ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА ЗАГАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ ІНФОРМАТИКИ

Лариса Ройко

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ:
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Методичні рекомендації до самостійної та індивідуальної робіт студентів спеціальності «Прикладна лінгвістика»

ЛУЦЬК, 2021

УДК 519.21/.22(072)
Р 65

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Волинського національного університету імені Лесі Українки
(протокол № 10 від 16 червня 2021 року)

Рецензенти:
Мельник В. М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерної інженерії та кібербезпеки Луцького національного технічного університету

Кальчук І.В..– кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу та статистики

Ройко Л.Л.
Р 65 Математичне моделювання: Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики. Методичні рекомендації для студентів спеціальності «Прикладна лінгвістика». – Луцьк: ПП Іванюк, 2021. 37 с.

.

Навчально-методичне видання призначене для самостійної та індивідуальної робіт студентів з дисципліни «Математичне моделювання» по розділу «Теорія ймовірностей і математична статистика». Наведено довідковий теоретичний матеріал по кожній темі, розв'язки типових завдань, завдання для індивідуальної та самостійної робіт.

УДК 519.21/.22(072)

ПЕРЕДМОВА

Нормативна навчальна дисципліна «Математичне моделювання» є обов'язковою для студентів спеціальності: 035 Філологія; освітньо-професійної програми: Прикладна лінгвістика. Переклад і комп'ютерна лінгвістика.

Одним із розділів, який вивчають студенти у курсі «Математичне моделювання» є «Теорія ймовірностей і математична статистика». У ньому студенти знайомляться з основними поняттями, формулами та теоремами теорії ймовірностей, випадковими величинами, їх законами розподілу та числовими характеристиками, елементами математичної статистики, статистичними оцінками параметрів генеральної сукупності, елементами теорії регресії і кореляції.

У мові все підпорядковується не жорстким, а ймовірнісним закономірностям. Тому цілком природньо, що в дослідженні мовних одиниць використовують теорію ймовірностей. Під ймовірністю розуміють відношення в середньому спостережуваного числа вдалих результатів до загального числа експериментів (подій). Найпростіше питання, яке допомагає з'ясувати теорія ймовірностей – частотність звуків у мовленні. Звуки в мовленні розташовуються не будь як, а більш-менш визначеними для кожної мови способами (приголосний + голосний + голосний чи приголосний + голосний + приголосний тощо). У більшості мов світу переважає проміжний тип –приголосний + голосний. Знання таких закономірностей дає змогу визначити ймовірність появи в мовленнєвому ланцюжку голосного чи приголосного. Так, якщо взяти перший тип мов, до яких належать полінезійські, де після приголосного, як правило, йдуть два голосних, то після першого навгад вибраного приголосного ймовірність, що наступним звуком буде голосний, практично дорівнює 1. Знання цих обмежень важливе для дешифрування тексту. Цей тип ймовірності, де у кожному новому експерименті враховується результат попереднього експерименту, називають умовною ймовірністю. Другий тип, як і перший, не відображає суті мовних явищ. При такій інтерпретації виходить, ніби всі приголосні в середньому однаково часто поєднуються з голосними. У мовленні на суто фонетичну сполучуваність накладаються ще й інші обмеження, викликані тим, що деякі можливі звукосполучення мають зміст і є морфемами, а інші не мають змісту і не є морфемами (пор.: смола і жмола, хмола, вмола). Ймовірність перших різко зростає, а ймовірність других різко знижується, по суті дорівнює нулю. Цей тип ймовірності називається індуктивною ймовірністю. Для функціонування мови саме він має особливе значення, оскільки людина, сприйнявши декілька звуків, очікує певне, а не будь-яке продовження. Індуктивна ймовірність виражає очікування того чи іншого мовного елемента з погляду людини, яка розуміє зміст мовленнєвого ланцюжка. Аспект мови, до якого застосовують теорію ймовірностей, називається теоретико-ймовірнісним.

Методичні рекомендації ставлять за мету допомогти студенту самостійно оволодіти розв'язуванням задач з «Теорії ймовірностей і математичної статистики».

Методи теорії ймовірностей часто застосовуються в різних сферах науки і техніки: в теорії надійності, теорії масового обслуговування, теорії помилок спостережень, теорії автоматичного управління, загальній теорії зв'язку та в багатьох інших науках. Теорія ймовірностей є підґрунтям для математичної і прикладної статистики, яка в свою чергу використовується при плануванні та організації виробництва, в аналізі технологічних процесів, вибірковому контролі.

У методичній розробці подано формули, таблиці, необхідні для розв’язку задач та наводиться достатнє число детально розібраних завдань з вказаними методами їх розв’язку, пропонується ряд задач для самостійного опрацювання. Серед розв’язаних задач немало таких, які можна назвати типовими; у будь-якому випадку ознайомлення з ними дозволяє студенту при незначній допомозі зі сторони викладача оволодіти основними методами розв’язання задач даного типу.

КОРОТКА ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Математична наука, що вивчає загальні закономірності випадкових явищ незалежно від їх конкретної природи і дає методи кількісної оцінки впливу випадкових факторів на різні явища, називається ***теорією ймовірності.***

Варто відзначити, що математичний підхід до вивчення випадкових явищ намагалися знайти ще в стародавньому Китаї, Римі, Греції. В середні віки намагалися застосувати точні методи в задачах, пов'язаних з азартними іграми. До азартних ігор відносили кидання монети і шестигранних гральних кісток.

У 1494 році італійський математик Л.Пачіолі опублікував свою роботу, де пропонував спосіб рішення задачі, що виникла при грі в кості. І хоча в міркування Л.Пачіолі укралася помилка, ця праця мала величезне значення.

Рішенню цієї задачі приділяли увагу і італійський математик Д.Кардано, та французькі математики Б.Паскаль та П.Ферма.

Самою значною подією для становлення теорії ймовірностей, як науки, була, виданая в 1718 році у Лондоні книга А.Муавра «Навчання про випадки». У даній роботі А.Муавр зумів установити закономірності, що спостерігаються у випадкових процесах.

Перші фундаментальні основи теорії імовірностей були послідовно викладені французьким математиком П.Лапласом у книзі «Аналітична теорія ймовірностей».

В розробці теорії ймовірностей значне місце займала петербурзька математична школа
(П.Л.Чебишов, А.М.Ляпунов, А.А.Марков).

А.А.Маркову, учню видатного математика П.Л.Чебишева, належить слава відкривача важливої області застосування теорії імовірностей – теорії ймовірностних, або стохастичних, процесів. Ланцюги Маркова одержали практичний розвиток в працях М.Планка і А.Ейнштейна.

Дев'ятнадцяте сторіччя широко використовує ймовірностні методи в теорії стрільб та теорії помилок. У 20 сторіччі теорія ймовірностей знайшла застосування у статистичній фізиці та механіці. Також формуванню основ теорії імовірностей сприяли і такі види діяльності людини, як з'ясовування тривалості життя, підрахунок населення, практика страхування. Великий внесок у розвиток теорії ймовірностей внесли вчені: К.Є.Шенон, А.Н.Колмогоров, К.Пірсон, А.Ландеберг.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.Класичне означення ймовірності.

Позначивши число випадків, сприятливих події A, через m, а загальне число рівноможливих випадків через n, класичне означення ймовірності можна записати у вигляді формули

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Імовірність достовірної події – P (A) = 1.
Імовірність неможливої події – P(A) = 0.
Імовірність випадкової події – $0 \le P(A) \le 1$.

Вірогідною (достовірною) називається подія, яка внаслідок даного випробування обов’язково відбудеться.

Неможливою називається така подія, яка внаслідок даного випробування не може відбутися.

Випадковою називається подія, яка може відбутися або не відбутися під час здійснення певного випробування.

2. Геометричне означення ймовірності.

Нехай у деякій обмеженій області Ω прямої, площини чи простору, що має міру $mes(\Omega)$, тобто довжину відрізка, площу плоскої фігури, об’єм просторового тіла, навмання вибирають точку. Під висловом «навмання взята точка» розуміється, що ймовірність $P(D)$ того, що точку буде взято з множини $D \subset \Omega$, дорівнює:

$$P(A)=\frac{mes(D)}{mes(\Omega)}.$$

3. Комбінаторні формули.

1. Будь-яка впорядкована множина, яка складається з n елементів, називається *перестановкою* з n елементів.

Перестановки позначають – P_n і обчислюють за формулою:

$$P_n = n! \quad P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n!$$

Вважається, що $P_0 = 0\,! = 1$.

$P_5 = n\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Нехай у множині з n елементів є k різних елементів, зокрема елемент 1-го виду повторюється n_1 раз, 2-го виду – n_2 разів,… k-го – n_k разів, причому $n_1 + n_2 + ... + n_k = n.$

Перестановки з n елементів такої множини називають *перестановками з повтореннями.*

Кількість перестановок з повторенням позначають $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$

і знаходять за формулою:

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \cdot n_k!}$$

2. **Розміщеннями** з n елементів по m елементів називають різні сукупності m елементів із цих n елементів, які (сукупності) відрізняються один від іншого *або* самими *елементами*, або *послідовністю* розташування елементів.

Кількість усіх різних розміщень із n різних елементів по m елементів позначають – A_n^m.

У загальному випадку кількість (A_n^m) усіх розміщень із n різних елементів по m обчислюється за формулою:

$$A_n^m = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-m+1)}_{m \text{ множників}} = \frac{n\,!}{(n-m)\,!}\,.$$

Розміщенням з повторенням з n елементів по m називається таке розміщення, елементи якого можуть повторюватися:

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

3. **Сполученнями** з n елементів по m називаються будь-які сукупності по m елементів у кожній сукупності із цих n елементів, які (сукупності) *відрізняються* один від одного хоча б *одним* елементом. Відмінності порядку проходження елементів у сукупності *не враховуються*.

Кількість усіх сполучень із n елементів по m позначається C_n^m.

Відзначимо, що сукупності, які мають однакові елементи, але відрізняються послідовністю цих елементів, вважаються як та сама послідовність, тобто із загальної кількості такі сукупності *виключаються*.

Кількість усіх сполучень із n елементів по m обчислюють за формулою:

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... (n-m+1)}{m\,!} = \frac{n\,!}{m\,! \cdot (n-m)\,!}\,.$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}$$

Із формули для обчислення кількісті сполучень випливають їх властивості:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;
2) $C_n^0 = C_n^n = 1$.

$C_{49}^6 = \frac{49\,!}{6\,! \cdot (49-6)\,!} = \frac{43! \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{6! \cdot 43!} = 13983816$.

Правило додавання. Якщо деякий об'єкт A можна вибрати із сукупності об'єктів m способами, а інший об'єкт B можна вибрати n способами, то або A, або B можна вибрати $m+n$ способами.

Наприклад. У класі 12 хлопчиків і 15 дівчаток. Скількома способами можна вибрати одного учня?

Розв'язок. 12+15=27 способами.

Правило множення (основне правило комбінаторики). Якщо деякий об'єкт A можна вибрати із сукупності об'єктів m способами і після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати n способами, то пару об'єктів A, а потім B можна вибрати $m \times n$ способами.

Приклад 1. У класі 12 хлопчиків і 15 дівчаток. Скількома способами можна вибрати одного хлопчика і одну дівчинку?

Розв'язок. 12×15=180 способами.

Приклад 2. Скільки є двоцифрових чисел?

Розв'язок. Першу цифру можна задати 9 способами (цифри від 1 до 9). Другу цифру можна задати 10 способами (цифри від 0 до 9). Значить двоцифрове число можна створити 9×10=90 способами, тобто існує 90 двоцифрових чисел.

Основне правило комбінаторики у загальному вигляді. Нехай необхідно виконати одну за одною k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами, третю - n_3 способами і так до k-ї дії, яку можна виконати n_k способами, то усі k дій разом можуть бути виконані

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$$

способами

4. Теореми додавання і множення ймовірностей.

Теорема. Ймовірність настання принаймні однієї з двох *несумісних* подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Теорема. Ймовірність настання принаймні однієї з двох *сумісних* подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх спільної появи:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема. Ймовірність добутку двох *незалежних подій* А і В дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ймовірність події A, при умові, що подія B уже відбулася, називається умовною ймовірністю події A по відношенню до події B і позначається

$P(A \backslash B)$ або $P_B(A)$.

Теорема. Ймовірність добутку двох *залежних подій* A і B дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої події, якщо перша вже відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).$$

5. Формула повної ймовірності, формула Байєса.

Якщо подія А може настати тільки при появі однієї із несумісних подій (гіпотез, припущень) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, то ймовірність події А згідно формули *повної ймовірності* обчислюється за формулою**:**

$$P(A) = P(H_1)P_{H1}(A) + \ldots P(H_n)P_{Hn}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{Hi}(A), \text{ де } \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = \mathbf{1}.$$

З формулою повної ймовірності тісно пов'язана формула Байєсса. Якщо до досліду ймовірності гіпотез були $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$, а внаслідок досліду подія А відбулася, то можна оцінити ймовірність виконання гіпотези H_i. Нові, умовні ймовірності гіпотез знаходимо за формулою Байєсса:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{Hi}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P_{Hi}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{Hi}(A)} \quad \left(i = \overline{1,n}\right).$$

6. Схема незалежних подій (формула Бернуллі).

Ймовірність того, що в результаті проведення n незалежних випробувань подія A відбудеться рівно m раз, якщо в кожному із цих випробувань дана подія відбувається з постійною ймовірністю $P(A)=p \quad (0 \le p \le 1)$, знадиться за формулою Бернуллі:

$$P_n(m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}.$$

Найімовірнішим числом m_0 появи події A в n незалежних випробуваннях називається число, для якого ймовірність $P_n(m_0)$ не менша ймовірності кожного з решти можливих варіантів, тобто

$$P_n(m_0) \ge P_n(m). \; (m \ne m_0),$$

$$np-q \le m_0 \le np+p.$$

7. Локальна теорема Муавра-Лапласа.

Локальна теорема Муавра -Лапласа дає змогу оцінити окремі ймовірності та їхню поведінку як функцію *k при великих n* (в випробуваннях n подія A відбудеться k разів).

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \; ;$$

де $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ell^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гауса; $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$

$\varphi(-x)=\varphi(x)$ – функція парна; ***$\varphi(x>4) \approx 0$*** **.**

Для цієї функції складена таблиця значень функції ***$\varphi(x)$*** (дивись додаток 1 у кінці методичних вказівок).

Дослідження локальної формули Муавра-Лапласа показують, що вона дає досить добрі наближення лише при достатньо *великих n,* крім того, p не повинно бути дуже близьким до 0 або 1, *а* $npq \ge 9$.

8. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа.

Дана теорема дає змогу оцінити ймовірність того, що в n випробуваннях подія A відбудеться *не менше ніж k_1 разів, але не більш як k_2 разів*:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_1) - \Phi(x_2).$$

Інтегральна функція Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \ell^{-\frac{z^2}{2}} dz$

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} \; ; \qquad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Для інтегральної функції, як і для локальної, складена таблиця значень (дивись додаток 2 у кінці методичних вказівок) .

Функція *$\Phi(x)$* – непарна. *$\Phi(-x) = -\Phi(x)$.* У таблиці *$\Phi(x>5) \approx 0{,}5$* .

9. Теорема Пуассона.

Нехай m фіксоване, а n і p міняються, причому так, що величина $\lambda = np$ є постійною. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

Із граничної теореми Пуассона випливає наближена формула Пуассона при великих n і малих *p ($p<0{,}1$):*

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

де число $\lambda = np$ називається середнім числом успіхів.

10. Закони розподілу і числові характеристики.

Випадковий результат випробування можна охарактеризувати кількісно. Такою характеристикою випадкового результату випробування є випадкова величина. Наприклад, число поїздів, які нагромаджуються в сортувальному парку за одиницю часу; число пасажирів, які звертаються до каси за квитками; час виконання вантажних операцій з вагонами на вантажних фронтах, кількість вагонів у поїздах, які обертаються на дільниці та ін.

Випадковою називається величина, яка внаслідок випробування набуває те або інше (але тільки одне) значення, причому заздалегідь невідомо, яке саме.

Випадкові величини звичайно позначають ***X***, ***Y***, ..., а їхні можливі значення відповідно ***x***, ***y***, ... Розрізняють дискретні та неперервні випадкові величини.

Дискретною випадковою величиною називається така величина, множина можливих значень якої або скінченна, або зліченна (множина, елементи якої можуть бути пронумеровані), або це така випадкова величина, що приймає лише окремі (ізольовані) одна від одної значення, які можна пронумерувати.

Неперервною випадковою величиною називається така величина, можливі значення якої неперервно заповнюють деякий інтервал (скінченний чи нескінченний) числової осі.

Співвідношення між можливими значеннями випадкової величини та їхніми ймовірностями дістало назву *закону розподілу випадкової величини*.

Закони розподілу можуть бути виражені:

1) таблицею

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	$\cdots$

де $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

2) графіками;

3) аналітичною функцією розподілу випадкової величини F(x), густиною розподілу випадкової величини f(x).

Функцією розподілу, або інтегральним законом розподілу, випадкової величини X називається ймовірність виконання нерівності $X<x$, розглядувана як функція аргументу x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Таблиця розподілу ймовірності найчастіше застосовується тоді, коли число можливих значень випадкової величини скінчене чи зчисленне.

Характеристики, що виражають у стислій формі найістотніші особливості закону розподілу випадкової величини, називаються числовими характеристиками випадкової величини.

До них в першу чергу відносяться математичне сподівання і дисперсія.

Математичне сподівання випадкової величини X, яке позначають $M[X]$ визначається рівністю:

$$M[X]=x_1 p_1+x_2 p_2+\ldots+x_n p_n=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Якщо значення неперервної випадкової величини X належать всій числовій осі, то математичне сподівання визначається невласним інтегралом

$$m_x=M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx .$$

Найпростіші властивості математичного сподівання:

1. $M[C]=C$; де C - стала величина,
2. $M[CX]=C\cdot M[X]$;
3. $M[X+Y]=M[X]+M[Y]$;
4. $M[XY]=M[X]\cdot M[Y]$, якщо випадкові величини X, Y незалежні.

Дисперсією D[X] випадкової величини X називається математичне сподівання квадрату відхилення цієї величини від її математичного сподівання:

$$D[X]=M(X-M[X])^2 .$$

Для дискретної випадкової величини дисперсія виражається сумою:

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M[X])^2 p_i$$

а неперервної – інтегралом:

$$D[X]=\int_a^b (x-m_x)^2 f(x)dx,\ \left(D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx\right)$$

Практично дисперсію обчислюють за робочою формулою

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2,$$

де $M[X^2]=\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i$ для дискретних випадкових величин і

$M[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ для неперервних випадкових величин.

Найпростіші властивості:

1. $D[C]=0$; де C – стала величина,
2. $D[CX]=C^2\cdot D[X]$;
3. $D[X+Y]=D[X]+D[Y]$, якщо випадкові величини X, Y незалежні.

Для більшої зручності вводиться характеристика, що має розмірність випадкової величини, а саме – корінь квадратний з дисперсії:

$$\sigma_x=\sqrt{D[X]} .$$

Приклад 1. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу

X	0	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,35	0,20	0,15

Знайти $M[X]$ і σ_x.

Розв'язання. $M[X] = 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}35 + 3\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}15 = 2{,}1.$

$$M[X^2] = 1\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}35 + 9\cdot 0{,}2 + 16\cdot 0{,}15 = 5{,}8.$$

$D[X] = 5{,}8 - (2{,}1)^2 = 1{,}39.$

Звідки $\sigma_x = \sqrt{1{,}39} \approx 1{,}17.$

Приклад 2. Неперервна випадкова величина задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x < 0,\ x > 2. \end{cases}.$$

Знайти $M[X]$ і σ_x.

Розв'язання. $M[X] = \int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}x\,dx = \frac{4}{3}.$ $\quad M[X^2] = \int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}x\,dx = 2.$

Отже, $D[X] = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$

$\sigma_x = \sqrt{\frac{2}{9}} \approx 0{,}471.$

11. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Біноміальний розподіл – це закон розподілу випадкових величин, заданий таблицею, у якій ймовірності P_i обчислюються за формулою Бернуллі:

$$P_i = C_n^i p^i q^{n-i}, \quad i = \overline{o,n}\ .$$

Пуассонівський закон розподілу – це закон розподілу випадкової величини, заданий таблицею, у якій ймовірність обчислюється за формулою Пуассона

$$P_i = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}\ .$$

Геометричний закон розподілу

Нехай проводяться незалежні випробування, у кожному з яких ймовірність появи події A рівна p $(0 < p < 1)$, а не появи $q = 1 - p$. Випробування закінчуються, як тільки відбувається подія A. Таким чином, якщо подія A відбулась в k-му випробуванні, то попередніх k-1 випробування X є: x_1=1, x_2=2, …

Нехай в перших k-1 випробуваннях подія A не відбулася, а в k-му випробуванні з'явилась. Тоді ймовірність рівна

$$P(X = x_k) = q^{k-1}p$$

12. Закони розподілу неперервних випадкових величин

Рівномірний закон розподілу задається густиною розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & якщо\quad x \in [a,b] \\ 0, & якщо\quad x \bar{\in} [a,b] \end{cases},$$

Числові характеристики розподілу:

а) математичне сподівання:

$$M(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

б) дисперсія:

$$D(X)=\int_a^b \frac{x^2dx}{b-a}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

в) середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

***Показниковий розподіл*, коли випадкова величина має густину розподілу у вигляді:**

$$f(x)=\begin{cases}0, & якщо \quad x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & якщо \quad x\ge 0\end{cases}$$

де λ – параметр розподілу.

числові характеристики показникового розподілу:

а) математичне сподівання:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};$$

б) дисперсія:

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

в) середнє квадратичне відхилення:

$$\delta_\chi=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\lambda}.$$

Нормальний закон розподілу

Нормальним називається розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини, якщо її густина розподілу має вигляд:

$$f(\chi,a,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\chi-a)^2}{2\sigma^2}}$$

для довільного значення $\chi\in(-\infty,\infty)$ і довільних чисел a і σ.

Ймовірність попадання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, в інтервал (α,β):

$$P=(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

1. Статистичний розподіл вибірки та його геометричне зображення

Математична статистика вивчає методи відбору та аналізу результатів спостережень випадкових явищ (як правило, це результати спостереження випадкових величин) для виявлення їх закономірностей і обчислення наближених значень їх ймовірнісних характеристик.

Вибірковою сукупністю, або просто вибіркою, називають сукупність випадково відібраних n об'єктів з генеральної сукупності.

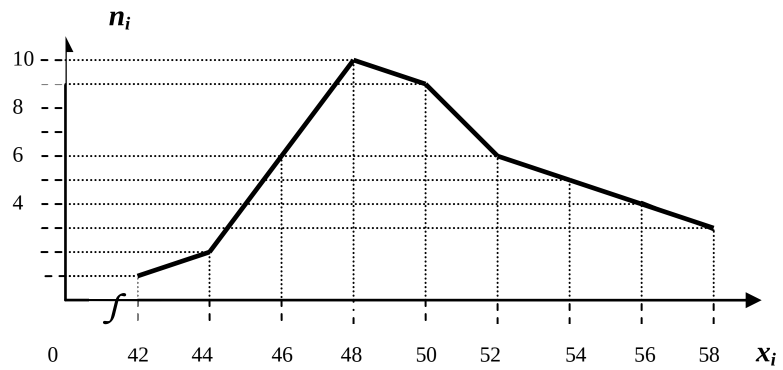
Статистичним розподілом вибірки називається таблиця, в якій вказані значення x ознаки X у зростаючому порядку (в цьому випадку значення утворюють дискретний варіаційний ряд, самі значення ознаки називаються варіантами), а також відповідні частоти або відносні частоти.

Якщо згрупувати значення ознаки в зростаючому порядку в інтервалі довжиною h (крок інтервалу), то одержимо *інтервальний варіаційний ряд*.

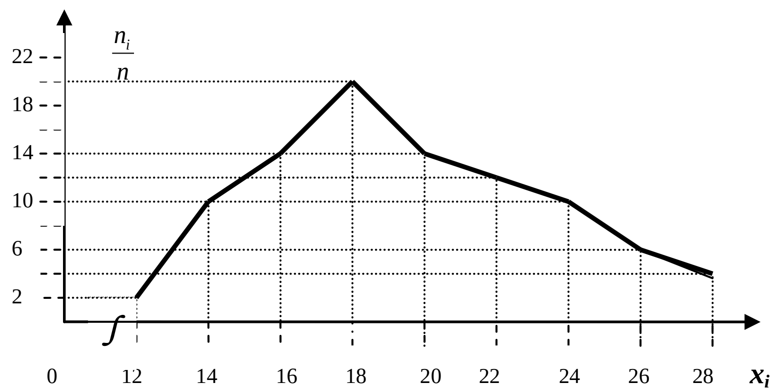
Статистичною (емпіричною) функцією розподілу вибірки називається закон зміни частоти події $X<x$ в даному статистичному матеріалі:

$$F^*(x) = \frac{n(x)}{n}.$$

Полігон частот – многокутник (ламана), побудований в системі координат (x,n_i) або (x,W_i) (полігон частот або відносних ачастот). Для його побудови на осі абсцис відкладають варіанти x_i, а на осі ординат – відповідні їм n_i чи W_i. Точки (x_i,n_i) чи (x_i,W_i) з'єднують відрізками прямих і отримують полігон частот.



Полігон частот.



Полігон відносних частот.

Гістограма – діаграма в системі координат $(\Delta x, n_i),(\Delta x, W_i)$. Її доцільно будувати у випадку неперервної ознаки, для чого інтервал, в якому містяться всі спостережувані значення ознаки розбивають на декілька часткових інтервалів довжиною $h = \Delta x = x_i - x_{i-1}$ і знаходять для кожного часткового інтервалу n_i – суму частот ваірант, що попали в i-ий інтервал. Для її графіка будується ступінчата фігура, що складається з прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною h, а висоти рівні відношенню $\frac{n_i}{h}$ або $\frac{W_i}{h}$.

2. Числові характеристики вибірки

Статистичним середнім, або *вибірковою середньою* називають величину:

$$\mathrm{M}^*[X] = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \bar{x}_в,$$

генеральна середня:

$$\bar{x}_г = \frac{\sum x_i N_i}{N} = \mathrm{M}[X],$$

вибіркова дисперсія:

$$D^*[X] = D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_в)^2 n_i,$$

вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_B = \sqrt{D_в}.$$

Мода (*Mo*) – значення варіанти, що має найбільшу частоту.

Медіана (*Me*) – значення варіанти, відносно якої сукупність ділиться на дві рівні за об'ємом частини.

3. Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності

Точкові статистичні оцінки параметрів

Незміщеною називають статистичну оцінку a^*, математичне сподівання якої дорівнює параметру, що оцінюється при будь-якому об'ємі вибірки, тобто

$$M[a^*]=a. \qquad (1)$$

***Зміщеною* будемо називати статистичну оцінку, для якої порушується умова (1), тобто** $\mathrm{M}[a^*] \neq a$.

Вибіркова середня є незміщеною оцінкою генеральної середньої, а вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії. Виправлена дисперсія : $S^2 = \frac{n}{n-1}D_b$ і "виправлене" середнє квадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\frac{(x_i - x_B)^2 n_i}{n-1}}.$$

Інтервальні статистичні оцінки параметрів

Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу. Інтервальні оцінки дозволяють встановити точність і надійність оцінок.

1. *Довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання при відомому* σ*:*

$$\left(\bar{x}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

2. *Довірчі інтервали для математичного сподівання при невідомому* $\sigma_г$*:*

$$\left(\bar{x}_B - t_\gamma S/\sqrt{n} < m < \bar{x}_B + t_\gamma S/\sqrt{n}\right)$$

3. *Довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення* $\sigma_г$*:*

$$S(1-q) < \sigma_г < S(1+q)$$

4.Методи статистичних перевірок гіпотез

1. **Статистичні гіпотези. Статистичний критерій перевірки нульової гіпотези.**

Статистичною називають гіпотезу про вигляд невідомого. Очевидно, що на основі статистичних даних дуже важко, іноді і неможливо, робити безпомилкові висновки щодо гіпотез. В підсумку може бути прийняте неправильне рішення, тобто можуть бути допущені помилки двох родів.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відхилена правильна гіпотеза.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята неправильна гіпотеза.

Правильне рішення може бути прийняте також у двох випадках:

а) гіпотеза приймається, причому і в дійсності вона правильна;

б) гіпотеза відхиляється, причому і в дійсності вона неправильна.

Ймовірність здійснити помилку першого роду позначають через α і називають її *рівнем значимості* розподілу або про параметри невідомих розподілів.

Статистичним критерієм (просто критерієм) називають випадкову величину К, що служить для перевірки нульової гіпотези. Для різних гіпотез ці критерії є різними.

Наприклад, а) коли перевіряють гіпотезу про рівність дисперсії двох нормальних генеральних сукупностей, то в ролі критерію К беруть відношення виправлених вибіркових дисперсій:

$$K = F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

Ця величина випадкова, тому в різних випробуваннях дисперсії приймають різні, наперед невідомі значення і розподілені за законом Фішера-Снедокора.

б) найбільш розповсюдженим критерієм перевірки гіпотези H_0 про закон розподілу ознаки генеральної сукупності є критерій узгодженості:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - np_i\right)^2}{np_i}$$

де m – число інтервалів, на які розбита вибірка, n – об’єм вибірки, n_i – частота і-го інтервалу, ρ_i – ймовірність попадання значень ознаки в і-ий інтервал, яка обчислюється для теоретичного закону розподілу.

Спостережуваним значенням $K_{сп}$ називається значення критерію, обчислене по результатах вибірки.

Перевірка статистичних гіпотез будь-якої природи здійснюється за такою схемою:

1. Формулюється статистична гіпотеза H_0.
2. Вибирається статистичний критерій відповідно до сформульованої нульової гіпотези H_0.
3. Залежно від гіпотези H_0 і альтернативної H_1 вибирається одностороння або двостороння критична область.
4. За результатами вибірки обчислюється спостережене значення критерію $K_{сп}$.

5. Виходячи з вимоги, що при правильності гіпотези H_0 ймовірність того, що $K_{сп}$ потрапить у критичну область, має дорівнювати прийнятому рівню значимості α, перевіряється статистична гіпотези.

Це твердження подають для лівосторонньої критичної області так:

$$P(K < k_{кр}) = \alpha,$$

для правосторонньої:

$$P(K > k_{кр}) = \alpha,$$

для двосторонньої критичної області:

$P(K < k_{1кр}) + P(K > k_{2кр}) = \alpha.$

2. Перевірка правдивості статистичних гіпотез про рівність двох генеральних середніх.

Нехай генеральні сукупності *Х* і *У* розподілені нормально, причому їх дисперсії відомі. З незалежних вибірок об'ємом *nіт* знайдемо середні вибіркові $\bar{X}_B, \bar{Y}_B$.

Потрібно по вибіркових середніх при заданому рівні значимості α перевірити нульову гіпотезу H_0, яка полягає в тому, що генеральні середні (математичні сподівання) даних сукупностей рівні між собою, тобто H_0: $M[X] = M[Y]$.

Враховуючи, що вибіркові середні є незміщеними оцінками генеральних середніх, тобто $M[\bar{X}_B] = \bar{X}_Г$, $M[\bar{Y}_B] = \bar{Y}_Г$, нульову гіпотезу можна записати так: H_0: $M[\bar{X}_B] = M[\bar{Y}_B]$, тобто перевірити, що математичне сподівання вибіркових середніх рівні між собою. Якщо гіпотеза H_0 правдива, то різниця між вибірковими середніми незначна.

В ролі критерію перевірки нульової гіпотези приймається випадкова величина

$$K = Z = \frac{\bar{X}_B - \bar{Y}_B}{\sigma(\bar{X}_B - \bar{Y}_B)} = \frac{\bar{X}_B - \bar{Y}_B}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}},$$

$$\sigma(\bar{X}_B - \bar{Y}_B) = \sqrt{D(\bar{X}_B - \bar{Y}_B)} = \sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}.$$

Критерій Z – нормована нормальна випадкова величина, бо є лінійна комбінація нормальних величин; Z – нормована, бо $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$ при справедливості гіпотези H_0.

Критична область будується в залежності від вигляду конкуруючої гіпотези.

Перший випадок. Нульова гіпотеза H_0: $M[X] = M[Y]$, конкуруюча H_1: $M[X] \neq M[Y]$. В цьому випадку будують двосторонню критичну область, виходячи з вимоги, що ймовірність попадання критерію в цю область, в припущенні справедливості нульової гіпотези, була рівна прийнятому рівні значимості α.

Найбільша потужність критерію (ймовірність попадання критерію в критичну область при правдивості конкуруючої гіпотези) досягається тоді, коли "ліва" і "права" критичні точки вибрані так, що ймовірність попадання критерію в кожен із двох інтервалів критичної області рівний $\alpha/2$:

$$P(Z < k_{лів\ кр}) = \alpha/2,\ P(Z < k_{пр\ кр}) = \alpha/2.$$

Оскільки, Z – нормована нормальна величина, а розподіл такої величини симетричний відносно нуля, то критичні точки симетричні відносно нуля, тобто досить знайти праву границю, щоб знайти саму двосторонню критичну область (нехай $k_{пр\ кр} = k_{кр}$, $k_{лів\ кр} = - k_{кр}$).

Покажемо, як знайти $k_{кр}$ – праву межу двосторонньої критичної області, користуючись функцією Лапласа Ф(z). Відомо, що функція Лапласа визначає ймовірність попадання нормованої нормальної випадкової величини, наприклад, Z в інтервалі (0, z):

$$P(0 < Z < z) = \Phi(z). \qquad (1)$$

Так як розподіл Z симетричний відносно нуля, то P(z $\in$ [0, ∞)) = 0,5, то, якщо розбити цей інтервал $k_{кр}$ на інтервалі [0, $k_{кр}$) $\cup$ ($k_{кр}$, ∞), то по теоремі додавання

$$P(0 < Z < k_{кр}) + P\ (k_{кр} < Z < \infty) = ½ \qquad (2)$$

Звідки $\qquad \Phi(k_{кр}) + \alpha/2 = 1/2$

$$\Phi(k_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2} \qquad (3)$$

Висновок I. Для того, щоб при заданому рівні значимості α перевірити нульову гіпотезу H_0: M[X] = M[Y] двох нормальних генеральних сукупностей з відомими дисперсіями при конкуруючій гіпотезі H_1: M[X] $\neq$ M[Y], потрібно обчислити

$$K_{СП} = \frac{X_B - Y_B}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}}$$

і по таблиці функції Лапласа знайти критичну точку рівності

$$\Phi(k_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Якщо $|K_{сп}| < k_{кр}$ – нема підстави відхиляти нульову гіпотезу.

Якщо $|K_{сп}| > k_{кр}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

<u>Другий випадок.</u> Нульова гіпотеза H_0: M[X] = M[Y], конкуруюча H_1: M[X] > M[Y].

В цьому випадку будують правосторонню критичну область, виходячи з вимоги, щоб ймовірність попадання критерію в цю область в припущенні справедливості нульової гіпотези була рівна прийнятому рівню значимості α:

$$P(K > k_{кр}) = \alpha$$

Користуючись співвідношенням (2) $P(0 < Z < k_{кр}) + P\ (Z > k_{кр}) = 1/2$, маємо $\Phi(k_{кр}) + \alpha = 1/2$ або $\Phi(k_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}$.

Висновок 2. Щоб при заданому рівні значимості α перевірити нульову гіпотезу H_0: M[X] = M[Y] при конкуруючій гіпотезі H_1: M[X] > M[Y], потрібно обчислити

$$K_{СП} = \frac{X_B - Y_B}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}}$$

і по таблиці функції Лапласа знайти критичну точку з рівності $\Phi(k_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}$.

Якщо $K_{сп} < k_{кр}$ – нема підстави відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $K_{сп} > k_{кр}$ – нульова гіпотеза відхиляється.

<u>Третій випадок.</u> Нульова гіпотеза *H_0: M[X]=M[Y]*. Конкуруюча *H_1: M[X]<M[Y]*.

В цьому випадку будуть лівосторонню критичну область, виходячи з вимоги, що ймовірність попадання критерію в цю область, в припущенні справедливості нульової гіпотези, була рівна прийнятому рівню значимості:

$$P(Z < k'_{кр}) = \alpha .$$

Висновок 3. При конкуруючій гіпотезі *M[X]<M[Y]* треба обчислити $K_{сп}$ і спочатку по таблиці функції Лапласа знайти "допоміжну точку" $k_{кр}$ з рівності $\Phi(k_{кр}) = \frac{1-2\alpha}{2}$, а потім покласти $k'_{кр} = -k_{кр}$. Якщо $K_{сп}>-k_{кр}$ – немає підстави відхиляти нульову гіпотезу. Якщо $K_{сп}<-k_{кр}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

3. **Перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу генеральної сукупності. Критерій узгодженості Пірсона**

Перевірка гіпотези про припущений закон невідомого закону розподілу робиться так само, як і перевірка гіпотези про параметри розподілу, тобто з допомогою спеціально підібраної випадкової величини – критерію узгодженості.

Критерієм узгодженості називають критерій перевірки про вигляд невідомого розподілу.

Найбільш розповсюдженим критерієм перевірки нульової гіпотези про закон розподілу ознаки генеральної сукупності є критерій узгодженості χ^2 , що розраховується за формулою:

$$K = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}, \qquad (1)$$

де *m* – число часткових інтервалів, на які поділяється статистичний розподіл вибірки; n_i – частота ознаки в і-му інтервалі; n_i' – теоретичні частоти, підраховані за відповідними формулами закону розподілу ймовірностей, який припускається для ознаки генеральної сукупності. Теоретичні частоти знаходяться за формулою:

$$n'_i = np_i, \qquad (2)$$

де *n* – об'єм вибірки, p_i – для дискретної величини є ймовірність події $p_i=P(X=x_i)$, для неперервної випадкової величини p_i є ймовірність того, що ознака *X* попаде в *і*-ий інтервал.

Наприклад, для гіпотези H_0, яка припускає, що ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу, ймовірність p_i може бути обчислена за формулою:

$$P_i=\Phi(x_{i+1})-\Phi(x_i), \qquad (3)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Критерій *K* у формулі (1) випадковий, і чим менше відрізняються значення емпіричних і теоретичних частот, тим менше буде значення $K_{сп}$ і, отже, більш точно характеризує близькість теоретичного і емпіричного розподілів.

Значення критичної точки $k_{кр}$ для критерію узгодженості Пірсона залежить від рівня значимості α і числа ступенів вільності *k*. Число ступенів вільності розподілу визначається за формулою *k=l-r-1*, де *l*- число інтервалів статистичного ряду, *r* – число параметрів теоретичного закону розподілу, що оцінюється за даними вибірки.

Зокрема , якщо припущений розподіл нормальний, то оцінюється два параметри (математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення), тому *r=2*, отже, *k=l-3*.

Оскільки односторонній критерій більш “жорстко” відхиляє нульову гіпотезу, ніж двосторонній, то будуть правосторонню критичну область, виходячи з вимоги, щоб ймовірність попадання критерію в цю область при припущенні правдивості нульової гіпотези була рівна прийнятому рівню значимості α:

$$P\left(\chi^2 > k_{кр}(\alpha, k)\right) = \alpha .$$

Висновок. Для того, щоб при заданому рівні значимості перевірити гіпотезу H_0: генеральна сукупність розподілена нормально, потрібно спочатку порахувати теоретичні частоти, а потім спостережуваний критерій:

$$K_{сп} = \sum_{i=1}^{l} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} .$$

Після чого по таблиці критичних точок розподілу χ^2 (див. дод.1), за заданим рівнем значимості α і числом ступенів вільності $k=l-3$ потрібно знайти критичну точку $k_{кр}(\alpha,k) = \chi^2_{кр}(\alpha,k)$.

Якщо $K_{сп}<k_{кр}$ – нема підстави відхиляти нульову гіпотезу.

Якщо $K_{сп}>k_{кр}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

Зауваження. Об’єм вибірки повинен бути досить великим (не менше *50*), а кожна група з інтервалу (x_i,x_{i+1}) містити не менше *5-8* варіант; малочисленні групи слід об’єднувати в одну, сумуючи частоти.

Для контролю обчислень, формулу (1) перетворюють до вигляду:

$$K = \chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{n_i^2}{n_i'} - n \qquad \left(\sum_{i=1}^{l} n_i = n, \sum n_i' = n\right)$$

Отже, суть критерію узгодженості Пірсона полягає в порівнянні емпіричних і теоретичних частот. Емпіричні частоти знаходять експериментально, а теоретичні, наприклад, таким методом:

1. Весь інтервал спостережуваних значень X (вибірки об’єму n) ділять на l часткових інтервалів $[x_i,x_{i+1}]$ однакової довжини. Знаходять їх середини $\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ а частоти n_i варіанти $\bar{x}_i$ беремо рівними числу варіант, що попали в i-ий інтервал.

В результаті отримано послідовність рівновіддалених варіант з відповідними частотами:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_e$$

$$n_1, n_2, \ldots n_e . \quad \left(\sum_{i=1}^{l} n_i = n\right)$$

2. Обчислюємо вибіркову середню і вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots \bar{x}_n}{n}, \delta = \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots x_n^2}{n} - (\bar{x})^2} .$$

3. Нормують випадкову величину X, тобто переходять до величини $Z = \frac{X - \bar{x}}{\delta}$ і обчислюють кінці інтервалів (z_i,z_{i+1}):

$$Z_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\delta}, Z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}}{\delta},$$

причому найменше значення Z, тобто z_1 покладають рівним $(-\infty)$, а найбільше, тобто z_e, рівним $(+\infty)$.

4. Обчислюють теоретичні ймовірності p_i попадання X в інтервали (x_i, x_{i+1}) з рівності

$$P_i=\Phi(z_{i+1})-\Phi(z_i),$$

де $\Phi(z)$ – функція Лапласа і остаточно знаходять теоретичні частоти $n_i'=np_i$.

5.Кореляційний і регресійний аналіз

Статистичною називають залежність, при якій зміна однієї з величин веде до зміни розподілу іншої, зокрема *кореляційним* називається зв'язок між статистичними змінними X і Y, за якими при зміні ознаки X змінюється середнє значення ознаки Y.

1. Рівняння парної регресії

В ролі оцінки умовних математичних сподівань беруть умовні середні, які знаходять за даними вибірки.

Умовною середньою $\overline{y_x}$ називають середнє арифметичне із значень Y, що відповідають одному і тому ж значенню $X=x$.

Кореляційною називається залежність умовної середньої від аргументів і записується в такому вигляді: $\overline{y_x} = f^*(x)$, якщо n змінних: $\overline{y} = f^*(x_1,...x_n)$.

Дані рівняння називають вибірковими рівняннями регресії Y на X; функцію $f^*(x)$ - вибірковою регресією Y на X, а її графік – вибірковою лінією регресії Y на X.

Найпростішою буде кореляційна залежність, коли є один аргумент і вона називається *парною* . Якщо ж аргументів більше, ніж один, то залежність називається *множинною*.

Вигляд рівняння $\overline{y_x} = f^*(x)$ визначає тип кореляційної залежності. Найбільш поширеним і простим є рівняння лінійної регресії, коли всі параметри входять в першій степені:

$$\overline{y_x} = kx+b.$$

Невідомі параметри k,b знаходять з системи:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ k\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y та X за згрупованими даними:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x}).$$

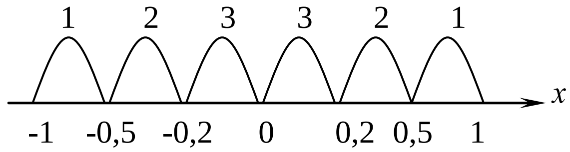
2. Вибірковий коефіцієнт кореляції та його властивості, методика знаходження

Число $r_в$ є вибірковим коефіцієнтом кореляції, тобто оцінкою коефіцієнта кореляції

$$r = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\mathrm{M}(X,Y)-\mathrm{M}(X)\mathrm{M}(Y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Сила кореляційної залежності у випадку прямої регресії оцінюється коефіцієнтом кореляції r. Так як $|r| \le 1$, то чим r ближче до ± 1, тим щільніший зв’язок Y та X, який переходить у функціональну (лінійну) залежність при $r = \pm 1$. Якщо $r<0$, то зв’язок між величинами обернений, якщо $r>0$, то прямий, якщо $r=0$, то зв’язок відсутній.

Залежність щільності зв’язку між явищами від величини коефіцієнта кореляції r можна зобразити графічно.



1 – зв’язок тісний,
2 – зв’язок середній,
3 – зв’язок слабкий.

Вибірковий коефіцієнт $r_в$ є оцінкою коефіцієнта кореляції r генеральної сукупності і тому також служить для вимірювання лінійного зв’язку між величинами X та Y. Нехай, вибірковий коефіцієнт кореляції виявився $r_в \neq 0$. Так як вибірка відібрана випадково, то звідси ще не можна робити висновок, що коефіцієнт кореляції генеральної сукупності також відмінний від нуля $(r \neq 0)$. Виникає необхідність перевірити гіпотезу про значимість вибіркового коефіцієнту кореляції (або про рівність нулеві коефіцієнта генеральної сукупності H_0: $r=0$). Перевірку цієї гіпотези теж можна здійснити (див. [3]).

Якщо вибірка має досить великий об’єм і добре представляє генеральну сукупність, то висновок про щільність лінійної залежності між ознаками, отриманий по даних вибірки, в певній мірі може бути поширений і на генеральну сукупність. Наприклад, для оцінки коефіцієнту кореляції r нормально розподіленої сукупності (при $n \geq 50$), можна користуватись формулою

$$r_в - 3\frac{1-r_в^2}{\sqrt{n}} \leq r \leq r_в + 3\frac{1+r_в^2}{\sqrt{n}}.$$

Нехай потрібно за даними кореляційної таблиці обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції. Розрахунки можна спростити, якщо перейти до умовних варіант (при цьому величина $r_в$ не зміниться)

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{h_1}, v_j = \frac{y_j - c_2}{h_2},$$

де u_i, v_j – умовні варіанти, c_1, c_2 – хибні нулі, тобто варіанти, що мають найбільшу частоту, h_1, h_2 – кроки, тобто різниці між будь-якими двома сусідніми варіантами.

Тоді:

$$\overline{u} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_{x_i} u_i}{n}, \overline{v} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_{y_j} v_j}{n}, \overline{u^2} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_{x_i} u_i^2}{n}, \overline{v^2} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_{y_j} v_j^2}{n}, \sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2},$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}, r_в = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} n_{ij} u_i v_j - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v}.$$

Оскільки при знаходженні $r_в$ вже обчислені $\overline{u}, \overline{v}, \sigma_u, \sigma_v$, то доцільно повернутись до величин x, y:

$$\sigma_x = h_1\sigma_u, \sigma_y = h_2\sigma_v, \overline{x} = \overline{u}h_1 + c_1, \overline{y} = \overline{v}h_2 + c_2.$$

І записати рівняння лінійної регресії:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}).$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Інвестиційна кампанія має k пакетів акцій, серед яких z пакетів кондитерських фабрик. Визначити ймовірність, що серед навмання вибраних m пакетів акцій є рівно l пакетів кондитерських фабрик.

Задачу розв'язати за даними таблиці (N – номер варіанта):

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
k	10	10	10	10	9	11	11	11	10	9	11	10	9	11	12	10	14
m	6	5	7	8	7	8	7	6	5	6	7	6	8	8	5	6	9
l	3	2	4	4	4	3	2	3	4	4	2	3	2	2	3	4	4
z	4	4	5	6	5	4	3	5	5	5	4	6	5	4	4	7	7

N	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
k	15	12	10	10	9	10	11	12	10	9	11	9	12
m	6	5	7	7	7	8	8	6	5	6	7	5	8
l	3	2	4	4	4	3	2	3	4	4	2	3	2
z	4	4	5	6	5	4	3	5	5	5	4	6	4

2.В двох партіях відповідно $k_1\%$ і $k_2\%$ якісних виробів. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність того, що серед відібраних виробів: а) хоча б один бракований; б) обидва браковані; в) один бракований і один якісний?

Задачу розв'язати за даними таблиці (N – номер варіанта):

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
k_1	76	83	75	84	36	44	33	81	73	32	82	43	76	82	85	55	80
k_2	42	35	43	34	82	74	85	37	45	86	36	75	42	36	35	65	50

N	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
k_1	75	83	65	89	36	40	35	80	75	37	86	45	86
k_2	45	33	43	39	76	72	75	35	35	77	36	65	36

3. У магазин надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому з i-го заводу надходить $m_i\%$ виробів ($i=1,2,3$). Серед виробів i-го заводу $n_i\%$ якісних. Куплено один виріб. Він виявився якісним. Визначити ймовірність того, що куплений виріб виготовлено j-им заводом.

Задачу розв'язати за даними таблиці (N – номер варіанта):

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
m_1	50	50	30	60	40	70	60	50	20	10	30	70	60	20	35	40	45
m_2	30	20	50	20	30	20	10	30	40	50	40	10	30	70	25	30	35
m_3	20	30	20	20	30	10	30	20	40	40	30	20	10	10	40	30	20
n_1	70	80	70	70	80	70	80	90	90	70	90	70	80	80	60	60	70
n_2	80	70	80	80	80	80	90	80	70	90	80	90	80	70	70	60	90
n_3	90	90	90	90	90	90	80	90	80	80	90	80	90	90	80	70	80
j	1	2	3	1	1	2	2	2	3	1	3	2	1	2	1	2	3

N	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m_1	60	50	30	50	45	70	30	30	25	50	40	65	10
m_2	30	25	40	20	30	15	10	50	35	10	30	15	30
m_3	10	25	30	30	25	15	60	20	40	40	30	20	60
n_1	50	80	70	70	80	70	80	90	90	70	90	70	80
n_2	80	70	80	80	80	80	90	80	70	90	80	90	80
n_3	90	80	90	90	90	90	70	90	80	80	90	80	90
j	1	2	3	1	1	2	2	2	3	1	3	2	1

4. Внаслідок маркетингових досліджень встановлено, що ймовірність реалізації одиниці продукції складає p. Знайти ймовірність, що з n вироблених одиниць продукції буде реалізовано: а) рівно k; б) не більше $m\%$ з n; в) від k_1 до k_2; г) обчислити найімовірніше число реалізованих одиниць.

Задачу розв'язати за даними таблиці (N – номер варіанта):

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	0,7	0,5	0,5	0,65	0,5	0,4	0,95	0,7	0,19	0,75	0,6	0,4	0,7	0,8	0,5
n	8	400	40	500	8	10	400	80	100	50	300	60	200	350	450
k	5	38	38	400	4	5	360	56	19	8	40	20	50	100	150
$m\%$	80	60	60	80	80	80	60	85	45	10	25	40	80	60	40
k_1	1	200	20	400	0	0	0	0	79	10	100	40	150	0	100
k_2	4	400	40	500	4	4	320	12	100	40	200	60	200	200	200

N	16	127	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
p	0,7	0,6	0,5	0,65	0,4	0,55	0,45	0,7	0,6	0,4	0,2	0,7	0,8	0,75	0,45
n	90	60	80	70	90	100	150	200	300	50	400	350	250	300	350
k	30	50	40	50	40	60	60	60	100	10	150	200	100	250	150
$m\%$	80	60	60	80	70	80	60	40	50	30	25	80	75	65	55
k_1	10	20	30	40	20	40	90	0	150	0	150	100	0	0	120
k_2	40	40	60	50	40	60	120	150	300	40	250	300	200	300	240

5. Ймовірність виконання договору для кожного з n підприємств дорівнює p. Скласти закон розподілу числа підприємств, які виконають договір.

Задачу розв'язати за даними таблиці (N – номер варіанта):

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
n	3	5	6	6	4	4	3	5	5	4	6	5	3	4	3	5	6
p	0,8	0,7	0,8	0,7	0,6	0,8	0,6	0,8	0,6	0,7	0,6	0,9	0,9	0,5	0,4	0,7	0,5

N	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	4	5	6	6	4	4	3	5	5	4	6	5	3
p	0,8	0,6	0,8	0,7	0,6	0,8	0,6	0,8	0,6	0,7	0,6	0,5	0,4

6. Випадкова величина X задається функцією розподілу $F(X)$. Потрібно визначити:

а) математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X;

б) ймовірність, що випадкова величина прийме значення з інтервалу $(\alpha;\beta)$.

$$F(X)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le N;\\ \dfrac{1}{36}(x-N), & \text{якщо} \quad N\le x\le N+4;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>N+4,\end{cases}$$

де N – номер варіанта, $\alpha=N+1, \quad \beta=N+3$.

7. Задана генеральна сукупність16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 14, 16, 18, 15, 9, 14, 16, 12, 13, 17, 19, 13, 17, 14, 11, 12, 13, 8, 10, 9, 11, 10, 17, 13, 18, 16, 21, 9, 14, 15, 16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 14, 16, 18, 15, 9, 14, 16, 12, 13, 17, 19, 13, 17, 14, 11, 12, 13, 8, 10, 9, 11, 10, 17, 13, 18, 16, 21, 9, 14, 15, 16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 14, 16, 18, 15, 9, 14, 16, 12, 13, 17, 19, 13, 17, 14, 11, 12, 13, 8, 10, 9, 11, 10, 17, 13, 18, 16, 21, 9, 14, 15, 16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 14, 16, 18, 15, 9, 14, 16, 12, 13, 17, 19, 13, 17, 14, 11, 12, 13, 8, 10, 9, 11, 10, 17, 13, 18, 16, 21, 9, 14, 15, 16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 14, 16, 18, 15, 9, 14, 16, 12, 13, 15

Зробити вибірку з 20 елементів, починаючи з номера $N+1$. Потрібно:

а) побудувати статистичний розподіл вибірки та його емпіричну функцію $F^*(x)=\dfrac{n_x}{n}$;

б) обчислити числові характеристики вибірки;

в) побудувати полігон частот та гістограму, розбивши інтервал на 5 рівних підінтервалів;

г) знайти моду, медіану, розмах та коефіцієнт варіації.

8. Знайти вибіркове рівняння прямої $y_x-\bar{y}=r_в\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$ регресії Y на X за даними кореляційної таблиці (N – номер варіанта).

$y \backslash x$	$N+2$	$N+10$	$N+18$	$N+26$	$N+34$	$N+42$	n_y
$N+5$	$N+1$	–	$N+1$	–	–	–	$2N+2$
$N+14$	–	$N+1$	$N+7$	–	–	–	$2N+8$
$N+23$	–	$N+4$	$N+2$	$N+15$	–	–	$3N+21$
$N+32$	–	$N+2$	–	$N+5$	$N+7$	–	$3N+14$
$N+41$	–	–	–	$N+1$	$N+3$	$N+2$	$3N+6$
n_x	$N+1$	$3N+7$	$3N+10$	$2N+10$	$2N+10$	$N+2$	$n=13N+51$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. **Інвестиційна кампанія має 12 пакетів акцій, серед яких 7 пакетів кондитерських фабрик. Визначити ймовірність, що серед навмання вибраних 5 пакетів акцій є рівно 3 пакети кондитерських фабрик.**

Розв'язання

Подія A– серед навмання вибраних 5 пакетів акцій є 3 пакети цукрових заводів.

Використовуємо класичне означення ймовірності:

$p(A)=\frac{m}{n}$, де $n=C_{12}^5=\frac{12!}{5!\cdot 7!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=792$,

$m=C_7^3\cdot C_5^2=\frac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}=350$, (12-7=5 – пакети не кондитерських фабрик).

Отже, $p(A)=\frac{350}{792}\approx 0{,}44.$

2. **Удвох партіях відповідно 82% і 45% якісних виробів. Навмання вибирають по одному виробу із кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них: а) хоча б один бракований виріб; б) два бракованих вироби; в) один бракований та один якісний вироби?**

Розв'язання

$p_1=0{,}82$– ймовірність того, що виріб якісний, якщо він з першої партії;

$p_2=0{,}45$– ймовірність того, що виріб якісний, якщо він з другої партії.

Ймовірності того, що вироби браковані, відповідно дорівнюють: $q_1=1-0{,}82=0{,}18;\quad q_2=1-0{,}45=0{,}55$.

а) подія A– серед двох виробів хоча б один бракований;

протилежна подія $\overline{A}$– обидва вироби якісні, тоді

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-p_1\cdot p_2=1-0{,}82\cdot 0{,}45=0{,}631.$

б) подія B– обидва вироби браковані:

$P(B)=q_1\cdot q_2=0{,}18\cdot 0{,}55=0{,}099.$

в) подія C – один виріб бракований і один якісний:

$P(C)=p_1\cdot q_2+q_1\cdot p_2=0{,}82\cdot 0{,}55+0{,}18\cdot 0{,}45=0{,}532.$

3. **У магазин надходять однотипні вироби з трьох заводів: 30% – з першого заводу, 60% – з другого, 10% – з третього. Серед виробів першого заводу 70% виробів першого сорту, серед виробів другого і третього заводів відповідно 90% і 80% виробів першого сорту. Куплено один виріб. Він виявився виробом першого сорту. Знайти ймовірність того, що куплений виріб виготовлений на другому заводі.**

Розв'язання

Для знаходження відповідної ймовірності потрібно використати формулу Байєса.

Описуємо гіпотези: $H_i,\ i=1,2,3.$

H_i– виріб, виготовлений на i-ому заводі.

Ймовірності гіпотез відповідно дорівнюють:

$P(H_1)=\frac{30}{100}=0{,}3;\quad P(H_2)=\frac{60}{100}=0{,}6;\quad P(H_3)=\frac{10}{100}=0{,}1.$

Подія A– куплений виріб є виробом першого сорту. Обчислюємо умовні ймовірності:

$$P(A/H_1)=\frac{70}{100}=0{,}7,\ P(A/H_2)=\frac{90}{100}=0{,}9,\ P(A/H_3)=\frac{80}{100}=0{,}8$$

Згідно з умовою задачі, потрібно знайти $P(H_2/A)$– ймовірність того, що куплений виріб першого сорту виготовлений на другому заводі. За формулою Байєса:

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A/H_i)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}9}{0{,}3\cdot 0{,}7+0{,}6\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}8}=$$

$$=\frac{0{,}54}{0{,}83}\approx 0{,}65.$$

4. **Внаслідок маркетингових досліджень встановлено, що ймовірність реалізації одиниці продукції становить 0,6. Знайти ймовірність, що з 200 вироблених одиниць продукції буде реалізовано: а) рівно 130; б) не більше 70% з 200 одиниць; в) від 120 до 150 одиниць; г) обчислити найімовірніше число реалізованих одиниць.**

Розв'язання

Для знаходження відповідних ймовірностей використовуємо локальну та інтегральну теореми Лапласа (їх значення шукають за відповідними таблицями):

а) за умовою задачі $n=200,\ k=130,\ p=0{,}6,\ q=0{,}4$

$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, де $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$. **Функція $\varphi(x)$ – парна: $\varphi(-x)=\varphi(x)$**

Обчислюємо значення x:

$$x=\frac{130-200\cdot 0{,}6}{\sqrt{200\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}=\frac{10}{\sqrt{48}}\approx 1{,}44.$$

Використовуючи таблицю значень функції $\varphi(x)$, знаходимо $\varphi(1{,}44)=0{,}1415$, тоді

$$P_{200}(130)=\frac{1}{\sqrt{200\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}\varphi(1{,}44)=0{,}14\cdot 0{,}1415\approx 0{,}02.$$

б) Подія A– буде реалізовано не більше 70% продукції (140 одиниць становить 70%),

$$P(A)=P_{200}(0;140).$$

Згідно з інтегральною теоремою Лапласа:

$P_n(k_1,k_2)=\Phi(x'')-\Phi(x')$, де $x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$,

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ (функція протабульована).

Інтегральна функція Лапласа непарна: $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, для значень $x>5$ приймають $\Phi(x)=0{,}5$.

У даному випадку $k_1=0,\ k_2=140,\ n=200.$

Обчислюємо значення $x',\ x''$:

$$x' = \frac{0 - 200 \cdot 0{,}6}{\sqrt{200 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = -\frac{120}{6{,}93} = -17{,}32;$$

$$x'' = \frac{140 - 200 \cdot 0{,}6}{\sqrt{200 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = \frac{20}{6{,}93} = 2{,}89,$$

тоді: $P_{200}(0;140) = \Phi(2{,}89) - \Phi(-17{,}32) = 0{,}498 + 0{,}5 = 0{,}998$.

в) За допомогою інтегральної теореми Лапласа знаходимо

$P_{200}(120;150)$: $x' = \frac{120 - 200 \cdot 0{,}6}{\sqrt{200 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = 0$, $x'' = \frac{150 - 200 \cdot 0{,}6}{\sqrt{200 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \approx 4{,}33$,

тоді:

$$P_{200}(120;150) = \Phi(4{,}33) - \Phi(0) = 0{,}4999 - 0 \approx 0{,}5.$$

г) Найімовірніше число реалізованих одиниць продукції k_0 знаходимо з нерівності:

$$np - q \le k_0 \le np + p,$$

$$200 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le k_0 \le 200 \cdot 0{,}6 + 0{,}6,$$

$$119{,}6 \le k_0 \le 120{,}6,$$

отже, $k_0 = 120$.

Зауваження: Якщо $n < 10$ потрібно використовувати формулу Бернуллі: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

5. **Ймовірність виконання договору для кожного з трьох ($n = 3$) підприємств дорівнює 0,9. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа підприємств, які виконають договір.**

Розв’язання

Закон розподілу випадкової величини X записуємо у вигляді таблиці, ймовірності p_i обчислюємо за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad (p = 0{,}9; q = 1 - p = 0{,}1), \quad C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

x_i	0	1	2	3
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

$$P(X = 0) = P_3(0) = C_3^0 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001,$$

$$P(X = 1) = P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}027,$$

$$P(X = 2) = P_3(2) = C_3^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}243,$$

$$P(X = 3) = P_3(3) = C_3^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}729.$$

Контроль: $\sum p_i = 1$.

6. **Задана функція розподілу ймовірностей прибутку підприємця:**

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 2, \\ \dfrac{(x-2)^3}{64}, \text{ якщо } 2 < x \le 6, \\ 1, \text{ якщо } x > 6. \end{cases}$$

Потрібно знайти: а) математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення прибутку підприємця; б) ймовірність, що прибуток підприємця прийме значення з інтервалу (3;4).

Розв'язання

Знаходимо густину розподілу ймовірностей $f(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \textit{якщо}\, x \le 2, \\ \dfrac{3}{64}(x-2)^2, \textit{якщо}\, 2 < x \le 6, \\ 0, \textit{якщо}\, x > 6. \end{cases}$$

а) Математичне сподівання обчислюємо за формулою: $M(x) = \int_a^b x \cdot f(x)dx$.

$$M(x) = \int_2^6 \frac{3}{64}(x-2)^2 x dx = \frac{3}{64}\int_2^6 \left(x^3 - 4x^2 + 4x\right)dx = \frac{3}{64}\left(\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_2^6 =$$

$$= \frac{3}{64}\left(324 - 288 + 72 - 4 + \frac{32}{3} - 8\right) = 4{,}5.$$

Обчислюємо дисперсію $D(x) = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(x)$

$$D(x) = \frac{3}{64}\int_2^6 x^2(x-2)^2 dx - (4{,}5)^2 = \frac{3}{64}\int_2^6 \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right)dx - 20{,}25 =$$

$$= \frac{3}{64}\left(\frac{x^5}{5} - x^4 + 4\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^6 - 20{,}25 = 25{,}9 - 20{,}25.$$

Середнє квадратичне відхилення прибутку підприємця $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$, отже, $\sigma(x) = \sqrt{5{,}65} \approx 2{,}38.$

б) Ймовірність того, що прибуток підприємця набуде значення із заданого інтервалу, обчислюємо за формулою:

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

В даному випадку:

$$P(3 < x < 4) = \int_3^4 \frac{3}{64}(x-2)^2 dx = \frac{3}{64} \cdot \frac{(x-2)^3}{3}\Bigg|_3^4 = \frac{1}{64}(8-1) \approx 0{,}11.$$

7. **Задана генеральна сукупність. Знайти вибірку з 20 елементів підряд, починаючи з першого, та виконати такі вправи:**

1) **побудувати статистичний розподіл вибірки та його емпіричну функцію розподілу;**
2) **обчислити числові характеристики вибірки;**
3) **побудувати полігон частот та гістограму, розбивши інтервал на 5 рівних підінтервалів;**
4) **знайти моду, медіану, розмах та коефіцієнт варіації.**

16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 14, 16, 18, 15, 9, 14, 16, 12, 13, 17, 19, 13. 17. 14. 11. 12, 13, 8, 10, 9, 11, 10, 17, 13, 18, 16, 21, 9, 14, 15.

Розв'язання

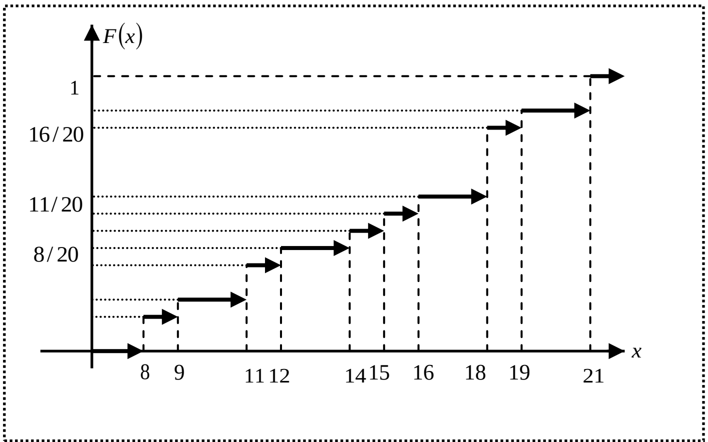
Утворюємо вибірку, що складається з 20 елементів генеральної сукупності 16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 15, 21, 19 і за нею будуємо статистичний розподіл:

X_i	8	9	11	12	14	15	16	18	19	21
N_i	2	1	3	2	1	2	3	2	2	2

з якого і будуємо емпіричну функцію розподілу, яка визначається за формулою $F(x) = \frac{n_x}{n}$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 8 \\ \frac{2}{20}, \text{ якщо } 8 < x \le 9 \\ \frac{3}{20}, \text{ якщо } 9 < x \le 11 \\ \frac{6}{20}, \text{ якщо } 11 < x \le 12 \\ \frac{8}{20}, \text{ якщо } 12 < x \le 14 \\ \frac{9}{20}, \text{ якщо } 14 < x \le 15 \\ \frac{11}{20}, \text{ якщо } 15 < x \le 16 \\ \frac{14}{20}, \text{ якщо } 16 < x \le 18 \\ \frac{16}{20}, \text{ якщо } 18 < x \le 19 \\ \frac{18}{20}, \text{ якщо } 19 < x \le 21 \\ 1, \text{ якщо } x > 21 \end{cases}$$

Побудуємо графік функції $F(x)$



2) Обчислюємо числові характеристики за формулами:

$$\overline{X}_в = \sum \frac{x_i \cdot n_i}{n}, \quad D_в = \overline{X}_в^2 - (\overline{X}_в)^2, \quad \sigma_в = \sqrt{D_в}$$

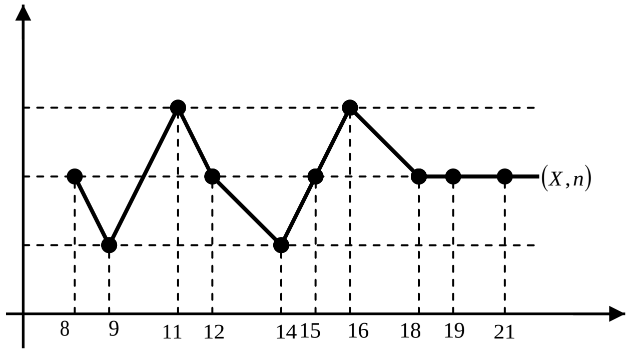
$$\overline{X}_в = \frac{8\cdot 2+9\cdot 1+11\cdot 3+12\cdot 2+14\cdot 1+15\cdot 2+16\cdot 3+18\cdot 2+19\cdot 2+2\cdot 2}{20} = 14,5$$

$$\overline{X}_в^2 = \frac{64\cdot 2+81\cdot 1+121\cdot 3+144\cdot 2+196\cdot 1+225\cdot 2+256\cdot 3+324\cdot 2+361\cdot 2+441\cdot 2}{20} =$$

$$= 226,3$$

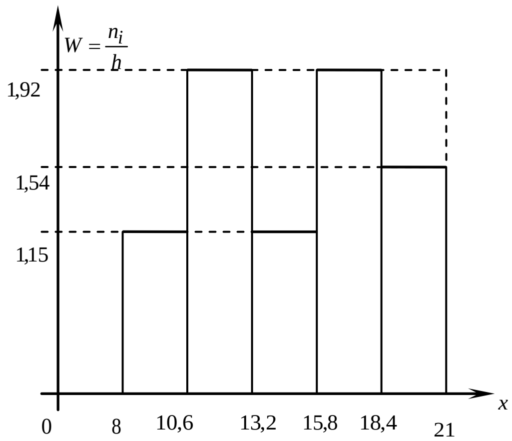
$$D_в = 226,3-(14,5)^2 = 16,05; \quad \sigma_в = \sqrt{16,05} = 4,01.$$

3) Будуємо полігон частот:



Гістограму будуємо з кроком $h = \frac{21-8}{5} 2,6$. Для цього спочатку запишемо інтервальний ряд

X	$8 \div 10,6$	$10,6 \div 13,2$	$13,2 \div 15,8$	$15,8 \div 18,4$	$18,4 \div 21$
n	3	5	3	5	4
$\frac{n_i}{h}$	$\frac{3}{2,6} = 1,15$	$\frac{5}{2,6} = 1,92$	$\frac{3}{2,6} = 1,15$	$\frac{5}{2,6} = 1,92$	$\frac{4}{2,6} = 1,54$



4) Мода (варіанта, яка має найбільшу частоту): $M_o' = 11, M_o' = 16$.

Медіана (варіанта, яка ділить варіаційний ряд навпіл): $M_D = 14,5$.

Розмах варіації: $R = 21-8 = 13$.

Коефіцієнт варіації: $V = \frac{\sigma_в}{X_в} \cdot 100\% = 27,66\%$.

8. **Зв'язок ознак *X* та *Y* подається кореляційною таблицею:**

X / Y	30	35	40	**45**	50	55	n_y
18	4	6	-	-	-	-	10
28	-	8	10	-	-	-	18
38	-	-	4	**35**	5	-	44
48	-	-	4	12	6	-	22
58	-	-	-	1	3	2	6
N_x	4	14	18	48	14	2	100

Записати рівняння прямої регресії.

Розв'язання

$$y_x - \bar{y} = r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

Для того, щоб записати рівняння прямої регресії нам необхідно знайти: $\bar{y}, \bar{x}, r_в, \sigma_x, \sigma_y$.

Для спрощення підрахунків переходимо до умовних варіант $u_i = \frac{x_i - 45}{5}, v_j = \frac{y_j - 38}{10}$, тобто *C₁=45, C₂=38, h₁=5, h₂=10* (*C₁, C₂* – варіанти, що мають найбільшу частоту 35).

U / V	-3	-2	-1	0	1	2	n_v
-2	4	6	-	-	-	-	10
-1	-	8	10	-	-	-	18
0	-	-	4	35	5	-	44
1	-	-	4	12	6	-	22
2	-	-	-	1	3	2	6
N_u	4	14	18	48	14	2	100

Послідовно знаходимо: $\bar{x} = h_1\bar{u} + C_1$

$$\bar{u} = \frac{1}{100}(4(-3) + 14(-2) + 18(-1) + 48\cdot 0 + 14\cdot 1 + 2\cdot 2) = -0{,}4;$$

Тоді підставляємо у формулу: $\bar{x} = h_1\bar{u} + C_1$;

$$\bar{x} = 5(-0{,}4) + 45 = 43;$$

Далі шукаємо $\bar{y} = h_2\bar{v} + C_2$

$$\bar{v} = \frac{1}{100}(10(-2) + 18(-1) + 44\cdot 0 + 22\cdot 1 + 6\cdot 1) = 0{,}04;$$

Підставляємо у формулу $\bar{y} = h_2\bar{v} + C_2$;

$$\bar{y} = 10(-0{,}04) + 38 = 37{,}6$$

Далі знаходимо σ_x, σ_y: $\sigma_x = h_1\sigma_u$; $\sigma_y = h_2\sigma_v$

А для цього спочатку обчислюємо величини:

$$\overline{u^2} = \frac{1}{100}(4(-3)^2 + 14(-2)^2 + 18(-1)^2 + 48\cdot 0^2 + 14\cdot 12^2 + 2\cdot 2^2) = 1{,}32;$$

$$\overline{u^2} = 1{,}32; \sigma_u = \sqrt{1{,}32 - (-0{,}4)^2} = 1{,}077,$$

$$\sigma_x = 5 \cdot 1{,}077 = 5{,}385$$

$$\overline{v^2} = 1{,}04; \sigma_v = \sqrt{1{,}04 - \left(0{,}04\right)^2} = 1{,}019$$

$$\sigma_y = 10 \cdot 1{,}019 = 10{,}19$$

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{5} n_{ij} u_i v_j = 4(-2)(-3) + 6(-2)(-2) + 8(-1)(-2) + 10(-1)(-1) + 4(-4) \cdot 0 + 35 \cdot 0 \cdot 0 +$$

$$+ 5 \cdot 1 \cdot 0 + 4(-1) \cdot 1 + 12 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 90;$$

$$\bar{r}_в = \frac{90 - 100(-0{,}4)(-0{,}04)}{100 \cdot 1{,}077 \cdot 1{,}019} = 0{,}806;$$

Рівняння прямої регресії Y та X має вигляд:

$$y_x - 37{,}6 = 0{,}806 \frac{10{,}19}{5{,}385}(x - 43) \quad \text{або} \quad y_x = 1{,}525x - 27{,}975.$$

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3970	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	X	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,57	0,2157	1,22	0,3883	1,87	0,4693
0,01	0,0040	0,58	0,2190	1,23	0,3907	1,88	0,4699
0,02	0,0080	0,59	0,2224	1,24	0,3925	1,89	0,4706
0,03	0,0120	0,60	0,2257	1,25	0,3944	1,90	0,4713
0,04	0,0160	0,61	0,2291	1,26	0,3962	1,91	0,4719
0,05	0,0199	0,62	0,2324	1,27	0,3980	1,92	0,4726
0,06	0,0239	0,63	0,2357	1,28	0,3997	1,93	0,4732
0,07	0,0279	0,64	0,2389	1,29	0,4015	1,94	0,4738
0,08	0,0319	0,65	0,2422	1,30	0,4032	1,95	0,4744
0,09	0,0359	0,66	0,2454	1,31	0,4049	1,96	0,4750
0,10	0,0398	0,67	0,2486	1,32	0,4066	1,97	0,4756
0,11	0,0438	0,68	0,2517	1,33	0,4082	1,98	0,4761
0,12	0,0478	0,69	0,2549	1,34	0,4099	1,99	0,4767
0,13	0,0517	0,70	0,2580	1,35	0,4115	2,00	0,4772
0,14	0,0557	0,71	0,2611	1,36	0,4131	2,02	0,4783
0,15	0,0596	0,72	0,2642	1,37	0,4147	2,04	0,4793
0,16	0,0636	0,73	0,2673	1,38	0,4162	2,06	0,4803
0,17	0,0675	0,74	0,2703	1,39	0,4177	2,08	0,4812
0,18	0,0714	0,75	0,2734	1,40	0,4192	2,10	0,4821
0,19	0,0753	0,76	0,2764	1,41	0,4207	2,12	0,4830
0,20	0,0793	0,77	0,2794	1,42	0,4222	2,14	0,4838
0,21	0,0832	0,78	0,2823	1,43	0,4236	2,16	0,4846
0,22	0,0871	0,79	0,2852	1,44	0,4251	2,18	0,4854
0,23	0,0910	0,80	0,2881	1,45	0,4265	2,20	0,4861
0,24	0,0948	0,81	0,2910	1,46	0,4279	2,22	0,4868
0,25	0,0987	0,82	0,2939	1,47	0,4292	2,24	0,4875
0,26	0,1026	0,83	0,2967	1,48	0,4306	2,26	0,4881
0,27	0,1064	0,84	0,2995	1,49	0,4319	2,28	0,4887
0,28	0,1103	0,85	0,3023	1,50	0,4332	2,30	0,4893
0,29	0,1141	0,86	0,3051	1,51	0,4345	2,32	0,4898
0,30	0,1179	0,87	0,3078	1,52	0,4357	2,34	0,4904
0,31	0,1217	0,88	0,3106	1,53	0,4370	2,36	0,4909
0,32	0,1255	0,89	0,3133	1,54	0,4382	2,38	0,4913
0,33	0,1293	0,90	0,3159	1,55	0,4394	2,40	0,4918
0,34	0,1331	0,91	0,3186	1,56	0,4406	2,42	0,4922
0,35	0,1368	0,92	0,3212	1,57	0,4418	2,44	0,4927
0,36	0,1406	0,93	0,3238	1,58	0,4429	2,46	0,4931
0,37	0,1443	0,94	0,3264	1,59	0,4441	2,48	0,4934
0,38	0,1480	0,95	0,3289	1,60	0,4452	2,50	0,4938
0,39	0,1517	0,96	0,3315	1,61	0,4463	2,52	0,4941
0,40	0,1554	0,97	0,3340	1,62	0,4474	2,54	0,4945
0,41	0,1591	0,98	0,3365	1,63	0,4484	2,56	0,4948
0,42	0,1628	0,99	0,3389	1,64	0,4495	2,58	0,4951
0,43	0,1664	1,00	0,3413	1,65	0,4505	2,60	0,4953
0,44	0,1700	1,01	0,3438	1,66	0,4515	2,62	0,4956
0,45	0,1736	1,02	0,3461	1,67	0,4525	2,64	0,4959
0,46	0,1772	1,03	0,3485	1,68	0,4535	2,66	0,4961
0,47	0,1808	1,04	0,3508	1,69	0,4545	2,68	0,4963
0,48	0,1844	1,05	0,3531	1,70	0,4554	2,70	0,4965
0,49	0,1879	1,06	0,3554	1,71	0,4564	2,60	0,4953
0,50	0,1915	1,07	0,3577	1,72	0,4573	2,62	0,4956
0,43	0,1664	1,08	0,3599	1,73	0,4582	2,64	0,4959
0,44	0,1700	1,09	0,3621	1,74	0,4591	2,66	0,4961
0,45	0,1736	1,10	0,3643	1,75	0,4599	2,68	0,4963
0,46	0,1772	1,11	0,3665	1,76	0,4608	2,70	0,4965
0,47	0,1808	1,12	0,3686	1,77	0,4616	2,72	0,4967
0,48	0,1844	1,13	0,3708	1,78	0,4625	2,74	0,4969
0,49	0,1879	1,14	0,3729	1,79	0,4633	2,76	0,4971
0,50	0,1915	1,15	0,3749	1,80	0,4641	2,78	0,4973
0,51	0,1950	1,16	0,3770	1,81	0,4649	2,80	0,4974
0,52	0,1985	1,17	0,3790	1,82	0,4656	2,82	0,4976
0,53	0,2019	1,18	0,3810	1,83	0,4664	2,84	0,4977
0,54	0,2054	1,19	0,3830	1,84	0,4671	2,86	0,4979
0,55	0,2088	1,20	0,3849	1,85	0,4678	2,88	0,4980
0,56	0,2123	1,21	0,3869	1,86	0,4686	2,90	0,4981
2,92	0,4982	2,98	0,4986	3,60	0,499841	4,50	0,499997
2,94	0,4984	3,00	0,49865	3,80	0,499928	5,00	0,499997
2,96	0,4985	3,20	0,49931	4,00	0,499968		

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Бабак В.П., Білецький А.Я. та ін. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики / В.П. Бабак, А.Я. Білецький та ін.. – К., 2003. – 86 с.
2. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник / Т.І.Бубняк. – Львів: «Новий світ – 2000», 2007. – 436 с.
3. Посібник з теорії ймовірностей та математичної статистики / М.К.Бугір. – Тернопіль, 1998. – 176 с.
4. Булига К.Б., Барановська Л.В. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посіб. для студ. економ. спец. / К.Б.Булига, Л.В.Барановська. – К., 2000. – 97 с.
5. Валь О.Д. та ін. Теорія ймовірностей … від найпростішого: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закладів / О.Д.Валь. – Чернівці, 2004. – 93 с.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1977. – 479 с.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1979. – 479 с.
8. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей із елементами математичної статистики / В.І.Жлуктенко, С.І.Наконечний. – К.: НМК ВО, 1991. – 252 с.
9. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Практикум з курсу «Теорія ймовірностей і математична статистика» / В.І.Жлуктенко, С.І. Наконечний. – К.: КІНГ, 1991. – 142 с.
10. Лянце В., Чуйко Г. Вступ до нестандартної теорії ймовірностей: Тексти лекцій / В.Лянце, Г.Чуйко. – Л., 2002. – 132 с.
11. Рабик В.М. Основи теорії ймовірностей: Навчальний посібник / В.М. Рабик. – Львів: Магнолія плюс, 2006. – 176 с.
12. Ройко Л.Л. Математика для економістів та економічне моделювання: методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів факультету міжнародних відносин / Л.Л.Ройко – Луцьк: ПП Іванюк В. П., 2018. – 81 с.
13. Ройко Л.Л., Микитюк І.О., Ройко О.О. Особливості викладання вищої математики для студентів нематематичних спеціальностей / Л.Л.Ройко, І.О. Микитюк, О.О.Ройко // Збірник статей VII Міжнародної науково-практичної конференції “Математика. Інформаційні технології. Освіта”. № 4 – Луцьк: ПП Іванюк В. П., 2018.– С. 119–124.
14. Ройко Л.Л., Ройко О.О. Прикладна спрямованість курсу “Математика для економістів та економічне моделювання / Л.Л.Ройко, О.О. Ройко // Науковий журнал “Компютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво”. – № 30-31, ЛНТУ, 2018.– С. 263–268.
15. Ройко Л.Л., Ройко О.О. Значення курсу «Математика для економістів та економічне моделювання» у підготовці студента факультету міжнародних відносин / Л.Л.Ройко, О.О. Ройко // Збірник матеріалів науково-практичної конференції «Сучасна наука та освіта Волині»,

присвяченої 100-річчю Національної академії наук України, м. Володимир-Волинський / упоряд., голов. ред. Б. Є. Жулковський. – Луцьк : Волиньполіграф, 2018. – С.465 – 468.

16. Ройко Л.Л.Завдання для практичних занять з курсу «Вища математика» / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Твердиня. – 2006. – 52 с.
17. Ройко Л.Л. Завдання для самостійної та індивідуальної роботи з курсу «Вища математика» / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Твердиня. – 2007. – 56 с.
18. РойкоЛ.Л. Методичні рекомендації з курсу «Вища математика». Частина 3. Диференціальне та інтегральне числення / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Вежа, 2014. – 94 с.
19. Ройко Л.Л. Основи вищої математики: навч. посібник / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Вежа, 2014. – 148 с.
20. Ройко Л.Л.Вища математика і теорія ймовірностей: практичні завдання до першого змістового модуля з навчального курсу / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Вежа, 2016. – 38 с.
21. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник / П.С.Сеньо. – К.: Центр навч. літератури, 2004. – 448 с.
22. Турчин В.М. Теорія ймовірностей: Основні поняття, приклади, задачі: Навч.посіб. / В.М.Турчин. – К.: Вид-во А.С.К., 2004. – 136 с.
23. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Р.К.Чорней та ін. – К.: МАУП, 2003. – 328 с.
24. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей / З.Г.Шефтель. – К.: Вища школа, 1994. – 112 с.