відмовитися повністю від таких систем координат автоматично означало б втрату взаємозв'язку з раніше побудованою протягом багатьох десятиліть просторовою інформацією, що використовувалася у різноманітних галузях. Важливими стали питання використання сучасних вимірювальних технологій без суттєвих змін традиційної координатної системи.

Задача створення національної референційної системи координат для геодезичних робіт різних країн розв'язувалася в різний час і незалежно, без

врахування необхідності деякого загального та єдиного рішення її для всіх країн. Тому в різних країнах у свій час були прийняті і до цих пір застосовуються в геодезичних роботах різні референсні системи координат. Становлення та розвиток класичних геодезичних референсних систем координат базувалося на принципі встановлення вихідних геодезичних дат та виборі конкретного референсу - еліпсоїда. Подібним чином встановлювалися єдині національні координатні системи у багатьох країнах світу. Це і СНІ903 (Швейцарія), MGI (Австрія), DHDN (Німеччина), NFD27 – North American Datum (об'єднана референсна система Північної Америки), OSGB36 (Великобританія), ROMA40 (Італія), СК-42 (колишній СРСР) та ще багато інших.

Як показали подальші дослідження, подібним чином встановлені геодезичні референсні системи забезпечують точність визначення положення будь-якого пункту мережі відносно початкового пункту біля 1 м і більше. Аналогічну точність мала геодезична референсна система СК-42, яка стала основною системою координат в Україні після здобуття нею незалежності.

Система координат СК-42 створювалася у першій половині ХХ століття за допомогою побудови мереж триангуляції, трилатерації та полігонометрії. Згідно основних положень [8] отримано однорідну високоточну геодезичну мережу, в якій вимірювання характеризуються наступними величинами: середня квадратична помилка кута (за нев'язками трикутника) становить  $\pm 0,7''$  та  $\pm 1''$  відповідно для 1 і 2 класів; відносні похибки базисних сторін – не більше ніж 1:300000. Для поширення державної системи координат по території країни мережа зрівнювання «нанизуванням» по мірі її просування на схід. Але, найбільш важливою обставиною є те, що при математичному оцінюванні вимірювань, заповнюючи мережі 2 класу вставлялись в жорсткі каркаси полігонів 1 класу. В свою чергу це призвело до спотворення елементів мережі, особливо в містах, де мережі 2 класу примикали до рядів 1 класу. Точність зрівноважених елементів мережі характеризується

відносними помилками сторін в слабких місцях: 1:150 000 для 1 класу і 1:20 000 – для 2 класу. В окремих випадках помилки в сторонах 2 класу, розташованих поблизу пунктів 1 класу, перевищують 0,5 м. Характеристики слабких місць у ДГМ можна знайти в каталогах геодезичних пунктів.

Закритість системи СК-42 та принципи її застосування привели до введення для цивільних користувачів у 1963 році умовної системи координат СК-63. Ґрунтується вона на триградусних зонах Гаусса-Крюгера і у відповідності до діючих нормативно-технічних документів рекомендована як основна для кадастрових знімань. Для СК-63 була спеціально створена та введена нова розграфка і номенклатура топографічних карт, спеціально спотворювалися дані про місцезнаходження об'єктів на місцевості, причому всі прямокутні геодезичні координати точок перераховувалися за «особливими» формулами, для кожної зони за іншими. Обчислення редуційних поправок у цій системі також було проблематичним протягом довгих років через закритість переходу від СК-42 до СКА-63 і назад. Лише 1 січня 2010 р. у зв'язку з прийняттям нового «Закону відомостей», який знімає деякі обмеження на геодезичні дані, ситуація змінилася [8].

Місцеві системи координат (МСК) встановлюються з метою мінімального спотворення проекції Гаусса-Крюгера, зручності у використанні і застосуванні при виконанні топографо-геодезичних робіт та створення топографічних планів у масштабах 1:5000, 1:1000, 1:1000 та 1:500 на території міст та інших населених пунктів.

Система координат УСК-2000 була введена як державна 1 січня 2007 року. Носієм координат цієї системи є ДГМ. Це державна геодезична референсна система координат, отримана у результаті сумісного зрівноваження близько 800 пунктів супутникової мережі та результатів класичних геодезичних вимірювань на більш ніж 20000 пунктів ДГМ та строго узгоджена з реалізацією референсної системи ITRS, а саме з ITRF2000 [8].

Особливостями цієї нової національної референцної системи є те, що:

- Система координат УСК-2000 встановлена під умовою паралельності її осей просторовим осям Міжнародної загальноземної референцної системи координат ITRS. За поверхню відліку в системі координат УСК-2000 прийнятий референц-еліпсоїд Красовського;
- Система координат УСК-2000 чітко узгоджена з Міжнародною загальноземною референцною системою координат ITRS-ITRF2000, яка закріплена пунктами космічної геодезичної мережі [ 28 Задемл].
- Практичною цінністю нової системи координат є можливість ефективного використання GNSS-технологій в топографо-геодезичному виробництві.

Сучасні технології GNSS дозволяють вирішувати геодезичні завдання різного рівня: від розвитку державної геодезичної мережі до інвентаризації земельних ділянок. Практика показує, що продуктивність праці зростає при цьому в десятки разів і залежить, в основному, від необхідної точності визначення координат, ліміту часу на виміри, умов виконання робіт, застосування різних типів GNSS-приймачів.

## **ШКАЛИ ЧАСУ**

Для супутникової геодезії важлива синхронізація годинників супутників і приймачів системи. Еталонною шкалою є так званий системний час. Він не збігається з існуючими еталонними шкалами часу, але пов'язаний з ними певним чином. Розглянемо це більш докладно.

Еталонами для вимірювання часу служать періодичні процеси, період яких постійний з великою точністю. Спочатку єдиним еталоном часу був період добового обертання Землі. Він визначався із двох послідовних спостережень проходження якого - небудь небесного світила через площину меридіана місця спостереження. Уже древні астрономи переконалися в тому, що сонячна доба виявилася на 4 хвилини більшою зоряної. Це – наслідок

руху Землі по орбіті (обертання Землі навколо осі і її орбітальний рух відбувається в одному напрямку). Користуватися зоряним часом незручно, тому що все наше життя пов'язане зі зміною дня й ночі, тобто із сонячною добою. Але визначити тривалість сонячної доби з великою точністю досить складно: по-перше, Сонце занадто "велике", по-друге, сонячне випромінювання нагріває й деформує точні прилади, і, нарешті, по-третє, тривалість сонячної доби змінюється протягом року внаслідок зміни швидкості руху Землі по орбіті. Тому безпосереднє визначення періоду обертання Землі виконується за спостереженням зірок, а для практичних цілей враховують різницю між зоряною й сонячною добою. Так виникло своєрідне положення, при якому ми користуємося сонячним часом, визначаючи його за зірками.

Так як тривалість істинної сонячної доби не залишається постійною протягом року, то в повсякденному житті за основну одиницю часу приймають середню сонячну добу, розраховану в припущенні рівномірного руху Землі по орбіті. Час у такій добі називають середнім часом. Його значення змінюється зі зміною географічної довготи і виникає поняття місцевого часу. Місцевий середній час на Грінвічському меридіані називають всесвітнім часом і позначають UT (Universal Time). Цей всесвітній час покладений в основу створення декількох астрономічних шкал часу.

Насамперед, відмітимо, що, хоча час UT є середнім сонячним часом, тобто визначений з умови рівномірного руху Землі по орбіті, на його основі важко створити рівномірну шкалу з тієї причини, що положення будь-якого меридіана й, зокрема, Грінвічського, піддається змінам через обертання Землі. Відбувається це тому, що Земля не є абсолютно твердим тілом й у ній відбувається безперервний перерозподіл мас, внаслідок чого полюси Землі незначно (в межах до 10-15 м) змінюють своє положення, що приводить до зміщення меридіанів, які з'єднують полюси.

Існує кілька модифікацій шкал всесвітнього часу. Із спостережень



добових рухів зірок отримують всесвітній час UT0, не утворюючий рівномірної шкали. Якщо врахувати поправки за зсув миттєвого полюса щодо його середнього положення, одержуємо більш рівномірну шкалу UT1. Якщо врахувати, крім того, ще сезонні варіації кутової швидкості обертання Землі, одержуємо ще більш рівномірну шкалу UT2. Нарешті, якщо врахувати дію приливних явищ, одержуємо шкалу UT1R.

Нерівномірність добового обертання й орбітального руху Землі не дозволяють створити строго рівномірні шкали часу. Тому була введена ще одна шкала – ефемеридний час, названий пізніше динамічним часом. Під ним розуміють аргумент у диференціальних рівняннях руху тіл Сонячної системи в гравітаційному полі. Це рівномірно поточний час, що використовується при визначенні ефемерид супутників.

Будь-який час вимірюється за допомогою годинників. Після того, як Галілей створив теорію коливань маятника, а Гюйгенс винайшов обертовий маятник – балансир, з'явилися маятникові годинники. І незабаром кращі з них дозволили виявити систематичне вповільнення добового обертання Землі, викликане океанічними припливами.

Після винаходу кварцових годинників, у яких роль коливань маятника виконують пружні коливання кварцових пластинок під дією електричної напруги (п'єзо ефект), було встановлено, що й при обліку регулярного вповільнення тривалість доби все-таки не постійна – вона може змінюватися в обидва боки на тисячні й навіть соті частки секунди.

До середини XX століття стало зрозуміло, що точність кращих годинників перевершила точність нашого природного еталона часу – доби. Можливості астрономічних методів вимірювання часу виявилися вичерпаними.

Принципово нові й більш точні методи вимірювання часу прийшли з радіоспектроскопії й квантової електроніки. Було виявлено, що кожен атом або молекула вибірково поглинають або випромінюють не тільки світло, але

й радіохвилі певної довжини хвилі  $\lambda$  або частоти  $f$ , і, що саме головне, ці довжини хвиль і частоти характеризуються неперевершеною сталістю. Це дозволило створити квантові стандарти частоти, а, отже, і часу (здаємо, що частота – це величина, зворотна періоду, тобто часу одного коливання), і побудувати шкалу атомного часу АТ, що задається конкретним атомним або молекулярним еталоном.

Ця шкала практично ідеально рівномірна. У ній одиницею виміру є атомна секунда - проміжок часу, протягом якого відбувається 9 192 631 770 коливань цезієвого генератора ( $Cs^{133}$ ). Крім цезієвого, як стандарти частоти використовуються також рубідієвий і водневий генератори. Останній має найбільш високу стабільність. Дані про стабільність різних генераторів наведені в таблиці 1. Так як ці генератори відіграють роль високоточних годинників, у таблиці наведені також величини, що характеризують "точність ходу" цих годинників.

Таблиця 1

Тип генератора	Нестабільність за добу	Відхилення годинника
Рубідієвий	5·10-12	0.15 с за 1000 років
Цезієвий	3·10-13	0.01 с за 1000 років
Водневий	2·10-14	0.4 с за 1 000 000 років

Існує Міжнародний атомний час ІАТ (International Atomic Time). Він встановлюється на основі показників атомних годинників у різних метрологічних установах відповідно до наведеного вище визначення атомної секунди.

Так як шкали АТ й УТ не узгоджуються між собою, введена проміжна шкала, названа всесвітнім координованим часом UTC (Universal Time Coordinated). UTC – це атомний час, що коректується на 1 с, коли його розбіжність із UT1 перевищує 0,5 с. Корекція відбувається в останню секунду 30 червня або 31 грудня, або в обидві дати.

**Системний час GPS і ГЛОНАСС.** Для GPS прийнята своя атомна шкала часу, позначувана  $GPST$ . Час  $GPST$  було уведено опівночі з 5 на 6 січня 1980 року, і він на 19 секунд менше часу IAT:

$$GPST = IAT - 19c . \quad (8)$$

Оскільки

$$IAT = UTC + 1c \cdot n , \quad (9)$$

де  $n$  – число секундних стрибків (корекцій), то зв'язок системного часу  $GPST$  із всесвітнім координованим часом  $UTC$  встановлюється співвідношенням

$$GPST = UTC - 19c + 1c \cdot n . \quad (10)$$

Для системного часу ГЛОНАСС не існує відмінності від  $UTC$  на ціле число секунд, тому що воно коректується одночасно з корекціями шкали  $UTC$ , а існує постійний зсув на 3 години:

$$T_{ГЛОНАСС} = UTC + 03год \ 00хв \ 00с . \quad (11)$$

По ідеї, у системному часі повинні функціонувати всі елементи супутникової системи. Але на практиці це нереально, тому що для цього в кожній підсистемі потрібно використовувати однотипні високоточні еталони часу й частоти. Такі еталони установлюються на супутниках і на центральній наземній станції, але мати подібні громіздкі й дорогі еталони в кожному приймачі не представляється можливим, і в приймачах ставлять звичайні кварцові годинники (генератори) з нестабільністю порядку  $10^{-8}$ . У геодезичних приймачах застосовують вакуумні кварцові генератори з нестабільністю  $10^{-9}$ . Платою за можливість мати в приймачі "низько стабільні" компактні й дешеві годинники служить поява в рівняннях додаткової невідомої величини  $\Delta t_c$ , що приводить до необхідності вимірювання псевдовідстані ще до одного (четвертого) супутника.

Для обчислення довготривалих проміжків часу застосовують систему безперервного обліку днів від деякого початкового часу. Така система

запропонована в XVI ст. лейденськими професором Скалігером і в честь його батька Юлія названа юліанською. За початок відліку днів прийнято час опівдні 1 січня 4713 р. до н.е. В Астрономічному щорічнику є відповідні таблиці перерахунку юліанського дня для конкретної дати. Можливий перерахунок і за певною формулою. Наприклад, для опівдня на Грінвічському меридіані 1 березня 1989 р. маємо 2447586,0 JD. Для зручності обчислень використовують модифікований юліанський період (MJD) з початком опівночі 11 листопада 1858 р., при цьому  $MJD=JD-200000,5$ .

## ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ

В супутниковій геодезії застосовується значна кількість систем координат. Відповідно виникає необхідність переходу від однієї системи координат до іншої, тобто потрібно знати матриці переходу. В загальному випадку матрицю переходу можна отримати як добуток наступної низки матриць:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6 \cdot A_7 \cdot A_8 \cdot A_9 \cdot A_{10} \cdot A_{11} \cdot A_{12} \cdot A_{13} \cdot A_{14} \cdot A_{15} \quad (12)$$

$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$  – матриці, що визначають положення нульового меридіана та Північного полюса обертання Землі у поточний момент часу  $t$ ;

$A_4 \cdot A_5 \cdot A_6$  – матриці, що обчислюються за прецесійними елементами як відхилення епохи на момент спостережень від стандартної епохи;

$A_7 \cdot A_8 \cdot A_9$  – матриці, що обчислюються за елементами оскульованої орбіти (нутації орбіти);

$A_{10} \cdot A_{11} \cdot A_{12}$  – матриці, що обчислюються за кутовими елементами орієнтування в геоекваторіальній системі на момент знімання;

$A_{13} \cdot A_{14} \cdot A_{15}$  – матриці, що обчислюються за кутовими елементами орієнтування.

В результаті прецесії вісь обертання Землі повільно, приблизно за 26 тис. років, описує в просторі конічну поверхню, а вісь Світу на небесній сфері —

коло. Вісь конуса перпендикулярна площині земної орбіти, кут між віссю й твірною конуса дорівнює  $23^{\circ}27'$ .

Внаслідок зміни взаємного положення Землі, Місяця й Сонця на рух осі обертання Землі, а отже, і на полюси Світу, накладаються вимушені періодичні коливання, сукупність яких називається нутацією. Виправлені за прецесію й нутацію координати визначають за формулою:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = NP \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

де  $X_0, Y_0, Z_0$  знаходять за формулами:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \delta \cos \alpha, \\ y &= r \cos \delta \sin \alpha, \\ z &= r \sin \delta. \end{aligned} \quad (14)$$

$\alpha$  і  $\delta$  - екваторіальні координати, виправлені за власний рух зірок, обчислюються за формулою:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \mu_\alpha(t - T_0), \\ \delta &= \delta_0 + \mu_\delta(t - T_0), \end{aligned} \quad (15)$$

$\alpha_0, \delta_0, \mu_\alpha, \mu_\delta$  - приводяться в Астрономічному щорічнику,  $T_0$  - епоха каталогу.

$N, P$  – матриці нутації й прецесії

Система координат пунктів, з яких виконують спостереження, жорстко пов'язана із Землею, тому координати  $X, Y, Z$  опорних зірок потрібно перетворити в цю систему шляхом повороту навколо осі  $Z$  на кут, рівний грінвіцькому зоряному часу  $S = s - \lambda$  ( $s$  — місцевий зоряний час,  $\lambda$  — довгота). В результаті перетворені координати  $X_0, Y_0, Z_0$  визначаються за формулою:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = S_1 \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} \cos S & -\sin S & 0 \\ \sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Наступне перетворення координат пов'язане з рухом полюсів Землі, що відбувається внаслідок особливостей внутрішньої будови Землі, сезонних змін на земній поверхні й в атмосфері. Положення полюсів безупинно змінюється усередині квадрата зі стороною близько 25 м. Результати спостережень приводять до початкового положення полюсів – середньому положенню полюса в 1900-1905 рр., названому Міжнародним умовним початком (МУП). Рух істинного полюса розглядається в прямокутній системі  $O\bar{X}\bar{Y}$ , початок 0 якої збігається із середнім положенням полюса 1900–1905 рр., вісь  $O\bar{X}$  спрямована по дотичній до грінвіцького меридіана, вісь  $O\bar{Y}$  — по дотичній до меридіана –  $90^\circ$  ( $90^\circ$  на захід від Гринвіча).

Для переходу від системи координат  $OX_0Y_0Z_0$  до системи з віссю  $Z$ , спрямованої в МУП, використовують формулу:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = S_2 \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & -x_p & y_p \\ x_p & 1 & 0 \\ -y_p & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

де  $x_p, y_p$  – координати миттєвого полюса відносно МУП, які наведені в бюлетені «Всесвітній час» або бюлетені Міжнародного бюро часу. Розглянуті перетворення можуть застосовуватися як до координат зірок, так і координат ШСЗ.

## **ПРАКТИЧНА РОБОТА №1**

### **Перетворення Хельмерта**

У загальному випадку початки загальноземної  $XYZ$  і референцної  $X_r Y_r Z_r$  систем координат не збігаються, має місце різна орієнтація координатних осей.

Відповідно зв'язок між координатами цих системами матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 1 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Тут враховано ще масштабний множник  $m$ , який часто представляють у вигляді  $m = 1 + \beta_0$ . Тоді після нескладних перетворень можна записати наступні координатні рівняння:

$$\begin{aligned} X &= X_r + \beta_0 X_r - \varepsilon_z Y_r + \varepsilon_y Z_r + \Delta X; \\ Y &= Y_r + \beta_0 Y_r + \varepsilon_z X_r - \varepsilon_x Z_r + \Delta Y; \\ Z &= Z_r + \beta_0 Z_r - \varepsilon_y X_r + \varepsilon_x Y_r + \Delta Z. \end{aligned} \quad (19)$$

Часто виникає зворотня задача з визначення параметрів перетворення координат. У цьому випадку систему рівнянь зручно записати у наступному матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & Y_r & -Z_r & X_r \\ 0 & 1 & 0 & -Z_r & 0 & X_r & Y_r \\ 0 & 0 & 1 & Z_r & -Y_r & 0 & Z_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Вказане матричне рівняння записано для однієї опорної точки, координати якої відомі в обох системах координат:

Для  $n$  опорних точок можна скласти систему рівнянь поправок:  $A \cdot X + L = V$  з розв'язання якої за МНК визначаються найвірогідніші значення невідомих  $X = [\Delta X \quad \Delta Y \quad \Delta Z \quad \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \beta_0]^T$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & Z_r & -Y_r & X_r & 1 & 0 & 0 \\ -Z_r & 0 & X_r & Y_r & 0 & 1 & 0 \\ Y_r & -X_r & 0 & Z_r & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \beta_0 \\ \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X - X_r \\ Y - Y_r \\ Z - Z_r \end{pmatrix} \quad (21)$$

**Приклад.** Дана робота складається з двох частин:

1. Перехід від  $(B, L, H)_p$  до  $(X, Y, Z)_p$ ;

2. Для переходу від  $(X, Y, Z)_p$  до  $(X, Y, Z)_2$  використовуються матриці повороту та поправок (формула Гельмерта). Також в цій роботі проводиться контроль, який дозволяє зробити висновок про правильність виконання даного завдання.

Зв'язок між  $(B, L, H)_p$  та  $(X, Y, Z)_p$ :

$$\left. \begin{aligned} X_p &= (N + H_p) \cos B_p \cos L_p \\ Y_p &= (N + H_p) \cos B_p \sin L_p \\ Z_p &= (N + H_p - Ne^2) \sin B_p \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Для здійснення подальших обчислень необхідно скласти таблицю №1, в яку потрібно внести всі вихідні дані. Кінцеві розрахунки здійснювати за допомогою формул Гельмерта, з використанням матриць повороту та поправок.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \psi & -\omega \\ -\psi & 1 & \nu \\ \omega & -\nu & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_p + \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\text{де } \begin{pmatrix} \psi \\ \omega \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi'' \\ \omega'' \\ \nu'' \end{pmatrix} / \rho''.$$

Вихідні дані:

$$\begin{aligned} B &= 51^\circ 16' 45'' + n \cdot 1' 25'' & \delta_x &= 10 \cdot n & \psi'' &= -0,3 \cdot n \\ L &= 37^\circ 56' 55'' + n \cdot 1' 25'' & \delta_y &= -4 \cdot n & \omega'' &= 0,4 \cdot n, \\ H &= 300 + n & \delta_z &= 3 \cdot n & \nu'' &= 0,6 \cdot n \end{aligned}$$

де  $n$  – порядковий номер студента в журналі.



Формули	Величини	Формули	Величини
$a$	6378245,000	$X_p$	3073876,37403
$e^2$	0,00669342162 3	$Y_p$	2458849,13760
2	0,00673852541 5	$Z_p$	5002294,96748
$1 - e^2$	0,99330657838	$\delta_x$	300
$1 + e'^2$	1,00673852541 5	$\delta_y$	-120
$B$	51° 59' 15"	$\delta_z$	90
$L$	38° 39' 25"	$\psi''$	-9,000
$H$	330	$\omega''$	12,000
$\cos B$	0,61583337795	$\nu''$	18,000
$\cos L$	0,78090003254	$\rho''$	206264,8062
$\cos B \cos L$	0,48090430488	$\psi$	-0,00004363323
$\sin B$	0,78787641836	$\omega$	0,00005817764
$\sin^2 B$	0,62074925060	$\nu$	0,00008726646
$e^2 \sin^2 B$	0,00415493646	$X_p^2$	9448715962821,76
$W = (1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}$	0,99792036934	$Y_p^2$	6045939081488,75
$a/(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}$	6391537,0364	$Z_p^2$	25022954941688,1 0
$\sin L$	0,62465601668	$Z_p^2(1 + e'^2)$	25191572759521,1 0
$\cos B \sin L$	0,38468402481		
$N + H$	6391867,0364	$X_e$	3073778,065
$H / W$	330,68770830	$Y_e$	2459299,793
$a + H / W$	6378575,68771	$Z_e$	5002349,223
Контроль	$(X_p^2 + Y_p^2 + Z_p^2(1 + e'^2))^{1/2} = a + H / W$		
	6378575,68771	=	6378575,68771

## ПРАКТИЧНА РОБОТА №2

### Обчислення прямокутних просторових координат точки $X, Y, Z$ за геодезичними $B, L, H$

Зв'язок між прямокутною просторовою системою координат  $X, Y, Z$  та геодезичною  $B, L, H$  (де  $H$  – геодезична висота, тобто висота фізичної точки над поверхнею еліпсоїда) описаний наступними формулами:

$$\left. \begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L \\ Z &= (N + H - Ne^2) \sin B \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

де  $N$  – радіус кривини еліпсоїда в першому вертикалі в заданій точці:

$$N = a \frac{1 - 0.25e^2 \sin^2 B}{1 - 0.75e^2 \sin^2 B}, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

**Приклад.** Використовуючи формули (22), на еліпсоїді Красовського (велика піввісь  $a = 6378245.000$  м, мала піввісь  $b = 6356863.019$  м, полярне стиснення  $\alpha = 1/298.3$ ), обчислити прямокутні просторові координати  $X, Y, Z$  точки 1 за її геодезичними координатами  $B_1, L_1, H_1, H_2$  ( $B_1 = 50^\circ 15' 26." 4290, L_1 = 30^\circ 25' 21." 3760, H_1 = 157.694 \text{ м}, H_2 = 0 \text{ м}$ ).

**Схема обчислень**

Таблиця 2

Формули	Величини	Формули	Величини
$a$	6378245.000	$L_1$	$30^\circ 25' 21." 3760$
$e^2$	0.0066934216	$\cos L_1$	0.86231396
$0.25e^2$	0.0016733554	$\sin L_1$	0.50637401
$0.75e^2$	0.0050200662	$H_1$	157.694
$1 - e^2$	0.99330658	$X_1$	3523470.079
$B_1$	$50^\circ 15' 26." 4290$	$Y_1$	2069076.622
$\sin B_1$	0.76892376	$Z_1$	4881346.409
$\sin^2 B_1$	0.59124375	$H_2$	0.000

$1 - 0.25e^2 \sin^2 B_1$	0.99901064	$X_2$	3523383.140
$1 - 0.75e^2 \sin^2 B_1$	0.99703192	$Y_2$	2069025.569
$N_1$	6390903.342	$Z_2$	4881225.155
$\cos B_1$	0.63934048		

Вихідні дані для виконання практичної роботи виписують з таблиці 3 за номером варіанту.

Таблиця 3

Дані \ Варіант	1	2	3
$B_1$	50°31'08."6130	39°23'40."3320	19°45'47."0120
$L_1$	30°34'19."0540	37°33'11."8860	27°15'14."3280
$H_1$	15.184	212.143	333.546
$H_2$	0.000	0.000	0.000

Дані \ Варіант	4	5	6
$B_1$	51°31'26."3490	41°19'31."9060	18°19'55."3360
$L_1$	46°26'42."7820	23°11'27."6360	28°16'17."4970
$H_1$	421.281	159.934	559.110
$H_2$	0.000	0.000	0.000

Дані \ Варіант	7	8	9
$B_1$	24°14'16."5880	21°21'33."7210	33°36'32."4560
$L_1$	31°21'41."8780	21°42'16."4950	22°21'27."6280
$H_1$	237.844	88.522	326.632
$H_2$	0.000	0.000	0.000

Дані \ Варіант	10	11	12

$B_1$	51°58'27."8840	51°26'29."7880	19°19'43."3190
$L_1$	31°39'51."8350	24°42'19."8960	25°21'07."6220
$H_1$	664.211	54.546	32.611
$H_2$	0.000	0.000	0.000

Дані \ Варіант	13	14	15
$B_1$	32°18'27."1140	13°26'29."7250	59°19'43."3380
$L_1$	30°49'52."8330	54°32'19."7770	15°11'07."1420
$H_1$	289.134	46.451	268.249
$H_2$	0.000	0.000	0.000

Дані \ Варіант	16	17	18
$B_1$	10°18'27."1140	22°26'29."2250	39°39'43."3330
$L_1$	10°19'11."8150	24°22'18."2270	33°31'37."6320
$H_1$	219.652	38.584	61.649
$H_2$	0.000	0.000	0.000

Дані \ Варіант	19	20	21
$B_1$	44°48'27."9440	55°56'59."7980	46°49'06."3360
$L_1$	34°49'44."8450	54°52'18."8570	35°51'07."6420
$H_1$	41.518	67.713	71.819
$H_2$	0.000	0.000	0.000

Дані \ Варіант	22	23	24
$B_1$	06°28'06."9960	09°26'29."9950	10°19'10."3380
$L_1$	36°49'08."8850	10°12'11."8570	11°31'08."6450

$H_1$	56.542	813.219	735.632
$H_2$	0.000	0.000	0.000

### ПРАКТИЧНА РОБОТА №3

Обчислення геодезичних координат  $B, L, H$  за прямокутними просторовими  $X, Y, Z$

Зворотний перехід від просторових прямокутних координат до геодезичних можна здійснити методом послідовних наближень, використовуючи наступні робочі формули:

$$\left. \begin{aligned} tgL &= Y/X \\ Q &= X/\cos L = Y/\sin L = X \cos L + Y \sin L \\ tgB^0 &= Z/Q(1-e^2) \\ tgB^i &= T^{i-1}/Q \\ T^i &= Z + N^{i-1}e^2 \sin B^{i-1} \\ H &= (Z/\sin B) - (1-e^2)N = Q/\cos B - N \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

де  $Q$  і  $T$  – допоміжні величини,  $i = 1, 2, \dots, n$  – номер ітерації.

**Приклад.** За просторовими прямокутними координатами  $X, Y, Z$ , які отримані з практичної роботи №2, за формулами (23) обчислити відповідні геодезичні координати  $B, L$  і  $H$ .

Схема обчислень

Таблиця 4

Формули	Величини	Формули	Величини
$X$	3523470.079	$X$	3523383.140
$Y$	2069076.622	$Y$	2069025.569
$Z$	4881346.409	$Z$	4881225.155
$tgL$	0.5872269597	$tgL$	0.5872269597
$L$	30°25'21."3760	$L$	30°25'21."3760
$Q_1$	4086064.056	$Q_1$	4085963.235

$1 - e^2$	0.9933065784	$1 - e^2$	0.9933065784
$Q_2$	4086064.056	$Q_2$	4085963.235
$tgB^0$	1.202682929	$tgB^0$	1.202682729
$B^0$	50°15'26."4458	$B^0$	50°15'26."4291
$N'$	6390903.669	$N + H = Q/\cos B$	6390903.342
$T'$	4914238.673	$N$	6390903.342
$tgB'$	1.202682729	$H$	0.000
$B'$	50°15'26."4291		
$N + H$	6391061.037		
$N$	6390903.342		
$H$	157.695		

З лівої частини таблиці 4 видно, що задовільні результати отримані вже після другого наближення.

Вихідними даними для виконання практичної роботи №3 є результати обчислень практичної роботи №2.

## ПРАКТИЧНА РОБОТА №4

### Неітеративний метод перетворення координат

Цей доцільно застосовувати при визначенні ефемерид ШСЗ за фотознімками зоряного неба, тобто за екваторіальними координатами. Числовий приклад подано згідно роботи [10].

В якості прикладу розглянемо знімок, на якому знаходяться зображення двох зірок.

Дано:

*Елементи внутрішнього орієнтування:*

$$r' = 400.00 \text{ мм};$$

$x_0 = 0$ ;  $y_0 = 0$  – координати оптичного центру.

*Координати зірок на знімку:*

$$r' = 400.00 \text{ мм};$$

$$x_1 = +20.00 \text{ мм}; y_1 = +10 \text{ мм};$$

$$x_1 = -100.00 \text{ мм}; y_1 = -50 \text{ мм}.$$

Координати зірок екваторіальної системи:

$$\alpha_1 = 34^\circ 46' 56.733''; \delta_1 = -38^\circ 02' 51.00'';$$

$$\alpha_2 = 15^\circ 15' 14.867''; \delta_2 = -47^\circ 53' 40.00''.$$

Напрямні косинуси зірок в екваторіальній системі.

$$L = \cos\alpha \cdot \cos\delta,$$

$$M = \sin\alpha \cdot \cos\delta,$$

$$N = \sin\delta.$$

Контроль:

$$L_i^2 + M_i^2 + N_i^2 \approx 1.$$

$$L_1 = 0.76482590449; L_2 = 0.64687579778;$$

$$M_1 = 0.18761053298; M_2 = 0.17640867596;$$

$$N_1 = -0.616314564933; N_2 = 0.74191083108.$$

Напрямні косинуси зірок в системі зоряного знімка.

$$l = \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + f^2}};$$

$$m = \frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + f^2}};$$

$$n = \frac{-f}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + f^2}};$$

Контроль:

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 \approx 1.$$

$$l_1 = \frac{20}{400.62451248} = 0.04992205762; l_2 = \frac{-100}{415.331193146} = -0.24077170617;$$

$$m_1 = \frac{10}{400.62451248} = 0.02496102881; m_2 = \frac{-50}{415.331193146} = -0.12038585308;$$

$$n_1 = \frac{-400}{400.62451248} = -0.99844115259; \quad n_2 = \frac{-400}{415.331193146} = -0.96308682395.$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 \approx 0.99999 \dots = 1;$$

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 \approx 0.99999 \dots = 1;$$

Обчислення напрямних косинусів осі обертання.

Повернемо систему координат навколо осі  $r$  на кут  $\delta$ .

$$\bar{C} = \bar{r}_1 \cdot \bar{R}_1;$$

$$C = \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ M_1 \\ N_1 \end{bmatrix} = 0.65821844378;$$

$$\delta = \arccos(\bar{r}_1 \cdot \bar{R}_1) = \arccos 0.65821844378 = 48^\circ 50' 09.09'', \text{ або}$$

$$\delta = \arccos(l_1 \cdot L_1 + m_1 \cdot M_1 + n_1 \cdot N_1) = \arccos 0.65821844378 = 48^\circ 50' 09.09'';$$

$$\sin \delta = 0.75282699225.$$

$$C_1 = \frac{N_1 m_1 - M_1 n_1}{\sin \delta}; \quad C_1 = 0.228384786059;$$

$$C_2 = \frac{L_1 n - N_1 l_1}{\sin \delta}; \quad C_2 = -0.973485242573;$$

$$C_3 = \frac{M_1 l_1 - L_1 m_1}{\sin \delta}; \quad C_3 = -0.012917891759.$$

А оператор, який відповідає цьому перетворенню буде:

$$A = \cos \delta \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (1 - \cos \delta) \begin{vmatrix} C_1^2 & C_1 C_2 & C_1 C_3 \\ C_2 C_1 & C_2^2 & C_2 C_3 \\ C_3 C_1 & C_3 C_2 & C_3^2 \end{vmatrix} \\ + \sin \delta \begin{vmatrix} 0 & -C_3 & C_2 \\ C_3 & 0 & -C_1 \\ -C_2 & C_1 & 0 \end{vmatrix};$$



$$A = \begin{vmatrix} 0.67604537 & -0.066263089 & -0.733874308 \\ -0.085712964 & 0.982115773 & -0.167636200 \\ 0.731857626 & 0.176232263 & 0.658275478 \end{vmatrix}.$$

Після цього повороту система координат зоряного знімка займе нове положення  $x_1 y_1 z_1$  при якому напрямок на зірку 1 системі координат  $XYZ$  і в системі  $x_1 y_1 z_1$  співпадає.

$$\begin{aligned} \overline{R}_1 &= \overline{A} \cdot \overline{r}_1; \\ \overline{R}_1 &= \begin{vmatrix} 0.76825904 \\ 0.187610533 \\ -0.616314549 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Поворот системи  $x_1 y_1 z_1$  до співпадіння  $XYZ$ . Це можна зробити поворотом системи  $x_1 y_1 z_1$  навколо осі  $R_1$  на кут  $\eta$ . Величину кута  $\eta$  і напрямок обертання знайдемо з наступних міркувань:

$$\overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = i(M_1 N_1 - M_2 N_1) + j(L_2 N_1 - L_1 N_2) + k(L_1 M_2 - L_2 M_1);$$

Нехай

$$\overline{F} = F_1 i + F_2 j + F_3 k = \overline{R}_1 \cdot \overline{R}_2 = 0.070593053;$$

$$\overline{G} = G_1 i + G_2 j + G_3 k = \overline{R}_1 \cdot A \overline{r}_2 = 0.946560745,$$

тоді

$$\begin{aligned} \cos \eta &= F_1 G_1 + F_2 G_2 + F_3 G_3 = \\ &= (-0.06869421114) + (-0.9294926615) + (-0.000691482) \\ &= -0.99887835; \end{aligned}$$

$$\eta = 180^\circ \pm \arccos(-0.998878355) = 180^\circ - 177^\circ 17' 09.69'' = 2^\circ 42' 50.31''.$$

$$\sin \eta = \frac{F_2 G_2 - F_3 G_3}{L_1} = \frac{F_3 G_1 - F_1 G_3}{M_1} = \frac{F_1 G_2 - F_2 G_1}{N_1} =$$

$$= 0.0473500752 = 0.0473500752 = 0.0473500752;$$

$$\eta = \arcsin(0.0473500752) = 2^\circ 42' 50.31'',$$

де

$$F_1 = \frac{M_1 N_2 - M_2 N_1}{\sin(\overline{R_1}, \overline{R_2})} = 0.248533562;$$

$$F_2 = \frac{L_2 N_1 - L_1 N_2}{\sin(\overline{R_1}, \overline{R_2})} = -0.968527873;$$

$$F_3 = \frac{L_1 M_2 - L_2 M_1}{\sin(\overline{R_1}, \overline{R_2})} = 0.13595129.$$

Контроль:

$$\sum (F_i) \approx 1, i = 1, 2, 3.$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 \approx 0.99999 \dots = 1.$$

$$\cos(\overline{R_1}, \overline{R_2}) = L_1 L_2 + M_1 M_2 + N_1 N_2 = 0.070593050;$$

$$\sin(\overline{R_1}, \overline{R_2}) = 0.99750519841;$$

$$G_1 = \frac{M_1 n'_2 - N_1 m'_2}{\sin(\overline{R_1}, \overline{r'_2})} = -0.296398128684;$$

$$G_2 = \frac{N_1 l'_2 - L_1 n'_2}{\sin(\overline{R_1}, \overline{r'_2})} = 0.959696346696;$$

$$G_3 = \frac{L_1 m'_2 - M_1 l'_2}{\sin(\overline{R_1}, \overline{r'_2})} = -0.050862511200;$$

$$\cos(\overline{R_1}, \overline{r'_2}) = L_1 l'_2 + M_1 m'_2 + N_1 n'_2 = 0.38683033000;$$

$$\sin(\overline{R_1}, \overline{r'_2}) = 0.99215090727,$$

де

$$\overline{r'_2} = \overline{A} \overline{r_2} = l'_2 \overline{i} + m'_2 \overline{j} + n'_2 \overline{k},$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_2' &= \begin{vmatrix} 0.676045637 & -0.066263089 & -0.733874308 \\ -0.085712964 & 0.982115773 & -0.167636200 \\ 0.731857626 & 0.176232263 & 0.658275478 \end{vmatrix} \\ &\quad \times \begin{vmatrix} -0.24077170617 \\ -0.12038585308 \\ -0.96308682395 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0.551989154 \\ 0.063852626 \\ -0.831402920 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Відповідно, оператор, який відповідає такому перетворенню, буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} B &= \cos \eta \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (1 - \cos \eta) \begin{vmatrix} L_1^2 & L_1 M_1 & L_1 N_1 \\ M_1 L_1 & M_1^2 & M_1 N_1 \\ N_1 L_1 & N_1 M_1 & N_1^2 \end{vmatrix} \\ &\quad + \sin \eta \begin{vmatrix} 0 & -N_1 & M_1 \\ N_1 & 0 & -L_1 \\ -M_1 & L_1 & 0 \end{vmatrix}; \\ B &= \begin{vmatrix} 0.170382857 & 0.316000387 & -0.933334579 \\ 0.257635307 & -0.928522410 & -0.267339074 \\ -0.951101325 & -0.194909946 & -0.239617157 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Оператор переходу від системи координат зоряного знімка до екваторіальної системи, яку задають зірки, знаходимо як:

$$P_2 = BA = \begin{vmatrix} -0.594966772 & 0.1234575205 & -0.792403971 \\ 0.058105493 & -0.976101987 & -0.209400721 \\ -0.801647235 & -0.170629494 & 0.572928869 \end{vmatrix}.$$

## ПРАКТИЧНА РОБОТА №5

### Обчислення попередніх значень кеплерових елементів незбуреної орбіти за двома геоцентричними положеннями

На станції спостереження за штучними супутниками Землі (ШСЗ) на два моменти часу  $(t_1, t_2)$  обчислені інерціальні геоцентричні координати ШСЗ  $(X_1, Y_1, Z_1)$  та  $(X_2, Y_2, Z_2)$ , а за допомогою лазерного далекоміра виміряні відстані  $\rho$  до супутника.

Необхідно визначити попередні значення кеплерових елементів орбіти  $a, e, i, \Omega, \omega, M$ . Для прикладу прийємо наступні вихідні дані:

Таблиця 5

$x_1$	1250080.8 м	$z_1$	4873266.6 м
$x_2$	250707.3 м	$z_2$	6331113.7 м
$y_1$	-4818181.8 м	$t_1$	192626.081 с
$y_2$	-2904026.9 м	$t_2$	193212.467 с

**Алгоритм обрахунків:**

1. Обчислення довжин геоцентричних радіус векторів  $r_k$ :

$$r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2};$$

$$r_1 = \sqrt{1250080.8^2 + (-4818181.8)^2 + 4873266.6^2} = 6966082.48724 \text{ м};$$

$$r_2 = \sqrt{250707.3^2 + (-2904026.9)^2 + 6331113.7^2} = 6969879.98954 \text{ м}.$$

2. Обчислення напрямних косинусів геоцентричних радіус векторів  $r_k$ :

$$\begin{pmatrix} l_k \\ m_k \\ n_k \end{pmatrix} = 1/r_k \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.17945248312 \\ -0.69166304143 \\ 0.6995706136 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0359010283 \\ -0.41665378806 \\ 0.90835333025 \end{pmatrix};$$

3. Обчислення напрямних косинусів вектора нормалі до поверхні орбіти:

$$\cos \beta = (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = 0.93009624717;$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = 0.36731590083;$$

$$L = (m_1 n_2 - m_2 n_1) / \sin \beta = -0.91691015859;$$

$$M = (l_2 n_1 - l_1 n_2) / \sin \beta = -0.37526998812;$$

$$N = (l_1 m_2 - l_2 m_1) / \sin \beta = -0.13582413945.$$

4. Обчислення кута нахилу орбіти:

$$i = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{L^2 + M^2}}{N} \right) = -83^\circ 48' 23''.$$

5. Обчислення висхідного вузла орбіти:

$$\Omega = \operatorname{arctg} \left( \frac{L}{-M} \right) = -68^\circ 15' 29''.$$

6. Обчислення аргументів широти:

$$U_k = \operatorname{arctg} \left( \frac{(l_k L + m_k M) / N}{m_k L - l_k M} \right);$$

$$U_1 = 44^\circ 55' 11''; U_2 = 66^\circ 28' 11''.$$

Контроль:  $(U_2 - U_1) = \beta$ ,

$(66^\circ 28' 11'' - 44^\circ 55' 11'') = \arcsin(0.36731590083) = 21^\circ 33' 00''$ . Отже, контроль відбувається, а це означає, що попередні обчислення вірні.

7. Обчислення фокального параметра орбіти (методом Гауса-Лагранжа):

- обчислення допоміжних величин:

$$c = \sqrt{2r_1 r_2 (1 + \cos \beta)} = 13690251.8462;$$

$$d = \frac{22\mu(t_2 - t_1)^2}{c^2(6c + 9(r_1 + r_2))} = 0.02704604833; \mu = 398600.5 \cdot 10^9 \left( \text{км}^3 \text{с}^{-2} \right).$$

гравітаційна стала;

- обчислення відношення  $\eta$  площі еліптичного сектора до площі

трикутника, побудованого на векторах  $r_1$  і  $r_2$ :  $\eta = 1 + \frac{10}{11} S_1$ ;

$$S_{i+1} = \frac{d}{1 + S_i}; S_0 = d; i = 0, 1, \dots;$$

$$S_1 = 0.02633382249; \eta = 1.02393983863;$$

- обчислення фокального параметра  $P$ :

$$P = \eta^2 \frac{(r_1 r_2 \sin \beta)^2}{\mu(t_2 - t_1)^2} = 6972646.77028.$$

8. Обчислення істинних аномалій:

$$\nu_1 = \arctg \frac{\frac{P - r_1}{r_1} \cos \beta - \frac{P - r_2}{r_2}}{\frac{P - r_1}{r_1} \sin \beta} = 54^\circ 10' 31'';$$

$$\nu_2 = \nu_1 + (U_2 - U_1) = 75^\circ 43' 32''.$$

9. Обчислення ексцентриситета орбіти:

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos \nu_1 - r_2 \cos \nu_2} = 0,00160996333.$$

10. Обчислення аргумента перицентра орбіти:

$$\omega_k = U_k - \nu_k;$$

$$\omega_1 = U_1 - \nu_1 = -10^\circ 44' 39''; \omega_2 = U_2 - \nu_2 = -10^\circ 44' 39''.$$

11. Обчислення великої півосі орбіти:

$$a = \frac{P}{1 - e^2} = 6972664,84330.$$

12. Обчислення ексцентричної аномалії:

$$E_k = \nu_k - 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{q \sin \nu_k}{1 + q \cos \nu_k} \right), \text{ де } q = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

$$E_1 = 54^\circ 06' 02''; E_2 = 75^\circ 38' 10''.$$

13. Обчислення середніх аномалій:

$$M_k = E_k - e \sin E_k \text{ (в радіанах);}$$

$$M_1 = 0,942930465 \text{ (рад); } M_2 = 1,318541334 \text{ (рад).}$$

14. Обчислення середнього руху супутника:

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}} = 0,001084353 \text{ (радіан/с).}$$

15. Обчислення моменту проходження супутника через перицентр:

$$\tau_k = t_k - \frac{M_k}{n};$$

$$\tau_1 = 69116,5022 \text{ (с), } \tau_2 = 69116,49657 \text{ (с). Контроль } \tau_1 = \tau_2$$

16. Обчислення середнього моменту:

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2} = 70159,274 \text{ (с).}$$

17. Обчислення середньої аномалії  $M_0$  в момент часу  $t_0$ :

$$M_0 = n(t_0 - \tau) = 1,130732835,$$

18. Обчислення періоду обертання супутника:

$$T = \frac{2\pi}{n} = 5794,408 \text{ (с)}.$$

**Вихідні дані:**

**Інерціальні геоцентричні координати**

**ШСЗ “Ресурс-01”**

**Таблиця 5**

Дата	UTC	X	Y	Z
(д. м. р.)	(год. хв. с.)	(м)	(м)	(м)
01.08.1991	19.01.15,042	-427896,7	-5057210,3	4784714,0
01.08.1991	19.07.59,159	19.22.48,431	-675820,1	6442283,7
02.08.1991	19.17.02,045	-338778,1	-5069526,7	4777240,5
02.08.1991	19.22.48,431	-675820,1	-2962884,0	6270680,6
03.08.1991	19.33.46,779	-315579,3	-4772705,6	5072398,2
03.08.1991	19.38.35,434	-623178,6	-2981688,3	6266531,2
04.08.1991	18.11.25,220	-156173,5	-5128050,2	4721281,6
04.08.1991	18.18.09,337	-627230,2	-2654078,6	6410701,6
05.08.1991	18.27.12,223	-65640,8	-5135369,6	4714072,4
05.08.1991	18.33.56,340	-579772,3	-2672179,5	6407204,9
06.08.1991	18.42.59,226	25078,8	-5141055,5	4706970,9
06.08.1991	18.49.43,343	-531888,0	-2689416,2	6403784,1
07.08.1991	18.58.46,229	-115956,8	-5145111,0	4699974,3
07.08.1991	19.05.30,346	-483591,7	-2705788,1	6400436,8
08.08.1991	19.14.38,973	197833,6	-5118977,2	4724493,4
08.08.1991	19.20.25,359	-354406,8	-3073302,5	6240988,7
09.08.1991	19.31.23,707	191116,0	-4823996,6	5023732,5
09.08.1991	19.36.12,362	-299208,9	-3086272,7	6237277,8
10.08.1991	18.09.02,148	386612,8	-5157187,8	4669244,9
10.08.1991	18.16.43,996	-437484,2	-2365078,3	6536995,4
11.08.1991	18.24.49,151	478009,5	-5154793,5	4662609,2



11.08.1991	18.31.33,268	-286205,5	-2775004,8	6382366,0
12.08.1991	18.40.36,154	569428,8	-5150787,6	4656058,2
12.08.1991	18.47.20,271	-235843,8	-2787032,3	6379321,3
13.08.1991	18.56.23,157	660845,1	-5145175,4	4649586,7
13.08.1991	19.03.07,274	-185148,2	-2798189,3	6376331,3
14.08.1991	19.12.10,160	752232,8	-5137962,4	4643189,5
14.08.1991	19.16.54,277	-134130,4	-2808475,6	6373392,1
15.08.1991	19.28.54,894	717110,5	-4849814,7	4948013,2
15.08.1991	19.33.43,549	52814,3	-3192406,9	6191198,1
16.08.1991	18.06.33,335	945929,9	-5154920,2	4588070,8
16.08.1991	18.14.15,183	-157302,7	-2494480,4	6503514,7
17.08.1991	18.22.20,338	1037691,0	-5142682,5	4581802,3
17.08.1991	18.30.02,186	-111124,5	-2504615,8	6501182,5
18.08.1991	18.38.07,341	1129319,9	-5128856,7	4575584,4
18.08.1991	18.45.49,189	-64618,8	-2513980,3	6498882,6
19.08.1991	18.53.54,344	1220792,9	-5113449,0	4569410,5
19.08.1991	19.00.38,461	143368,7	-2895559,4	6336712,7
20.08.1991	19.10.39,078	1163400,8	-4833672,9	4878970,0
20.08.1991	19.16.25,464	196917,9	-2900240,7	6333904,9
21.08.1991	19.26.26,081	1250080,8	-4818181,8	4873266,6
21.08.1991	19.32.12,467	250707,3	-2904026,9	6331113,7
22.08.1991	18.05.59,984	1190388,5	-4564564,3	5126852,0
22.08.1991	18.10.48,639	325017,1	-2954385,6	6305095,0
23.08.1991	18.20.49,256	1439045,7	-4818941,8	4821113,4
23.08.1991	18.27.33,373	194177,2	-2597401,7	6467678,6
24.08.1991	18.36.36,259	1525773,7	-4798663,6	4815392,3
24.08.1991	18.43.20,376	243286,7	-2601648,6	6465389,0
25.08.1991	18.52.23,262	1612268,9	-4776903,6	4809669,5
25.08.1991	18.59.07,379	292656,4	-2605083,2	6463095,0

## ПРАКТИЧНА РОБОТА №6

### Обчислення прямокутних координат і складових швидкості ШСЗ в заданий момент часу за відомими значеннями кеплерових елементів його орбіти

Незбурений рух ШСЗ повністю описується шістьма елементами орбіти  $\alpha$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $\tau$  (або  $M_0$  в момент  $t_0$ ), які пов'язані взаємно однозначними відношеннями з прямокутними координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  і складовими швидкості  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$  ШСЗ в заданий момент  $t_0$ . При незбуреному русі всі елементи орбіти, крім аномалій, залишаються постійними величинами. Відповідно, для розрахунку незбуреної ефемериди ШСЗ  $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, l)$  необхідно спочатку знайти значення середньої аномалії  $M$  на момент  $t$ , обчислити істинну аномалію і довжину радіус-вектора, потім перетворити ці полярні координати у плоскі прямокутні і, насамкінець, перейти від орбітальної системи координат до екваторіальної рівноденної, користуючись матрицями обертання на кути Ейлера  $(-\omega)$ ,  $(-i)$ ,  $(-\Omega)$ .

Відповідно до принципів варіації довільних сталих у випадку збуреного руху, процедура обчислення аналогічна, оскільки елементи орбіти піддаються впливу, то окрім  $M$  на момент  $t$  потрібно знайти збурені значення всіх інших елементів орбіти.

#### **Вихідні дані:**

За вихідні значення кеплерових елементів орбіти ШСЗ беруться величини, отримані під час виконання завдання №5.

Координати і компоненти швидкості ШСЗ необхідно обчислити на момент часу  $t$ , який відстає від моменту  $t_0$  на добу ( $t = t_0 + 864000 \text{ c}$ ).

#### **Алгоритм обчислень:**

1. Обчислення середнього руху ШСЗ:

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a \cdot \sqrt{a}} = 0,00108435 \text{ 3 [рад./c]}.$$

2. Обчислення аномалії  $M$ :

$$M = n \cdot (t - \tau) \text{ або } M = M_0 + n \cdot (t - t_0) = 94.81884254$$

3. Розв'язання шляхом ітерації рівняння Кеплера для визначення ексцентричної аномалії  $E$ :

$$E_0 = M = 94.81884254,$$

$$E_1 = M + e \cdot \sin E_0 = 94.81971276,$$

.....

$$E_{i+1} = M + e \cdot \sin E_i.$$

$$E_2 = 94.81971394.$$

4. Визначення довжини радіус-вектора  $r$ :

$$r = a \cdot (1 - e \cdot \cos E) = 6963225.622.$$

5. Обчислення істинної аномалії  $v$ :

$$v = E + 2 \arctg \frac{q \cdot \sin E}{1 - q \cdot \cos E} = 94.82058594,$$

$$q = \frac{e}{1 - \sqrt{1 - e^2}} = 0.000804982.$$

6. Обчислення аргумента широти  $u$ :

$$u = \omega + v = 94.65904.$$

7. Обчислення напрямних косинусів радіус-вектора ШСЗ, дійсні вирази для яких отримані шляхом перемноження матриць навколо осей  $z_w$ ,  $x$ ,  $z$  на кути  $(-\omega)$ ,  $(-i)$ ,  $(-\Omega)$  відповідно:

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cdot \cos \Omega - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i \\ \cos u \cdot \sin \Omega - \sin u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i \\ \sin u \cdot \sin i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,397448347 \\ -0,827749729 \\ -0,396062114 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Контроль: } l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

8. Обчислення напрямних косинусів прямої, перпендикулярної до радіус-вектора і яка лежить в площині орбіти ( $l^f$ ,  $m^f$ ,  $n^f$ ), явні вирази для яких отримуються з попередніх формул шляхом заміни  $u$  на  $(u + 90^\circ)$ :

$$\begin{pmatrix} l^f \\ m^f \\ n^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \cdot \cos \Omega - \cos u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i \\ -\sin u \cdot \sin \Omega - \cos u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i \\ \cos u \cdot \sin i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,03620183 \\ 0,417136455 \\ -0,908122572 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Контроль: } l^{f2} + m^{f2} + n^{f2} = 1.$$

9. Визначення геоцентричних інерціальних координат ШСЗ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2767522,512 \\ -5763808,121 \\ -2757869,857 \end{pmatrix}.$$

10. Обчислення компонент вектора швидкості ШСЗ вздовж радіус-вектора  $V_r$ , і перпендикулярної до нього  $V_{\perp}$ , що лежить у площині орбіти:

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{P}} \cdot e \cdot \sin u = 6,597500161,$$

$$V_{\perp} = \frac{\sqrt{\mu \cdot P}}{r} = 7571,070401,$$

$$\text{де } P = a \cdot (1 - e^2).$$

11. Визначення складових швидкості ШСЗ за осями геоцентричної інерціальної системи координат

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = V_r \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + V_{\perp} \cdot \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -271,4644382 \\ 3152,708389 \\ -6878,072943 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Контроль: } x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}.$$

## ПРАКТИЧНА РОБОТА №7

### Визначення координат пункту земної поверхні за результатами радіотехнічних спостережень навігаційних ШСЗ

#### Постановка завдання

На пунктах земної поверхні, наближені координати яких відомі, проведені сеанси спостережень навігаційних супутників системи GPS за допомогою приймача Ashtech Promark-2; зафіксовані моменти спостережень, зроблені виміри навігаційних параметрів, виділені й декодовані оперативні ефемеридні дані навігаційних повідомлень. Потрібно визначити точні координати пунктів спостережень у загальноземній системі координат WGS-84.

## Вихідні дані

Результати кодових спостережень навігаційних супутників системи GPS, отримані за допомогою двосистемних приймачів типу Ashtech Promark-2.

При обробці спостережень ШСЗ резервуються номери з 1 по 32 для супутників GPS, або вводяться додаткові ознаки G, наприклад, G11.

Кількість і порядок розташування результатів різних типів вимірювань може бути іншим, це вказується в заголовку файлу в рядку "# / TYPES OF OBSERV", наприклад, «7 C1 P1 P2 L1 L2 D1 D2».

*Оперативна ефемеридна інформація*, отримана в складі навігаційних повідомлень, згрупована по номерах НШСЗ.

## Алгоритм обчислень

Обробка результатів спостережень проводиться в три етапи. Спочатку на етапах I й II обробляються дані, отримані в складі навігаційних повідомлень, потім на етапі III визначаються координати пункту спостережень.

I. Обчислення моментів відправлення навігаційних сигналів за системним часом.

Для кожного спостережуваного НШСЗ виконуються наступні розрахунки:

$$t_c = t_i - \Delta t_{L1},$$

де  $t_c$  – момент відправлення сигналу за системним часом GPS;

$t_i = t_p - C_1 / c$  – момент відправлення сигналу по бортових годинниках НШСЗ;

$C_1$  – псевдовідстань, виміряна по C/A-коду;

$c = 299792458$  м/с – швидкість світла у вакуумі;

$t_p$  – момент прийому сигналу по годиннику користувача;

$\Delta t_{L1} = a_0 + a_1(t_i - t_{oc}) + a_2(t_i - t_{oc})^2 - \Delta t_{GD} + \Delta t_r$  – поправка за перехід до шкали системного часу GPS;

$\Delta t_{GD}$  – виправлення за групову затримку сигналу L1;

$\Delta t_r = Fe\sqrt{a} \sin E$  – релятивістська поправка;

$$F = -\frac{2\sqrt{\mu}}{c^2} = -4.442807633 \cdot 10^{-10} \left( c / \sqrt{M} \right);$$

$E$  – ексцентрична аномалія в момент відправки сигналу. Вплив  $\Delta t_r$  істотний на III етапі обчислень при формуванні вільних членів рівнянь поправок.

II. Обчислення грінвіцьких координат НШСЗ на моменти відправки навігаційних сигналів.

Для кожного із спостережуваних НШСЗ за даними їхніх навігаційних повідомлень обчислюються:

1. Велика піввісь орбіти:

$$a = \left( \sqrt{a} \right)^2;$$

2. Середній рух:

$$n_0 = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}},$$

де  $\mu = 398600,5 \cdot 10^9 \left( M^3 / c^2 \right)$  – гравітаційний параметр WGS-84,

$$n = n_0 + \Delta n;$$

3. Середня аномалія:

$$M = M_0 + n(t_s - t_{oe});$$

4. Ексцентрична аномалія з рішення рівняння Кеплера шляхом ітерацій:

$$\begin{aligned} E_0 &= M, \\ E_1 &= M + e \sin E_0, \\ &\dots \\ E_{i+1} &= M + e \sin E_i \end{aligned};$$

5. Істинна аномалія

$$\nu = E + 2 \operatorname{arctg} \frac{q \sin E}{1 - q \cos E},$$

$$\text{де } q = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}};$$

6. Наближене значення аргументу широти:

$$u_0 = \omega + \nu;$$

7. Збурення в аргументі широти  $\delta u$ , довжині радіуса-вектора  $\delta r$  і нахилу орбіти  $\delta i$ :

$$\begin{aligned} \delta u &= C_{uc} \cos(2u_0) + C_{us} \sin(2u_0), \\ \delta r &= C_{rc} \cos(2u_0) + C_{rs} \sin(2u_0), \\ \delta i &= C_{ic} \cos(2u_0) + C_{is} \sin(2u_0); \end{aligned}$$

8. Уточнене значення аргументу широти:

$$u = u_0 + \delta u;$$

9. Довжина радіуса-вектора:

$$r = a(1 - e \cos E) + \delta r;$$

10. Нахил орбіти

$$i = i_0 + \delta i + (i)(t_s - t_{oe});$$

11. Довгота висхідного вузла орбіти в загально земній системі координат:

$$\Omega = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e)(t_s - t_{oc}) - \dot{\Omega}_c t_{oe},$$

де  $\dot{\Omega}_e = 7.2921151467 \cdot 10^{-5} (\text{рад./с})$  – швидкість обертання Землі в WGS-84;

12. Напрявні косинуси радіуса-вектора ШСЗ:

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i \\ \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i \\ \sin U \sin i \end{pmatrix},$$

Контроль  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

13. Координати ШСЗ у загальноземній системі координат WGS-84

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}.$$

III. Обчислення поправок до наближених координат пункту спостережень і поправки за десинхронізацію годинника приймача

1. Складання рівнянь поправок:

$$B \cdot \vec{X} + \vec{L} = \vec{V},$$

де

$$B_{n \times 4} = \begin{pmatrix} -\frac{X_1 - X_{no}}{D_{10}} & -\frac{Y_1 - Y_{no}}{D_{10}} & -\frac{Z_1 - Z_{no}}{D_{10}} & 1 \\ -\frac{X_2 - X_{no}}{D_{20}} & -\frac{Y_2 - Y_{no}}{D_{20}} & -\frac{Z_2 - Z_{no}}{D_{20}} & 1 \\ -\frac{X_3 - X_{no}}{D_{30}} & -\frac{Y_3 - Y_{no}}{D_{30}} & -\frac{Z_3 - Z_{no}}{D_{30}} & 1 \\ -\frac{X_4 - X_{no}}{D_{40}} & -\frac{Y_4 - Y_{no}}{D_{40}} & -\frac{Z_4 - Z_{no}}{D_{40}} & 1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ -\frac{X_n - X_{no}}{D_{n0}} & -\frac{Y_n - Y_{no}}{D_{n0}} & -\frac{Z_n - Z_{no}}{D_{n0}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{L}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} D_{10} - D_1 \\ D_{20} - D_2 \\ D_{30} - D_3 \\ D_{40} - D_4 \\ \dots\dots\dots \\ D_{n0} - D_n \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ \Delta D \end{pmatrix},$$



де  $D_i = C1 + c\Delta t_{L1} - \Delta_{ion.} - \Delta_{тpон.}$  – виміряна псевдовідстань до і-го НШСЗ, виправлена за відхід годинника супутника, іоносферну й тропосферну затримки;

$$D_{i0} = \sqrt{(X_i - X_{n0})^2 + (Y_i - Y_{n0})^2 + (Z_i - Z_{n0})^2} \quad - \quad \text{попередньо}$$

обчислена відстань до і-го НШСЗ;

$X_i, Y_i, Z_i$  – відповідні епосі спостережень координати і-го НШСЗ у загальноземній системі координат, обчислені по оперативній ефемеридній інформації з навігаційного повідомлення;

$X_{n0}, Y_{n0}, Z_{n0}$  – наближені координати пункту спостережень;

$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  – поправки до наближених координат пункту;

$\Delta D$  – поправка годинника приймача (в одиницях довжини);

$v_i$  – поправка в виміряну псевдовідстань до і-го НШСЗ;

$n$  – число спостережуваних НШСЗ.

При одночастотних вимірюваннях для обчислення іоносферної поправки використовується бортова модель іоносфери Klobuchar 1987, що дозволяє компенсувати до 50-60% дійсної групової затримки сигналу в іоносфері.

При наявності результатів двохчастотних спостережень поправка за іоносферу  $\Delta_{ion.}$  може бути обчислена за формулою:

$$\Delta_{ion.} = \frac{f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} (C1 - P2),$$

де

$C1, P2$  – значення псевдовідстані, виміряної на частотах  $L1$  і  $L2$ ;

$f_1, f_2$  – номінальні значення несучих частот.

Якщо фіксувалися метеоданні на пункті спостережень, то тропосферну поправку для сигналу від і-го супутника можна одержати по моделі Saastamoinen 1973:

$$\Delta_{\text{трон.}} = \frac{0.002277}{\cos(z_i)} \left( P + \left( \frac{1255}{T} + 0.05 \right) e - 1.1 \text{tg}^2(z_i) \right),$$

де

$z_i$  – зенітна відстань  $i$ -го НШСЗ,

$$\cos(z_i) = \frac{(X_i - X_{no})X_{no} + (Y_i - Y_{no})Y_{no} + (Z_i - Z_{no})Z_{no}}{R_{no}D_{io}},$$

$$R_{no} = \sqrt{(X_{no})^2 + (Y_{no})^2 + (Z_{no})^2},$$

$P$  – атмосферний тиск в мбар,

$T$  – температура в °К

$$e = 0.06108 \rho \exp\left(\frac{17.15T - 4684}{T - 38.45}\right) - \text{парціальний тиск водяної пари в}$$

мбар

$\rho$  – відносна вологість в %.

У навчальних розрахунках для спрощення поправки  $\Delta_{\text{іон.}}$  і

$\Delta_{\text{трон.}}$  можна не вводити.

2. Розв'язок системи рівнянь поправок по методу найменших квадратів:

– складання нормальних рівнянь з припущенням про рівноточність всіх вимірювань:

$$B^T \cdot B \cdot \vec{X} + B^T \cdot \vec{L} = \vec{0},$$

– оцінка невідомих:

$$\vec{X} = -(B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot \vec{L}.$$

2. Обчислення уточнених координат пункту спостережень:

$$X_n = X_{no} + \Delta X,$$

$$Y_n = Y_{no} + \Delta Y,$$

$$Z_n = Z_{no} + \Delta Z$$

Отримані координати відповідають загальноземній системі координат, прийнятої в GPS, тобто WGS-84.

Отримані оцінки координат ще не є найкращими, оскільки вирішувалася не вихідна система рівнянь спостережень, а лінеаризована. Для усунення впливу погрішностей лінеаризації необхідний ітераційний процес. У розглянутому завданні абсолютних навігаційних визначень такий процес швидко сходиться: навіть при помилках початкових координат пункту в кілька тисяч кілометрів звичайно досить 3-х або 4-х ітерацій, тобто як перше наближення можна використати навіть центр Землі. При помилках початкового положення пункту менш 10 км (як у нашому випадку) потрібні всього дві ітерації, у навчальних цілях можна обмежитися однією.

## Література

1. Геодезичний енциклопедичний словник. Львів, 2001.
2. Геодезичні прилади. Підручник за редакцією Т. Г. Шевченка. Друге видання, перероблене та доповнене. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2009. 484 с.
3. Земледух Р.М. Картографія з основами топографії Київ.: Вища школа, 1993. 456 с.
4. Інструкція з топографічного знімання у масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000, 1:5000. К.: ГУГК, 1999.
5. Костецька Я.М. Геодезичні прилади. ч. II. Львів. Престиж-інформ, 2000. 324 с.3.