

Волинський національний університет імені Лесі Українки

Навчально-науковий фізико-технологічний інститут

**Кевшин А. Г., Новосад О. В., Федосов С. А.**

# **ЕЛЕКТРОТЕХНІКА**

**Навчальний посібник**

Луцьк

2021

УДК 539.2

К 66

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки  
(протокол № 10 від 16.06.2021 р.).

**Рецензенти:**

*Давиденко Л. В.* – д-р техн. наук, доцент, доцент кафедри електричної інженерії, Луцький національний технічний університет;

*Хвищун М. В.* – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри електроніки та телекомунікації, Луцький національний технічний університет;

*Сахнюк В. Є.* – канд. фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського, Волинський національний університет імені Лесі Українки.

**К 66** Кевшин А. Г., Новосад О. В., Федосов С. А. **Електротехніка** : навч. посіб. Луцьк, 2021. 127 с.

Навчальний посібник «**Електротехніка**» – складова комплексу робочих матеріалів створених для забезпечення якісної підготовки фахівців спеціальностей галузей природничих і технічних наук.

Навчальне видання відповідає чинним програмам підготовки й рекомендовано бакалаврам спеціальностей 014 Середня освіта (Фізика), 104 Фізика та астрономія, 105 Прикладна фізика та наноматеріали, спеціальностей галузей технічних наук і програмам низки спецкурсів навчальних планів підготовки студентів ВНУ імені Лесі Українки.

**УДК 539.2**

© Кевшин А. Г. та ін., 2021

© Вежа-Друк, 2021

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b>	5
<b>РОЗДІЛ 1</b>	
<b>ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ</b>	6
1.1. Електричне коло і його елементи	6
1.2. Класифікація електричних струмів, ЕРС і напруг	10
<b>РОЗДІЛ 2</b>	
<b>КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ. ЗАКОНИ КІРХГОФА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ</b>	13
2.1. Перший та другий закон Кірхгофа	13
2.2. Приклади використання законів Кірхгофа	15
2.3. Метод контурних струмів	18
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ	21
ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ	26
<b>РОЗДІЛ 3</b>	
<b>ЛІНІЙНІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ</b>	31
3.1. Основні відомості про змінний струм	31
3.2. Кола змінного струму з резистивним, індуктивним та ємнісним елементом	33
3.3. Послідовне з'єднання активного, індуктивного і ємнісного опорів	38
3.4. Резонанс напруг	40
3.5. Резонанс струмів	42
3.6. Потужність у колі змінного струму з резистивним елементом	44
3.7. Потужність у колі змінного струму з індуктивним елементом	45
3.8. Потужність у колі змінного струму з ємнісним елементом	47
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ	50
ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ	54
<b>РОЗДІЛ 4</b>	

<b>ОДНОФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ</b>	58
4.1. Зображення синусоїдних величин векторними	58
4.2. Комплексна форма подання синусоїдальних напруг і струмів	59
4.3. Закон Ома у комплексній формі для ділянки кола змінного струму	61
4.4. Потужність у комплексній формі	63
<b>ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ</b>	66
<b>ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ</b>	71
<b>РОЗДІЛ 5</b>	
<b>ТРИФАЗНІ КОЛА ЕЛЕКТРИЧНОГО СТРУМУ</b>	79
5.1. Основні поняття і визначення	79
5.2. Схеми з'єднання обмоток трифазного генератора	81
5.3. З'єднання трифазних споживачів «зіркою»	83
5.4. З'єднання трифазних споживачів «трикутником»	86
5.5. Потужність трифазної системи	88
<b>ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ</b>	91
<b>ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ</b>	93
<b>РОЗДІЛ 6</b>	
<b>ТРАНСФОРМАТОРИ</b>	99
6.1. Загальні відомості про трансформатори	99
6.2. Принцип роботи однофазного трансформатора	102
6.3. Режим холостого ходу однофазного трансформатора	105
6.4. Коротке замикання трансформатора	107
6.5. Втрати і ККД трансформатора	108
6.6. З'єднання обмоток трифазних трансформаторів	111
6.7. Автотрансформатори	113
6.8. Вимірювальні трансформатори	115
<b>ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ</b>	118
<b>ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ</b>	123
<b>ЛІТЕРАТУРА</b>	126

## ВСТУП

**Предметом** вивчення навчальної дисципліни «Електротехніка» є електромагнітні явища і їх використання для генерування, передачі і розподілу електроенергії, вирішення проблем електромеханіки, електротехнології, електроенергетики тощо.

**Метою** даної дисципліни є вивчення основних законів теорії електричних кіл постійного та синусоїдного струму, ознайомлення з основами роботи електричних машин.

**Основними завданнями** вивчення дисципліни є ознайомлення студентів з основним законам електричних, магнітних і електромагнітних кіл із структурними елементами й фізичними величинами кіл, теорією і методологією аналізу електричних кіл постійного та змінного струмів.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні:

***знати:***

основні закони електротехніки для електричних і магнітних кіл;  
методи вимірювання електричних і магнітних величин;  
принципи роботи основних електричних машин та апаратів їхні робочі і пускові характеристики.

***вміти:***

користуватися символічним методом та законами Ома та Кірхгофа, здійснювати вимірювання струмів, напруг, потужностей у трифазних колах;  
користуватися електровимірювальними приладами, знаходити зведену, абсолютну та відносні похибки;  
проводити вимірювання для визначення характеристик трансформаторів;  
аналізувати режими роботи різноманітних нескладних електронних пристроїв.

# РОЗДІЛ 1

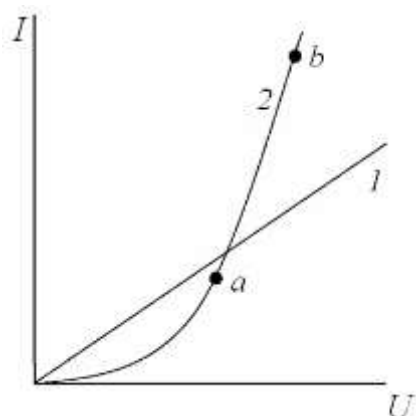
## ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

### 1.1. Електричне коло і його елементи

*Електротехніка* – наука про теоретичне вивчення та практичне застосування електричних і магнітних явищ для виробництва, пересилання, розподілу та перетворення електричної енергії в інші види енергії: світлову, теплову, механічну, хімічну тощо.

*Електричним колом* називають сукупність пристроїв, що призначені для генерування, передачі, перетворення і використання електричної енергії. Окремий пристрій, що входить до складу електричного кола і виконує в ній визначену функцію, називається *елементом електричного кола*. Основними елементами найпростішого електричного кола є джерела і приймачі електричної енергії. Частина електричного кола, що містить виділені в ній елементи, називають *ділянкою кола*.

Елементи кола, що призначені для генерування електричної енергії, називають *джерелами живлення* або *джерелами електричної енергії*, а елементи, що використовують електричну енергію – *приймачами електричної енергії*.



**Рис. 1.1.** Характеристики елементів кола: 1 – лінійна; 2 – нелінійна

Електричне коло, в залежності від характеру протікаючого в ньому струму називають: «*коло постійного струму*» або «*коло змінного струму*». Елементи кіл, вольт-амперні характеристики яких є лінійними, називають *лінійними елементами*. Нелінійні характеристики мають нелінійні елементи (рис. 1.1). Електричні кола постійного і змінного

струмів розрізняють також за способом з'єднання їхніх елементів – *нерозгалужені* й *розгалужені кола*, за числом джерел електричної енергії – кола з одним або декількома джерелами електричної енергії.

Електричне коло, що складається з лінійних елементів, називають лінійним колом. Електричне коло, до якого входить хоча б один нелінійний елемент, називають нелінійним колом. Приймачі електричної енергії як елементи електричного кола мають властивості поглинати електричну енергію з кола й перетворювати її на інші види енергії (необоротний процес), створювати свої магнітні й електричні поля, енергії яких можуть накопичуватися і за певних умов повертатися назад у коло (оборотний процес). Щоб характеризувати ці властивості, вводять поняття параметрів елемента. У числі параметрів елементів кола розрізняють *опір*, *індуктивність* і *ємність*.

*Опір* ( $R$ ) – параметр, що характеризує властивість елемента поглинати енергію з електричного кола й перетворювати її на інші види енергії (теплову або світлову). Одиницею виміру опору є [Ом].

Властивість елемента кола створювати власне магнітне поле (поле самоіндукції), коли в ньому є електричний струм, характеризують параметром індуктивності  $L$ . *Індуктивність* є коефіцієнтом пропорційності між струмом ( $I, i$ ) і потокозчепленням ( $\psi, \psi_t$ ) даного пристрою:  $\psi = LI$  або  $\psi_t = Li$ . Його називають коефіцієнтом *самоіндукції* і вимірюють у Генрі [Гн].

Параметр *взаємної індуктивності*  $M$  характеризує властивість першого елемента із струмом  $i_1$  створювати магнітне поле, що частково зчіплюється з витками  $w_2$  другого елемента. Потокозчеплення  $\psi_{21}$  другого елемента (перший індекс), що обумовлене струмом  $i_1$  першого елемента (другий індекс), називають *потокозчепленням взаємоіндукції* другого елемента. Параметр взаємної індуктивності  $M$  є коефіцієнтом пропорційності між струмом першого елемента й створеним цим струмом потокозчепленням другого елемента:  $\psi_{21} = MI_1$  або  $\psi_{21} = Mi_1$ .

Ємність ( $C$ ) – параметр, що характеризує властивість елемента накопичувати заряди або збуджувати ними електричне поле. Цей параметр є коефіцієнтом пропорційності між напругою і зарядом елемента:  $q = CU$ .

У загальному випадку будь-який реальний пристрій має усі три параметри  $R$ ,  $L$  і  $C$ .

Основну властивість джерела електричної енергії – здатність створювати й підтримувати різницю потенціалів на окремих ділянках кола, а також збуджувати й підтримувати електричний струм у замкнутому колі – характеризують його *електрорушійною силою* (ЕРС).

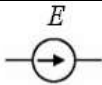
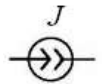
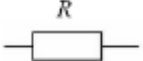

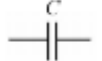
Елементи кола, роботу яких можна описати за допомогою параметрів  $R$ ,  $L$ ,  $M$  і  $C$ , називають *пасивними*. Термін «пасивний» підкреслює, що такі елементи не можуть виконати своє призначення без впливу на них сторонніх джерел.

Елементи кола, для опису роботи яких, крім пасивних параметрів, необхідно вводити ЕРС або струм, називають *активними*. До активних елементів відносять джерела електричної енергії і деякі приймачі при зарядці, двигуни постійного струму та ін.

Елементи кола, які мають тільки один параметр, називаються *ідеальними*. Назву та відповідне умовне графічне позначення ідеальних елементів електричного кола подано у таблиці 1.

Таблиця 1

Ідеальні елементи електричного кола

Ідеальні елементи	Параметр	Умовне графічне позначення
Джерело ЕРС	ЕРС $E$	
Джерело струму	Струм $I$	
Резистор	Опір $R$	
Індуктивна котушка	Індуктивність $L$	
Конденсатор	Ємність $C$	

Ідеальне джерело ЕРС має тільки параметр  $E$  (величина ЕРС), ідеальне джерело струму – тільки параметр  $J$  (величина струму), тільки один параметр



опору  $R$  має резистивний елемент (резистор), ідеальний індуктивний елемент (ідеальна індуктивна котушка) – тільки параметр  $L$ , ідеальний ємнісний елемент (ідеальний конденсатор) – тільки параметр  $C$ .

Джерела електричної енергії розділяють на джерела ЕРС і джерела струму, схеми заміщення яких показані на рис. 1.2. Схема заміщення – це розрахункова модель електричного кола, на якій реальні елементи заміщуються розрахунковими моделями (ідеалізованими елементами).

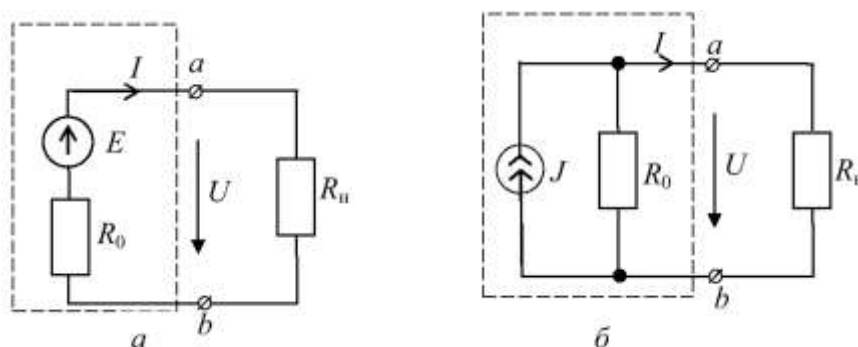


Рис. 1.2. Схеми (а) заміщення джерел ЕРС і (б) струму

Властивості джерела електричної енергії визначаються його вольт-амперною характеристикою – залежністю вихідної напруги від струму  $U(I)$ .

Якщо в схемі кола внутрішній опір джерела електричної енергії  $R_0$  малий у порівнянні з опором навантаження  $R$ , то справедлива нерівність  $R_0 I \ll E$ . У цьому випадку напруга між виводами джерела електричної енергії практично не залежить від струму, тобто  $U = E = \text{const}$ , і джерело називається *джерелом ЕРС*.

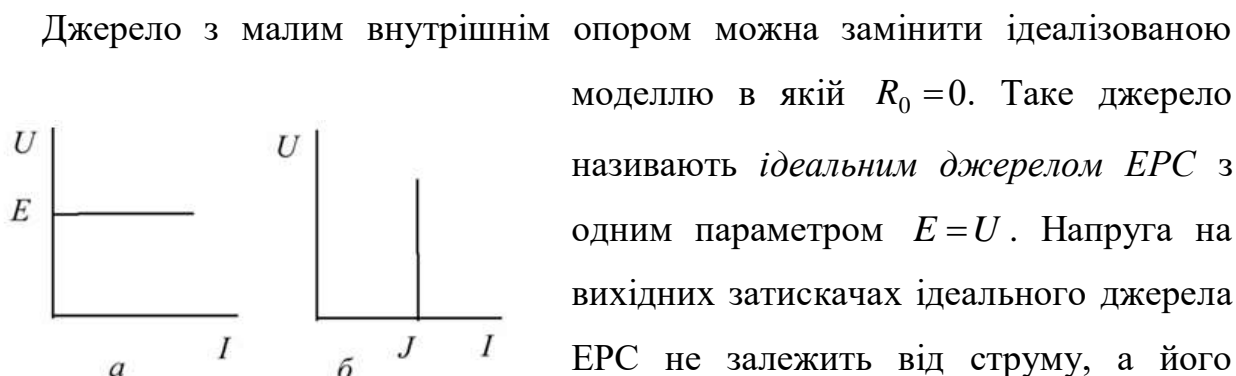


Рис. 1.3. Зовнішні характеристики ідеального джерела (а) ЕРС, (б) струму

Джерело з малим внутрішнім опором можна замінити ідеалізованою моделлю в якій  $R_0 = 0$ . Таке джерело називають *ідеальним джерелом ЕРС* з одним параметром  $E = U$ . Напруга на вихідних затискачах ідеального джерела ЕРС не залежить від струму, а його зовнішня характеристика має вигляд прямої  $U = E = \text{const}$  (рис. 1.3 а).

Якщо в схемі кола внутрішній опір джерела електричної енергії в багато разів більший опору навантаження ( $R_0 \gg R_n$ ), то його струм

$$I = \frac{E}{R_0 + R_n} \approx \frac{E}{R_0} = J = \text{const}$$

не залежить від опору навантаження і джерело називається *джерелом струму*.

Джерело з великим внутрішнім опором можна замінити ідеалізованою моделлю, в якій  $R_0 = \infty$ ,  $E = \infty$  і для якої є справедливим вираз  $E/R_0 = J$ . Таке джерело називають *ідеальним джерелом струму* з одним параметром  $J$ . Струм джерела струму не залежить від напруги на його вихідних затискачах, а його зовнішня характеристика має вигляд прямої  $I = J = \text{const}$  (рис. 1.3 б).

Графічне зображення електричного кола за допомогою умовних позначень його елементів називають *схемою кола*. Графічне зображення кола, в якому замість реальних представлені ідеальні елементи, називають *схемою заміщення кола*.

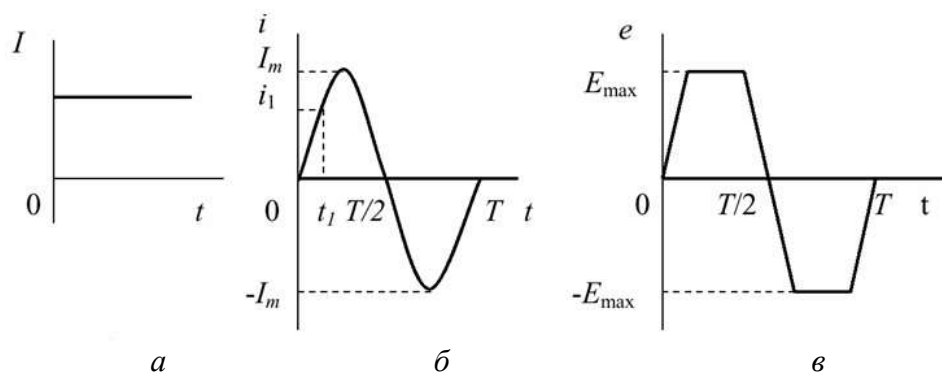
## 1.2. Класифікація електричних струмів, ЕРС і напруг

Коли електричне коло замкнуте і в ньому є джерело електричної енергії, то в колі може протікати електричний струм. За видом струму електричні кола розділяються на кола постійного та змінного струму. Електричний струм, величина й напрямок якого залишаються незмінними, називають *постійним струмом* (рис. 1.4 а) і позначають  $I$ . Якщо за  $t$  секунд пройшло  $q$  кулонів електричного заряду, то сила постійного струму

$$I = \frac{q}{t}.$$

Електричний струм, величина або напрямок якого не залишаються постійними, називають *змінним струмом*. Це визначення відноситься також до змінних напруг і ЕРС. Значення змінного струму в розглянутий момент часу називають його миттєвим значенням (*миттєвим струмом*). Для позначення миттєвого струму, напруги і ЕРС застосовують малі літери латинського алфавіту:  $i$ ,  $u$ ,  $e$ . Для того щоб підкреслити, що змінний струм, напруга і ЕРС

є функціями часу, їх іноді позначають як  $i(t)$ ,  $u(t)$  і  $e(t)$ .



**Рис. 1.4.** Форми кривих постійних і періодичних (а і б) струмів і (в) ЕРС

Струм  $i$  пов'язаний із зарядом  $q$  і часом  $t$  співвідношенням

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Домінуюче значення серед змінних струмів мають періодичні струми. *Періодичним* називають такий струм, миттєві значення якого повторюються через рівні проміжки часу. Найменший проміжок часу, після закінчення якого миттєві значення струму повторюються, називають *періодом* і позначають літерою  $T$ . Число періодів за одну секунду називають *частотою* періодичного струму  $f$ . Частота й період пов'язані співвідношенням:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Струм, що змінюється за гармонійним законом, називають *синусоїдальним струмом* (рис. 1.4 б). Якщо закон зміни миттєвих значень періодичного струму (напруги) відмінний від гармонійного, то такий струм (напругу) називають *несинусоїдальним* (рис. 1.4 в).

Найбільше значення синусоїдального струму називають *амплітудою* і позначають  $I_m$ .

Постійні або змінні струми виникають в електричних колах під впливом *електрорушійних сил* (ЕРС), збуджуваних у джерелах у процесі перетворення якого-небудь виду енергії в електричну енергію. ЕРС і напруги (за аналогією із струмами) відповідно до закону зміни їхніх миттєвих значень називають постійними, змінними, синусоїдальними або несинусоїдальними. Постійні ЕРС

і напруги позначають прописними літерами  $E$  або  $\varepsilon$  і  $U$ , змінні ЕРС і напруги – малими літерами  $e$  і  $u$ . Одиницею виміру ЕРС і напруги є вольт [В].

### Контрольні запитання

1. Що розуміють під електричним колом? Під ділянкою та елементом кола?
2. Які елементи кола називаються джерелами живлення або джерелами, а які приймачами електричної енергії?
3. Які елементи кіл називають лінійними, а які не лінійними?
4. Назвіть основні параметри елементів електричного кола.
5. Які елементи кола називають пасивними, а які активними?
6. Які елементи кола називають ідеальними?
7. Яке джерело називають *ідеальним джерелом ЕРС*, а яке ідеальним джерелом струму?
8. Який струм називається постійним, а який змінним?
9. Якими основними фізичними величинами характеризується періодичний струм?
10. Який струм називається синусоїдальним?

## РОЗДІЛ 2

### КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ. ЗАКОНИ КІРХГОФА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

#### 2.1. Перший та другий закон Кірхгофа

При аналізі роботи багатьох електротехнічних приладів приходиться мати справу зі складними електричними колами та їх схематичними зображеннями, схеми заміщення яких містять як пасивні, так і активні елементи. Основними топологічними поняттями теорії електричних кіл є вітка, вузол, контур.

*Віткою* називається ділянка електричного кола з одним і тим же струмом

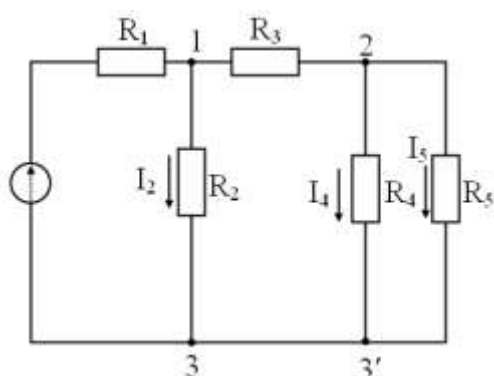


Рис. 2.1. Схема електричного кола

(ряд послідовно з'єднаних елементів електричного кола розташованих між двома вузлами). Вітка може складатися з одного пасивного або активного елемента, а також може бути послідовним з'єднанням кількох елементів. На рис. 2.1 наведена схема електричного кола з п'ятьма вітками.

*Вузлом* називають місце з'єднання трьох і більше віток. Розрізняють потенціальні та геометричні вузли. На рисунку маємо чотири геометричні вузли: 1, 2, 3, 3'. Геометричні вузли 3, 3' мають однакові потенціали, тому їх при розрахунках можна об'єднати в один-потенціальний вузол.

*Контуром* називають замкнений шлях, що проходить через кілька віток і вузлів. На малюнку як приклад можна виділити контур 1-2-3-3'. Незалежним контуром називається контур, який відрізняється від попереднього хоч би однією віткою, незадіяною раніше. Контур характеризується сукупністю віток і напрямком обходу.

Електричні кола, в яких діє тільки одне джерело електричної енергії, називають простими колами. У свою чергу, електричні кола, що складаються тільки з однієї вітки і утворюють тільки один контур називаються нерозгалуженими колами.

У теорії електричних кіл важливе значення мають експериментально встановлені в 1847 р. німецьким фізиком Г. Р. Кірхгофом закони, що одержали назву 1-го й 2-го законів Кірхгофа.

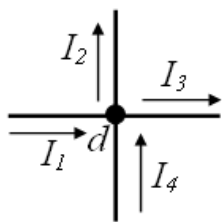
*Перший закон Кірхгофа.* Цей закон відносять до вузлів кола й для випадку постійних струмів формулюють в такий спосіб: *алгебраїчна сума струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю*

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

При записі рівнянь за першим законом Кірхгофа підсумовування струмів роблять алгебраїчно: струмам, що спрямовані до вузла, привласнюють один знак, наприклад позитивний, а струмам, що спрямовані від вузла – інший знак, наприклад, негативний. Тому часто зустрічається ще інше формулювання першого закону Кірхгофа: *сума струмів, що притікають до вузла, дорівнює сумі струмів, що виходять з нього.*

Перший закон Кірхгофа є наслідком закону збереження кількості електрики, відповідно до якого ні в якій точці заряди не можуть безмежно накопичуватися: *кількість електрики, що притікає до даної точки за певний проміжок часу, повинна дорівнювати кількості електрики, що відтікає від неї за той же час.*

Оскільки під час розрахунку розгалужених електричних кіл дійсні напрями струмів у вітках здебільшого невідомі, то для складання рівнянь Кірхгофа необхідно задатись умовно додатними напрямками струмів у вітках, позначивши їх на схемі стрілками. Якщо у відповідній вітці є ЕРС, то найбільш доцільно, направляти струми за напрямом цієї ЕРС. Якщо в результаті розрахунку отримаємо для деякого струму від'ємне значення, це означає, що дійсний напрям струму протилежний до показаного на схемі стрілкою.



**Рис. 2.2.** Схема ділянки кола

Прийmemo для схеми на рис. 2.2 струми, що входять до вузла  $d$ , позитивними ( $I_1$  та  $I_4$ ), а струми, що виходять з вузла – негативними ( $I_2$  та  $I_3$ ). Тоді

можемо записати наступне рівняння за першим законом Кірхгофа

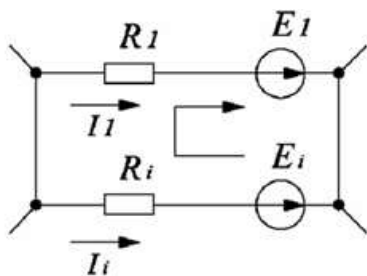
$$I_1 + I_4 - I_2 - I_3 = 0, \quad (2.1.1)$$

що відповідатиме 1-му формулюванню першого закону Кірхгофа, або у вигляді

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3,$$

що відповідає 2-му формулюванню першого закону Кірхгофа, або легко отримується шляхом перетворення співвідношення (2.1.1).

*Другий закон Кірхгофа.* Другий закон Кірхгофа стосується електричного контуру: в замкненому контурі алгебраїчна сума спадів напруг на опорах всіх елементів контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, що діють в цьому контурі. Під час складання рівнянь за другим законом Кірхгофа необхідно правильно визначати знаки спадів напруг та ЕРС. Варто відзначити, що напрями обходу кожного контуру вибирають довільно. Перед спадом напруги  $I_k R_k$  ставиться знак «+», якщо напрям обходу контуру співпадає з вибраним додатним напрямом струму в даному опорі, і знак «-», якщо ці напрями протилежні. Якщо напрям обходу контуру співпадає з напрямом ЕРС, то ця ЕРС входить до рівняння із знаком «+», і навпаки.



**Рис. 2.3.** Схема електричного кола з нанесеними позначеннями струмів і напрямків обходу контуру

$$\sum_{k=1}^i \pm I_k R_k = \sum_{k=1}^i \pm E_k.$$

Це рівняння є математичним записом другого закону Кірхгофа.

Для схеми зображеної на рис. 2.3 другий закон Кірхгофа запишеться у вигляді:

$$I_1 R_1 - I_i R_i = E_1 - E_i.$$

## 2.2. Приклади використання законів Кірхгофа

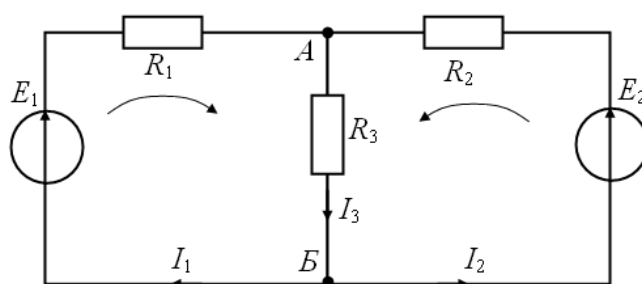
Любе складне коло можна розрахувати, застосувавши два закона Кірхгофа. Якщо для досліджуваного кола задані величини всіх ЕРС і опорів, то для знаходження всіх струмів треба стільки розрахункових рівнянь, скільки у

колі невідомих струмів (по кількості віток). При цьому кількість незалежних вузлових рівнянь, які складаються по першому закону Кірхгофа, повинна бути на одиницю менше кількості вузлів кола. Інші рівняння складаються по другому закону Кірхгофа для контурів електричного кола. Рівняння по другому закону Кірхгофа рекомендується складати для більш простих контурів з меншим числом резисторів та джерел живлення. Крім того, кожний новий контур, для якого складається рівняння, повинен мати не менше однієї вітки, яка не входить в контури, для яких вже складені рівняння.

У загальному випадку методику використання законів Кірхгофа можна проводити за наступною схемою.

1. Визначаємо кількість вузлів  $q$ , віток  $p$  і контурів  $n$ .
2. Довільно вибираємо і позначаємо на схемі додатні напрями струмів у вітках.
3. Складаємо  $q-1$  рівняння за першим законом Кірхгофа, та  $n$  рівнянь за другим законом Кірхгофа, вибравши довільно напрямки обходу контурів (всього необхідно скласти  $p - n$  рівнянь).

*Приклад 1.* Записати рівняння згідно першого та другого законів Кірхгофа для схеми, зображеної на рис. 2.4.



**Рис. 2.4.** Схема електричного кола з нанесеними позначеннями вузлів, струмів і напрямків обходу контурів

Так як задана схема має два вузли, то за першим законом Кірхгофа необхідно скласти одне рівняння для будь-якого із вузлів. Складаємо рівняння для вузла  $A$ :

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$



Так як кількість невідомих, для даного кола, дорівнює трьом, то необхідно мати три незалежних рівняння. Тому по другому закону Кірхгофа необхідно скласти два рівняння для двох, будь-яких, незалежних контурів.

Складаємо рівняння для контурів, попередньо вибравши напрями обходу контурів, як показано на схемі.

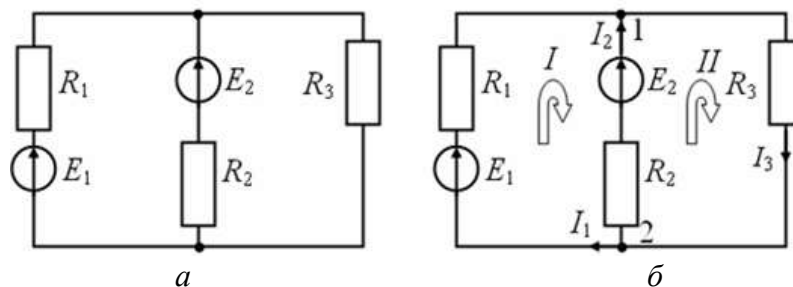
$$\begin{cases} I_1 R_1 + I_3 R_3 = E_1 \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 = E_2 \end{cases}$$

Отже маємо систему з трьома невідомими:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 R_1 + I_3 R_3 = E_1 \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 = E_2 \end{cases}$$

Вирішивши цю систему, можна визначити струми  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ .

*Приклад 2.* Визначити струми у вітках схеми зображеної на рисунку 2.5, якщо  $E_1=15$  В;  $E_2=14$  В;  $R_1=3$  Ом;  $R_2=2$  Ом;  $R_3=6$  Ом.



**Рис. 2.5.** Схема електричного кола з нанесеними позначеннями вузлів, струмів і напрямків обходу контурів

Розв'язок.

1.  $q = 2$ ;  $p = 3$ ;  $n = 2$ .
2. Довільно вибираємо і позначаємо на схемі умовно – додатні напрями струмів  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  у вітках (рис. 2.5).

3. Складаємо одне рівняння за першим законом Кірхгофа (вузол 1) та  $n = 2$  рівнянь за другим законом Кірхгофа для контурів I – II, вибравши напрями обходу контурів довільно:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 = E_1 - E_2 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 3I_1 - 2I_2 = 15 - 14 \\ 2I_2 + 6I_3 = 14 \end{cases}$$

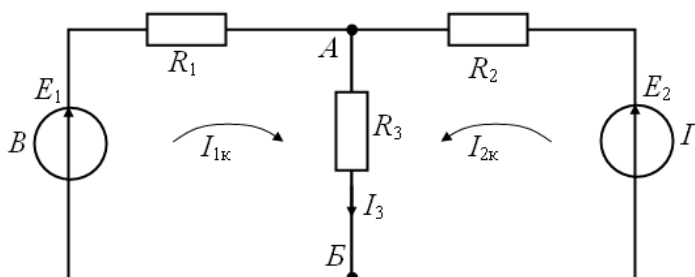
4. Розв'язавши систему рівнянь одержимо:  $I_1=1$  А;  $I_2=1$  А;  $I_3=2$  А.

### 2.3. Метод контурних струмів

За допомогою законів Кірхгофа принципово можливо розрахувати будь-яке електричне коло. Але у випадку складних розгалужених кіл треба розв'язувати дуже громіздку систему рівнянь. Спростити розрахунки допомагає метод контурних струмів. Даний метод використовує поняття про *контурні струми*, під якими розуміють *розрахункові (умовні) струми*, що замикаються тільки у своїх контурах. Він заснований на застосуванні другого закону Кірхгофа. Метод полягає в наступному:

- в заданій схемі вибирають довільно напрями струмів;
- для незалежних контурів вибирають напрям контурних струмів;
- визначають контури ЕРС, власні та загальні опори контурів, обходячи контури в напрямку контурних струмів;
- складають систему рівнянь контурних струмів;
- за допомогою контурних струмів визначають дійсні струми в вітках заданої схеми.

Розглянемо метод контурних струмів на прикладі схеми, яка зображена на рис. 2.6.



**Рис. 2.6.** Схема електричного кола для визначення струмів за методом контурних струмів

Для розрахунку струмів в заданому колі контури вибирають так як і при складанні рівнянь по другому закону Кірхгофа. На зображеній схемі (рис. 2.6) вибрані контури  $ABBA$  та  $ABGA$  і для кожного з них довільно задаються

напрямом струму, який замикається в цьому контурі (для контура *АВВА* за годинниковою стрілкою, а для контура *АВГА* – проти годинникової стрілки). Ці струми називають контурними струмами ( $I_{1k}, I_{2k}$  – контурні струми). Для кожного контура складається рівняння по другому закону Кірхгофа, причому за напрям обходу контура приймається напрям, який збігається з напрямом контурного струму. Число незалежних рівнянь по другому закону Кірхгофа дорівнює кількості незалежних контурів:

$$\begin{cases} I_{1k}(R_1 + R_3) + I_{2k}R_3 = E_1 \\ I_{2k}(R_2 + R_3) + I_{1k}R_3 = E_2 \end{cases}.$$

У праву частину цих рівнянь входить ЕРС джерел, які зустрічаються при обході даного контура. Алгебраїчна сума ЕРС даного контуру називається контурною ЕРС. Для даної схеми:

$$E_{1k} = E_1, \quad E_{2k} = E_2.$$

У ліву частину рівнянь входять спади напруг, які обумовлені контурними струмами. Сума опорів всіх віток, які входять в даний контур, називається власним опором контура. Для досліджуваної схеми для контурів *АВВА* та *АВГА* власні контури відповідно:

$$\begin{cases} R_{1k} = R_1 + R_2 \\ R_{2k} = R_2 + R_3 \end{cases}.$$

Опори віток, які входять в два суміжних контури, називаються загальними опорами. У даній схемі такі опори  $R_{12} = R_{21} = R_3$ . З урахуванням вище сказаного рівняння будуть мати такий вигляд:

$$\begin{cases} I_{1k}R_{1k} + I_{2k}R_{12} = E_{1k} \\ I_{2k}R_{2k} + I_{1k}R_{21} = E_{2k} \end{cases}.$$

Вирішуючи цю систему рівнянь визначають контурні струми. Контурні струми дорівнюють дійсним струмам віток, які належать тільки даним контурам:

$$I_1 = I_{1k}, \quad I_2 = I_{2k}.$$

Дійсні струми в вітках схеми, які відносяться до двох суміжних контурів дорівнюють алгебраїчній сумі контурних струмів тих контурів, в які ця вітка входить:

$$I_3 = I_{1k} + I_{2k} .$$

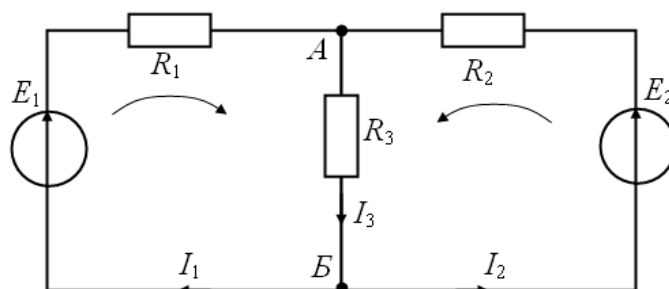
Для даної схеми замість трьох рівнянь по першому та другому законам Кірхгофа достатньо двох рівнянь з двома контурними струмами.

### **Контрольні запитання**

1. Що називається віткою електричного кола?
2. Що називається вузлом електричного кола?
3. Що називається незалежним контуром електричного кола?
4. Сформулюйте перший закон Кірхгофа.
5. Сформулюйте другий закон Кірхгофа.
6. Як математично записуються перший та другий закон Кірхгофа?
7. За якою методикою використовують закони Кірхгофа для розв'язку задач?
8. Як вибирають позитивні напрямки для струмів віток і як зв'язані з ними позитивні напрямки напруг на опорах.
9. Що таке контурні струми?
10. У чому полягає метод контурних струмів?

## ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 1.** Записати рівняння згідно першого та другого законів Кірхгофа для схеми, зображеної на рисунку.



Так як задана схема має два вузли, то по першому закону Кірхгофа необхідно скласти одне рівняння для будь-якого із вузлів. Складаємо рівняння по першому закону Кірхгофа для вузла А:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

Так як кількість невідомих, для даного кола, дорівнює трьом, то необхідно мати три незалежних рівняння. Тому по другому закону Кірхгофа необхідно скласти два рівняння для двох, будь-яких, незалежних контурів.

Складаємо рівняння по другому закону Кірхгофа для контурів, попередньо вибравши напрями обходу контурів, як показано на схемі.

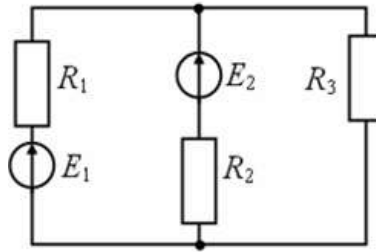
$$\begin{cases} I_1 R_1 + I_3 R_3 = E_1 \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 = E_2 \end{cases}$$

Отже маємо систему з трьома невідомими:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 R_1 + I_3 R_3 = E_1 \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 = E_2 \end{cases}$$

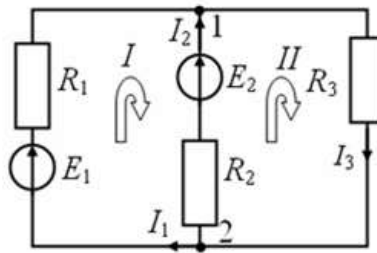
Розв'язавши цю систему можна визначити струми  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ .

**Приклад 2.** Визначити струми у вітках схеми зображеної на рисунку, якщо  $E_1=15$  В;  $E_2=14$  В;  $R_1=3$  Ом;  $R_2=2$  Ом;  $R_3=6$  Ом.



1.  $q = 2$ ;  $p = 3$ ;  $n = 2$ .

2. Довільно вибираємо і позначаємо на схемі умовно – додатні напрямки струмів  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  у вітках.

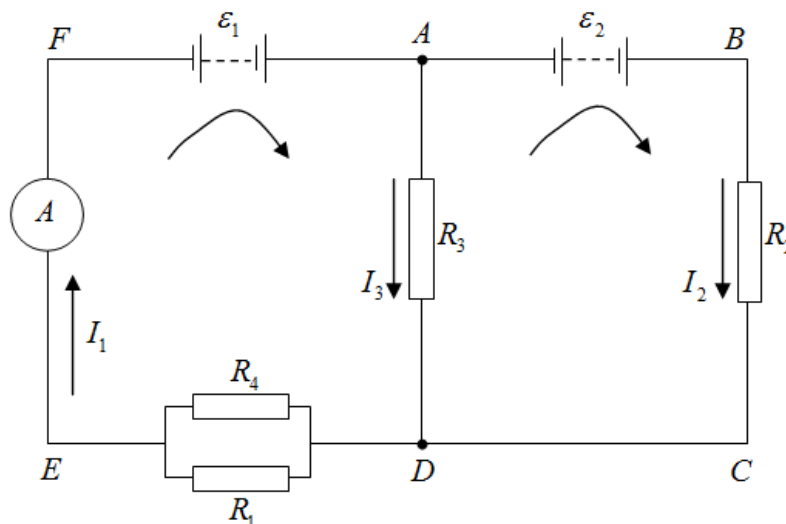


3. Складаємо одне рівняння за першим законом Кірхгофа (вузол 1) та  $n = 2$  рівнянь за другим законом Кірхгофа для контурів I – II, вибравши напрямки обходу контурів довільно:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 = E_1 - E_2 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 3I_1 - 2I_2 = 15 - 14 \\ 2I_2 + 6I_3 = 14 \end{cases}$$

4. Розв'язавши систему рівнянь одержимо:  $I_1 = 1$  А;  $I_2 = 1$  А;  $I_3 = 2$  А.

**Приклад 3.** Знайти покази амперметра, якщо  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 100$  В,  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $R_3 = 40$  Ом і  $R_4 = 30$  Ом.



Для вузла  $D$  згідно першого закону Кірхгофа можемо записати:

$$I_2 + I_3 - I_1 = 0. \quad (*)$$

Обхід контурів  $ABCD$  та  $ADEF$  виберемо за годинниковою стрілкою. Тоді для контуру  $ABCD$  згідно другого закону Кірхгофа можемо записати рівняння:

$$I_2 R_2 - I_3 R_3 = \varepsilon_2.$$

Відповідно для контуру  $ADEF$  можемо записати рівняння:

$$I_3 R_3 + I_1 R_{14} = \varepsilon_1.$$

Опори  $R_1$  и  $R_4$  з'єднанні паралельно, тому їх загальний опір  $R_{14}$  знайдемо по формулі:

$$R_{14} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12 \text{ Ом.}$$

Підставимо дані:

$$10I_2 - 40I_3 = 100 \quad (*)$$

$$40I_3 + 12I_1 = 100 \quad (*)$$

Запишемо систему рівнянь (\*) в матричному вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -40 \\ 12 & 0 & 40 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix},$$

де  $A$  – основна матриця системи, її елементи є коефіцієнтами при невідомих струмах;  $B$  – матриця стовпець вільних членів (ЕРС).

Запишемо і обчислимо основний визначник  $\Delta$  матриці  $A$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -40 \\ 12 & 0 & 40 \end{vmatrix} = -400 - 480 + 0 - 120 - 0 - 0 = -1000.$$

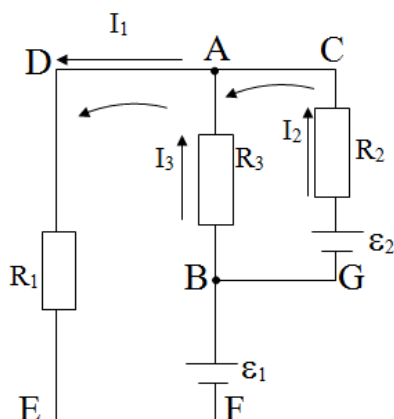
Знайдемо визначник  $\Delta_{I_1}$ , одержаний заміною відповідних стовпців визначника  $\Delta$  стовпцями матриці  $B$ .

$$\Delta_{I_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 100 & 10 & -40 \\ 100 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 0 - 4000 + 0 - 1000 - 0 - 4000 = -9000.$$

Тоді:

$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta} = \frac{-9000}{-1000} = 9 \text{ A}.$$

**Приклад 4.** На рисунку представлена схема електричного кола. Визначити струми, що протікають через опори, якщо  $\varepsilon_1 = 20 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_2 = 25 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ . Внутрішніми опором джерел струму знехтувати.



Для вузла  $A$  по першому закону Кірхгофа можемо записати:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Обхід контуру  $ABGC$  виберемо проти годинникової стрілки. Тоді по другому закону Кірхгофа можемо записати:

$$I_2 R_2 - I_3 R_3 = \varepsilon_2.$$

Обхід контуру  $ADEF$  виберемо також проти годинникової стрілки. Тоді по другому закону Кірхгофа можемо записати:

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = \varepsilon_1.$$

Підставимо дані:

$$15I_2 - 10I_3 = 25,$$

$$10I_1 + 10I_3 = 20.$$

Запишемо систему рівнянь в матричному вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & -10 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Запишемо і обчислимо основний визначник  $\Delta$  матриці  $A$ :



$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & -10 \\ 10 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -150 - 100 + 0 - 150 - 0 - 0 = -400.$$

Знайдемо визначники  $\Delta_{I_1}$ ,  $\Delta_{I_2}$ ,  $\Delta_{I_3}$ , одержані заміною відповідних стовпців визначника  $\Delta$  стовпцями матриці  $B$ .

$$\Delta_{I_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 25 & 15 & -10 \\ 20 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 0 - 200 + 0 - 300 - 0 - 250 = -750.$$

$$\Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 25 & -10 \\ 10 & 20 & 10 \end{vmatrix} = -250 + 0 + 0 - 250 - 200 - 0 = -700.$$

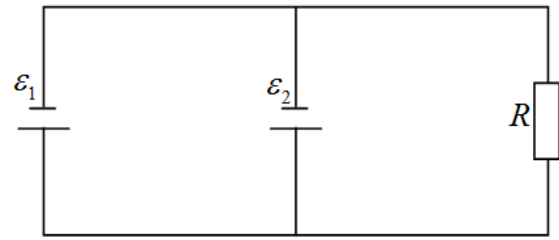
$$\Delta_{I_3} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 25 \\ 10 & 0 & 20 \end{vmatrix} = -300 + 250 + 0 - 0 - 0 - 0 = -50.$$

Невідомі значення струмів знайдемо із виразів:

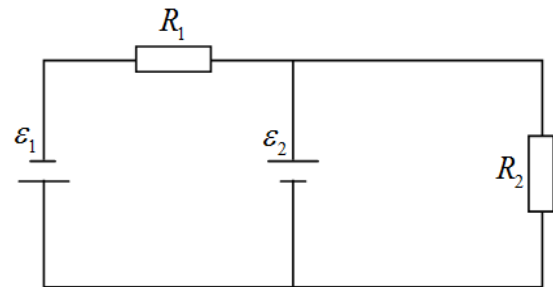
$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta} = \frac{-750}{-400} = 1,875 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta} = \frac{-700}{-400} = 1,75 \text{ А}; \quad I_3 = \frac{\Delta_{I_3}}{\Delta} = \frac{-50}{-400} = 0,125 \text{ А}.$$

## ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

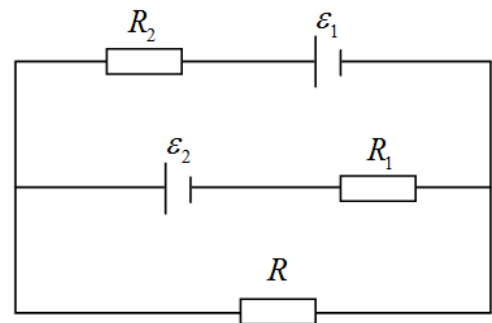
1. У схемі, зображеній на рисунку, джерела володіють наступними характеристиками:  $\varepsilon_1 = 8 \text{ В}$ ,  $r_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $\varepsilon_2 = 4 \text{ В}$ ,  $r_2 = 0,5 \text{ Ом}$ . Опір резистора рівний  $5 \text{ Ом}$ . Знайти силу струму, який протікає через резистор.



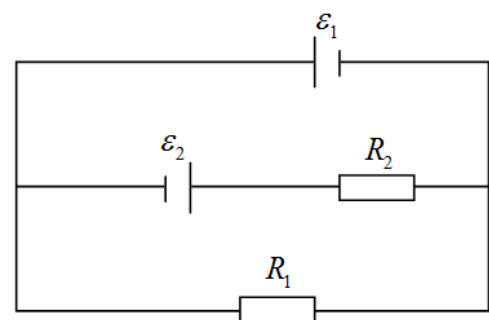
2. У схемі, зображеній на рисунку,  $\varepsilon_1 = 8 \text{ В}$ ,  $r_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $\varepsilon_2 = 4 \text{ В}$ ,  $r_2 = 0,5 \text{ Ом}$ . Опір резисторів  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 12 \text{ Ом}$ . Знайти величину і напрямок струмів, які протікають через  $R_1$  та  $R_2$ .



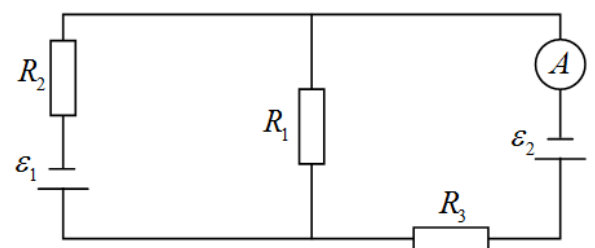
3. Визначити величину і напрямок струму через опір  $R$  в схемі, якщо  $\varepsilon_1 = 1,7 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_2 = 4 \text{ В}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$  і  $R = 6 \text{ Ом}$ . Внутрішнім пором джерел знехтувати.



4. Визначити величину і напрямок струму через опір  $R_1$  та  $R_2$  в схемі, якщо  $\varepsilon_1 = 2 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_2 = 3 \text{ В}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ . Внутрішнім пором джерел знехтувати.

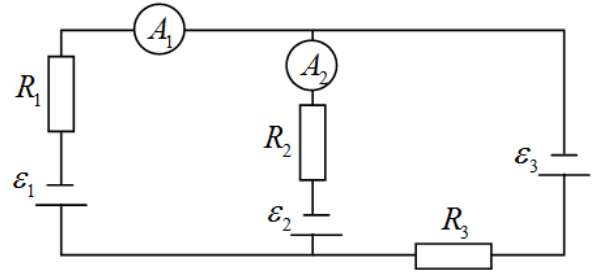


5. Батареї мають ЕРС  $\varepsilon_1 = 2 \text{ В}$  і  $\varepsilon_2 = 3 \text{ В}$ , опір  $R_3 = 1,5 \text{ кОм}$ , опір амперметра  $R_A = 0,5 \text{ кОм}$ . Спад напруги на опорі  $R_2$  рівний  $1 \text{ В}$  (струм через  $R_2$  направлений зверху вниз). Знайти покази

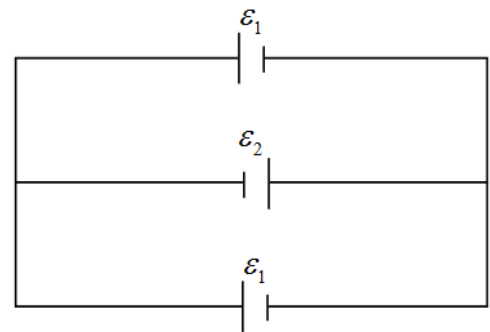


амперметра.

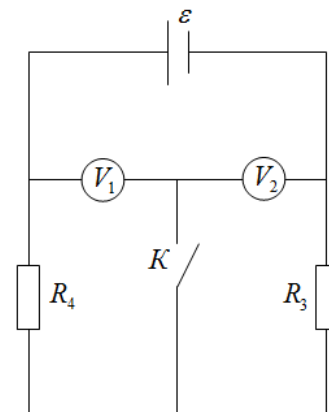
6. Батареї мають ЕРС  $\varepsilon_1 = 4 \text{ В}$  і  $\varepsilon_2 = 5 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_3 = 6 \text{ В}$ , опори  $R_1 = 1 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 2 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 3 \text{ кОм}$ . Знайдіть покази амперметрів  $A_1$  та  $A_2$ . Внутрішніми опорами джерел струму та опорами амперметрів знехтувати.



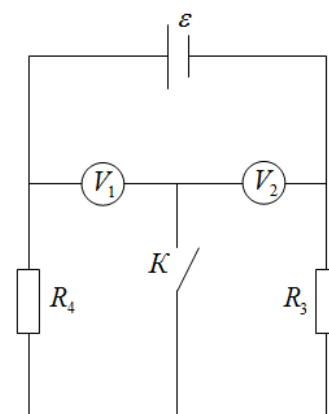
7. Три батареї акумуляторів з ЕРС 12 В, 5 В і 10 В, і однаковими внутрішніми опорами в 1 Ом, з'єднані між собою так, як показано на рисунку. Опір з'єднувальних опорів мізерно малий. Визначити сили струмів, які йдуть через кожну батарею.



8. У схемі зображеній на рисунку  $V_1$  і  $V_2$  – два вольтметра, опори яких рівні відповідно  $R_1 = 3000 \text{ Ом}$  і  $R_2 = 2000 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 3000 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 2000 \text{ Ом}$ ,  $\varepsilon = 200 \text{ В}$ . Знайти покази вольтметрів  $V_1$  і  $V_2$  у випадку, коли ключ  $K$  розімкнутий. Опором батареї знехтувати. Розв'язати задачу, використовуючи закони Кірхгофа.

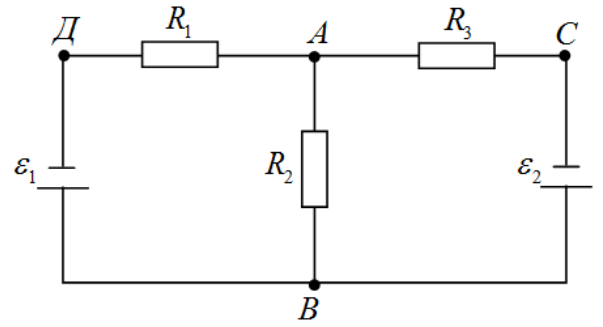


9. У схемі зображеній на рисунку  $V_1$  і  $V_2$  – два вольтметра, опори яких рівні відповідно  $R_1 = 3000 \text{ Ом}$  і  $R_2 = 2000 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 3000 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 2000 \text{ Ом}$ ,  $\varepsilon = 200 \text{ В}$ . Знайти покази вольтметрів  $V_1$  і  $V_2$  у випадку, коли ключ  $K$  замкнений. Опором батареї знехтувати. Розв'язати задачу,

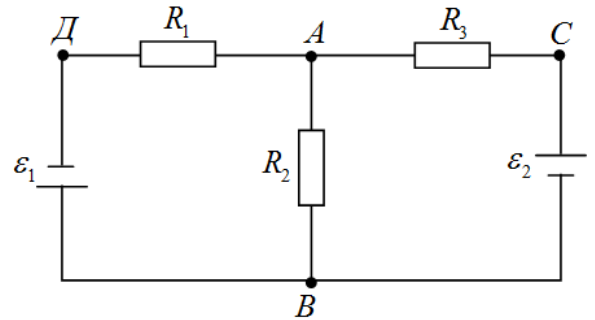


використовуючи закони Кірхгофа.

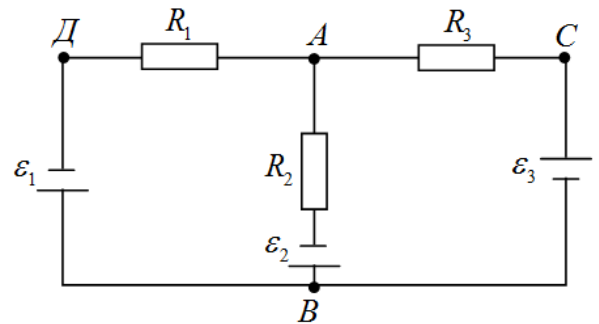
10. Визначити різницю потенціалів між точками А і Д, якщо  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 8 \text{ Ом}$ ,  $\varepsilon_1 = 4 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_2 = 6 \text{ В}$ .



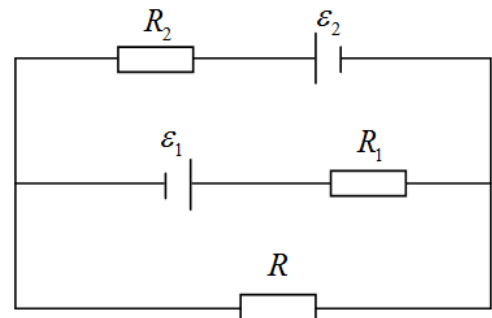
11. Визначити різницю потенціалів між точками А і С, якщо  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 8 \text{ Ом}$ ,  $\varepsilon_1 = 4 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_2 = 6 \text{ В}$ .



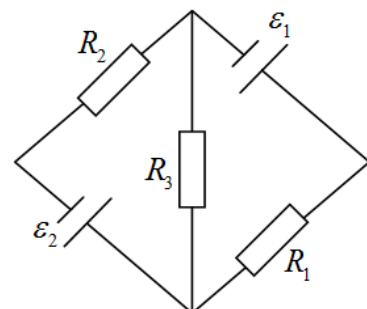
12. Визначити різницю потенціалів між точками А і В, якщо  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 8 \text{ Ом}$ ,  $\varepsilon_1 = 4 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_2 = 6 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_3 = 8 \text{ В}$ .



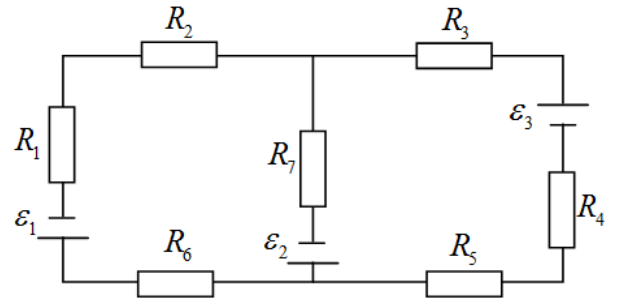
13. Знайти величину і напрямок струму через опір  $R$  у схемі зображеної на рисунку, якщо ЕРС джерел  $E_1 = 15 \text{ В}$ ,  $E_2 = 37 \text{ В}$ , а величини опорів відповідно рівні  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$  і  $R = 50 \text{ Ом}$ . Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.



14. Визначити струми, що проходять через опори  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , якщо  $\varepsilon_1 = 12,5 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_2 = 10 \text{ В}$ ,  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 7,5 \text{ Ом}$ . Внутрішніми опорами джерел струму знехтувати.

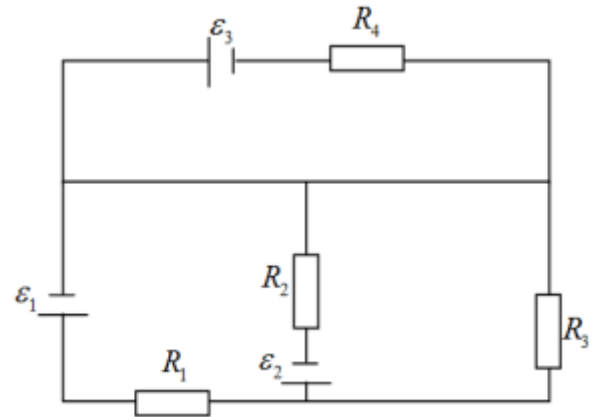


15. У схемі, зображеній на рисунку,  
 $\varepsilon_1 = 10 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_2 = 20 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_3 = 30 \text{ В}$ ,  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  
 $R_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 5 \text{ Ом}$ ,  
 $R_6 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_7 = 7 \text{ Ом}$ . Внутрішні опори  
джерел струму мізерно малі. Знайти сили  
струмів  $I_1, I_2, I_3$ .



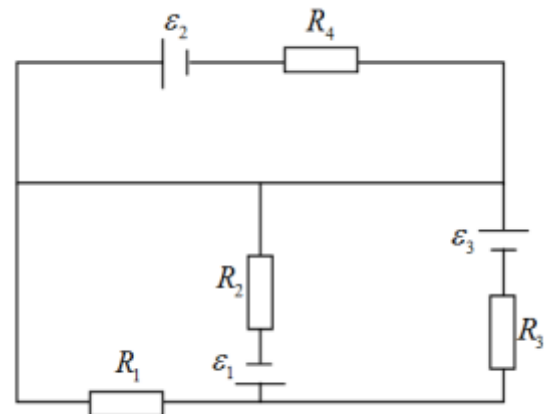
16. Визначити струми у всіх вітках  
електричного кола, схема якого зображена  
на рисунку. Параметри елементів:

$\varepsilon_1 = 40 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_2 = 20 \text{ В}$ ,  
 $\varepsilon_3 = 30 \text{ В}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  
 $R_3 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 20 \text{ Ом}$ .



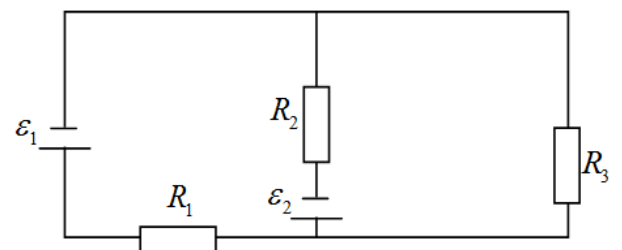
17. Визначити струми у всіх вітках  
електричного кола, схема якого зображена  
на рисунку. Параметри елементів:

$\varepsilon_1 = 40 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_2 = 20 \text{ В}$ ,  
 $\varepsilon_3 = 30 \text{ В}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  
 $R_3 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 20 \text{ Ом}$ .

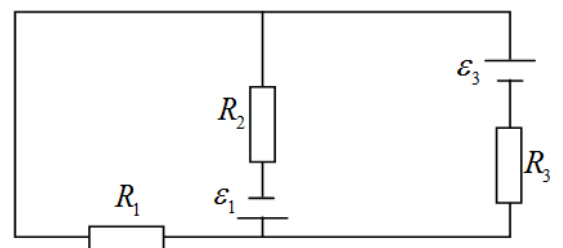


18. Визначити струми у всіх вітках  
електричного кола, схема якого зображена  
на рисунку. Параметри елементів:

$\varepsilon_1 = 10 \text{ В}$ ,  $\varepsilon_2 = 15 \text{ В}$ ,  $R_1 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ,  
 $R_3 = 18 \text{ Ом}$ .



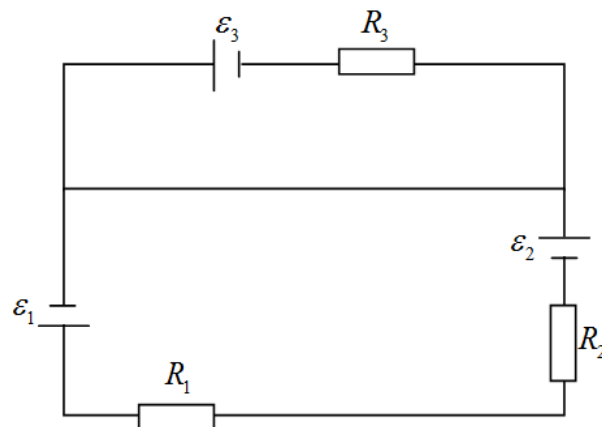
19. Визначити струми у всіх вітках  
електричного кола, схема якого зображена  
на рисунку. Параметри елементів:  $\varepsilon_1 = 8 \text{ В}$ ,  
 $\varepsilon_2 = 10 \text{ В}$ ,  $R_1 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 25 \text{ Ом}$ .



20. Визначити струми у всіх вітках електричного кола, схема якого зображена на рисунку. Параметри елементів:

$$\varepsilon_1 = 18 \text{ В}, \quad \varepsilon_2 = 14 \text{ В}, \quad \varepsilon_3 = 24 \text{ В},$$

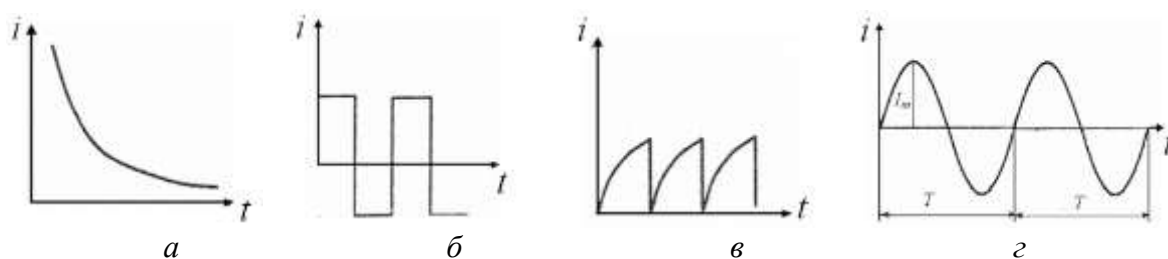
$$R_1 = 12 \text{ Ом}, \quad R_2 = 16 \text{ Ом}, \quad R_3 = 18 \text{ Ом}.$$



## РОЗДІЛ 3 ЛІНІЙНІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ

### 3.1. Основні відомості про змінний струм

Змінним називають такий струм, який упродовж певного часу змінюється за величиною і напрямком. У теорії і практиці під змінним струмом розуміють періодичний змінний синусоїдальний струм із частотою  $\nu = 50$  Гц.



**Рис. 3.1.** Приклади змінних струмів

В електротехніці використовують виключно синусоїдальний струм. Переваги синусоїдального струму в порівнянні з постійним струмом:

- 1) виробництво, передача і використання електричної енергії є найбільш економічними у разі синусоїдального струму;
- 2) існує можливість відносно просто перетворювати напруги (одержувати напруги різної величини);
- 3) найпростішими, надійними, економічними і, отже, найбільш розповсюдженими є електричні двигуни трифазного синусоїдального струму – асинхронні двигуни.

Розглянемо більш детально періодичний змінний синусоїдальний струм. Математично в найбільш загальному випадку такий струм можна описати рівнянням

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha), \quad (3.1.1)$$

де  $i$  – миттєве значення струму,  $I_m$  – амплітудне значення струму,  $(\omega t + \alpha)$  – фаза коливань в момент часу  $t$ ,  $\omega$  – циклічна частота,  $\alpha$  – початкова фаза.

Миттєве значення сили струму  $i$  в момент часу  $t$  визначається за рівнянням (3.1.1). Амплітудне значення сили струму  $I_m$  – це найбільше

значення, якого набуває струм з плином часу (рис. 3.1). Якщо в початковий момент часу графік залежності сили струму від часу такий як на рис. 3.1 з, то початкова фаза буде також рівна нулю ( $\alpha = 0$ ). Рівняння для струму в такому випадку матиме вигляд

$$i = I_m \sin(\omega t).$$

При зсуві початку синусоїди струму вліво від початку координат початкова фаза додатна ( $\alpha > 0$ ). Рівняння, що описує струм, буде таке саме, як і (3.1.1). При зсуві початку синусоїди струму вправо від початку координат початкова фаза відємна ( $\alpha < 0$ ).

Час, протягом якого здійснюється одне повне коливання періодичного процесу, називають *періодом* ( $T$ ), а кількість коливань протягом одиниці часу називають *частотою* ( $\nu$ ). Зв'язок між періодом і частотою описується формулою

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Частоту вимірюють у герцах [Гц], період в секундах [с]. Кількість коливань за  $2\pi$  секунди називають *циклічною частотою* ( $\omega$ ), вимірюють у [рад/с]:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Все, що було сказано відносно струмів, справедливо також і для синусоїдно змінних ЕРС і напруги.

*Діючим значенням струму* називають такий незмінний в часі струм, який виділяє в резистивному опорі за період таку ж кількість енергії, що й синусоїдно змінний струм. Позначають діюче значення сили струму  $I$ . Зв'язок між амплітудним та діючим значенням сили струму виражається наступним співвідношенням:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m.$$



Тобто, діюче значення струму менше амплітудного в  $\sqrt{2}$  разів. Аналогічно визначають та позначають діючі значення ЕРС і напруги:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \quad \text{і} \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

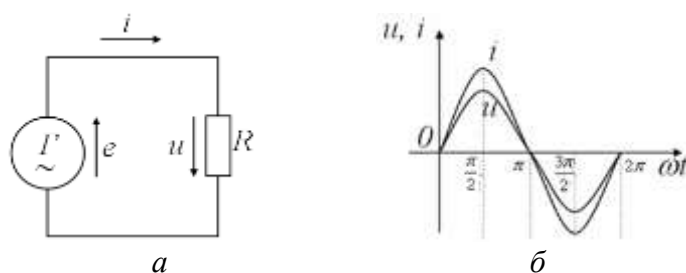
Усі електровимірювальні прилади змінного струму показують діюче значення синусоїдних величин.

Часто, при теоретичних розрахунках, зручно використовувати середнє значення струму, напруги або ЕРС, під яким розуміють середнє арифметичне відповідної величини за півперіод коливань:

$$I_c = \frac{2I_m}{\pi}, \quad E_c = \frac{2E_m}{\pi}, \quad U_c = \frac{2U_m}{\pi}.$$

### 3.2. Кола змінного струму з резистивним, індуктивним та ємнісним елементом

На відміну від постійного струму, в колах змінного струму є три види опорів. Розглянемо найпростіший випадок: *електричне коло змінного струму з резистивним елементом* (рис. 3.2 а).



**Рис. 3.2.** (а) Електричне коло змінного струму та (б) Графіки миттєвих значень струму та напруги у колі з активним елементом

Коло з активним опором мусить мати значний опір і дуже малу індуктивність та ємність. Припустимо, що в даному електричному колі на резистивному елементі напруга змінюється з часом за законом

$$u = U_m \sin(\omega t). \quad (3.2.1)$$

Тоді миттєве значення струму визначатиметься формулою  $i = \frac{u}{R}$ , тобто

$$i = \frac{U_m \sin(\omega t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t).$$

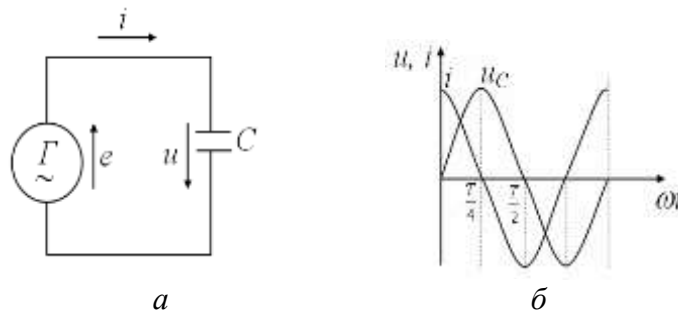
Враховуючи, що  $\frac{U_m}{R} = I_m$  – амплітудне значення сили струму, отримаємо закон зміни струму в цьому ж колі

$$i = I_m \sin(\omega t). \quad (3.2.2)$$

Порівнюючи формули (3.2.1) та (3.2.2), можна зробити висновок що у провіднику з активним опором коливання значення струму за фазою збігаються з коливаннями напруги (рис. 3.2 б), або, як часто кажуть, зміна струму і спаду напруги на резистивному елементі відбуваються синфазно, а амплітуду струму визначають за формулою:

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

Розглянемо *електричне коло змінного струму з ємнісним елементом* (рис. 3.3 а). При розрахунку потрібно враховувати, що таке коло мусить мати велику ємність і порівняно дуже малу індуктивність.



**Рис. 3.3.** (а) Електричне коло змінного струму та (б) Графіки миттєвих значень струму та напруги у колі з ємнісним елементом

Припустимо, що струм у колі змінюється за законом  $i = I_m \sin(\omega t)$ , напругу в колі можна означити як різницю потенціалів на обкладинках конденсатора, тобто  $u = u_C$ , де

$$u_C = \frac{q}{C}. \quad (3.2.3)$$

Відомо, що  $i = \frac{dq}{dt}$ . Звідси:

$$dq = i dt = I_m \sin(\omega t) dt. \quad (3.2.4)$$

Для того, щоб визначити закон, за яким з часом змінюється заряд на обкладинках конденсатора, рівність 3.2.4 потрібно проінтегрувати по часу:

$$q = \int I_m \sin(\omega t) dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t) + q',$$

$q'$  – стала величина, математично обумовлена тим, що ми маємо неозначений інтеграл. Фізично це означає, що в початковий момент часу ( $t = 0$ ) конденсатор був заряджений.

Будемо вважати, що в початковий момент часу (момент включення)  $q' = 0$ .

$$q = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t) = \frac{I_m}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Підставимо це рівняння в (3.2.3):

$$u = u_C = \frac{q}{C} = \frac{I_m}{C\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{або} \quad u = U_{Cm} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.2.5)$$

де  $\frac{I_m}{C\omega} = U_{Cm}$  – амплітудне значення напруги в досліджуваному колі. Величину

$$R_C = X_C = \frac{1}{C\omega}$$

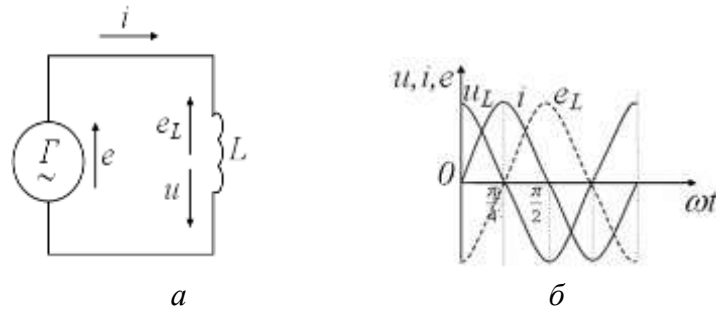
називають *ємнісним опором*.

Порівнюючи закон зміни струму (3.2.2) та (3.2.5), можна зробити висновок що в колі з *ємнісним елементом колювання сили струму випереджають колювання напруги на конденсаторі на  $\frac{\pi}{2}$*  (рис. 3.3 б).

Електричним колом змінного струму з *індуктивним елементом* називається коло, яке має індуктивність і дуже малі активний та ємнісний опори рис. 3.4 а. Нехай, струм в такому колі змінюється за гармонічним законом  $i = I_m \sin \omega t$ , який обумовить в котушці індуктивності появу електрорушійної сили самоіндукції

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt} = -\omega L I_m \cos \omega t = E_{Lm} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

де  $E_{Lm} = \omega L I_m$  – амплітудне значення електрорушійної сили самоіндукції.



**Рис. 3.4.** (а) Електричне коло змінного струму та (б) Графіки миттєвих значень струму напруги та ЕРС самоіндукції у колі з індуктивним елементом

Застосовуючи до кола друге правило Кірхгофа з припущенням, що активний опір котушки дорівнює нулю, отримаємо:

$$u = -e_L = \omega L I_m \cos \omega t = U_{Lm} \cos \omega t ,$$

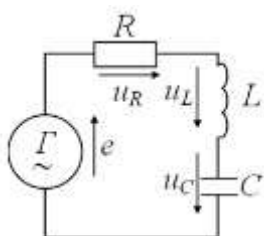
де  $U_{Lm} = \omega L I_m$  – амплітудне значення падіння напруги на котушці індуктивності.

Величину  $R_L = X_L = L\omega$  називають індуктивним опором.

Використовуючи це, та те, що  $\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ , отримаємо, що напруга в досліджуваному колі змінюється за законом:

$$u = U_{Lm} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.2.6)$$

Порівнюючи рівняння струму (3.2.2) та напруги (3.2.6), можна зробити висновок, що в колі з індуктивністю коливання напруги випереджають коливання сили струму на  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 3.4 б).



**Рис. 3.5.** Електричне коло змінного струму з активним, індуктивним та ємнісним елементом

Індуктивний та ємнісний опори залежать від частоти. Якщо електричне поле містить одночасно активний, ємнісний та індуктивний опори (рис. 3.5), то кажуть, що таке коло містить реактивний опір.

У цьому випадку повний опір буде обчислюватись за формулою:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (3.2.7)$$

де  $R$  – активний опір,  $X$  – повний реактивний опір. Повний реактивний опір визначається формулою:

$$X = \frac{1}{\omega C} - \omega L. \quad (3.2.8)$$

Підставивши (3.2.8) в (3.2.7), отримаємо, що

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}.$$

Визначивши повний опір кола для змінного струму, можна записати закон Ома для ділянки кола змінного струму:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}},$$

де  $I$  та  $U$  – діючі значення струму та напруги. Використовуючи зв'язок між діючими та амплітудними значеннями цих величин, отримаємо

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}.$$

### Контрольні запитання

1. Назвіть основні переваги синусоїдального струму у порівнянні з постійним.
2. Як математично записується закон зміни синусоїдального струму?
3. Що розуміють під миттєвим значенням змінного струму?
4. Що розуміють під періодом та частотою зміни струму?
5. Що називається діючим значенням струму?
6. Який зв'язок між діючими та амплітудними значеннями струму, напруги та ЕРС?
7. Як відбуваються коливання значення струму у порівнянні з коливаннями напруги у колі з активним, індуктивним та ємнісним елементом?
8. За якою формулою можна знайти індуктивний та ємнісний опір?
9. За якою формулою визначається повний реактивний опір?
10. За якою формулою можна знайти повний опір кола?

### 3.3. Послідовне з'єднання активного, індуктивного і ємнісного опорів

Найбільш загальним випадком нерозгалуженого кола змінного струму є коло, яке складається з послідовно з'єднаних активного опору  $R$ , індуктивності  $L$  та ємності  $C$  (рис. 3.6).

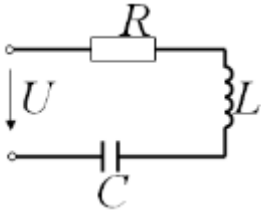


Рис. 3.6. Схема з послідовно з'єднаних  $R$ ,  $L$  і  $C$  елементів

Прикладена до кола напруга  $U$  складається з трьох складових: активної напруги  $U_R = IR$ , яка збігається по фазі із струмом  $I$ , індуктивної напруги  $U_L = I\omega L$ , яка випереджає струм на  $90^\circ$ , і ємнісної напруги  $U_C = I\frac{1}{\omega C}$ , яка відстає від

струму на  $90^\circ$ .

Завдяки тому, що індуктивна та ємнісна напруги мають протилежні фази, їх геометричне додавання рівнозначне відніманню відповідних абсолютних величин, і якщо індуктивна напруга має більшу абсолютну величину, ніж ємнісна, то результуюча реактивна напруга

$$U_p = I\omega L - I\frac{1}{\omega C} = I\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

випереджає струм на  $90^\circ$ . Різниця  $\omega L - \frac{1}{\omega C}$  називається реактивним опором і позначається літерою  $X$ :

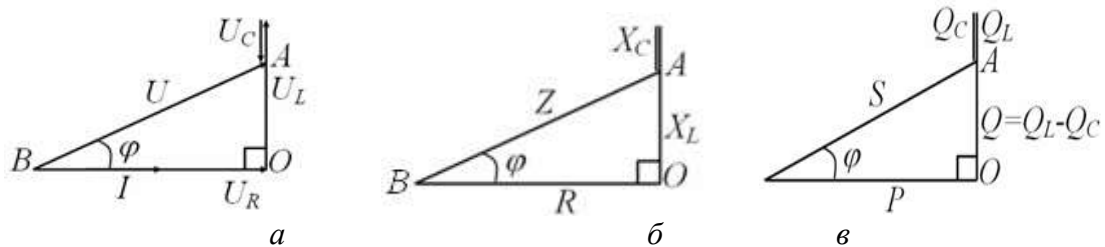
$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Прикладена до кола напруга  $U$  показана на векторній діаграмі гіпотенузою прямокутного трикутника  $OAB$  (рис. 3.7 а). З рисунка видно, що

$$U^2 = U_R^2 + U_X^2 = I^2R^2 + I^2X^2 = I^2(R^2 + X^2).$$

Звідки

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$



**Рис. 3.7.** «Трикутник» (а) напруг, (б) опорів і (в) потужностей для кола з послідовно з'єднаних  $R$ ,  $L$  і  $C$  елементів

Останній вираз закон Ома для електричного кола з послідовно з'єднаними  $R$ ,  $L$ ,  $C$ -елементами. Ділячи всі сторони трикутника напруг  $OAB$  на струм  $I$ , одержимо трикутник опорів (рис. 3.7 б), з якого можна записати наступні співвідношення:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}, \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z}.$$

Помноживши сторони трикутника напруг (рис. 3.7 а) на струм  $I$ , одержимо трикутник потужностей (рис. 3.7 в). Сторонами трикутника є:

$$P = U_R I = I^2 R \text{ – активна потужність;}$$

$$Q = Q_L - Q_C = U_L I - U_C I = I^2 (X_L - X_C) \text{ – реактивна потужність;}$$

$$S = IU = I^2 Z = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ – повна потужність.}$$

З трикутника випливає, що  $P = UI \cos \varphi$ , де  $\cos \varphi$  – косинус кута зсуву фаз між струмом і напругою, який називається коефіцієнтом потужності. Він показує, яка частина повної потужності перетворюється в активну.

На основі проведеного аналізу кола, яке складається з послідовно з'єднаних  $R$ ,  $L$ ,  $C$ -елементів, можна зробити такі висновки:

1. Якщо  $X_L > X_C$ , то напруга мережі випереджає струм на кут  $\varphi$

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Коло в цьому випадку має індуктивний характер,  $Q_L > Q_C$ .

2. Якщо  $X_C > X_L$ , то напруга мережі відстає від струму на кут  $\varphi$

$$u = U_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Коло має ємнісний характер,  $Q_C > Q_L$ .

3. У випадку, коли індуктивний та ємнісний опори однакові, тобто  $X = X_L - X_C = 0$ , кут зсуву фаз між напругою і струмом дорівнює нулю ( $\varphi = 0$ ). Такий режим роботи електричного кола має назву – резонанс напруг.

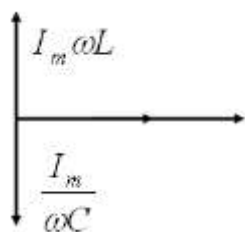
### 3.4. Резонанс напруг

Резонансом називають такий режим роботи електричного кола, що складається з реактивних елементів, коли струм співпадає за фазою з напругою на затискачах схеми, тобто еквівалентна схема являє собою активний опір.

У випадку резонансу в електричному колі малі напруги, що прикладаються до кола, можуть викликати значні струми та напруги на окремих ділянках кола.

Резонанс напруг (послідовний резонанс) виникає в колі змінного струму при послідовному з'єднанні ємнісного та індуктивного опорів (навантажень) в режимі, коли  $X_L = X_C$  ( $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ) при невеликому активному опорі кола. При цьому спади напруг на ємнісному та індуктивному опорах однакові за величиною і протилежні за фазою.

Нехай послідовний контур із  $R$ ,  $L$ ,  $C$ -елементів під'єднаний до джерела синусоїдної напруги та працює у режимі резонансу (рис. 3.8). Отже кут зсуву фаз між струмом та напругою, прикладеною до контуру, повинен дорівнювати нулю. Із виразу



**Рис. 3.8.** Векторна діаграма при резонансі напруг в ідеальному контурі

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

впливає, що струм у послідовному контурі може співпадати з напругою по фазі за умови

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \text{ або } 2\pi\nu L = \frac{1}{2\pi\nu C}.$$



Остання рівність є умовою резонансу напруг. Як бачимо, резонансу напруг можна досягти зміною в широких межах індуктивності  $L$ , ємності  $C$  або частоти  $\nu$  напруги живлення. При деякій частоті  $\nu_{rez}$ , яка називається резонансною, індуктивний та ємнісний опори стануть однаковими

$$2\pi\nu_{rez}L = \frac{1}{2\pi\nu_{rez}C}.$$

Звідси

$$\nu_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

*Резонанс* – це явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань струму у разі збігу частоти зовнішньої змінної напруги із власною частотою коливального контуру. При цьому контур протягом всього періоду буде використовувати енергію від джерела, нічого не повертаючи йому. Це призведе до різкого збільшення струму і напруги.

Із виразу закону Ома для електричного кола з послідовним з'єднанням елементів

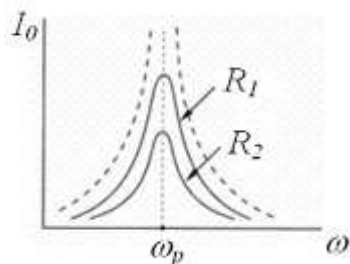
$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}.$$

впливає, що струм  $I$  у колі при резонансі визначається лише прикладеною напругою  $U$  та активним опором  $R$ :

$$I = \frac{U}{R}.$$

Його величина може бути значно більшою від величини струму у випадку відсутності резонансу, а напруга на індуктивності дорівнює напрузі на ємності

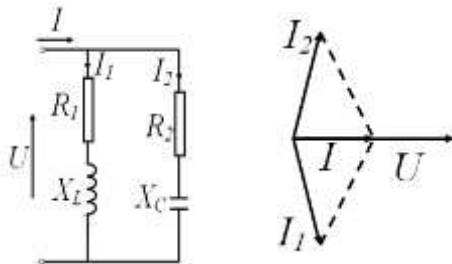
$$U_L = U_C, \text{ або } IX_L = IX_C$$



**Рис. 3.9.** Хід резонансних кривих при різних значеннях активного опору

Якщо активний опір зменшувати, резонансне значення струму може зростати без обмежень і навпаки, при збільшенні активного опору струм зменшується і резонанс спостерігатиметься слабше ( $R_1 < R_2 < R_3$ , рис. 3.9).

### 3.5. Резонанс струмів



**Рис. 3.10.** Схема і векторна діаграма електричного кола за умови резонансу струмів

Розглянемо електричне коло, що складається з паралельно з'єднаних індуктивного та ємнісного опорів (рис. 3.10). У паралельному коливальному контурі може виникати резонанс струмів, тобто явище, при якому струми в реактивних елементах значно перевищують струм, що споживається

контуром від джерела. Це є наслідком того, що при резонансі зміщення фаз між струмами  $I_1$  та  $I_2$  у паралельних гілках контуру близький до  $180^\circ$  (в ідеальному контурі з  $R_1 = R_2 = 0$ , зміщення фаз дорівнює  $180^\circ$ ). Тому результуючий струм  $I$  виявляється по величині дуже малий.

Резонанс струмів настає тоді, коли реактивні складові цих струмів взаємно компенсуються, а струм  $I$ , споживаний контуром, збігається по фазі з діючою у контурі напругою  $U$ .

Загальний реактивний струм кола дорівнює різниці реактивних струмів віток, і в цьому випадку дорівнює нулю:

$$I_p = I_{1p} - I_{2p} = 0.$$

Загальний струм кола має тільки активну складову, що дорівнює сумі активних складових струмів віток:

$$I = I_a = I_{1a} + I_{2a}.$$

Записавши реактивні струми через напруги і провідності, одержимо рівняння:

$$Ub_L = Ub_C.$$

Звідси:

$$b_L = b_C.$$

Остання рівність є умовою виникнення резонансу струмів.

Записавши  $b_L$  і  $b_C$  через опори відповідних віток, можна визначити резонансну частоту контуру:

$$\frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}, \quad \text{або} \quad \frac{2\pi\nu L}{R_1^2 + (2\pi\nu L)^2} = \frac{1/2\pi\nu C}{R_2^2 + (1/2\pi\nu C)^2}.$$

Звідси:

$$\nu_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}.$$

У випадку, коли  $R_1 = R_2 = 0$

$$\nu_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

За умови резонансу струму мають місце рівності:

$$\cos\varphi = 1, \quad S = P, \quad Q = Q_L - Q_C = 0.$$

Для резонансу струмів є характерним те, що загальний струм при певному співвідношенні параметрів може бути значно менший, ніж струм в окремій вітці.

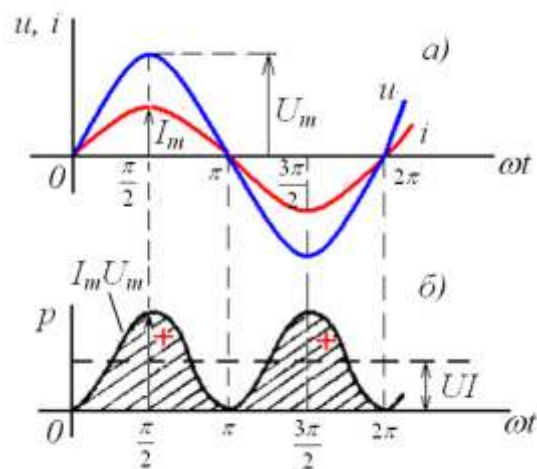
Резонанс струмів можна отримати шляхом підбору параметрів кола при заданій частоті живлення, або шляхом зміни частоти джерела живлення при заданих параметрах кола.

### Контрольні запитання

1. Схематично зобразити «трикутник» напруг для кола з послідовно з'єднаних  $R$ ,  $L$ ,  $C$  елементів.
2. Схематично зобразити «трикутник» опорів для кола з послідовно з'єднаних  $R$ ,  $L$ ,  $C$  елементів.
3. Схематично зобразити «трикутник» потужностей для кола з послідовно з'єднаних  $R$ ,  $L$ ,  $C$  елементів.
4. Визначте умову резонансу напруг в колі змінного струму.
5. Намалювати векторну діаграму для резонансу напруг в колі змінного струму.

6. Доведіть, що в колі змінного струму з послідовним включенням декількох елементів можливі умови, при яких напруга на будь-якому з елементів буде перевищувати напругу на вході кола.
7. Визначте умову резонансу струму в колі змінного струму.
8. Намалювати векторну діаграму для резонансу струму в колі змінного струму.
9. Доведіть, що в колі змінного струму з паралельним включенням декількох елементів можливі умови, при яких струм у будь-якій гілці буде перевищувати струм нерозгалуженої ділянки.
10. Як можна досягти резонансу напруг та резонансу струму в колі змінного струму?

### 3.6. Потужність у колі змінного струму з резистивним елементом



**Рис. 3.11.** Часова діаграма електричного кола з резистивним елементом

Як відомо у колі змінного струму з резистивним елементом напруга і струм співпадають за фазою (рис. 3.11 *a*). При цьому миттєві значення напруги та струму можуть змінюватися за формулами:

$$u = U_m \sin \omega t \quad \text{і} \quad i = I_m \sin \omega t .$$

Миттєві значення потужності  $p$  дорівнює добутку миттєвих значень напруги та струму

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t \\ &= U_m I_m \sin^2 \omega t = P_m \sin^2 \omega t , \end{aligned}$$

де

$$P_m = U_m I_m .$$

З рис. 3.11 б видно, що у колі з резистивним елементом миттєва потужність змінюється за законом синуса, залишаючись при цьому додатною. Це означає, що в колі з активним опором потужність постійно надходить із мережі до ідеального резистивного елементу і незворотно перетворюється в інші види енергії, здійснюючи корисну роботу.

Середнє за період значення потужності називається активною потужністю і визначається з виразу:

$$P_c = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \sin^2 \omega t dt = \frac{U_m I_m}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - 2 \cos \omega t) dt$$

$$= \frac{U_m I_m}{2} = \frac{U \sqrt{2} I \sqrt{2}}{2} = UI = I^2 R$$

Таким чином, активна потужність – це енергія, яка виділяється в активному опорі за одиницю часу:

$$P = \frac{W}{T} = I^2 R.$$

Активну потужність показує ватметр, увімкнений в електричне коло змінного струму.

### 3.7. Потужність у колі змінного струму з індуктивним елементом

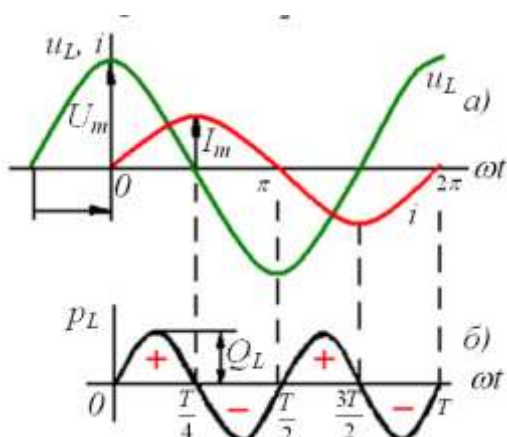
У колі змінного струму з індуктивним елементом напруга випереджає за фазою струм на  $90^\circ$ :

$$i = I_m \sin \omega t \quad \text{і} \quad u = U_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

При графічному зображенні часовими діаграмами синусоїда напруг  $u_L(t)$  зсунута відносно синусоїди струму на кут  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Наприклад, на рис. 3.12 а показані часові діаграми струму і напруг при початковій фазі струму рівній 0.

Миттєва потужність у колі з індуктивністю дорівнює:

$$p = ui = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = U_L I \sin 2\omega t \quad (3.7.1)$$



**Рис. 3.12.** Часова діаграма електричного кола з індуктивним елементом

Миттєва потужність змінюється за законом синуса з частотою у два рази більшою, ніж частота струму (рис. 3.12). Амплітудне значення потужності дорівнює:

$$P_m = U_L I = \frac{U_m I_m}{2}.$$

Середнє значення потужності  $P_c$  за період (активна потужність) дорівнює нулю:

$$P = P_c = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T U I \sin 2\omega t dt = 0.$$

На рис. 3.12 б зображений графік зміни потужності, що відповідає виразу (3.7.1). З графіка видно, що в колі з ідеальним індуктивним елементом миттєва потужність змінюється за законом синуса з амплітудою  $U_L I$  і з подвійною частотою  $2\omega$ .

У першу чверть періоду струм, що протікає через котушку індуктивності, зростає, електрична енергія джерела надходить до індуктивності, перетворюється й накопичується в ній у вигляді енергії магнітного поля. У наступну чверть періоду струм у колі зменшується, енергія магнітного поля перетворюється в електричну й повністю повертається джерелу.

У другу половину періоду напрямки струму й магнітного потоку змінюються на протилежні і відбувається процес, аналогічний процесу у першій половині періоду. Таким чином, у колі синусоїдного струму з ідеальною котушкою індуктивності відбувається безперервний періодичний процес обміну енергією між джерелом і індуктивністю.

Отже, у колі з чисто індуктивним опором (коли активним опором можна знехтувати) протягом однієї чверті періоду потужність має додатне значення, протягом наступної чверті від'ємне, причому додатні і від'ємні амплітуди

потужності дорівнюють одна одній за величиною. Протягом третьої чверті періоду потужність знову додатна, а в четвертій – знову від’ємна.

Оскільки за період потужність двічі набуває додатних і двічі від’ємних значень, то можна зробити висновок, що в колі з індуктивністю протягом періоду електромагнітна енергія двічі надходить від зовнішнього джерела в коло і двічі повертається з кола у зовнішнє джерело.

Інакше кажучи, що у колі з чисто індуктивним опором немає перетворення енергії в інші види енергії, а відбувається лише взаємний обмін енергією між зовнішнім джерелом і магнітним полем кола, а корисного витрачання енергії немає, тобто джерело не витрачає енергії.

*Потужність, яка характеризує швидкість взаємного періодичного обміну енергією між зовнішнім джерелом і магнітним полем кола і яка не витрачається в колі, називається реактивною потужністю індуктивності в будь-який момент часу і визначається за формулою:*

$$Q = U_L I = X_L I^2.$$

Одиниця вимірювання – вольтампер реактивний, скорочено Вар.

### 3.8. Потужність у колі змінного струму з ємнісним елементом

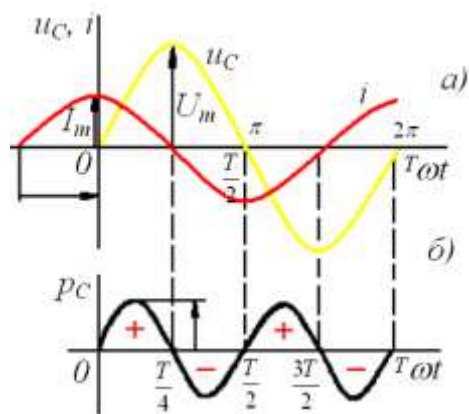
У колі змінного струму з ємнісним елементом струм випереджає за фазою напругу на  $90^\circ$ :

$$u = U_m \sin \omega t \quad \text{і} \quad i = I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

На рис. 3.13 *a* показані часові діаграми струму і напруг при початковій фазі напруг рівній 0.

Миттєва потужність у колі з індуктивністю дорівнює:

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = U_C I \sin 2\omega t.$$



**Рис. 3.13.** Часова діаграма електричного кола з ємнісним елементом

Із цього виразу і рис. 3.13 б бачимо, що у колі з ідеальним ємнісним елементом миттєва потужність змінюється за законом синуса з амплітудою  $U_C I$  з подвійною частотою  $2\omega$ .

При цьому позитивні значення потужності відповідають заряду конденсатора, а негативні – його розряду й поверненню запасеної енергії в джерело. Середня за період потужність дорівнює нулю, оскільки в колі з

конденсатором активна потужність не споживається, а відбувається обмін електричною енергією між конденсатором і джерелом. Отже, конденсатор, так само як і індуктивність, є реактивним опором.

Як видно з рис. 3.13 б у першу четвертину періоду напрями напруг і струмів співпадають,  $p > 0$ , тобто ємнісний елемент споживає енергію.

Споживана енергія нагромаджується в електричному полі, енергія якого

$W_E = \frac{Cu^2}{2}$  на даному інтервалі часу збільшується, тому, що зростає напруга  $u$ .

У момент  $t = \frac{T}{4}$  напруга досягає максимального значення і енергія,

нагромаджена в електричному полі також максимальна. Протягом другої

четверті періоду напрями  $u$  та  $i$  протилежні,  $p < 0$ , тобто ємнісний елемент є

джерелом і віддає енергію, що нагромадилася в електричному полі. До моменту

часу  $t = \frac{T}{2}$ , коли напруга дорівнюватиме нулю, весь запас енергії буде

повернений джерелу. Далі процес повторюється при від'ємних значеннях напруги.

Активна потужність, що характеризує необоротні процеси перетворення енергії і визначається середнім значенням миттєвої потужності за період, для ємнісного елемента дорівнює нулю:

$$P = P_c = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0.$$



У колі з чисто ємнісним опором не має перетворення енергії в інші види енергії, а відбувається лише взаємний обмін енергією між зовнішнім джерелом і електричним полем конденсатора, а корисного витрачання енергії немає, тобто джерело не витрачає енергії. Інтенсивність обміну характеризують реактивною потужністю, яку позначають

$$Q_C = U_C I = X_C I^2.$$

Реактивна потужність ємнісного елемента, так само як і реактивна потужність індуктивного елемента, вимірюється у вольтамперах реактивних (вар).

### Контрольні запитання

1. Як змінюється миттєве значення потужності у колі змінного струму з резистивним елементом?
2. Що розуміють під поняттям активна потужність?
3. Чому дорівнює середнє за період значення потужності у колі змінного струму з резистивним елементом?
4. Як змінюється миттєве значення потужності у колі змінного струму з індуктивним елементом?
5. Чому дорівнює середнє за період значення потужності у колі змінного струму з індуктивним елементом?
6. Що розуміють під поняттям реактивна потужність індуктивності?
7. Як змінюється миттєве значення потужності у колі змінного струму з ємнісним елементом?
8. Чому дорівнює середнє за період значення потужності у колі змінного струму з ємнісним елементом?
9. Що розуміють під поняттям реактивна потужність ємності?
10. В яких одиницях вимірюються активна та реактивна потужність?

## ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 1.** В нерозгалуженому колі змінного синусоїдального струму, на затискачах кола діє напруга величиною  $U$ , послідовно з'єднані  $R$ ,  $L$ ,  $C$  опори. Накреслити електричне коло та визначити:

1. повний опір кола;
2. діюче та миттєве значення струму;
3. величини спадів напруг на окремих елементах;
4. активну, реактивну та повну потужності кола;
5. за вибраним масштабом побудувати векторну діаграму.



Розрахуємо реактивні опори схеми:

$$X_L = 2\pi\nu L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-3} = 31,4 \text{ Ом},$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 725 \cdot 10^{-6}} = 4,39 \text{ Ом}.$$

Загальний опір схеми рівний:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L^2 - X_C^2)} = \sqrt{28^2 + (31,4 - 4,39)^2} = 38,9 \text{ Ом}.$$

Повний опір котушки рівний:

$$Z_k = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{28^2 + 31,4^2} = 42 \text{ Ом}.$$

Коефіцієнт потужності котушки і всього кола рівний:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z_k} = \frac{28}{42} = 0,7.$$

Струм в електричному колі становить:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{380}{42} = 9,05 \text{ А}.$$

Активна потужність котушки рівна:

$$P_k = I^2 R = 9,05 \cdot 28 = 229,3 \text{ Вт}.$$

Реактивна потужність котушки рівна:

$$Q_k = I^2 X_L = 9,05^2 \cdot 31,4 = 2571,7 \text{ вар.}$$

Активна потужність конденсатора рівна:

$$P_{\tilde{N}} = 0.$$

Реактивна потужність конденсатора рівна:

$$Q_{\tilde{N}} = I^2 X_{\tilde{N}} = 9,05^2 \cdot 4,39 = 359,6 \text{ вар.}$$

Реактивна потужність всього кола рівна:

$$Q = I^2 (X_L - X_C) = 9,05^2 \cdot (31,4 - 4,39) = 2212,2 \text{ вар.}$$

Повна потужність всього кола рівна:

$$S = I^2 Z = 9,05^2 \cdot 42 = 3439,9 \text{ вар.}$$

Для побудови векторної діаграми визначаємо спади напруг на кожному опорі. Спад напруги на активному опорі:

$$U_a = IR = 9,05 \cdot 28 = 253,4 \text{ В.}$$

Реактивний спад напруги на індуктивному опорі:

$$U_L = IX_L = 9,05 \cdot 31,4 = 284,17 \text{ В.}$$

Реактивний спад напруги на ємнісному опорі:

$$U_C = IX_C = 9,05 \cdot 4,39 = 37,7 \text{ В.}$$

Для побудови векторної діаграми виберемо масштаб напруги і струму:

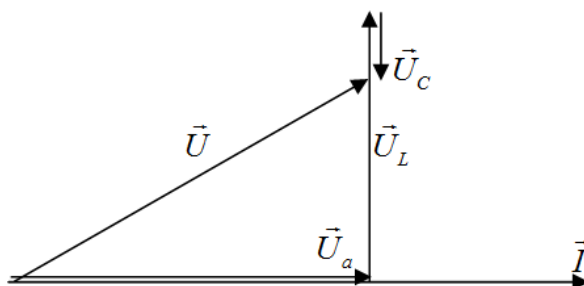
$$m_I = 1,6 \text{ А/см, } m_U = 70 \text{ В/см.}$$

Обчислимо довжину векторів напруг і струму:

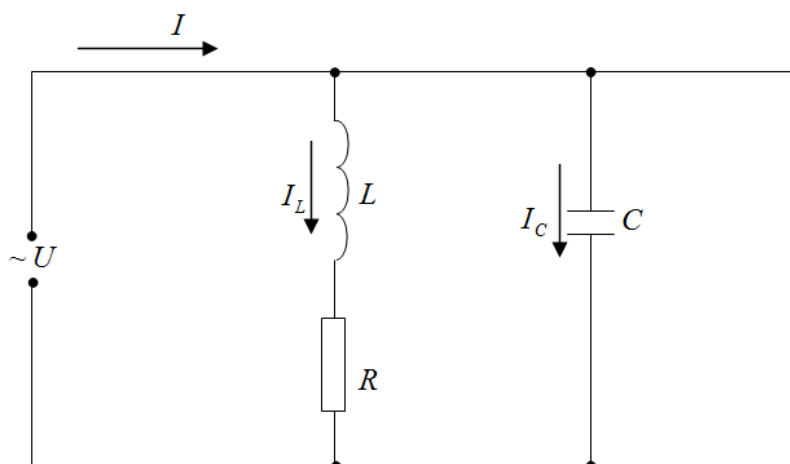
$$I = \frac{I}{m_I} = 6,7 \text{ см; } U = \frac{U_a}{m_U} = 3,6 \text{ см; } U_L = \frac{U_L}{m_U} = 4 \text{ см; } U_C = \frac{U_C}{m_U} = 0,7 \text{ см.}$$

Побудову векторної діаграми починаємо з вектора струму, який слід відкласти на горизонтальній осі. Оскільки активна складова напруги співпадає по фазі із вектором струму, то вектор  $\vec{U}_a$  проводимо паралельно вектору струму. Із кінця вектора  $\vec{U}_a$  на  $90^\circ$  відкладаємо вектор спаду напруги на індуктивності  $\vec{U}_L$  (випереджає вектор струму), а з його кінця відкладаємо вектор спаду напруги на ємності  $\vec{U}_C$ , який відстає на  $90^\circ$  від вектора струму і

має довжину 0,7 см. З'єднавши кінець вектора  $\vec{U}_C$  з початком вектора  $\vec{U}_a$ , отримаємо вектор загальної напруги  $\vec{U}$ , яка прикладена до схеми.



**Приклад 2.** До мережі змінного струму (120 В; 50 Гц) приєднані паралельно конденсатор (20 мкФ) і котушка (100 Ом; 0,5 Гн). Визначити сили струмів в конденсаторі, в котушці і загальну силу струму.



Дану задачу зручніше розв'язувати за допомогою провідностей, оскільки котушка і конденсатор з'єднані паралельно.

Активна провідність  $G_1$  першої вітки рівна:

$$G_1 = \frac{R}{Z^2} = \frac{R}{R^2 + X_L^2},$$

де  $R$  – активний опір котушки;  $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$  – повний опір вітки;  $X_L$  – індуктивний опір котушки, який рівний:

$$X_L = 2\pi\nu L,$$

де  $\nu$  – частота коливань;  $L$  – індуктивність котушки.

Із двох останніх виразів можемо записати:

$$G_1 = \frac{R}{R^2 + (2\pi\nu L)^2} = \frac{100}{100^2 + (2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,5)^2} = 0,0029 \text{ См}$$

Реактивна провідність  $B_1$  першої вітки рівна:

$$B_1 = \frac{X_L}{Z^2} = \frac{2\pi\nu L}{R^2 + (2\pi\nu L)^2} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,5}{100^2 + (2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,5)^2} = 0,0045 \text{ См},$$

$$Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2} = \sqrt{0,0029^2 + 0,0045^2} = 0,0054 \text{ См}.$$

Аналогічний розрахунок проведемо для другої вітки, яка містить конденсатор. Оскільки активний опір цієї вітки рівний нулю, то її активна провідність  $G_2$  рівна нулю  $G_2 = 0$ . Реактивна провідність  $B_2$  другої вітки рівна:

$$B_2 = \frac{X_C}{Z^2} = \frac{X_C}{X_C^2} = \frac{1}{X_C},$$

де  $X_C$  – ємнісний опір конденсатора, який рівний:

$$X_C = \frac{1}{2\pi\nu C},$$

де  $\nu$  – частота коливань;  $C$  – ємність конденсатора.

Тоді:

$$B_2 = \frac{1}{\frac{1}{2\pi\nu\tilde{N}}} = 2\pi\nu\tilde{N} = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-5} = 0,0063 \text{ См}.$$

Повна провідність  $Y_2$  другої вітки рівна:

$$Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_2^2} = \sqrt{B_2^2} = B_2 = 0,0063 \text{ См}.$$

Повна провідність  $Y$  кола рівна:

$$Y = \sqrt{(G_1 + G_2)^2 + (B_1 - B_2)^2} = \sqrt{(0,0029 + 0)^2 + (0,0045 - 0,0063)^2} = 0,0034 \text{ См}.$$

Струми в колі визначимо, знаючи напругу  $U$  і провідності:

$$I = UY = 120 \cdot 0,0034 = 0,41 \text{ А};$$

$$I_L = UY_1 = 120 \cdot 0,0054 = 0,65 \text{ А};$$

$$I_C = UY_2 = 120 \cdot 0,0063 = 0,76 \text{ А}.$$

## ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Для визначення індуктивності дроселя його спочатку включають в коло постійного струму, а потім в коло змінного струму частотою 50 Гц. Визначити індуктивність дроселя, якщо при проходженні через нього постійного струму величиною 3 А напруга дорівнює 15 В, а при змінному струмі 2 А напруга 120 В.

2. У коло змінного струму напругою 220 В і частотою 50 Гц включені паралельно ємність 35,4 мкФ, активний опір 100 Ом і індуктивність 0,7 Гн. Знайти силу струму в колі, зсув фаз між струмом і напругою (Зсув фаз між струмом і напругою знайти, побудувавши векторну діаграму).

3. У коло змінного струму напругою 220 В і частотою 50 Гц включені послідовно ємність 35,4 мкФ, активний опір 100 Ом і індуктивність 0,7 Гн. Знайти силу струму в колі і спад напруги на ємності, активному опорі і індуктивності.

4. Індуктивність 22,6 мГн і активний опір включені паралельно в ланцюг змінного струму частотою 50 Гц. Знайти опір, якщо відомо, що зсув фаз між напругою і струмом дорівнює  $60^\circ$ .

5. У коло змінного струму напругою 220 В і частотою 50 Гц включені послідовно ємність 35,4 мкФ, активний опір 100 Ом і індуктивністю 0,7 Гн. Знайти повну потужність споживану контуром.

6. Котушка з індуктивністю 23 мГн і опором 0,8 Ом підключена до конденсатора С і джерела напруги 360 Гц. Яку ємність повинен мати конденсатор С, щоб напруга і сила струму збігалися по фазі.

7. Коло змінного струму містить послідовно з'єднані котушку індуктивності, конденсатор і резистор. Амплітудне значення сумарної напруги на котушці і конденсаторі  $U_{LC} = 173$  В, а амплітудне значення напруги на резисторі  $U_R = 100$  В. Визначте зсув фаз між струмом і зовнішнім напругою.

8. У колі, що складається з послідовно з'єднаних активного опорю 20 Ом, котушки індуктивністю 1 мГн і конденсатора 0,1 мкФ діє синусоїдальна ЕРС.

Визначити частоту ЕРС, при якій в колі настає резонанс. Знайти максимальні значення сили струму і напруги на всіх елементах кола при резонансі, якщо при цьому максимальне значення ЕРС 30 В.

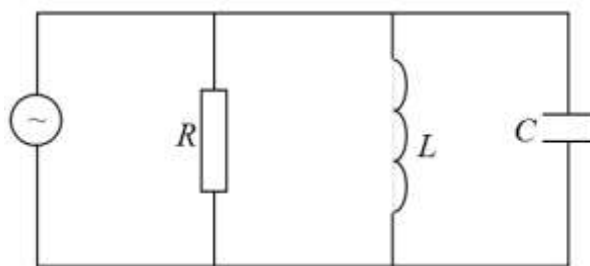
9. До мережі змінного струму (120 В, 50 Гц) приєднані паралельно конденсатор (20 мкФ) і котушка (100 Ом; 0,5 Гн). Визначте сили струму в конденсаторі, в котушці і загальну силу струму (задачу зробити використовуючи формули провідності).

10. У коло змінного струму напругою 220 В включені послідовно ємність, активний опір 10 Ом і індуктивність. Знайти потужність, споживану контуром, якщо відомо, що падіння напруги на конденсаторі  $U_C = 2U_R$  і падіння напруги на індуктивності  $U_L = 3U_R$ .

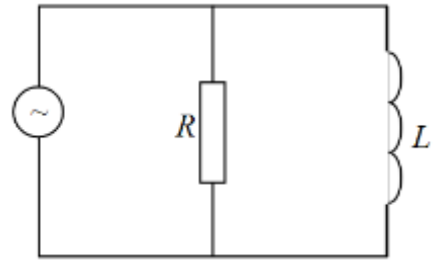
11. До котушки з індуктивністю  $L = 0,036$  Гн та активним опором  $R = 4,04$  Ом прикладена напруга  $U = 120$  В,  $\nu = 50$  Гц. Знайти коефіцієнт потужності котушки  $\cos\varphi$ , струм у колі  $I$ , активну  $P$ , реактивну  $Q$  та повну  $S$  потужність. Перевірити баланс потужностей. Побудувати векторну діаграму.

12. Для кола з послідовно з'єднаними елементами  $R = 22$  Ом;  $L = 0,3$  Гн;  $C = 75$  мкФ знайти загальний струм кола, спади напруг на кожному елементі, перевірити баланс потужності та побудувати векторну діаграму. Напруга джерела  $U = 120$  В, частота струму  $\nu = 50$  Гц.

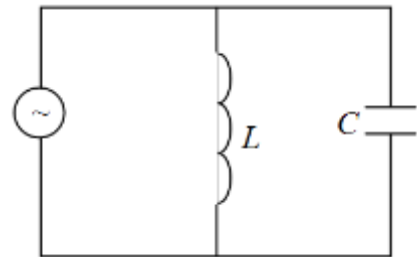
13. Для кола наведеного на рис. з паралельно з'єднаними елементами  $R = 50$  Ом;  $L = 0,6$  Гн;  $C = 60$  мкФ. Знайти загальний струм кола, струми у кожному елементі кола, перевірити баланс потужності та побудувати векторну діаграму. Розрахунок даного кола виконати з використанням поняття провідності елементів електричного кола. Напруга джерела  $U = 100$  В, частота струму  $\nu = 50$  Гц.



14. Для кола наведеного на рис. з паралельно з'єднаними елементами  $R = 20 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,2 \text{ Гн}$ . Знайти загальний струм кола, струми у кожному елементі кола, перевірити баланс потужності та побудувати векторну діаграму. Розрахунок даного кола виконати з використанням поняття провідності елементів електричного кола. Напруга джерела  $U = 100 \text{ В}$ , частота струму  $\nu = 50 \text{ Гц}$ .



15. Для кола наведеного на рис. з паралельно з'єднаними елементами  $L = 0,4 \text{ Гн}$ ;  $C = 40 \text{ мкФ}$ . Знайти загальний струм кола, струми у кожному елементі кола, перевірити баланс потужності та побудувати векторну діаграму. Розрахунок даного кола виконати з використанням поняття провідності елементів електричного кола. Напруга джерела  $U = 100 \text{ В}$ , частота струму  $\nu = 50 \text{ Гц}$ .



16. Через резистор з опором  $R = 30 \text{ Ом}$  протікає струм  $i = 1,75 \sin \omega t$ . Знайти активну потужність, амплітудне та діюче значення струму та напруги на резисторі, записати вираз миттєвого значення напруги та побудувати векторну діаграму.

17. До котушки, індуктивність якої  $L = 0,05 \text{ Гн}$  та опір  $R = 15 \text{ Ом}$  прикладена змінна напруга з частотою  $\nu = 300 \text{ Гц}$  та діючим значенням  $U = 82 \text{ В}$ . Записати закон зміни струму якщо початкова фаза напруги  $\varphi = 0$ , знайти його



діюче значення та побудувати векторну діаграму. Перевірити баланс потужностей.

18. Через конденсатор ємністю  $C = 1 \text{ мкФ}$  та резистор  $R = 1 \text{ кОм}$  з'єднаних послідовно проходить струм, діюче значення якого  $I = 50 \text{ мА}$ . Частота струму  $\nu = 50 \text{ Гц}$ . Знайти діюче та амплітудне значення напруги на конденсаторі та резисторі, записати закони їх зміни. Знайти повну напругу, визначити кут  $\varphi$  та побудувати векторну діаграму. Перевірити баланс потужностей.

19. Паралельно з'єднані індуктивність  $L = 0,001 \text{ Гн}$  та резистор  $R = 10 \text{ Ом}$  підключені до джерела змінного струму з частотою  $\nu = 50 \text{ Гц}$  та діючим значенням напруги  $U = 36 \text{ В}$ . Знайти амплітудне значення напруги та записати закон її змінени. Знайти струми в елементах кола, визначити їх амплітудні значення, записати закони їх зміни та побудувати векторну діаграму. Перевірити баланс потужностей.

20. До котушки, індуктивність якої  $L = 0,01 \text{ Гн}$  та опір  $R = 15 \text{ Ом}$  прикладена змінна напруга з частотою  $\nu = 50 \text{ Гц}$  та діючим значенням  $U = 82 \text{ В}$ . Знайти діюче значення струму, записати закон його зміни якщо початкова фаза напруги  $\varphi = 0$  та побудувати векторну діаграму. Перевірити баланс потужностей.

## РОЗДІЛ 4

### ОДНОФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

#### 4.1. Зображення синусоїдних величин векторними

Математичні розрахунки над фізичними величинами, що змінюються за синусоїдним законом значно простіше здійснювати, коли замінити синусоїди векторами. Миттєві значення функції  $i = I_m \sin(\omega t + \alpha_i)$  можна одержати як проекцію на вертикальну вісь відрізка довжиною  $I_m$  (рис. 4.1), який обертається відносно початку прямокутної системи координат з кутовою швидкістю  $\omega = 2\pi\nu$  у позитивному напрямку (тобто проти годинникової стрілки). Цей відрізок називають умовним обертовим вектором.

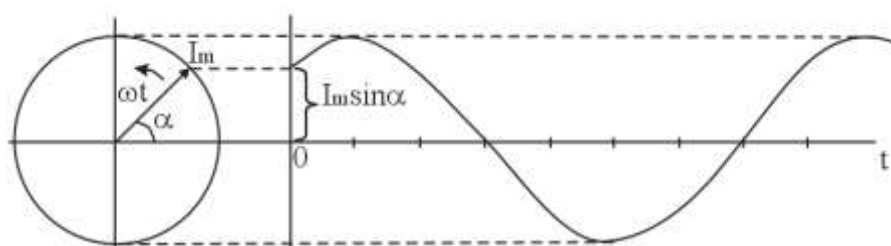


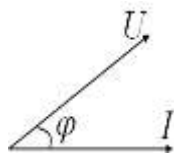
Рис. 4.1. Хвильова і векторна діаграми

У момент  $t = 0$  вектор розміщений під кутом  $\alpha$  і до горизонтальної осі і його проекція на вертикальну вісь дорівнює  $I_m \sin \alpha$ , тобто миттєвому значенню заданої функції при  $t = 0$ . За час  $t = t_1$  вектор повернеться на кут  $\omega t_1$  і буде повернутий відносно горизонтальної осі на кут  $\omega t_1 + \alpha$ , а його проекція на вертикальну вісь буде  $I_m \sin(\omega t_1 + \alpha)$  тощо.

Таким чином, розгляд синусоїдних функцій можна замінити розглядом обертових векторів, а для одержання миттєвих значень потрібно взяти проекцію векторів на вертикальну вісь. При цьому початкова фаза визначає положення вектора відносно позитивної горизонтальної осі координат. Отже, будь-якому обертовому вектору можна поставити у відповідність синусоїду  $i$ , навпаки, будь-якій синусоїді можна поставити у відповідність обертовий вектор, а кут відраховувати від горизонтальної осі. При позитивній (що випереджає) початковій фазі вектор обернений на відповідний кут проти руху

стрілки годинника, а при негативній (що відстає) – у напрямку руху стрілки годинника.

Для одночасного зображення декількох векторів, один вектор приймають за вихідний і будують інші вектори відносно вихідного вектору, з урахуванням



**Рис. 4.2.** Векторна діаграма, на якій напруга випереджає струм на кут  $\varphi$

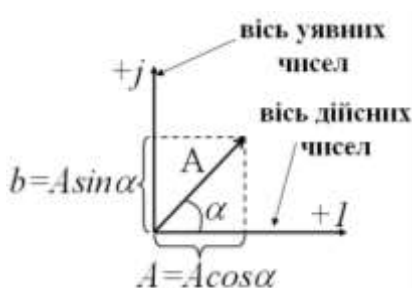
зсуву фаз, тобто будують векторну діаграму. *Векторною діаграмою називають сукупність векторів, що зображають синусоїдальні ЕРС, напруги та струми однієї частоти, які виходять із загальної точки.*

Наприклад, якщо  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ , а  $i = I_m \sin \omega t$ , то можна зобразити їх векторами так, як показано на рис. 4.2.

## 4.2. Комплексна форма подання синусоїдальних напруг і струмів

Комплексний або символічний метод полягає в тому, що синусоїдальна функція зображається вектором на комплексній площині і виражається через комплексні числа. Таким чином виникає можливість замінити геометричні операції над векторами на алгебраїчні операції над комплексними числами.

Кожна точка на комплексній площині визначається радіусом-вектором цієї точки, тобто вектором, початок якого співпадає з початком координат, а кінець знаходиться у точці, що відповідає комплексному числу (рис. 4.3).



**Рис. 4.3.** Зображення вектора на комплексній площині

Існують наступні форми запису

комплексного числа:

$$\dot{A} = a + jb \text{ – алгебраїчна;}$$

$$\dot{A} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha \text{ – тригонометрична;}$$

$$\dot{A} = A e^{j\alpha} \text{ – показникова;}$$

$$\dot{A} = A \angle \alpha \text{ – полярна.}$$

Тут  $\dot{A}$  – комплексне число;  $A$  – модуль (довжина

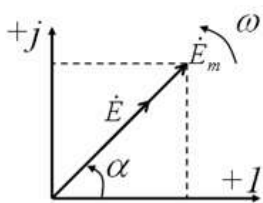
вектора);  $\alpha$  – аргумент;  $j = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.

Вектор, який обертається у позитивному напрямку (рис. 4.3), тобто проти годинникової стрілки, з кутовою швидкістю  $\omega$  може бути виражений так:

$$Ae^{j(\omega t + \alpha)} = \dot{A}e^{j\omega t},$$

де  $\dot{A} = Ae^{j\alpha} = A \angle \alpha$  – комплексна амплітуда, являє собою вектор в момент  $t=0$ . Це комплексна величина, що не залежить від часу, модуль і аргумент її відповідно дорівнюють амплітуді і початковій фазі синусоїдної функції.  $e^{j\omega t}$  – обертовий множник. Множення комплексної амплітуди  $\dot{A}$  на  $e^{j\omega t}$  означає обертання вектора  $A$  на кут  $\omega t$  в позитивному напрямку.

Записуючи комплексну функцію у тригонометричній формі:  $Ae^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + jA \sin(\omega t + \alpha)$ , можна зробити висновок, що синусоїдна функція  $A \sin(\omega t + \alpha)$  – це уявна частина комплексної функції  $Ae^{j(\omega t + \alpha)}$ , або ж проекція обертового вектора на уявну вісь.



**Рис. 4.4.** Зображення синусоїдальної ЕРС обертовим вектором на комплексній площині

Наприклад, для того, щоб подати синусоїдальну ЕРС  $e = E_m \sin(\omega t + \alpha)$  з початковою фазою  $\alpha$ , проведемо на комплексній площині (рис. 4.4) з початку координат під кутом  $\alpha$  до осі дійсних величин вектор, довжина якого в масштабі побудови дорівнює амплітуді ЕРС  $E_m$ .

Кінець цього вектора перебуває в точці, якій відповідає певне комплексне число – комплексна амплітуда ЕРС:

$$\dot{E}_m = E_m e^{j\alpha} = E_m \angle \alpha.$$

При збільшенні в часі фази ЕРС  $\omega t + \alpha$  кут між вектором і віссю дійсних величин зростає, тобто виходить обертовий вектор

$$E_m e^{j(\omega t + \alpha)} = E_m \cos(\omega t + \alpha) + jE_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Як бачимо, уявна складова обертового вектора дорівнює заданій синусоїдальній ЕРС.

Вектор на комплексній площині, довжина якого в масштабі побудови дорівнює діючому значенню синусоїдальної ЕРС, називається *комплексним діючим значенням синусоїдальної ЕРС*

$$\dot{E} = \frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}} = E e^{j\alpha} = E \angle \alpha.$$

При аналізі кіл синусоїдального струму застосовують головним чином комплексні діючі значення синусоїдальних величин, скорочено їх називають *комплексними значеннями*, а відповідні вектори на комплексній площині – *векторами комплексних значень*.

Перехід від миттєвих значень синусоїдних функцій до комплексних амплітуд і зворотний перехід досить простий, наприклад:

$$u = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \leftrightarrow \dot{U}_m = 220\sqrt{2} e^{j30^\circ};$$

$$i = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 40^\circ) \leftrightarrow \dot{I}_m = 5\sqrt{2} e^{-j40^\circ};$$

$$\dot{U}_m = 40\sqrt{2} e^{j60^\circ} \leftrightarrow u = 40\sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ)$$

Комплекси діючих значень напруги та струму:

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}; \dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}; \dot{U} = 220 e^{j30^\circ}; \dot{I} = 5 e^{-j40^\circ}.$$

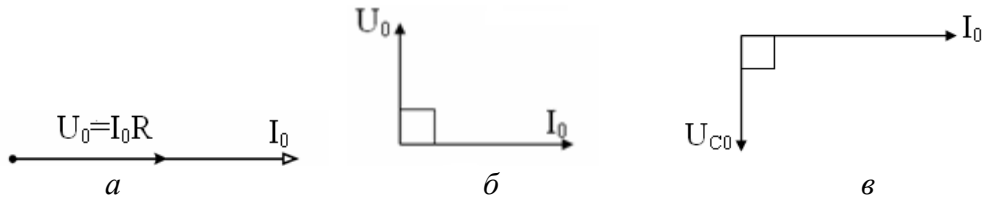
### 4.3. Закон Ома у комплексній формі для ділянки кола змінного струму

Запишемо закон Ома для елементів електричного кола синусоїдального струму.

**1. Резистивний елемент.** Як відомо, в колі що містить тільки резистор опором  $R$ , напруга і струм змінюється в однакових фазах, тобто зсув фаз між струмом і напругою дорівнює нулю. Напруга і струм досягають одночасно максимальних і мінімальних значень. На векторній діаграмі, де опорною віссю служить вісь струмів, вектор, що зображає амплітуду коливань напруги  $U_0$ , збігається з віссю струмів  $I_0$  (рис. 4.5 а).

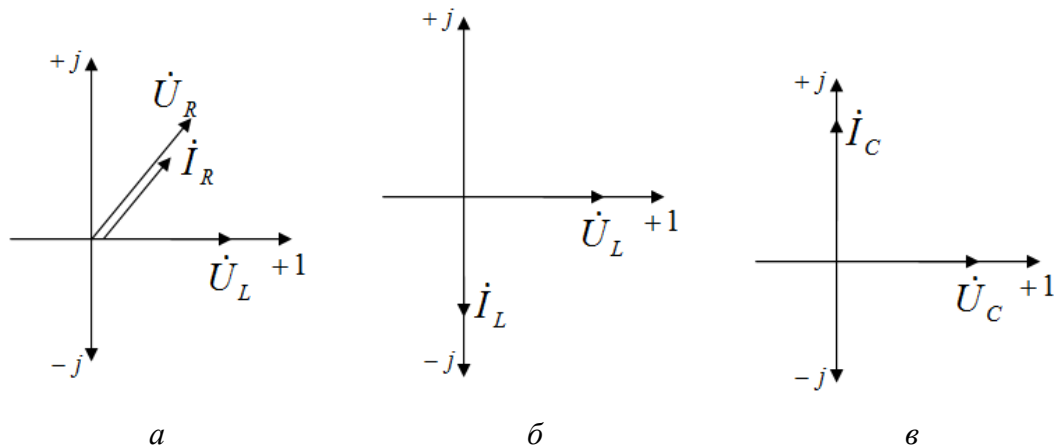
Для визначення вектора  $\dot{U}_R$  необхідно довжину вектора  $\dot{I}_R$  збільшити в  $R$  разів, залишивши той же напрям. У комплексній формі це відповідає множенню комплексу струму  $\dot{I}_R$  на опір  $R$  і оператор повороту  $e^{j0} = 1$ , тобто

$$\dot{U}_R = \dot{I}_R \operatorname{Re}^{j0} = \dot{I}_R R.$$



**Рис. 4.5.** Векторна діаграма для кола з (а) активним опором, (б) ідеальною котушкою, (в) ідеальним конденсатором

Векторна діаграма комплексних значень струму й напруги зображена на рис. 4.6 а.



**Рис. 4.6.** Векторні діаграми комплексних значень струму й напруги для кола з (а) активним опором, (б) ідеальною котушкою індуктивності, (в) ідеальним конденсатором

**2. Індуктивний елемент.** У колі змінного струму, в яке ввімкнено котушку індуктивності, струм відстає за фазою від напруги на  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 4.5 б).

Для визначення вектора  $\dot{U}_L$  необхідно довжину вектора  $\dot{I}_L$  збільшити в  $X_L$  разів і повернути його в додатному напрямку на  $90^\circ$ , що в комплексній формі відповідає множенню комплексу струму  $\dot{I}_L$  на опір  $X_L$  і оператор повороту  $j = e^{j90}$  (рис. 4.6 б), тобто:

$$\dot{U}_L = \dot{I}_L X_L e^{j90} = \dot{I}_L j X_L,$$

де  $jX_L$  – комплексний опір індуктивного елемента.

**3. Ємнісний елемент.** У колі змінного струму, до якого входить конденсатор, а опором провідників і пластин конденсатора можна знехтувати,

коливання сили струму у колі випереджують коливання напруги на конденсаторі на  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 4.5 в).

Для визначення вектора  $\dot{U}_C$  необхідно довжину вектора  $\dot{I}_C$  збільшити в  $X_C$  разів і повернути його у від'ємному напрямку на  $90^\circ$ , що в комплексній формі відповідає множенню комплексу струму  $\dot{I}_C$  на опір  $X_C$  і оператор повороту  $-j = e^{-j90}$  (рис. 4.6 в), тобто:

$$\dot{U}_C = \dot{I}_C X_C e^{-j90} = -\dot{I}_C j X_C,$$

де  $-jX_C$  – комплексний опір ємнісного елемента.

#### 4.4. Потужність у комплексній формі

Електричні процеси в резистивних, індуктивних й ємнісних елементах різні за фізичною природою. У резистивних елементах відбувається необоротне перетворення електричної енергії в інші види енергії. Середня швидкість необоротного процесу перетворення енергії в резистивному елементі визначається активною потужністю  $P$ . В індуктивному й ємнісному елементах відбувається періодичне акумулювання енергії в магнітному і електричному полях, а потім енергія повертається в зовнішню щодо цих елементів частину кола. У таких елементах не відбувається необоротного перетворення електричної енергії в інші види, тобто активна потужність  $P$  дорівнює нулю.

Енергетичні процеси в індуктивному і ємнісному елементах визначаються реактивною індуктивною потужністю  $Q_L$  і реактивною ємнісною потужністю  $Q_C$ .

Повна потужність кола змінного струму дорівнює добутку діючих значень напруги і струму:

$$S = UI.$$

Комплексне значення повної потужності отримаємо, якщо помножимо комплексну напругу на сполучене комплексне значення струму

$$\underline{S} = \underline{U}I^*$$

Сполучене комплексне значення струму  $I^*$  відрізняється від  $I$  знаком аргументу:

$$I = Ie^{j\alpha_i}, \quad I^* = Ie^{-j\alpha_i}.$$

Комплексне значення повної потужності

$$\underline{S} = \underline{U}I^* = Ue^{j\alpha_u} Ie^{-j\alpha_i} = UIe^{j(\alpha_u - \alpha_i)} = Se^{j\varphi}.$$

У тригонометричній формі

$$\underline{S} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi = P + jQ,$$

де  $P = S \cos \varphi$  – активна потужність кола;  $Q = S \sin \varphi$  – реактивна потужність кола;  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$  – повна потужність кола.

При активно-індуктивному характері навантаження знак перед  $jQ$  позитивний, при активно-ємнісному – негативний.

### Приклад.

Ємнісний елемент з ємністю  $C=22$  мкФ підключений до джерела синусоїдної напруги  $U=220$  В з частотою 50 Гц. Початкова фаза напруги  $\psi_U = 65^\circ$ . Визначте синусоїдний струм і реактивну потужність цього елемента.

### Розв'язок.

Зобразимо струм і напругу в комплексному вигляді:

$$\underline{U} = 220e^{j65^\circ}.$$

Опір ємнісного елемента:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{2\pi 50 \cdot 22 \cdot 10^{-6}} = 144,8 \text{ Ом.}$$

Комплексний ємнісний опір:

$$\underline{X}_C = 144,8e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j144,8.$$



За законом Ома для ємнісного елемента комплексний струм:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{\dot{X}_C} = \frac{220e^{j65^\circ}}{144,8e^{-j\frac{\pi}{2}}} = 1,52e^{j155^\circ}.$$

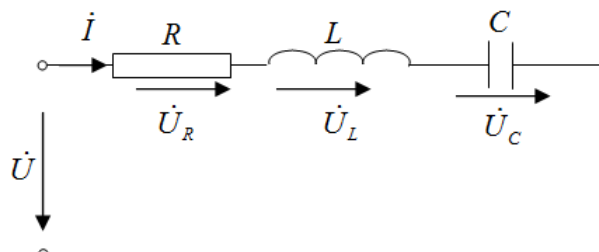
$$Q_C = I^2 X_C = 1,52^2 \cdot 144,8 = 334,5 \text{ вар.}$$

### Контрольні запитання

1. Що називається векторною діаграмою?
2. В яких елементах електричного кола відбувається необоротне перетворення електричної енергії?
3. Напишіть вираз для миттєвого значення струму в колі, що складається з активного опору, якщо до затискачів кола прикладена напруга  $u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$ .
4. Напишіть вираз для миттєвого значення струму в колі, що складається з ідеальної котушки індуктивності, якщо до затискачів кола прикладена напруга  $u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$ .
5. Напишіть вираз для миттєвого значення струму в колі, що складається з ідеального конденсатора, якщо до затискачів кола прикладено напругу  $u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$ .
6. Накресліть векторну діаграму для кола, що складається з активного опору.
7. Накресліть векторну діаграму для кола, що складається з ідеальної котушки індуктивності.
8. Накресліть векторну діаграму для кола, що складається з ідеального конденсатора.
9. За якою формулою можна знайти повну потужність кола змінного струму?
10. Чим відрізняється коло з активно-індуктивним від кола з активно-ємнісним навантаженням?

## ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 1.** Електричне коло живиться від джерела синусоїдального струму з частотою 20 Гц і напругою 120 В. Знайти струм в колі, напруги на усіх ділянках, активну, реактивну і повну потужності. Побудувати векторну діаграму. Вважати, що  $R=4$  Ом,  $L=6,37$  Гн,  $C=159$  мкФ.

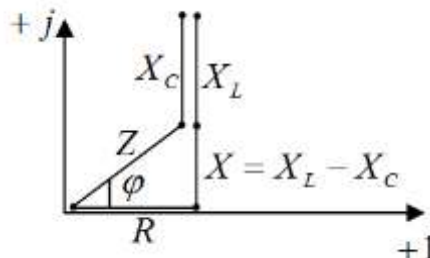


Запишемо у комплексному вигляді опір кожного елемента кола:

$$\dot{R} = 4e^{j0} = 4 \text{ Ом}; \quad \dot{X}_L = 8e^{+j90} = j8 \text{ Ом}; \quad \dot{X}_C = 5e^{-j90} = -j5 \text{ Ом},$$

$$\dot{Z} = \dot{R} + \dot{X}_L + \dot{X}_C = 4 + j(8 - 5) \text{ Ом}.$$

На комплексній площині в масштабі: 1 см – 2 Ом, побудуємо трикутник опорів:



Із трикутника визначимо величину повного опору  $Z$  і кут фазового зсуву:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 5 \text{ Ом},$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{3}{4} = 37^\circ.$$

Запишемо у показникові формі опір всього кола:

$$\underline{Z} = Ze^{+j\varphi} = 5e^{+j37^\circ} \text{ Ом}.$$

Прийmemo початкову фазу прикладеної до кола напруги за нуль і визначимо по закону Ома струм в даному колі:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{120e^{+j0^\circ}}{5e^{+j37^\circ}} = 24e^{-j37^\circ}.$$

Як бачимо з останнього виразу струм у колі відстає від напруги по фазі на  $37^\circ$ . Знаючи величину струму, визначимо потужності для окремих елементів кола:

$$P = I^2 R = 24^2 \cdot 4 = 2304 \text{ Вт};$$

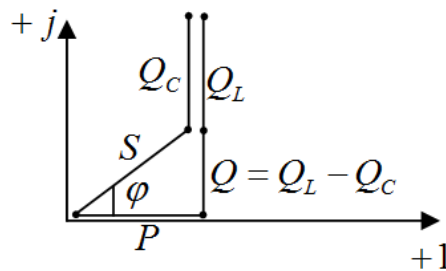
$$Q_L = I^2 X_L = 24^2 \cdot 8 = 4608 \text{ вар};$$

$$Q_C = I^2 X_C = 24^2 \cdot 5 = 2880 \text{ вар}.$$

Тоді повна потужність буде рівна:

$$S = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2} = \sqrt{2304^2 + (4608 - 2880)^2} = 2880 \text{ В}\cdot\text{А}.$$

Побудуємо трикутник потужностей в масштабі: 1 см=1000 Вт (вар)



Для побудови векторних діаграм по струму і напрузі приймемо початкову фазу струму рівною нулю, оскільки струм у даній схемі є однаковим для всіх елементів кола. Запишемо вирази для напруг у комплексній формі:

$$\dot{U}_R = \dot{I}R = 96e^{+j0^\circ} \text{ В};$$

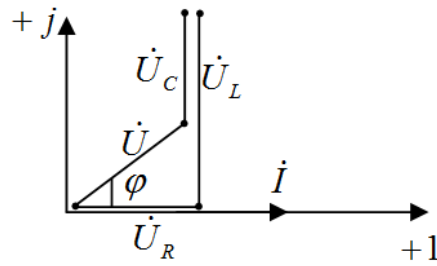
$$\dot{U}_L = \dot{I}X_L = 192e^{+j90^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}X_C = 120e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

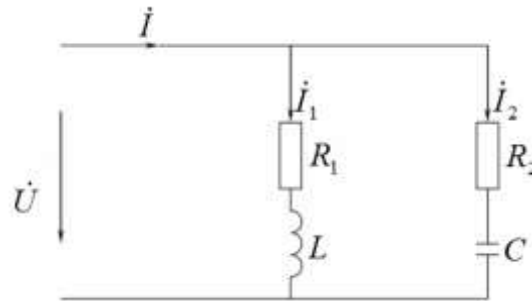
$$\dot{U} = \dot{I}Z = 120e^{-j37^\circ} \text{ В}.$$

Виберемо масштаб: 1 см = 6 А, 1 см = 50 В. Векторна діаграма будується на основі другого закону Кірхгофа для даного кола:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$



**Приклад 2.** У мережу змінного струму паралельно котушці індуктивності включений конденсатор і резистор, які з'єднані паралельно. Визначити струми у вітках, а також загальний струм, якщо  $U = 120$  В,  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 1$  Ом,  $X_L = 6$  Ом,  $X_C = 9,95$  Ом.



Повний опір віток:

$$\underline{Z_1} = R_1 + jX_L = 2 + j6 = \sqrt{2^2 + 6^2} e^{j \arctg \frac{6}{2}} = 6,32 e^{j71''},$$

$$\underline{Z_2} = R_2 - jX_C = 2 - j9,95 = \sqrt{2^2 + 9,95^2} e^{-j \arctg \frac{9,95}{2}} = 10 e^{-j84''}.$$

Знаходимо струми у паралельних вітках:

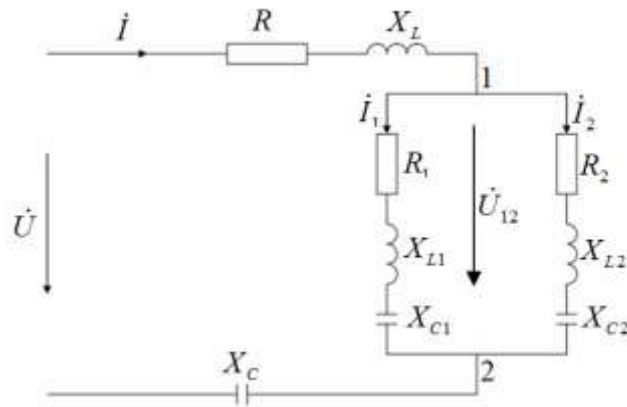
$$\underline{i_1} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z_1}} = \frac{120}{6,32 e^{j71''}} = 19 e^{-j71''} \text{ А}, \quad \underline{i_2} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z_2}} = \frac{120}{10 e^{-j84''}} = 12 e^{j84''} \text{ А}.$$

Загальний струм у колі буде рівний:

$$\underline{i} = \underline{i_1} + \underline{i_2} = 19 e^{-j71''} + 12 e^{j84''}.$$

**Приклад 3.** Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напряга живлення  $U = 127$  В; активні і реактивні

опори кола:  $R = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 10 \text{ Ом}$ ,  
 $X_{L2} = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 2 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 30 \text{ Ом}$ .



Повний опір першої вітки:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= R_1 + j(X_{L1} - X_{C1}) = \\ &= 15 + j(10 - 20) = 15 - j10 = \sqrt{15^2 + 10^2} e^{j \arctg \frac{10}{15}} = 18e^{-j33^\circ}. \end{aligned}$$

Повний опір другої вітки:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= R_2 + j(X_{L2} - X_{C2}) = \\ &= 10 + j(20 - 30) = 10 - j10 = \sqrt{10^2 + 10^2} e^{j \arctg \frac{10}{10}} = 14,1e^{-j45^\circ}. \end{aligned}$$

Загальний опір паралельної ділянки кола:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{12} &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \\ &= \frac{18e^{-j33^\circ} \cdot 14,1e^{-j45^\circ}}{15 - j10 + 10 - j10} = \frac{253,8e^{-j78^\circ}}{25 + j20} = \frac{253,8e^{-j78^\circ}}{32e^{-j38^\circ}} = 7,93e^{-j40^\circ} = 6 - j5. \end{aligned}$$

Опір нерозгалуженої ділянки кола рівний:

$$\underline{Z}' = R + jX_L - jX_C = 2 + j(10 - 2) = 2 + j8.$$

Повний опір усього кола рівний:

$$\underline{Z} = \underline{Z}' + \underline{Z}_{12} = 2 + j8 + 6 - j5 = 8 + j3 = 8,5e^{j20^\circ}.$$

Тоді струм у колі рівний:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{127}{8,5e^{j20^0}} = 15e^{-j20^0} \text{ А.}$$

Напруга на ділянці 1-2:

$$U_{12} = I Z_{-12} = 15e^{-j20^0} \cdot 7,93e^{-j40^0} = 119e^{-j60^0}.$$

Струм у першій паралельній вітці:

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{U}_{12}}{Z_1} = \frac{119e^{-j60^0}}{18e^{-j33^0}} = 6,6e^{-j27^0} \text{ А.}$$

Струм у другій паралельній вітці:

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{U}_{12}}{Z_2} = \frac{119e^{-j60^0}}{14,1e^{-j45^0}} = 8,4e^{-j15^0} \text{ А.}$$

Знайдемо повний активний опір схеми:

$$R' = R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2 + \frac{15 \cdot 10}{15 + 10} = 8 \text{ Ом.}$$

Тоді активна потужність рівна:

$$P = I^2 R = 15^2 \cdot 8 = 1800 \text{ Вт.}$$

Знайдемо повний реактивний опір схеми:

$$X = (X_L - X_C) + \frac{(X_{L1} - X_{C1}) \cdot (X_{L2} - X_{C2})}{(X_{L1} - X_{C1}) + (X_{L2} - X_{C2})} = 10 - 2 + \frac{100}{-20} = 3 \text{ Ом.}$$

Реактивна потужність кола:

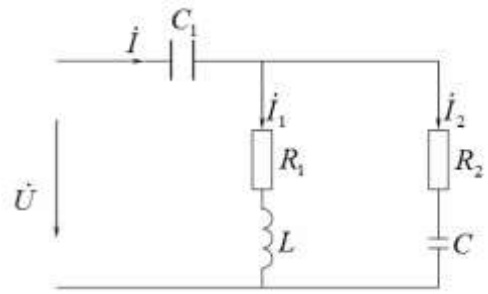
$$Q = I^2 X = 15^2 \cdot 3 = 675 \text{ вар.}$$

Тоді повна потужність:

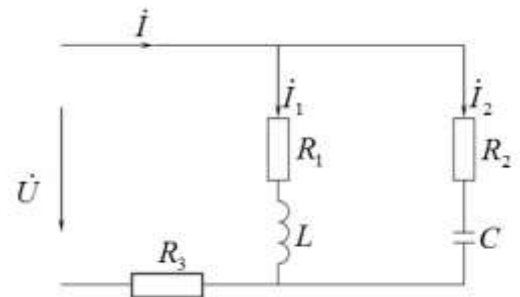
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{1800^2 + 675^2} = 1922 \text{ В·А.}$$

## ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

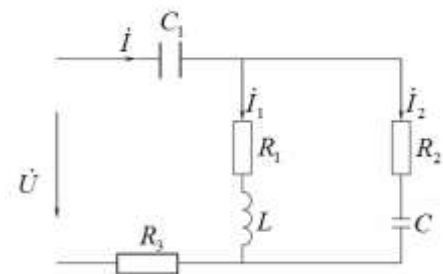
1. У мережу змінного струму паралельно котушці індуктивності включений конденсатор і резистор, які з'єднані паралельно. Визначити струми у вітках, а також загальний струм, якщо  $U = 220 \text{ В}$ ,  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{C_1} = 12 \text{ Ом}$ .



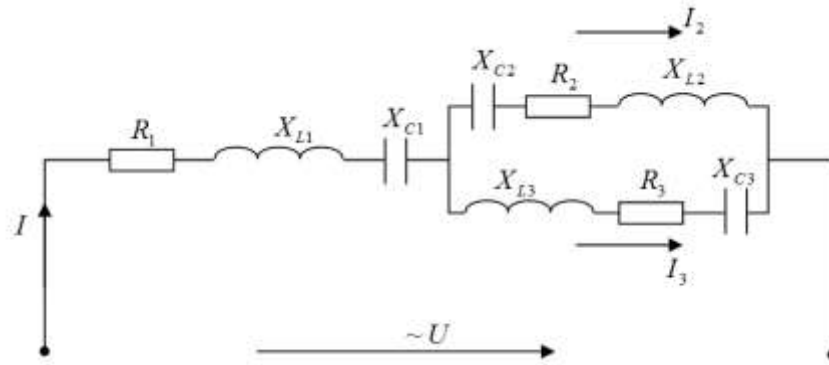
2. У мережу змінного струму паралельно котушці індуктивності включений конденсатор і резистор, які з'єднані паралельно. Визначити струми у вітках, а також загальний струм, якщо  $U = 80 \text{ В}$ ,  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 7 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 12 \text{ Ом}$ .



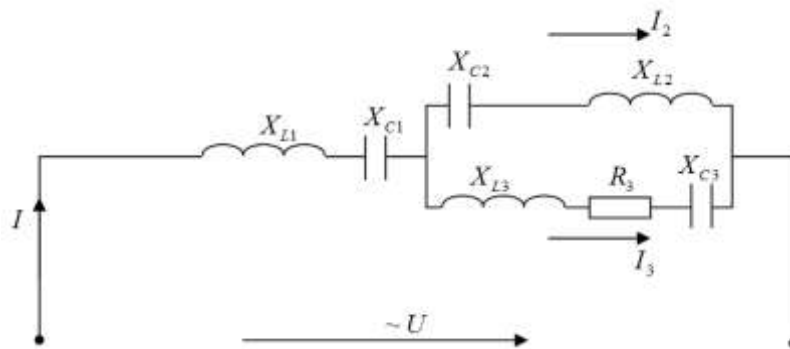
3. У мережу змінного струму паралельно котушці індуктивності включений конденсатор і резистор, які з'єднані паралельно. Визначити струми у вітках, а також загальний струм, якщо  $U = 180 \text{ В}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 12 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{C_1} = 9 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 14 \text{ Ом}$ .



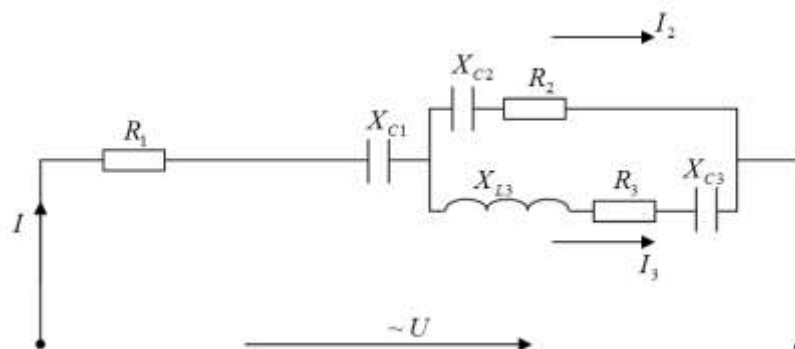
4. Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напруга живлення  $U = 220 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $R_1 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 14 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 9 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 14 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 15 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 7 \text{ Ом}$ .



5. Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напряга живлення  $U = 120 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $R_3 = 18 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 19 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 16 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 12 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 16 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 18 \text{ Ом}$ .



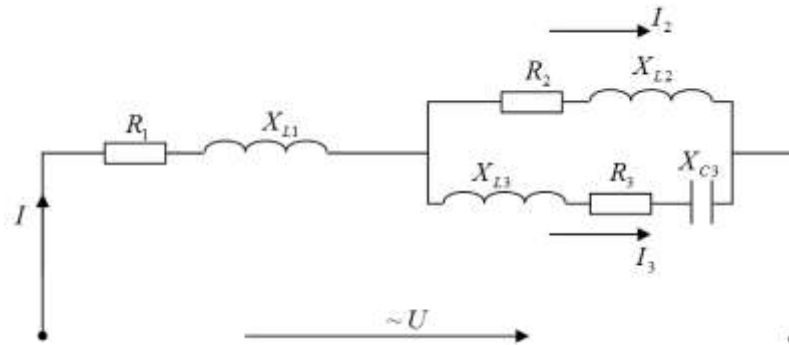
6. Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напряга живлення  $U = 220 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 7 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 6 \text{ Ом}$ .



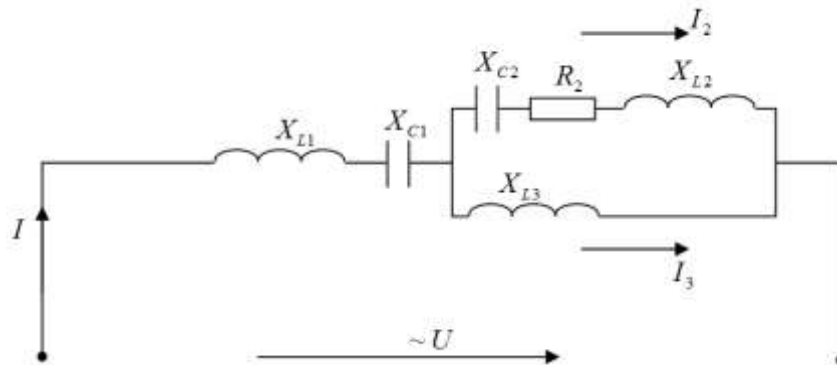
7. Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності



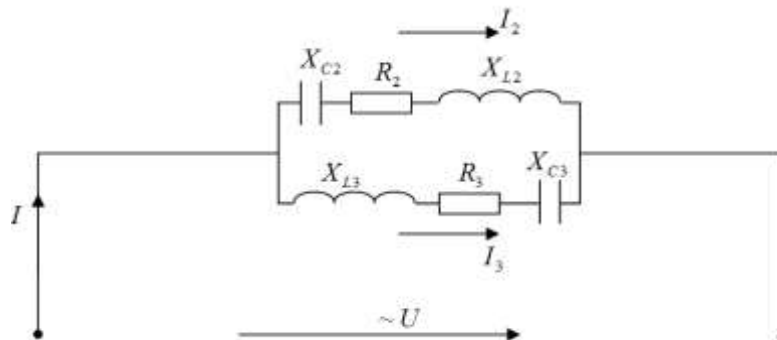
кола. Напруга живлення  $U = 220 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 9 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 12 \text{ Ом}$ .



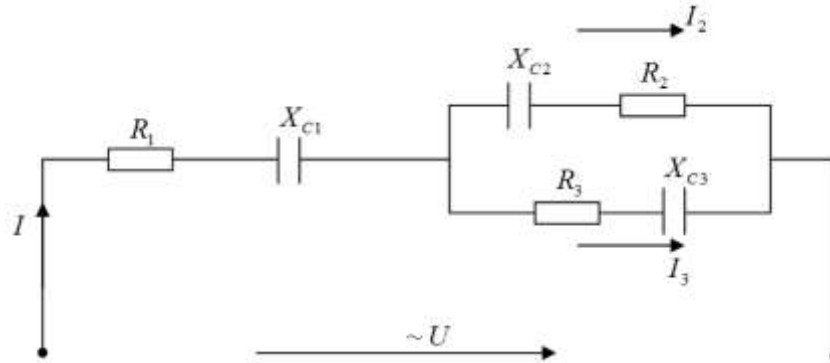
8. Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напруга живлення  $U = 220 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 12 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 16 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 18 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 14 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 13 \text{ Ом}$ .



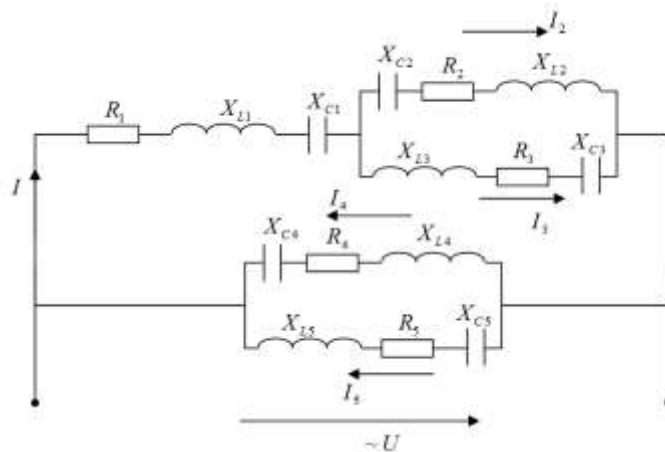
9. Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напруга живлення  $U = 220 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 12 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 5 \text{ Ом}$ .



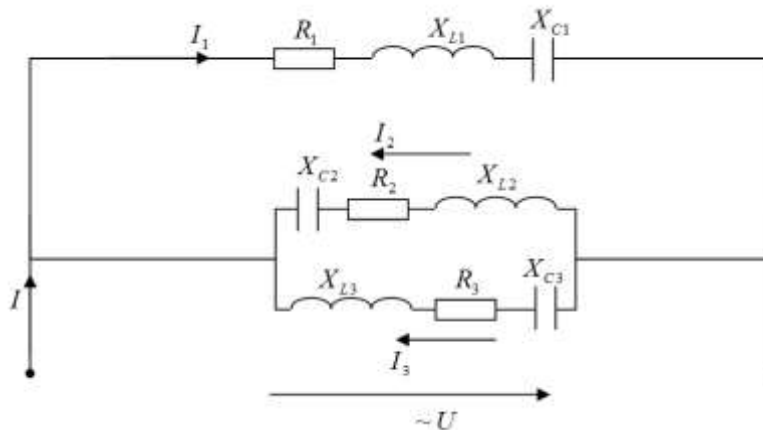
10. Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напряга живлення  $U = 220 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $R_1 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 14 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 9 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 15 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 14 \text{ Ом}$ .



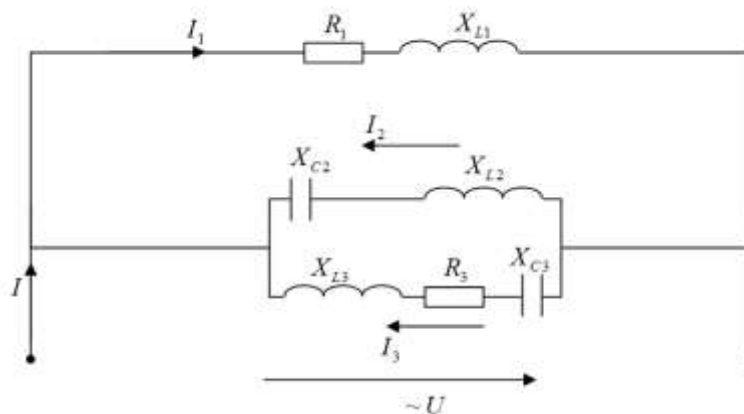
11. Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напряга живлення  $U = 120 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $R_1 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 14 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 9 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 9 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 14 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 15 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 7 \text{ Ом}$ ,  $X_{L4} = 14 \text{ Ом}$ ,  $X_{C4} = 9 \text{ Ом}$ ,  $X_{L5} = 18 \text{ Ом}$ ,  $X_{C5} = 13 \text{ Ом}$ .



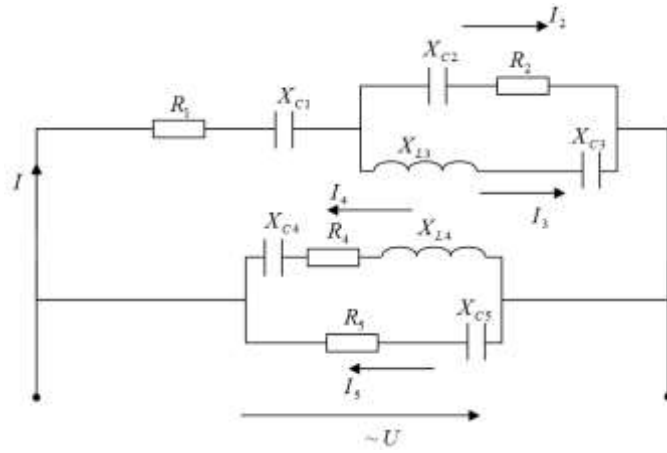
12. Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напряга живлення  $U = 120 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 6 \text{ Ом}$ .



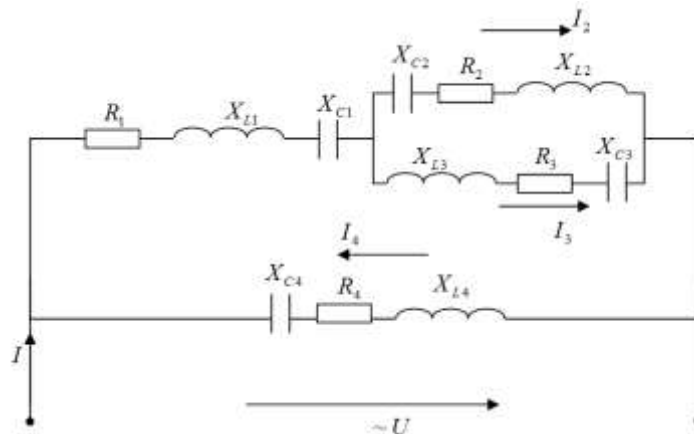
13. Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напруга живлення  $U = 120 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 7 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 6 \text{ Ом}$ .



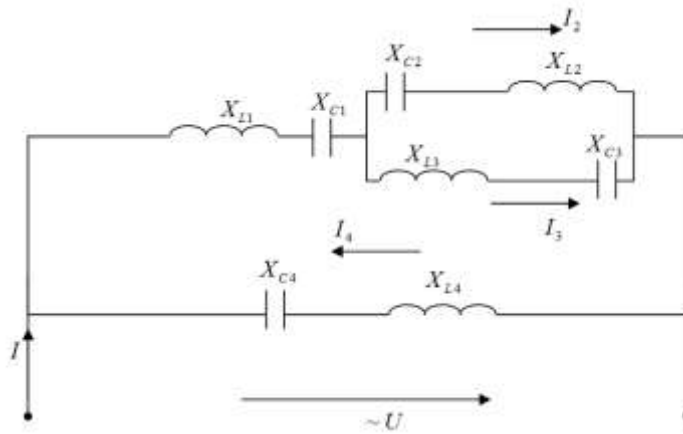
14. Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напруга живлення  $U = 120 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 7 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 7 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 9 \text{ Ом}$ ,  $X_{L4} = 2 \text{ Ом}$ ,  $X_{C4} = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{C5} = 3 \text{ Ом}$ .



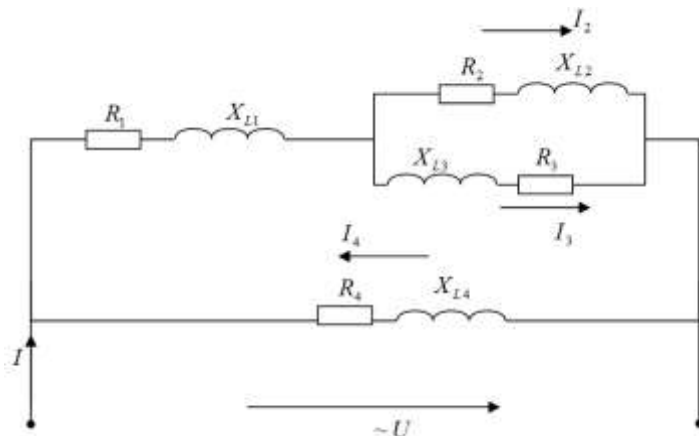
15. Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напряга живлення  $U = 120 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 7 \text{ Ом}$ ,  $X_{L4} = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_{C4} = 6 \text{ Ом}$ .



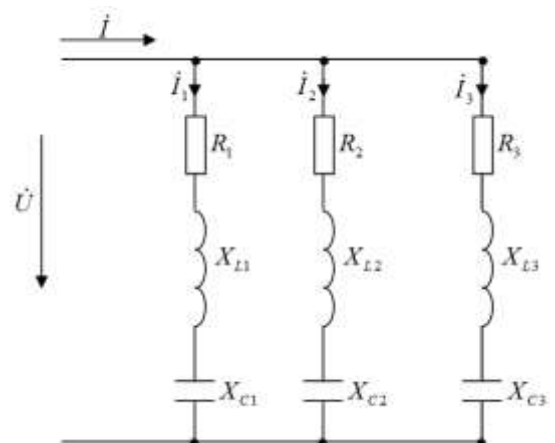
16. Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напряга живлення  $U = 120 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $X_{L1} = 2 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 7 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 12 \text{ Ом}$ ,  $X_{L4} = 13 \text{ Ом}$ ,  $X_{C4} = 16 \text{ Ом}$ .



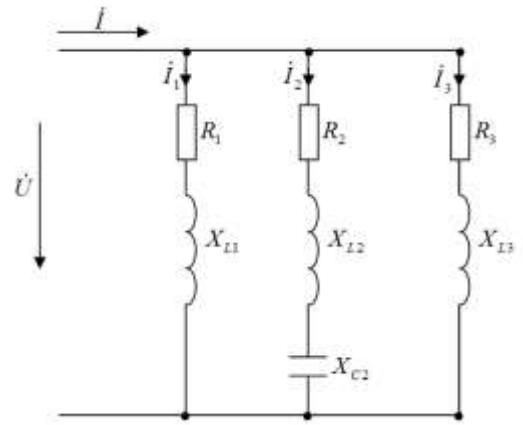
17. Для послідовно-паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напряга живлення  $U = 120 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $X_{L1} = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 17 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 12 \text{ Ом}$ ,  $X_{L4} = 13 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 6 \text{ Ом}$ .



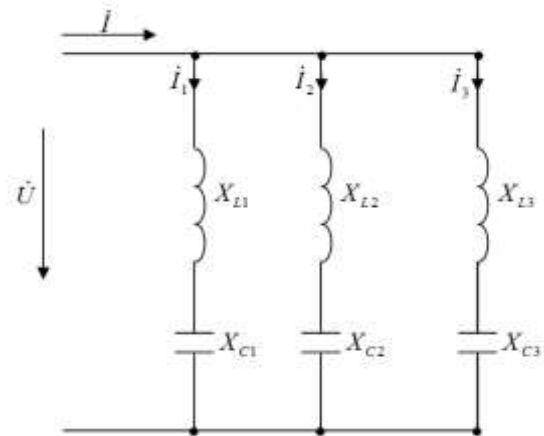
18. Для паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напряга живлення  $U = 220 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 13 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 12 \text{ Ом}$



19. Для паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напруга живлення  $U = 220 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 1 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 2 \text{ Ом}$ ,  $X_3 = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 9 \text{ Ом}$ .



20. Для паралельного кола змінного струму визначити струми  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  на усіх ділянках кола, активну  $P$ , реактивну  $Q$  і повну  $S$  потужності кола. Напруга живлення  $U = 220 \text{ В}$ ; активні і реактивні опори кола:  $X_{L1} = 2 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 7 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 8 \text{ Ом}$ .



## РОЗДІЛ 5

### ТРИФАЗНІ КОЛА ЕЛЕКТРИЧНОГО СТРУМУ

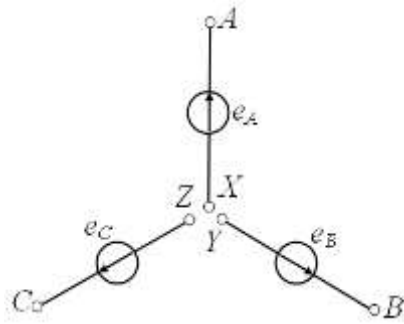
#### 5.1. Основні поняття і визначення

Об'єднання в одне коло декількох подібних за структурою кіл синусоїдального струму однієї частоти з незалежними джерелами енергії широко застосовується в техніці. Об'єднані кола синусоїдального струму прийнято називати *фазами*, а всю об'єднану систему кіл – *багатофазною системою*. Таким чином, в електротехніці термін «фаза» застосовується у двох різних значеннях: по-перше, це *параметр періодичного процесу*, а по-друге – *найменування складової частини багатофазної системи кіл синусоїдного струму*.

Найбільше розповсюдження дістала трифазна система. Остання була винайдена й розроблена у всіх деталях, включаючи трифазні трансформатор і асинхронний двигун, М.О. Доливо-Добровольським у 1891 р. У даний час для передачі й розподілу енергії в переважній більшості випадків застосовуються трифазні системи. Важливою перевагою трифазної системи є також простота й дешевизна трифазних асинхронних двигунів. Крім трифазної системи практичне значення має шестифазна система, наприклад у пристроях випрямлення змінного струму, а в деяких пристроях автоматики застосовують двофазну систему.

*Причини широкого розповсюдження трифазних систем:*

- а) значна економія металу проводів порівняно з трьома однофазними лініями;
- б) низькі вартість, маса і висока економічність трифазного генератора порівняно з трьома однофазними;
- в) можливість отримання обертового магнітного поля трьома нерухомими котушками.



**Рис. 5.1.** Позначення трифазного генератора

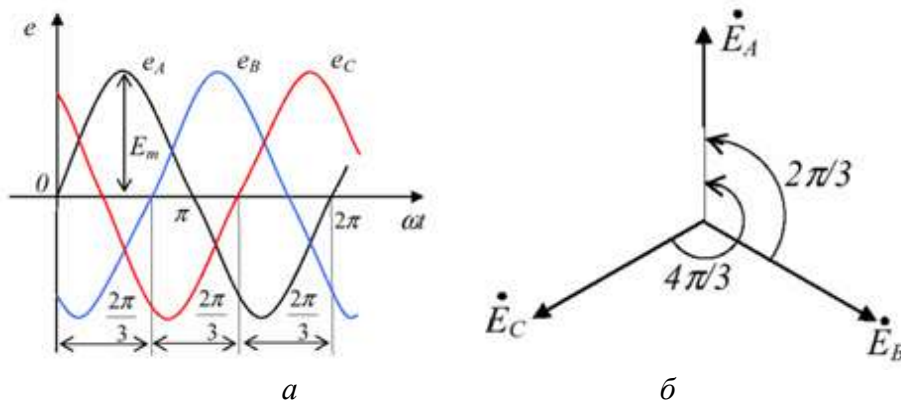
Для позначення фаз трифазної системи застосовують літери латинського алфавіту. Перша фаза має позначення  $A$  або  $a$  – початок фази,  $X$  або  $x$  – кінець фази (великі літери відносяться до джерела, а малі – до навантаження). Всю фазу називають фазою  $A$ , дві інші – фаза  $B$  і фаза  $C$ . Позначення трифазного генератора показане на рис. 5.1. За початок фази приймають затискач, через який струм

надходить у зовнішнє коло при позитивному його значенні.

Кінці фаз джерела можна з'єднати один з одним, тоді в зовнішньому колі буде діяти сумарна ЕРС. Така система називається *зв'язаною*.

Трифазну систему ЕРС називають *симетричною*, якщо частоти й амплітуди ЕРС кожної з фаз однакові, синусоїдальні й зміщені одна відносно одна одної на кут  $\frac{2\pi}{3}$ , тобто на  $120^\circ$  (рис. 5.2). На рис. 5.2 показане графічне (а)

і векторне (б) подання трифазної симетричної системи ЕРС.



**Рис. 5.2.** (а) Часова та (б) векторна діаграми ЕРС трифазного генератора

В аналітичній формі миттєві й діючі значення ЕРС, що наводяться у фазах, записують в наступному вигляді:

$$\begin{cases} e_A = E_{mA} \sin \omega t; & \dot{E}_A = E; \\ e_B = E_{mB} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right); & \dot{E}_B = E \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \\ e_C = E_{mC} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right); & \dot{E}_C = E \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} = E \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$



Як видно з рис. 5.2, у симетричній трифазній системі сума миттєвих значень фазних ЕРС у будь-момент часу дорівнює нулю:

$$e_A + e_B + e_C = 0.$$

За аналогією можна записати й для діючих значень векторів:

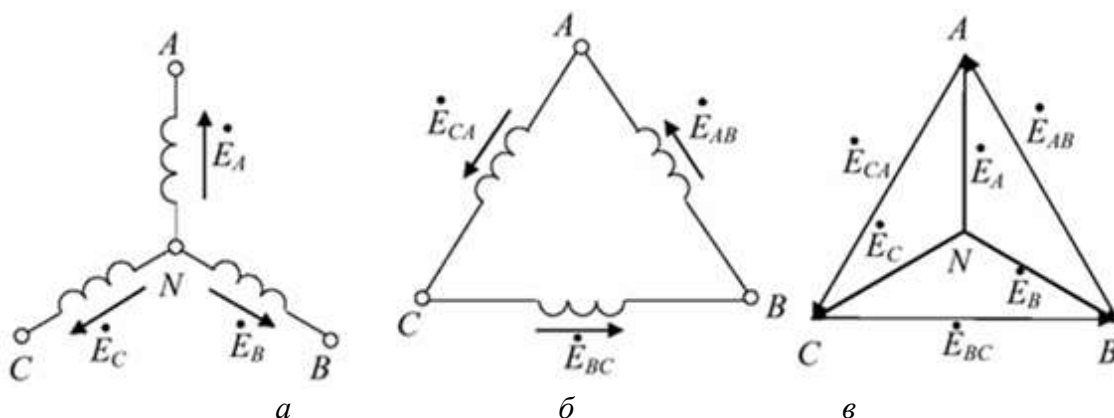
$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0.$$

На векторній діаграмі (рис. 5.2 б) фаза *B* відстає від фази *A*, а фаза *C* – від фази *B*. Таке чергування фаз *ABC* називають *прямою послідовністю*, а чергування фаз *ACB* – *зворотною послідовністю*. Послідовність фаз визначають спеціальним приладом – фазопоказчиком.

## 5.2. Схеми з'єднання обмоток трифазного генератора

Фази обмотки трифазного генератора можуть бути з'єднані в «зірку» (рис. 5.3 а) або в «трикутник» (рис. 5.3 б).

При з'єднанні в «зірку» кінці фаз об'єднують в одну точку *N* (рис. 5.3 а), що називається *нульовою* або *нейтраллю*. Навантаження можна підключати до затискачів *N-A*, *N-B*, *N-C* або *A-B*, *B-C*, *C-A*.



**Рис. 5.3.** Схеми з'єднання обмоток трифазного генератора: а – «зірка», б – «трикутник», в – векторна діаграма

Розрізняють *фазні*  $E_A$ ,  $E_B$  і  $E_C$  і *лінійні*  $E_{AB}$ ,  $E_{BC}$  і  $E_{CA}$  ЕРС, які, як видно з векторної діаграми зображеної на рис. 5.3 в, зв'язані між собою виразами:

$$\begin{cases} \dot{E}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B; \\ \dot{E}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C; \\ \dot{E}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A; \end{cases}$$

У симетричній системі система лінійних ЕРС симетрична  $\dot{E}_{AB} + \dot{E}_{BC} + \dot{E}_{CA} = 0$ .

При цьому співвідношення між фазними  $E_f$  ( $E_\phi$ ) і лінійними  $E_l$  ( $E_l$ ) ЕРС має вигляд

$$E_l = \sqrt{3}E_f.$$

При з'єднанні фаз джерела в «трикутник» навантаження підключають до його вершин (рис. 5.3 б). При цьому лінійні й фазні ЕРС і напруги будуть рівними між собою:  $E_f = E_l$ ;  $U_f = U_l$ . Таке з'єднання можливе тільки при симетричному джерелі. У цьому випадку фази утворюють замкнутий контур, струм в якому відсутній.

Практично неможливо виконати всі обмотки однаковими, тобто ЕРС завжди несиметрична. У ній з'являються зрівнювальні струми, що небажано. Тому практично найчастіше обмотки генератора з'єднують «зіркою».

Приймачі електричної енергії можуть бути з'єднані в «трикутник» і в «зірку». Для електричних кіл змінного струму стандартом передбачена шкала лінійних напруг: 127, 220, 380, 500, 660 В.

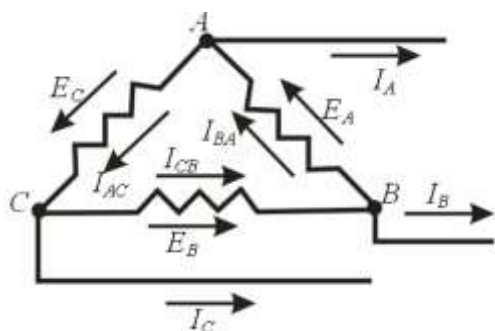


Рис. 5.4. З'єднання фаз генератора в «трикутник»

При з'єднанні фаз генератора трикутником, кожна його фаза повинна бути увімкнена безпосередньо між двома проводами трипровідної лінії (рис. 5.4). Якщо при цьому фаза  $A$  джерела  $E_A$  буде увімкнена між проводами  $A$  і  $B$ , фаза  $B$  – між проводами  $B$  і  $C$ , а фаза  $C$  – між

проводами  $C$  і  $A$  і притому так, що ЕРС  $E_A$  буде мати позитивний напрям від  $B$  до  $A$ , ЕРС  $E_B$  – від  $C$  до  $B$  і ЕРС  $E_C$  – від  $A$  до  $C$ , то будуть мати силу співвідношення:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A, \dot{U}_{BC} = \dot{E}_B, \dot{U}_{CA} = \dot{E}_C.$$

Отже збережеться звичайний порядок послідовності лінійних напруг, при якому  $U_{BC}$  відстає на  $120^0$  від  $U_{AB}$ , а  $U_{CA}$  відстає на  $120^0$  від  $U_{BC}$ .

Оскільки у будь-який момент часу  $E_A + E_B + E_C = 0$ , то в даному випадку немає короткого замикання, а при відсутності зовнішнього навантаження струм у замкнутому трикутнику джерела дорівнює нулю. Проте це буде справедливо лише у тому випадку, коли ЕРС джерела точно синусоїдальні. Оскільки ЕРС генераторів трифазного струму часто не мають точно синусоїдальної форми, то з'єднані трикутником генератори зустрічаються лише у рідких випадках.

Коли з'єднані трикутником як фази джерела, так і фази споживача, то при рівномірному навантаженні струми в їх однойменних фазах будуть однакові за величиною і фазою.

### 5.3. З'єднання трифазних споживачів «зіркою»

При з'єднанні фаз трифазного джерела живлення електроенергії «зіркою» (рис. 5.5) кінці його фаз  $X, Y, Z$  з'єднують в спільну нейтральну точку  $N$ , а початки фаз  $A, B, C$  підключають до відповідних лінійних проводів  $Aa, Bb, Cc$ . Аналогічно при з'єднанні трифазних споживачів «зіркою» з'єднують в нейтральну точку  $n$  кінці їхніх фаз  $x, y, z$ , при цьому початки фаз  $a, b, c$  підключають до лінійних проводів електричної мережі (рис. 5.5).

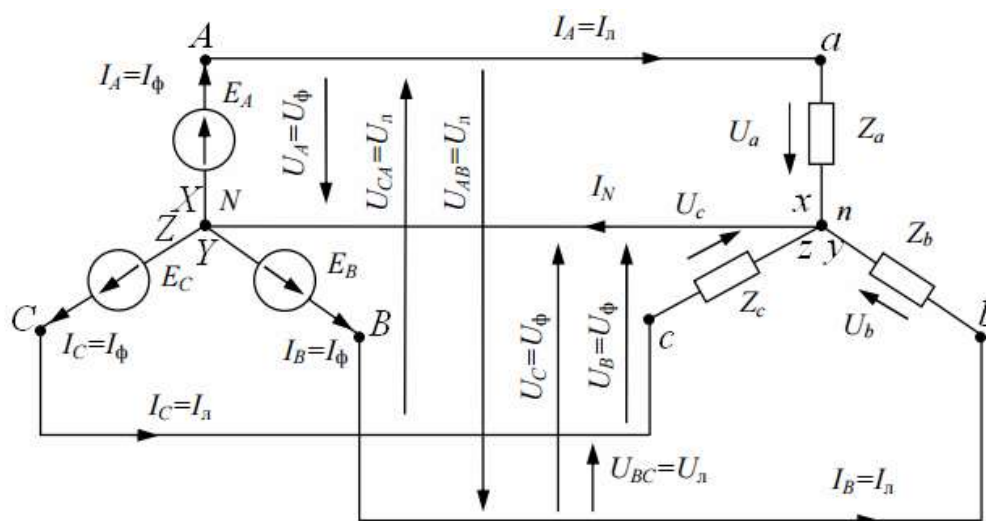


Рис. 5.5. З'єднання джерел і споживачів за схемою «зірка-зірка»

Напруги  $U_A, U_B, U_C$ , що діють між початками й кінцями фаз джерела живлення, є його фазними напругами, а напруги  $U_a, U_b, U_c$ , що діють між початками й кінцями фаз споживача є фазними напругами споживача. Напруги  $U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}$ , що діють між початками фаз джерела й напруги  $U_{ab}, U_{bc}, U_{ca}$ , що діють між початками фаз споживача, є лінійними напругами.

Проводи  $Aa, Bb, Cc$  називаються *лінійними*. Струм у обмотках фаз або фазних навантаженнях, називається *фазним струмом*, а струм у лінійних проводах називається *лінійним струмом*.

На схемі рис. 5.5 наведені умовні позитивні напрямки фазних і лінійних напруг. Лінійні струми  $I_l$  ( $I_n$ ) у лініях живлення ( $I_A, I_B, I_C$ ) при з'єднанні трифазного джерела живлення й трифазного споживача електроенергії «зіркою», умовний позитивний напрямок яких показаний на схемі рис. 5.5, одночасно є і фазними струмами  $I_f$  ( $I_\phi$ ), що протікають по фазах споживача. Тому, в розглянутому випадку, при наявності симетричної трифазної системи при з'єднанні фаз споживача «зіркою» лінійні струми дорівнюватимуть фазним струмам:

$$I_l = I_f.$$

Фазні струми споживача визначають за законом Ома:

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{Z_{-a}}, \quad \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{Z_{-b}}, \quad \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{Z_{-c}}.$$

Згідно з першим законом Кірхгофа струм в нейтральному проводі дорівнює:

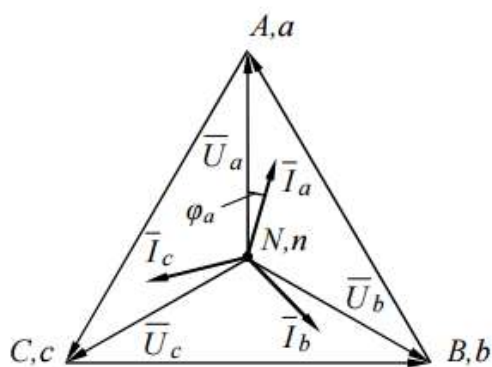
$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

При рівномірному навантаженні  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ , тобто струму в нульовому проводі не буде (звідси й назва «нульовий» провід), і нульовий провід є зайвим. Знявши нульовий провід, ми одержуємо трипровідне коло трифазного струму, з'єднане зіркою. Таке коло може нормально працювати лише в тому випадку, якщо забезпечений рівномірний розподіл навантаження

між фазами. У протилежному разі напруги фаз приймача перестануть бути однаковими і рівними фазній напрузі генератора.

При з'єднанні споживача зіркою, незалежно від величини й характеру опорів його фаз, а також від того, є або відсутній нейтральний провід, між лінійними й фазними напругами споживача існують наступні співвідношення, отримані згідно з другим законом Кірхгофа:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = \dot{U}_{ab}, \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = \dot{U}_{bc}, \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = \dot{U}_{ca}.$$



**Рис. 5.6.** Векторна діаграма струмів і напруг при з'єднанні споживача «трикутником», коли він має активно-індуктивний характер

Оскільки трифазні кола є різновидом складних електричних кіл, то їх можна розрахувати, застосовуючи відомі методи розрахунку складних кіл. Найбільш простіше виконується розрахунок симетричних трифазних кіл. Для цього достатньо провести розрахунок однієї фази. В інших фазах струми й напруги перебувають в умовах симетрії. Зазвичай, окремо кожна фаза становить просте коло. На рис. 5.6 зображено векторну діаграму для симетричного

трифазного кола, з'єданого зіркою, у випадку коли споживач має активно-індуктивний характер. З векторної діаграми видно, що лінійні напруги більші від фазних у  $\sqrt{3}$  раз, тобто  $U_l = \sqrt{3} U_f$ .

Застосовують трипровідну та чотирипровідну схему з'єднання приймачів зіркою. Трифазні приймачі електричної енергії, що мають гарантоване симетричне навантаження, вмикають за *трипровідною схемою* (тобто без нульового провода). Це обумовлено тим, що в такому колі струм у нейтральному проводі, визначений як векторна сума фазних струмів, буде рівним нулю. Отже в цьому випадку цей провід стає непотрібним і застосовувати його нема рації. Типовим навантаженням такого типу є трифазні асинхронні двигуни, що мають симетричне навантаження фаз.

Звичайні однофазні приймачі електричної енергії (побутові прилади, лампи, електричні інструменти тощо) вмикаються за чотирипровідною схемою (тобто з нульовим проводом). Нульовий провід забезпечує однакові фазні напруги на приймачах при несиметричному навантаженні. Крім того, можна застосовувати як лінійну, так і фазну напругу на приймачах.

### Контрольні запитання

1. Що розуміють під фазою багатофазної системи?
2. Які переваги використання трифазної системи у порівнянні з однофазною?
3. Що розуміють під симетричною трифазною системою?
4. Яке чергування фаз називається прямою послідовністю, а яке – зворотною?
5. Яка напруга називається фазною, а яка лінійною?
6. Як називається точка, в якій з'єднуються кінці фаз споживача у випадку їх з'єднання за схемою «зірка»?
7. Який зв'язок між фазним та лінійним струмом у випадку з'єднання трифазних споживачів «зіркою»?
8. що називається *нульовою точкою* або *нейтраллю* у випадку
9. У якому випадку трифазні приймачі електричної енергії можна вмикати за схемою «зірка» без нульового проводу?
10. У якому випадку трифазні приймачі електричної енергії необхідно вмикати за схемою «зірка» з нульовим проводом?

#### 5.4. З'єднання трифазних споживачів «трикутником»

Якщо увімкнути три приймачі  $Z_{ab}$ ,  $Z_{bc}$  та  $Z_{ca}$  безпосередньо між проводами трипровідної лінії, що йде від затискачів трифазного генератора, не

користуючись нульовим проводом, ми одержимо з'єднання приймачів трикутником (рис. 5.7).

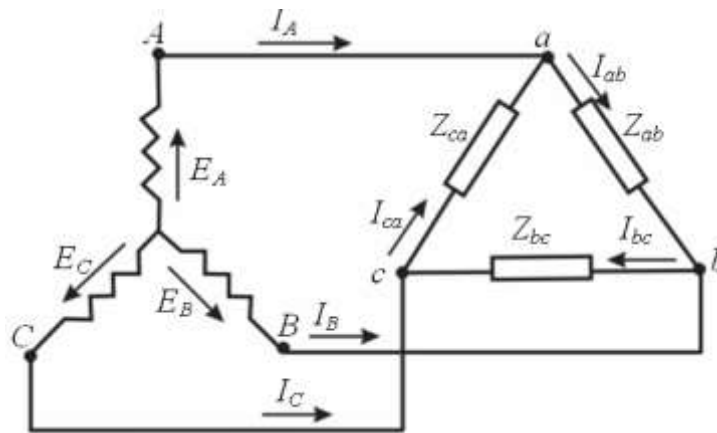


Рис. 5.7. З'єднання електроспоживачів «трикутником»

Кожна фаза споживача приєднується відповідно до двох лінійних проводів. Тому при з'єднанні споживачів трикутником фазні напруги дорівнюють відповідним лінійним напругам:

$$U_l = U_f.$$

За те з'являється різниця між фазними струмами приймача  $I_{ab}$ ,  $I_{bc}$ ,  $I_{ca}$ , позитивні напрями яких вважаються від  $A$  до  $B$ , від  $B$  до  $C$ , від  $C$  до  $A$ , і лінійними струмами  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$ , які як і раніше вважаються позитивними у напрямі від генератора до приймачів. За першим законом Кірхгофа можемо записати наступні співвідношення:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_{ca} = \dot{I}_{ab}, \quad \dot{I}_B + \dot{I}_{ab} = \dot{I}_{bc}, \quad \dot{I}_C + \dot{I}_{bc} = \dot{I}_{ca}$$

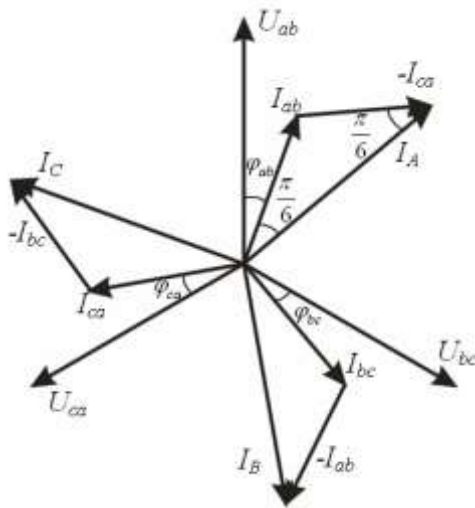
або

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}, \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}, \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} \quad (5.4.1)$$

Із співвідношень (5.4.1) випливає, що

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

Особливістю з'єднання фаз споживача трикутником є те, що зміна режиму однієї з фаз споживача не впливає на режими інших фаз, оскільки вони підключені до незмінних лінійних напруг генератора. Змінюватись будуть лише лінійні струми в проводах, з'єднаних з даною фазою.



**Рис. 5.8.** Векторна діаграма рівномірного навантаження, з'єданого в «трикутник»

При симетричному навантаженні, тобто при однакових за величиною і характером фазних опорах  $Z_{ab}$ ,  $Z_{bc}$  та  $Z_{ca}$ , коли фазні струми  $I_{ab}$ ,  $I_{bc}$  та  $I_{ca}$  дорівнюють за величиною і зсунуті на однакові кути відносно своїх напруг, утворюючи симетричну трипроменеву зірку, лінійні струми  $I_A$ ,  $I_B$  та  $I_C$  також будуть рівними і симетрично розміщеними. За рівнянням (5.4.1) на рис. 5.8 побудовані вектори лінійних струмів.

Кожний із лінійних струмів буде як основа рівнобедреного трикутника з кутом  $120^\circ$  при вершині, а тому між значеннями лінійного і фазного струмів при симетричному навантаженні буде наступне співвідношення:

$$I_l = I_f \sqrt{3}.$$

Можливість двоякого вмикання одних і тих же приймачів зіркою або трикутником розширює галузь застосування цих приймачів. Так, наприклад, якщо обмотка трифазного електродвигуна розрахована на фазну напругу 220 В, то при з'єднанні трикутником такий електродвигун можна увімкнути у сітку з лінійною напругою 220 В, а при з'єднанні зіркою – у сітку з лінійною напругою  $220\sqrt{3} = 380$  В.

## 5.5. Потужність трифазної системи

Активна потужність будь-якого кола дорівнює сумі активних потужностей його фаз. При симетричному навантаженні фаз, коли активні потужності всіх трьох фаз однакові, активна потужність трифазної системи буде визначатися наступним виразом:

$$P = 3U_f I_f \cos \varphi. \quad (5.5.1)$$



При з'єднанні приймача «зіркою»:

$$U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}}, \quad I_f = I_l, \quad (5.5.2)$$

А при з'єднанні «трикутником»

$$U_f = U_l, \quad I_f = \frac{I_l}{\sqrt{3}}. \quad (5.5.3)$$

Підставляючи спочатку (5.5.2), а потім (5.5.3) у (5.5.1), в обох випадках одержимо:

$$P = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi \quad (5.5.4)$$

Найбільша активна потужність при заданих значеннях сили струму та напруги називається позірною потужністю. При симетричному навантаженні фаз позірна потужність буде дорівнювати активній потужності при  $\cos \varphi = 1$ , або відповідно до формули (5.5.4)

$$S = \sqrt{3}U_l I_l. \quad (5.5.5)$$

Тоді, на основі співвідношення для реактивної потужності, одержимо:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{3U_l^2 I_l^2 (1 - \cos^2 \varphi)} = \sqrt{3U_l^2 I_l^2 \sin^2 \varphi}$$

або

$$Q = \sqrt{3} U_l I_l \sin \varphi. \quad (5.5.6)$$

З формул (5.5.4), (5.5.5) та (5.5.6) бачимо, що

$$P = S \cos \varphi \quad \text{і} \quad Q = S \sin \varphi.$$

Як бачимо ці вирази є тотожними з формулами для однофазного змінного струму. Завдяки цьому для трифазного кола зберігають силу співвідношення:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}, \quad \cos \varphi = \frac{P}{S}, \quad \sin \varphi = \frac{Q}{S}.$$

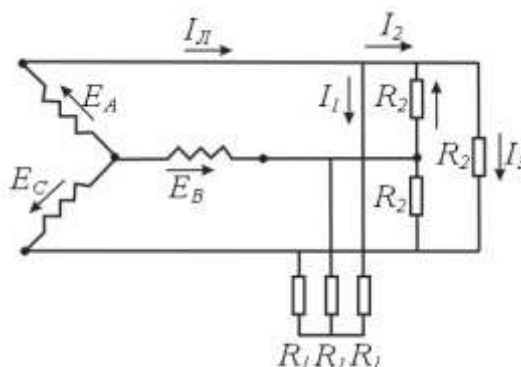
### Контрольні запитання

1. Які струми в трифазному колі називають фазними, а які лінійними?
2. Який зв'язок між фазною та лінійною напругою у випадку з'єднання трифазних споживачів «трикутником»?

3. Який зв'язок між фазним та лінійним струмом у випадку з'єднання трифазних споживачів «трикутником»?
4. Чи зміниться режим роботи двох фаз споживача, якщо зміниться режим роботи третьої фази у випадку з'єднання їх «трикутником»?
5. Навіщо передбачається вмикання одних і тих же споживачів «зіркою» або «трикутником»?
6. Чому дорівнює активна потужність у колі трифазної системи?
7. Яка потужність називається позірною?
8. Коли позірна і активна потужність рівні між собою?
9. Як пов'язані між собою активна, реактивна та позірна потужності?
10. У скільки разів зміниться величина активної потужності при перемиканні трьох однакових споживачів із зірки на трикутник?

## ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 1.** Генератор з фазною напругою 127 В з'єднаний у зірку і до нього підключені два рівномірні трифазні навантаження. Перше з'єднане в зірку з опором кожної фази  $R_1 = 25,4$  Ом, а друге з'єднане в трикутник з опором кожної фази  $R_2 = 44$  Ом. Визначити струми у фазах і загальний струм в лінії.



Струм у кожній фазі першої групи навантаження

$$I_1 = \frac{U_f}{R_1} = \frac{127}{25,4} = 5 \text{ А.}$$

На кожній фазі навантаження другої групи лінійна напруга

$$U_l = U_f \sqrt{3} = 127 \sqrt{3} = 220 \text{ В.}$$

Струм у кожній фазі другої групи навантаження:

$$I_3 = \frac{U_l}{R_2} = \frac{220}{44} = 5 \text{ А.}$$

Лінійний струм другої групи навантаження

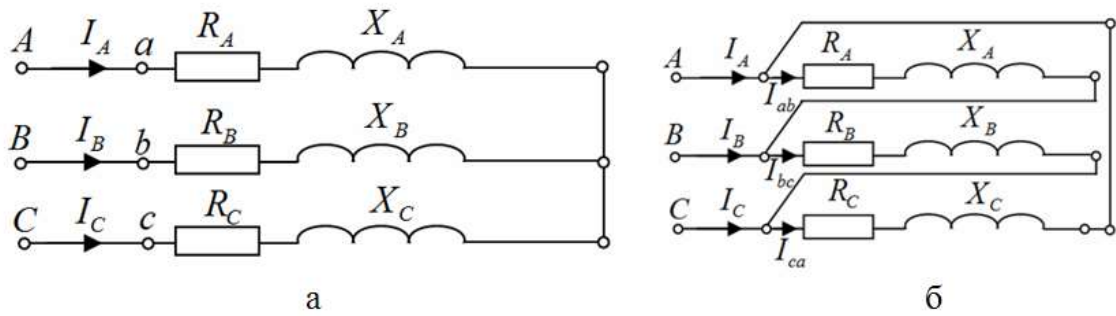
$$I_2 = I_3 \sqrt{3} = 5 \sqrt{3} = 8,65 \text{ А.}$$

Загальний струм  $I_l$  при активному навантаженні і при рівномірній загрузці фаз визначається арифметичною сумою лінійних струмів першої і другої групи навантажень:

$$I_l = I_1 + I_3 = 5 + 8,65 = 13,65 \text{ А.}$$

**Приклад 2.** В трифазну мережу з лінійною напругою 380 В увімкнуте симетричне навантаження з параметрами схеми заміщення кожної фази

$R = 40 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 30 \text{ Ом}$ . Визначити фазні і лінійні струми, а також споживану потужність при з'єднанні фаз навантаження зіркою і трикутником.



На рисунку показані схеми заміщення при включенні (а) зіркою і (б) трикутником. Для обох схем повний опір кожної фази рівний:

$$Z_f = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ Ом},$$

фазовий зсув між фазними напругою і струмом на кожній фазі рівний

$$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R} = \arctg \frac{30}{40} = 36,9^\circ.$$

При з'єднанні фаз «зіркою» фазні напруги рівні:

$$U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В},$$

фазні і лінійні струми рівні:

$$I_f = \frac{U_f}{Z_f} = \frac{220}{50} = 4,4 \text{ А}; \quad I_a = I_b = I_c = I_f = 4,4 \text{ А}; \quad I_A = I_B = I_C = I_l = I_f = 4,4 \text{ А}.$$

Активна потужність всієї «зірки» рівна:

$$P_Y = 3P_f = 3I_f U_f \cos \varphi = 3 \cdot 220 \cdot 4,4 \cdot 0,8 = 2320 \text{ Вт}.$$

При з'єднанні фаз трикутником фазні напруги  $U_f = U_l = 380 \text{ В}$ ,

фазні струми рівні:

$$I_f = \frac{U_f}{Z_f} = \frac{380}{50} = 7,6 \text{ А}; \quad I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_f = 7,6 \text{ А},$$

лінійні струми рівні:

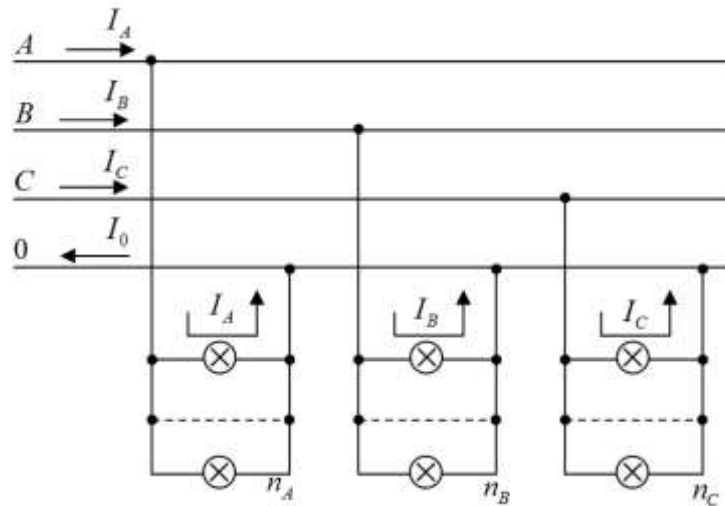
$$I_A = I_B = I_C = I_l = \sqrt{3}I_f = \sqrt{3} \cdot 7,6 = 13,2 \text{ А},$$

активна потужність рівна:

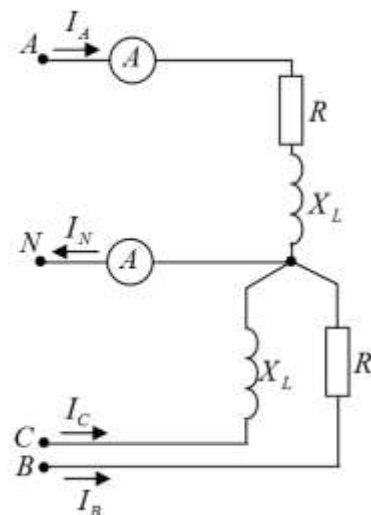
$$P_\Delta = 3P_f = 3I_f U_f \cos \varphi = 3 \cdot 380 \cdot 7,6 \cdot 0,8 = 6960 \text{ Вт}.$$

## ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

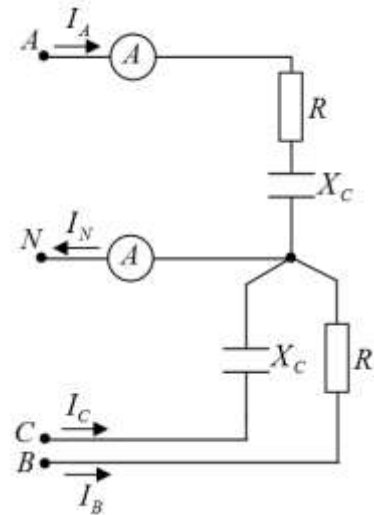
1. У схемі, зображеній на рисунку, включені по схемі «зірка» три групи електричних ламп однакової потужності. У кожній групі лампи з'єднані паралельно. Опір кожної лампи 480 Ом, лінійна напруга мережі 380 В. Перша група ламп включена у фазу А, число ламп в ній  $n_A = 88 \text{ шт.}$ . Друга група ламп включена у фазу В, число ламп у ній  $n_B = 33 \text{ шт.}$ . Третя група ламп включена у фазу С, число ламп в ній  $n_C = 55 \text{ шт.}$  Визначити струм ламп, напругу та потужність, на яку розрахована кожна лампа, величину струмів, що протікають у фазних та лінійних проводах, потужності, спожиті фазами і всім колом.



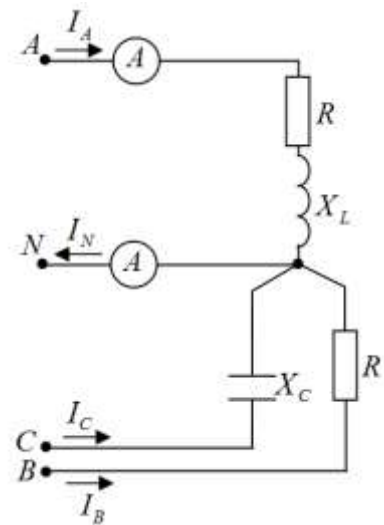
2. До затискачів джерела приєднаний трьохфазний генератор, як показано на схемі. Визначити покази амперметрів  $A_1$  і  $A_2$ , знаючи, що  $U_n = 380 \text{ В}$ ,  $R = 50 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 35 \text{ Ом}$ .



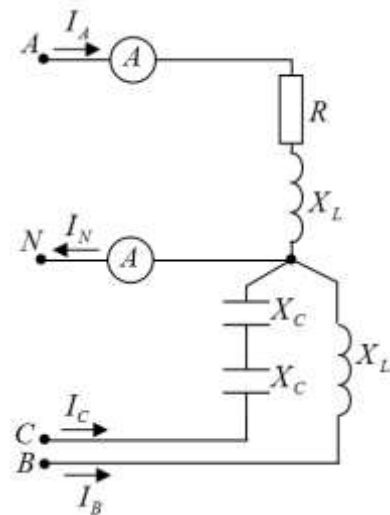
3. До затискачів джерела приєднаний трьохфазний генератор, як показано на схемі. Визначити покази амперметрів  $A_1$  і  $A_2$ , знаючи, що  $U_n = 380\text{ В}$ ,  $R = 25\text{ Ом}$ ,  $X_C = 25\text{ Ом}$ .



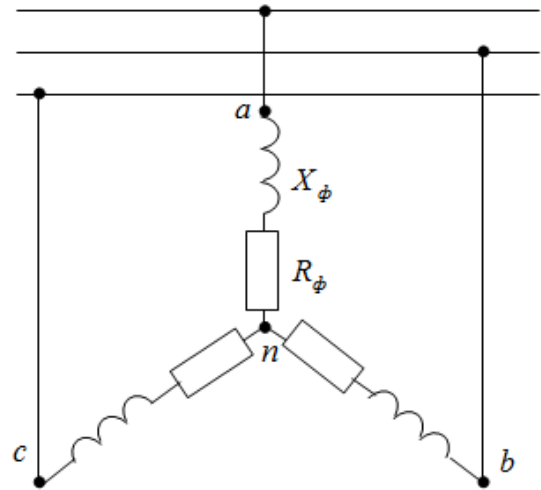
4. До затискачів джерела приєднаний трьохфазний генератор, як показано на схемі. Визначити покази амперметрів  $A_1$  і  $A_2$ , знаючи, що  $U_n = 380\text{ В}$ ,  $R = 25\text{ Ом}$ ,  $X_L = 30\text{ Ом}$ ,  $X_C = 21\text{ Ом}$ .



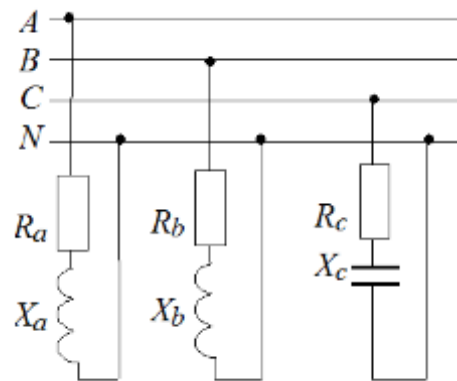
5. До затискачів джерела приєднаний трьохфазний генератор, як показано на схемі. Визначити покази амперметрів  $A_1$  і  $A_2$ , знаючи, що  $U_n = 380\text{ В}$ ,  $R = 20\text{ Ом}$ ,  $X_L = 30\text{ Ом}$ ,  $X_C = 25\text{ Ом}$ ,  $X_C = 28\text{ Ом}$ .



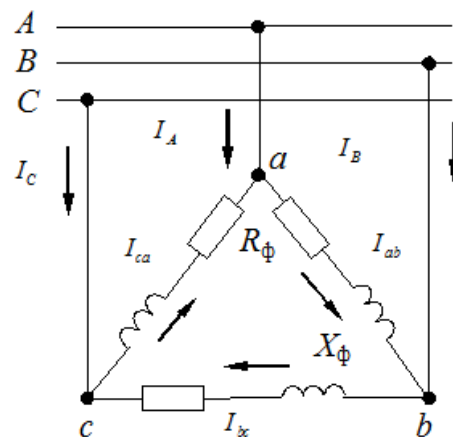
6. Трьохфазний асинхронний двигун включений в мережу 380 В по схемі «зірка». Параметри обмоток наступні:  $R_\phi = 2 \text{ Ом}$ ,  $X_\phi = 8 \text{ Ом}$ . Визначити фазні і лінійні струми, а також активну потужність, яка споживається двигуном.



7. Три однофазних приймачі включені у трьохфазну мережу з напругою 380 В по схемі «зірка». Опори приймачів наступні:  $R_a = 25 \text{ Ом}$ ,  $R_b = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_c = 35 \text{ Ом}$ ,  $X_a = 15 \text{ Ом}$ ,  $X_b = 20 \text{ Ом}$ ,  $X_c = 28 \text{ Ом}$ . Визначити струми в проводах мережі; обчислити активну, реактивну та повну потужність.



8. До трьохфазної мережі напругою 380 В підключені три однакових приймачі ( $R_\phi = 3 \text{ Ом}$ ,  $X_\phi = 4 \text{ Ом}$ ), з'єднаних по схемі «трикутник». Визначити струми у фазних і лінійних проводах і спожиту потужність (активну, реактивну і повну).



9. У трьохфазну мережу напругою 380 В, частотою  $\nu = 50 \text{ Гц}$  включений трьохфазний асинхронний двигун по схемі «трикутник». Споживаюча потужність  $P = 1,44 \text{ кВт}$ , коефіцієнт потужності  $\cos \varphi = 0,85$ . Визначити

споживаючий двигуном струм, струми в обмотках двигуна, активний і індуктивний опір, індуктивність котушок, повну і реактивну потужності.

10. У трьохфазну мережу напругою 380 В, частотою  $\nu = 50 \text{ Гц}$  включений трьохфазний асинхронний двигун по схемі «трикутник». Споживаюча потужність  $P = 1,6 \text{ кВт}$ . Фазний струм, що протікає в обмотках двигуна 1,7 А. Визначити коефіцієнт потужності  $\cos \varphi$ , споживаючий двигуном струм, струми в обмотках двигуна, активний і індуктивний опір, індуктивність котушок, повну і реактивну потужності.

11. У трьохфазну мережу напругою 380 В, частотою  $\nu = 50 \text{ Гц}$  включений трьохфазний асинхронний двигун по схемі «трикутник». Споживаюча потужність  $P = 1,2 \text{ кВт}$ , лінійний струм 2,8 А. Визначити фазний струм, коефіцієнт потужності  $\cos \varphi$ , активний і індуктивний опір, індуктивність котушок, повну і реактивну потужності.

12. У трьохфазну мережу напругою 380 В, частотою  $\nu = 50 \text{ Гц}$  включений трьохфазний асинхронний двигун по схемі «трикутник». Повна потужність рівна 1,7 кВА, коефіцієнт потужності  $\cos \varphi = 0,87$ . Визначити фазний струм, активну потужність, що споживається навантаженням та лінійні струми.

13. До трьох провідної трьохфазної лінії з напругою 380 В підключені три однофазних споживачі з параметрами:  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 7 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 4 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 2 \text{ Ом}$ . Намалювати схему з'єднання. Визначити струми у фазах і лінійних проводах, активну, реактивну і повну потужності.

14. До трьох провідної трьохфазної лінії з напругою 380 В підключені три однофазних споживачі з параметрами:  $R_1 = 15 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 13 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 17 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 14 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 12 \text{ Ом}$ . Намалювати схему з'єднання. Визначити струми у фазах і лінійних проводах, активну, реактивну і повну потужності.

15. До трьох провідної трьохфазної лінії з напругою 380 В підключені три однофазних споживачі з параметрами:  $R_1 = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 55 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 7 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 9 \text{ Ом}$ . Намалювати схему з'єднання.

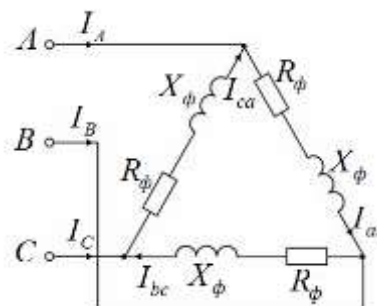


Визначити струми у фазах і лінійних проводах, активну, реактивну і повну потужності.

16. До трьох провідної трьохфазної лінії з напругою 380 В підключені три однофазних споживачі з параметрами:  $R_1 = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{L1} = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{C1} = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 8 \text{ Ом}$ ,  $X_{C2} = 7 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 7 \text{ Ом}$ ,  $X_{L3} = 9 \text{ Ом}$ ,  $X_{C3} = 10 \text{ Ом}$ . Намалювати схему з'єднання. Визначити струми у фазах і лінійних проводах, активну, реактивну і повну потужності.

17. Освітлення здійснюється від чотирьохпровідної трьохфазної мережі з лінійною напругою  $U_l = 380 \text{ В}$ . Перший поверх живиться від фази А і споживає потужність 1750 Вт, другий – від фази В і споживає потужність 2100 Вт, третій – від фази С і споживає потужність 2550 Вт. Намалювати електричну схему кола, розрахувати струми, що споживаються кожною фазою, струм в нейтральному проводі, обчислити активну потужність усього навантаження. Вважати, що освітлювальне навантаження має коефіцієнт потужності  $\cos \varphi = 1$ .

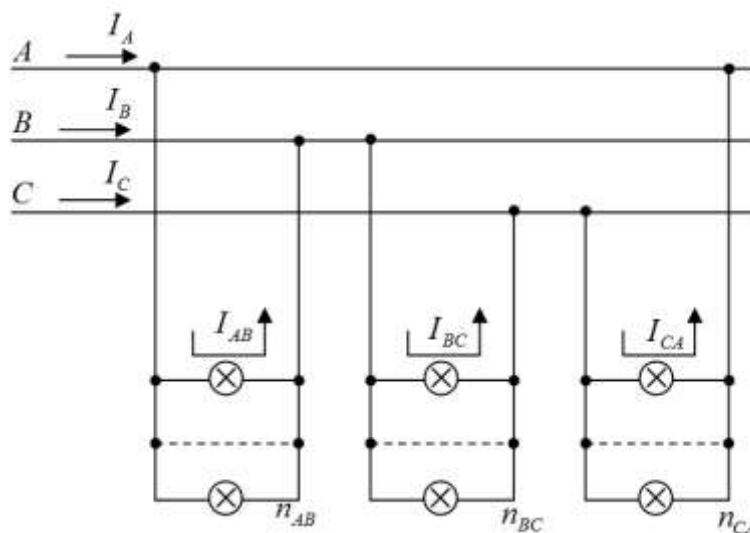
18. У трьохфазну мережу з лінійною напругою  $U_l = 380 \text{ В}$  включений з'єднаний трикутником трьохфазний асинхронний двигун потужність якого 5 кВт, ККД двигуна рівний 90%, коефіцієнт потужності  $\cos \varphi = 0,8$ . Визначити фазні і лінійні струми двигуна, параметри його схеми  $R_\phi$ ,  $X_\phi$ .



19. У трьохфазну мережу з лінійною напругою  $U_l = 380 \text{ В}$  включений з'єднаний трикутником трьохфазний асинхронний двигун, що має  $Z_\phi = 19 \text{ Ом}$ ,  $\cos \varphi = 0,8$ . Знайти лінійні струми і активну потужність, яка споживається двигуном віз мережі.

20. У схемі, зображеній на рисунку, включені по схемі «трикутник» три групи електричних ламп однакової потужності. У кожній групі лампи з'єднані

паралельно. Опір кожної лампи 240 Ом, лінійна напруга мережі 220 В. Перша група ламп включена у фазу АВ, число ламп в ній  $n_{AB} = 10 \text{ шт}$ . Друга група ламп включена у фазу ВС, число ламп у ній  $n_{BC} = 20 \text{ шт}$ . Третя група ламп включена у фазу СА, число ламп в ній  $n_{CA} = 30 \text{ шт}$ . Визначити струм, напругу і потужність, на яку розрахована кожна лампа; величину струмів  $I_{AB}, I_{BC}, I_{CA}$ , що протікають у фазах кола; потужності  $P_{AB}, P_{BC}, P_{CA}$ , спожиті фазами і всім колом.



## РОЗДІЛ 6

### ТРАНСФОРМАТОРИ

#### 6.1. Загальні відомості про трансформатори

*Трансформатор* – це електротехнічний пристрій, призначений для перетворення змінного струму однієї напруги на змінний струм іншої напруги тієї ж частоти. Трансформатор складається із сталевого осердя і обмоток. Осердя зібране з тонких листів електротехнічної сталі, ізольованих один від одного з метою зниження втрат потужності на гістерезис і вихрові струми.

Трансформатор вперше був сконструйований у 1876 році П. Н. Яблочковим. У 1892 р. він був удосконалений іншим винахідником П. Ф. Усагіним, а в 1890 році М. О. Доліво-Добровольський сконструював трифазний трансформатор. Сучасні трансформатори мають різноманітну конструкцію і призначення.

Перетворення напруги в трансформаторах здійснюється змінним магнітним потоком індуктивно зв'язаних між собою обмоток. Обмотка, що підключається до джерела електричної енергії, називається *первинною*, а обмотка, до якої підключене навантаження – *вторинною*. Параметри трансформатора, що належать до первинної обмотки (число витків, напруга, струм і т.д.), називаються первинними і в їхніх літерних позначеннях використовується індекс 1. Відповідно параметри вторинної обмотки називаються вторинними й записуються з індексом 2.

Якщо через трансформатор необхідно здійснити живлення двох і більше навантажень з різною напругою живлення, то виконують кілька вторинних обмоток.

*Трансформатори можна класифікувати так:*

1. За кількістю фаз: *однофазні* – для трансформації однофазного струму та *трифазні* – для трансформації трифазного струму.

2. За способом охолодження: *сухі* (коли їхнє охолодження здійснюється повітрям навколишнього середовища) та *масляні* (в яких магнітопровід з

обмотками занурюється в бак з трансформаторним маслом, яке відбирає від них теплоту).

3. За вторинною напругою (*підвищувальні*, коли вторинна напруга вища за первинну, й *знижувальні*, коли вторинна напруга нижча за первинну).

4. За кількістю обмоток (*двохобмоткові*, що мають по одній первинній та вторинній обмоток, а також *багатообмоткові*, що мають одну первинну і кілька вторинних обмоток). Велике поширення у великопотужній електротехніці дістали *трьохобмоткові* трансформатори (наприклад, з первинною напругою 110 кВ і двома вторинними – 35 та 10 кВ).

5. За призначенням (*силові*, *вимірювальні*, *зварювальні*, *узгоджувальні*, *імпульсні*, *розподільчі*).

*Силові трансформатори* – це трансформатори, які призначені для перетворення електричної енергії в електричних мережах та в установках для її приймання і використання і живлять споживача незалежно від його навантаження.

*Вимірювальні трансформатори* – це трансформатори, що живлять електровимірювальні прилади чи кола релейного захисту й керування.

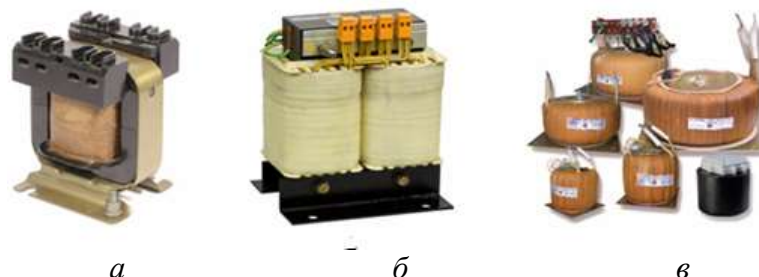
*Зварювальні трансформатори* – це трансформатори, які є джерелами живлення для зварювання при змінному струмові.

*Узгоджувальні трансформатори* – це трансформатори, які використовуються для узгодження опору різних частин (каскадів) електронних схем при мінімальному спотворенні форми сигналу. Одночасно трансформатори забезпечують створення гальванічної розв'язки між ділянками схем.

*Імпульсні трансформатори* – це трансформатори, що призначені для передачі імпульсів напруги або струму з однієї мережі в іншу. Вони широко використовуються в імпульсній техніці. Основна вимога, що висувається до ІТ полягає в неспотвореній передачі форми трансформованих імпульсів напруги. При дії на вхід ІТ напруги тієї або іншої форми на виході бажано отримати імпульс напруги тієї ж самої форми, але, можливо, іншої амплітуди або іншої полярності.

*Розподільчі трансформатори* – це трансформатори, які використовуються для електромагнітного зв'язку в електромережах з метою електробезпеки.

6. За будовою магнітопроводу (рис. 6.1): *броньові, стержньові тороїдальні*.



**Рис. 6.1.** Зовнішній вигляд трансформаторів (а) броньові, (б) стержньові, (в) тороїдальні

*Основними частинами трансформатора є:*

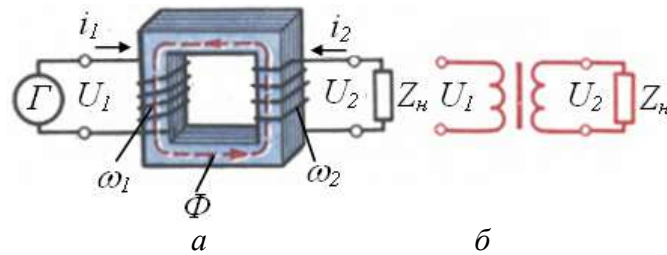
- магнітна система (магнітопровід або осердя);
- обмотки;
- система охолодження.

Магнітна система трансформатора являє собою комплект пластин або інших елементів, виготовлених з електротехнічної сталі або іншого феромагнітного матеріалу і зібраних у якійсь геометричній формі. Вона призначена для локалізації у ній основного магнітного поля трансформатора. Магнітна система в цілком зібраному виді спільно з усіма вузлами і деталями, призначеними для скріплення її окремих частин у єдину конструкцію, називається *остовом трансформатора*.

*Обмоткою* називається сукупність витків, що утворюють електричне коло, у якому додаються ЕРС, наведені у витках. Основним елементом обмотки є виток, тобто деталь з електричного провідника, або ряд паралельно з'єднаних таких деталей, які однократно охоплюють частину магнітної системи трансформатора. Електричний струм, що протікає через виток, разом із струмами в інших витках створює магнітне поле трансформатора, під дією якого виникає електрорушійна сила. Обмотки, як правило, виконуються з мідного або алюмінієвого емальпроводу у виді кругових циліндрів.

## 6.2. Принцип роботи однофазного трансформатора

Розглянемо фізичні процеси, що проходять в однофазному трансформаторі, найпростіша схема якого показана на рис. 6.2 а.



**Рис. 6.2.** (а) Електромагнітна та (б) принципова схема однофазного двохобмоткового трансформатора

Первинна обмотка під'єднана до джерела змінного струму  $G$  на напругу  $U_1$ . До вторинної підключений споживач  $Z_n$ . Первинна і вторинна обмотки трансформатора не мають електричного зв'язку одна з одною, і потужність із однієї обмотки в іншу передається електромагнітним шляхом. Магнітопровід (сердечник), на якому розміщені ці обмотки, служить для підсилення індуктивного зв'язку між обмотками.

Дія трансформатора ґрунтується на явищі електромагнітної індукції. При підключенні первинної обмотки до джерела змінної напруги у витках цієї обмотки протікає змінний струм  $i_1$ , який створює в магнітопроводі змінний магнітний потік  $\Phi$ . Замикаючись в магнітопроводі, цей потік зчіплюється з обома витками (первинною і вторинною) і індукує в них ЕРС: у первинній обмотці ЕРС самоіндукції

$$e_1 = -N_1 \left( \frac{d\Phi}{dt} \right). \quad (6.2.1)$$

У вторинній обмотці ЕРС взаємоіндукції:

$$e_2 = -N_2 \left( \frac{d\Phi}{dt} \right), \quad (6.2.2)$$

де  $N_1$  та  $N_2$  – число витків у первинній і вторинній обмотках трансформатора.

При підключенні навантаження  $Z_n$  до затискачів вторинної обмотки трансформатора під дією ЕРС  $e_2$  в колі цієї обмотки створюється струм  $i_2$ , а на

выводах вторинної обмотки встановлюється напруга  $U_2$ . У підвищувальних трансформаторах  $U_2 > U_1$ , а в понижувальних  $U_2 < U_1$ .

Із формул (6.2.1) та (6.2.2) видно, що ЕРС  $e_1$  і  $e_2$ , які наводяться в обмотках трансформатора, відрізняються одна від одної лише за рахунок різного числа витків  $N_1$  та  $N_2$  в обмотках. Тому, використовуючи обмотки з потрібним співвідношенням витків, можна виготовити трансформатор на довільне співвідношення напруг. На рис. 6.2 б показано зображення однофазного трансформатора на електричних схемах.

Трансформатор – це апарат змінного струму. Якщо його первинну обмотку підключити до джерела постійного струму, то магнітний потік в магнітопроводі трансформатора також буде постійним як по величині, так і по напрямку  $\left(\frac{d\Phi}{dt} = 0\right)$ . Отже в обмотках не буде наводитися ЕРС, а, відповідно, електроенергія з первинного кола не буде передаватися у вторинне.

Припустимо, що магнітний потік  $\Phi$  є синусоїдальною функцією від часу, тобто:

$$\Phi = \Phi_{\max} \sin \omega t, \quad (6.2.3)$$

де  $\Phi_{\max}$  – максимальне значення потоку. Підставивши (6.2.3) у (6.2.1) одержимо:

$$e_1 = -\omega N_1 \Phi_{\max} \cos \omega t.$$

Оскільки  $\cos \omega t = -\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ , то

$$e_1 = \omega N_1 \Phi_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.2.4)$$

Аналогічно

$$e_2 = \omega N_2 \Phi_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.2.5)$$

З формул (6.2.4) та (6.2.5) бачимо, що ЕРС  $e_1$  і  $e_2$  відстають по фазі від потоку  $\Phi$  на кут  $\frac{\pi}{2}$ . Максимальне значення ЕРС

$$E_{1\max} = \omega N_1 \Phi_{\max}.$$

Поділивши  $E_{1\max}$  на  $\sqrt{2}$  і підставивши  $\omega = 2\pi\nu$ , одержимо діюче значення первинної ЕРС:

$$E_1 = \frac{E_{1\max}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \nu N_1 \Phi_{\max} = 4,44 N_1 \nu \Phi_{\max}.$$

Аналогічно, для другої ЕРС

$$E_2 = 4,44 N_2 \nu \Phi_{\max}.$$

Відношення:

$$k = \frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

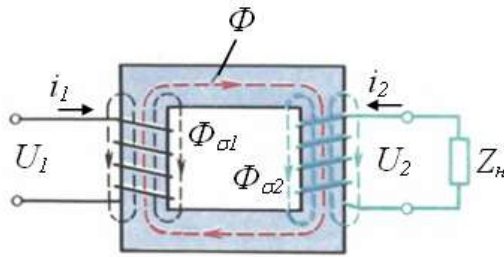
називають коефіцієнтом трансформації. Таким чином, якщо ми хочемо підвищити отриману від генератора напругу в 10, 100 або 1000 разів, то необхідно так підібрати обмотки трансформатора, щоб число витків  $N_2$  вторинної обмотки було більше числа витків  $N_1$  первинної обмотки відповідно в 10, 100 або 1000 разів. Тоді вторинна обмотка є обмоткою вищої напруги (ВН), а первинна – обмоткою нижчої напруги (НН). Навпаки, якщо необхідно знизити напругу в лінії, первинну напругу підводять до обмотки ВН, а до обмотки НН підключають споживачі електричної енергії. Тобто, будь-який трансформатор може працювати як підвищувальний і як понижувальний. Все залежить від того, до якої із його обмоток буде підведена напруга для перетворення.

Струми  $I_1$  та  $I_2$  в обмотках трансформатора крім основного магнітного потоку  $\Phi$  створюють магнітні потоки розсіяння  $\Phi_{\sigma 1}$  і  $\Phi_{\sigma 2}$  (рис. 6.3), кожен з яких зчеплений з витками лише власної обмотки і індукує в ній ЕРС розсіяння. Ці ЕРС в первинній і вторинній обмотках визначаються за формулами:

$$e_{\sigma 1} = -L_{\sigma 1} \left( \frac{di_1}{dt} \right), \quad e_{\sigma 2} = -L_{\sigma 2} \left( \frac{di_2}{dt} \right),$$

де  $L_{\sigma 1}$  і  $L_{\sigma 2}$  – індуктивності розсіяння.





**Рис. 6.3.** Напрямки основного потоку та потоків розсієння в однофазному трансформаторі

### Контрольні запитання

1. Що таке трансформатор та яке його призначення?
2. Хто і коли вперше сконструював трансформатор?
3. Яка обмотка в трансформаторі називається первинною, а яка вторинною?
4. Як класифікують трансформатори?
5. Чому сердечник трансформатора збирають із тонких листів трансформаторної сталі, ізольованих один від одного?
6. Що називається остовом трансформатора?
7. Що називається обмоткою трансформатора?
8. Яка різниця між обмотками вищої та нижчої напруг?
9. Поясніть будову і принцип роботи трансформатора.
10. Що називається коефіцієнтом трансформації?

### 6.3. Режим холостого ходу однофазного трансформатора

*Холостим ходом називають* режим роботи трансформатора, коли його первинна обмотка приєднана до кола змінного струму, а вторинна розімкнута. Особливість трансформатора полягає в тому, що за відсутності струму в колі вторинної обмотки струм у його первинній обмотці (струм холостого ходу) дуже малий. Розмір струму холостого ходу в 15-20 разів менше за величину струму первинної обмотки трансформатора при його повному навантаженні.

Невеличкий струм холостого ходу створює мале падіння напруги в опорі первинної обмотки (його величина не перевищує 0,5 % від величині

прикладеної напруги). Основна частина прикладеної напруги зрівноважується ЕРС  $e_1$  первинної обмотки. Тому, нехтуючи незначним падінням напруги в первинній обмотці при холостому ході трансформатора, можна вважати

$$e_1 \gg u_1.$$

Якщо напруга, що прикладена до первинної обмотки змінюється в часі за синусоїдальним законом, то зрівноважуюча його ЕРС первинної обмотки також буде змінюватися за синусоїдальним законом:

$$e_1 = E_{1\max} \sin \omega t.$$

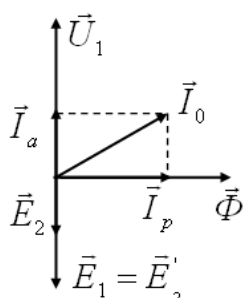
ЕРС вторинної обмотки створюється тим же магнітним потоком, що й ЕРС первинної обмотки. Тому

$$e_2 = E_{2\max} \sin \omega t.$$

Оскільки величина ЕРС  $e_1$  практично дорівнює величині прикладеної напруги  $u_1$ , а напруга на розімкнутих затискачах вторинної обмотки чисельно дорівнює ЕРС  $e_2$ , то вираз для коефіцієнта трансформації можна записати у виді:

$$k = \frac{N_1}{N_2} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{E_{1\max}}{E_{2\max}} = \frac{E_1}{E_2} \approx \frac{U_1}{U_2}.$$

Отже, коефіцієнт трансформації приблизно може бути визначений відношенням величин напруг на затискачах первинної і вторинної обмоток трансформатора при холостому ході.



**Рис. 6.4.** Векторна діаграма холостого ходу однофазного трансформатора

Векторна діаграма для холостого (неробочого) ходу трансформатора подібна векторній діаграмі котушки індуктивності зображена на рис. 6.4.

Побудова векторної діаграми починається з відкладання вектора магнітного потоку  $\vec{\Phi}$ . Потім зі зсувом  $-\frac{\pi}{2}$  відкладається вектор ЕРС

первинної обмотки  $\vec{E}_1$ . Вектор ЕРС у вторинній обмотці збігається за напрямком з вектором  $\vec{E}_1$ , але величина його може бути як більше, так і менше

$\vec{E}_1$ . Для зручності побудови векторної діаграми звичайно відкладається зведене значення вторинної ЕРС, що в даному випадку дорівнює первинній ЕРС:

$$E'_2 = kE_2 = \frac{N_1}{N_2} E_2 = E_1.$$

Вектори  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}'_2$  зливаються в один. Струм холостого ходу має дві складові – реактивну (що намагнічує)  $\vec{I}_p$  і активну  $\vec{I}_a$ . Складова  $\vec{I}_p$  є струмом, що намагнічує та збігається за фазою з потоком. Складова  $\vec{I}_a$  визначається втратами в сталевому осерді і знаходиться у фазі з напругою. Повний струм холостого ходу  $I_0 = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}$ . Струм холостого ходу дуже малий (не перевищує декількох % від номінального струму первинної обмотки),  $\varphi_0 \approx \frac{\pi}{2}$ . Через мале значення струму падіння напруги в первинній обмотці мале, тому  $|U_1| = |E_1|$ . На векторній діаграмі відкладається вектор  $\vec{U}_1$ , рівний і протилежний вектору  $\vec{E}_1$ .

#### 6.4. Коротке замикання трансформатора

*Режимом короткого замикання* трансформатора називається такий режим, коли затискачі вторинної обмотки накоротко замкнуті струмопроводом з опором, рівним нулю. Коротке замикання трансформатора в умовах експлуатації створює аварійний режим, так як вторинний струм, а отже, і первинний збільшуються в кілька десятків разів у порівнянні з номінальним. Тому в колах з трансформаторами передбачають захист, який при короткому замиканні автоматично відключає трансформатор.

Для дослідження трансформаторів проводять дослід короткого замикання, при якому його вторинна обмотка замикається накоротко, а на затискачі первинної обмотки подається така сильно понижена напруга, при якій в обмотках встановлюються номінальні струми. Ця напруга носить назву

напруги короткого замикання, вона залежить від потужності трансформатора і буває порядку  $5\% U_{ном}$ .

Внаслідок малої величини напруги короткого замикання, прикладеної до затискачів первинної обмотки трансформатора, втрати на перемагнічування і на вихрові струми в сталі сердечника, які пропорційні квадрату магнітної індукції, стають настільки малими, що ними можна знехтувати. Тому вважають, що при досліді короткого замикання вся споживана трансформатором потужність витрачається лише на нагрівання міді обмоток.

Таким чином, дослід короткого замикання дозволяє визначити втрати в мідних (Cu) обмотках трансформатора:

$$P_{Cu} = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2.$$

## 6.5. Втрати і ККД трансформатора

При підключенні навантаження до затискачів вторинної обмотки збудженого трансформатора створюється електричне коло, у якому під дією ЕРС  $e_2$  вторинної обмотки створюється змінний струм  $i_2$ . Величина струму залежить від опору навантаження. Вторинну обмотку трансформатора можна розглядати як нове джерело змінного струму, що не має електричного зв'язку з зовнішнім джерелом живлення. При передачі електричної енергії з первинного кола трансформатора у вторинне неминуче виникають втрати.

Частина енергії джерела живлення витрачається на нагрів обмоток і осердя. Втрати електричної енергії характеризуються потужністю втрат  $\Delta P$ , які, у свою чергу, зручно подати у вигляді складових: потужність електричних втрат  $\Delta P_E$  (рівна потужності втрат в міді  $P_{Cu}$ ) і потужність магнітних втрат  $\Delta P_M$  (рівна потужності втрат в сталі  $P_{Fe}$ ).

Потужністю електричних втрат характеризують нагрів обмоток, що мають опори  $r_1$  і  $r_2$ . При цьому кількість теплоти, що виділятиметься в обмотках, можна обчислити за законом Джоуля-Ленца:

$$\Delta Q = \Delta P_E \cdot \tau = P_{Cu} \cdot \tau = (i_1^2 r_1 + i_2^2 r_2) \tau.$$

Потужність втрат в міді  $P_{Cu}$  визначають за даними досліду короткого замикання. Потужністю магнітних втрат  $\Delta P_M$  (потужністю втрат в сталі  $P_{Fe}$ ) характеризують нагрів осердя, викликаний вихровими струмами в ньому, а також циклічним перемагніченням осердя. Потужність втрат в сталі  $P_{Fe}$  визначають за даними досліду холостого ходу.

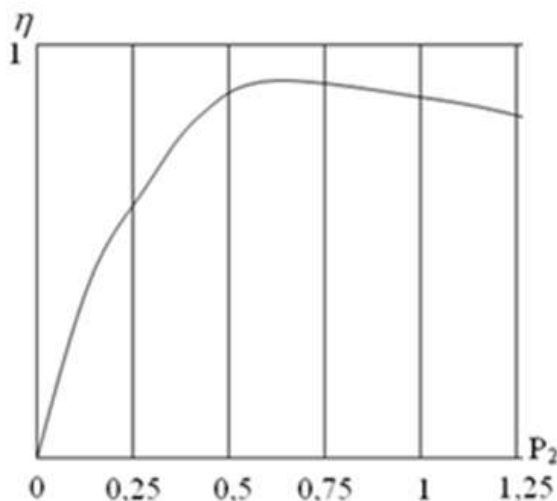
Внаслідок втрат  $\Delta P$ , потужність  $P_2$  передачі енергії в навантаження буде менше потужності  $P_1$  споживання енергії в первинній обмотці трансформатора. Коефіцієнт корисної дії трансформатора визначається за формулою:

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{Cu} + P_{Fe}} \cdot 100\%.$$

Звичайно, ККД трансформатора можна визначити за формулою:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \cdot 100\% = \frac{I_2 U_2 \cos \varphi_2}{I_1 U_1 \cos \varphi_1} \cdot 100\%. \quad (6.5.1)$$

Однак при великих потужностях трансформаторів витрата енергії при визначенні ККД за формулою (6.5.1) буває досить значною, тому користуються непрямим методом, тобто використовують дані холостого ходу і короткого замикання, оскільки при таких дослідах витрата енергії виявляється незначною навіть при великих потужностях трансформатора.



**Рис. 6.5.** Залежність ККД трансформатора від потужності, що передається до навантаження однофазного трансформатора

Сучасні трансформатори мають високий ККД, який сягає 98 %, оскільки сердечники трансформаторів збираються з листів сталі найкращої якості, а також тому, що в трансформаторах немає частин, які обертаються. Чим більша потужність трансформатора, тим вищий ККД.

Якщо знехтувати втратами в трансформаторі, то

$$P_1 \approx P_2.$$

Враховуючи, що кути зсуву фаз струму та напруги в первинному і вторинному колах трансформатора є приблизно однаковими, можна записати:

$$I_1 U_1 \approx I_2 U_2 \quad \text{або} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1}.$$

Таким чином струми в обмотках трансформатора обернено пропорційні напругам, що діють на затискачах цих обмоток.

На рис. 6.5 показана крива ККД трансформатора, із якої видно, що із збільшенням навантаження від холостого ходу ККД різко збільшується і досягає найбільшого значення при навантаженні, рівним приблизно 50 % номінального. У межах 50-100 % номінального навантаження ККД практично не змінюється по величині, а при перевантаженні починає зменшуватися за рахунок надмірного збільшення втрати в ньому. Як показують розрахунки, найбільший ККД трансформатора буває у тих випадках навантаження, коли втрати в міді рівні втратам в сталі.

### Контрольні запитання

1. Який режим роботи трансформатора називається холостим ходом?
2. Що називається режимом короткого замикання трансформатора?
3. Як і з якою метою проводиться дослід короткого замикання?
4. Перелічіть втрати в трансформаторі й поясніть їхню фізичну природу.
5. Як визначити потужність втрат в сталі трансформатора?
6. Як визначити ККД трансформатора?
7. У чому полягають прямий та непрямий метод визначення ККД трансформатора?
8. Як пов'язані струми в обмотках трансформатора із напругами?
9. Як залежить ККД трансформатора від навантаження?
10. Коли ККД трансформатора буде максимальним?

## 6.6. З'єднання обмоток трифазних трансформаторів

Для трансформації трьохфазного струму можна використати три однофазні трансформатори, що працюють як один агрегат, але можна об'єднати три однофазних трансформатори в один трьохфазний апарат й при цьому досягнути економії матеріалів.

На кожному стержні трифазного трансформатора розміщують обмотки вищої й нижчої напруг однієї фази. Стержні з'єднуються між собою ярмом зверху і знизу. Довжина магнітних ліній потоку середнього стержня менша, ніж крайніх стержнів, отже, магнітний потік зустрічає на своєму шляху менший магнітний опір, ніж магнітні потоки крайніх стержнів. Тому у фазі, обмотка якої розміщена на середньому стержні, протікає намагнічувальний струм меншої сили, ніж у фазах, обмотки яких розміщені на крайніх стержнях.

Конструктивно обмотки трифазних трансформаторів виконують так само, як і однофазних. Початки фаз вищої напруги позначають –  $A, B, C$ , а кінці фаз –  $X, Y, Z$  (рис. 6.6). Якщо обмотка вищої напруги має виведену нульову точку, то цей затискач позначається цифрою 0. Початки фаз нижчої напруги позначають –  $a, b, c$ , а кінці фаз –  $x, y, z$ ; вивід нульової точки – 0.

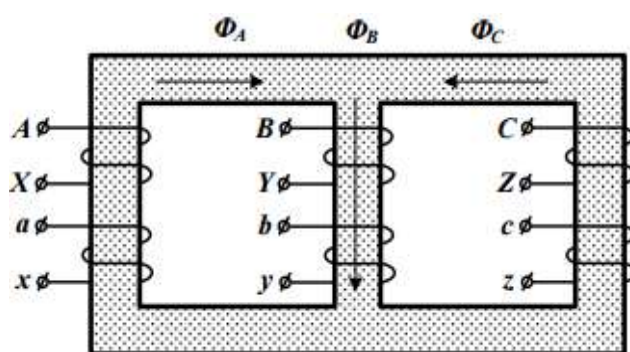
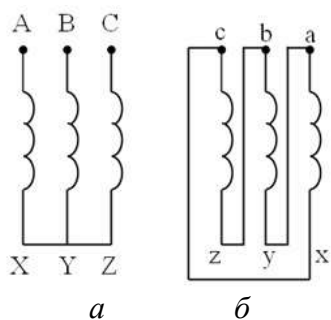


Рис. 6.6. Електромагнітна схема трифазного трансформатора

Обмотки трифазних трансформаторів можуть бути з'єднані зіркою чи трикутником. З'єднання обмоток трифазних трансформаторів зіркою позначається  $Y$ , а трикутником  $\blacktriangle$ .  $Y$  – обмотка з'єднана зіркою і має виведену нульову точку.

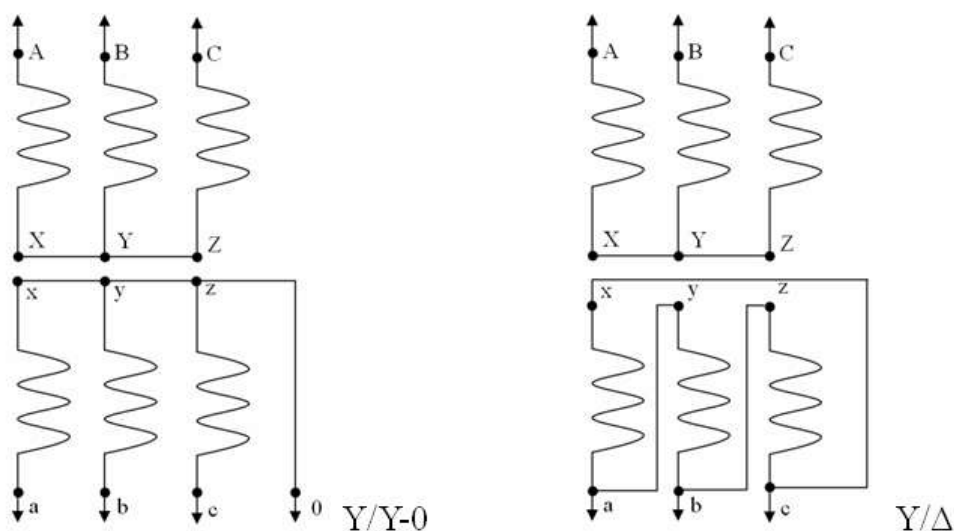
Знаючи позначення затискачів обмоток, ми можемо правильно з'єднати обмотки трифазного трансформатора і трифазної групи в зірку або трикутник.

Їх потрібно також знати при увімкненні трансформаторів на паралельну роботу. З'єднання обмотки, наприклад, вищої напруги в зірку та трикутник показано на рис. 6.7 *a* та *б* відповідно.



**Рис. 6.7.** З'єднання обмотки трифазного трансформатора в (а) зірку та (б) трикутник

З'єднання обмоток в зірку і зірку позначають Y/Y і називають «зірка – зірка» або «ігрек – ігрек». З'єднання обмоток в зірку і трикутник позначають Y/Δ і називають «зірка – трикутник» або «ігрек – дельта». Якщо від обмотки, з'єднаної в зірку, виводиться нульова точка, то таке з'єднання позначають Y<sub>0</sub> і називають «зірка з нулем» або «ігрек нульове» (рис. 6.8).



**Рис. 6.8.** З'єднання обмоток трифазного трансформатора в зірку і зірку та в зірку і трикутник

Слід мати на увазі, що відношення лінійних напруг  $U_{л1}$  і  $U_{л2}$  трансформатора залежить не тільки від чисел витків  $\omega_1$  і  $\omega_2$  обмоток (на фазу),

а й від способів їх з'єднання. При Y/Y  $\frac{U_{л1}}{U_{л2}} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ; при Y/Δ  $\frac{U_{л1}}{U_{л2}} = \frac{\sqrt{3}\omega_1}{\omega_2}$ ; при Δ/Y

$$\frac{U_{л1}}{U_{л2}} = \frac{\omega_1}{\sqrt{3}\omega_2}.$$



## 6.7. Автотрансформатори

У звичайних трансформаторах первинні й вторинні обмотки мають між собою тільки магнітний зв'язок. Іноді замість таких трансформаторів економічно доцільно застосовувати трансформатори, в яких первинні й вторинні обмотки мають теж електричний зв'язок. Такі трансформатори називають *автотрансформаторами*. В автотрансформаторах частина витків  $\omega_1$  первинної обмотки використовується як вторинна обмотка. Їх застосовують в одно і трифазних колах, для підвищення і пониження напруги, при невеликих коефіцієнтах трансформації ( $k = 1,25-2$ ). У цьому випадку вони вигідніші від звичайних двохобмоткових трансформаторів.

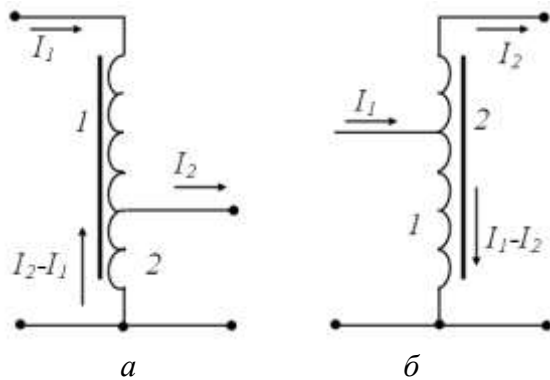


Рис. 6.9. Автотрансформатор: (а) понижувальний, (б) підвищувальний

У понижувального автотрансформатора обмотка нижчої напруги є частиною обмотки вищої напруги (рис. 6.9 а). Якщо частину обмотки автотрансформатора зробити первинною, а всю обмотку – вторинною, то автотрансформатор буде підвищувальним (рис. 6.9 б).

У порівнянні зі звичайним трансформатором при одній і тій же потужності автотрансформатор має меншу площу перерізу сердечника. Це пояснюється тим, що в автотрансформаторі не вся енергія передається через магнітний потік. Частина енергії передається за рахунок безпосереднього проходження струму з первинного кола у вторинне, тому що вони з'єднані один з одним. Чим ближче коефіцієнт трансформації автотрансформатора до одиниці, тим менше енергії передається магнітним потоком. Якщо  $k = 1$ , то вся енергія переходить із первинного кола у вторинне без допомоги магнітного потоку, і в цьому випадку автотрансформатор стає зайвим.

Коефіцієнт трансформації автотрансформатора виражається відомими співвідношеннями:

$$k = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{E_1}{E_2} \approx \frac{U_1}{U_2} \approx \frac{I_2}{I_1}.$$

Через те що частина витків автотрансформатора входить і в первинну й у вторинну обмотки, то кількість проводів для обмоток потрібна менше, чим у трансформаторі. Крім того, через загальну частину обмотки автотрансформатора проходить струм обох кіл, рівний  $I_2 - I_1$  (у підвищувальному автотрансформаторі  $I_1 - I_2$ ). Чим ближче один до одного струми  $I_1$  та  $I_2$ , тим менший струм у загальній частині обмотки й тим меншим може бути діаметр її проводу. Таким чином, при коефіцієнті трансформації, близькому до одиниці ( $k = 0,5 \dots 1$  для понижувального автотрансформатора й  $k = 1 \dots 2$  – для підвищувального) заощаджується значна кількість міді.

Недоліком автотрансформатора є те, що в ньому вторинне коло, являється, електрично з'єднане з первинним колом. Воно повинно мати таку ж ізоляцію відносно землі, як і первинне коло. Ця обставина примушує вибирати значення коефіцієнта трансформації автотрансформатора при високих напругах, не вище 1,5-2. При  $k > 2$  автотрансформатор стає не вигідним через те, що обмотки вищої і нижчої напруг електрично з'єднані між собою, отже, споживачі можуть опинитися під великим потенціалом. Це небезпечно і потребує спеціального захисту вторинного кола від перенапружень.

Автотрансформатори застосовуються як пускові для пуску великих синхронних двигунів, для освітлювальних установок, для зв'язку кіл з напругами, які мало відрізняються одна від одної.

Найчастіше автотрансформатори виготовляють із ковзним контактом, що дозволяє плавно регулювати вихідну напругу в широких межах. Прикладом може служити лабораторний автотрансформатор (ЛАТР).

## 6.8. Вимірвальні трансформатори

Найбільший струм, який ще можна виміряти шляхом безпосереднього включення приладу, становить 600 А, а напруга – 2000 В, а шунти й додаткові опори виходять громіздкими й дорогими, а дотик до таких приладів у мережах високої напруги небезпечний для життя. Тому у техніці великих струмів і високих напруг вимірювання електричних величин роблять тільки через вимірвальні трансформатори – трансформатори струму й напруги.

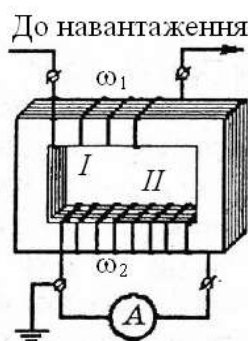


Рис. 6.10.

Трансформатор струму складається із сердечника й двох обмоток – первинної й вторинної (рис. 6.10). Первинну обмотку, яка містить невелику кількість витків, включають послідовно з навантаженням, у колі якого необхідно виміряти струм, а до вторинної обмотки, з більшим числом витків, підключають амперметр. Опір амперметра малий, отже можна вважати, що трансформатор струму працює в режимі короткого замикання. Для безпеки один вивід вторинної обмотки заземлюють для того, щоб при пробі ізоляції між обмотками провід з високим потенціалом виявився замкненим на землю. Трансформатори струму виготовляють таким чином, щоб номінальний струм вторинної обмотки становив 5 А.

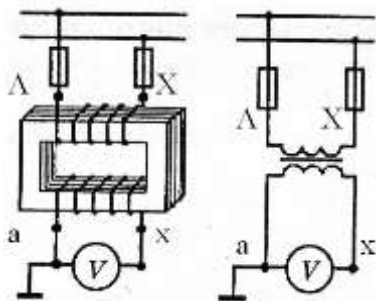


Рис. 6.11. Трансформатор напруги

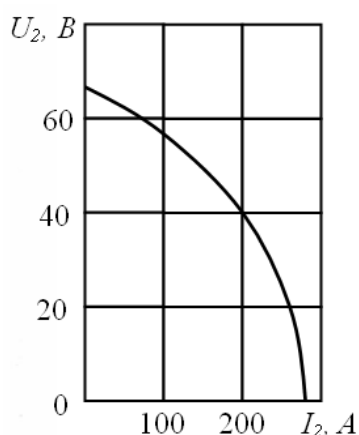
Трансформатор напруги також складається із сердечника й двох обмоток – первинної й вторинної (рис. 6.11). Первинна обмотка містить значно більше витків, ніж вторинна. На первинну обмотку подається вимірювана напруга  $U_1$ , а до вторинної обмотки приєднують вольтметр. Оскільки опір вольтметра великий, то по вторинній обмотці тече невеликий струм, і можна вважати, що трансформатор напруги працює в режимі холостого ходу, тобто

зміни вторинної напруги пропорційні змінам первинної при постійному коефіцієнті трансформації. Усі трансформатори напруги виготовляють таким чином, щоб номінальна напруга вторинної обмотки дорівнювала 110 В.

З метою безпеки обслуговуючого персоналу один затискач вторинної обмотки й сталевий кожух трансформатора напруги обов'язково заземлюють для того, щоб при пробі ізоляції між обмотками провід із високим потенціалом виявився замкненим на землю. Конструктивно трансформатори напруги дуже схожі на малопотужні силові трансформатори.

До джерел живлення зварювальних трансформаторів пред'являються специфічні вимоги: при заданій потужності вони повинні створювати великі струми в навантаженні, причому різка зміна опору навантаження не повинна суттєво позначатися на значенні зварювального струму. Відносно невисокі напруги при великих струмах забезпечують не тільки ефективне тепловиділення у зварювальному контакті, але й безпеку зварника, що працює серед металевих конструкцій з високою електропровідністю.

Відповідно до розглянутих вимог зварювальні трансформатори забезпечують зниження напруги від 220 або 380 В до 60-70 В. Така напруга на затискачах вторинної обмотки встановлюється при холостому ході зварювального трансформатора. У процесі зварювання вона коливається від максимального значення 60-70 В до значень, близьких до нуля.



**Рис. 6.12.** Зовнішня характеристика зварювального трансформатора

Опір електричної дуги, що виникає при зварюванні, змінюється при переміщеннях руки зварника. Якби напруга на затискачах вторинної обмотки трансформатора підтримувалася постійною, то виникали б різкі коливання струму в колі й регулювати тепловиділення було б неможливо. Тому зварювальний трансформатор влаштований так, що при різкому зменшенні опору дуги струм у колі збільшується незначно, а добуток  $I^2R$ , що визначає кількість теплоти, зберігається на

необхідному рівні.

Відповідно до закону Ома при різкому зменшенні опору й незначному збільшенні струму напруга на дузі знижується. Зварювальний трансформатор має крутоспадаючу зовнішню характеристику (рис. 6.12).

Зварювальний трансформатор витримує короткі замикання, що виникають у випадку дотики електрода до зварювального шва. Струм короткого замикання, як показує зовнішня характеристика, обмежений. Вторинна обмотка трансформатора розрахована на досить тривале протікання цього струму.

### **Контрольні запитання**

1. Яка будова трифазного трансформатора?
2. Як з'єднуються між собою обмотки трифазних трансформаторів?
3. Поясніть будову автотрансформатора. Чим він принципово відрізняється від звичайного трансформатора?
4. Чому дорівнює коефіцієнт трансформації автотрансформатора?
5. Як включають трансформатор струму й у якому режимі він працює?
6. Як включають трансформатор напруги й у якому режимі він працює?
7. Що роблять для безпеки обслуговуючого персоналу у трансформаторах струму та напруги?
8. Які вимоги висуваються до зварювальних трансформаторів?
9. Яка головна особливість зовнішньої характеристики зварювального трансформатора?
10. Які вимоги ставляться до джерел живлення зварювальних трансформаторів?

## ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

**Приклад 1.** Щоб дізнатися, скільки витків міститься в первинній та вторинній обмотках трансформатора, на вторинну котушку намотали 11 витків дроту. При включенні первинної обмотки в мережу напругою 220 В вольтметр показав, що на обмотці з 11 витками напруга дорівнює 4,4 В, а на вторинній обмотці – 12 В. Скільки витків в первинній та вторинній обмотках?

Запишемо вираз для коефіцієнта трансформації через значення основних і додаткових обмоток трансформатора:

$$k = \frac{n_1}{n_2} = \frac{U_1}{U_2},$$

$$k = \frac{n_1}{\Delta n} = \frac{U_1}{\Delta U},$$

де  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $\Delta n$  – число витків у первинній, вторинній і додатковій обмотках трансформатора;  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $\Delta U$  – відповідні напруги.

Із записаних виразів знаходимо:

$$n_1 = \frac{\Delta n U_1}{\Delta U} = \frac{11 \cdot 220}{4,4} = 550,$$

$$n_2 = \frac{n_1 U_2}{U_1} = \frac{550 \cdot 12}{220} = 30.$$

Відповідь:  $n_1 = 550$ ;  $n_2 = 30$ .

**Приклад 2.** Автотрансформатор, що знижує напругу з  $U_1 = 5,5$  кВ до  $U_2 = 110$  В, містить в первинній обмотці  $N_1 = 1000$  витків. Нехтуючи опором первинної обмотки, визначте число витків  $N_2$  у вторинній обмотці трансформатора, якщо опір вторинної обмотки  $R_2 = 1,5$  Ом, а опір зовнішньої кола (в мережі зниженої напруги)  $R = 9$  Ом.

Коефіцієнт трансформації  $k$  пов'язаний із кількістю витків і ЕРС провідника із якого зроблений трансформатор виразом:

$$k = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Звідси:

$$N_2 = \frac{N_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

де  $\varepsilon_1$  – ЕРС в первинній обмотці трансформатора;  $\varepsilon_2$  – ЕРС у вторинній обмотці трансформатора;  $N_1$  – кількість витків у первинній обмотці трансформатора;  $N_2$  – кількість витків у вторинній обмотці трансформатора.

Оскільки опором первинної обмотки можна знехтувати, то можемо записати:

$$\varepsilon_1 = U_1,$$

де  $U_1$  – напруга у первинній обмотці.

Для вторинної обмотки, виходячи із другого закону Кірхгофа, можемо записати:

$$\varepsilon_2 = U_2 + I_2 R,$$

де  $R$  – опір зовнішнього кола.

Сила струму  $I_2$  у вторинній обмотці трансформатора рівна:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2},$$

де  $R_2$  – опір вторинної обмотки.

Із останніх двох виразів можемо записати:

$$\varepsilon_2 = U_2 + \frac{U_2}{R_2} R = U_2 \left( 1 + \frac{R}{R_2} \right).$$

Тоді:

$$N_2 = \frac{N_1 U_2 \left( 1 + \frac{R}{R_2} \right)}{U_1} = \frac{N_1 U_2}{U_1} \left( 1 + \frac{R}{R_2} \right)$$
$$N_2 = \frac{N_1 U_2}{U_1} \left( 1 + \frac{R}{R_2} \right) = \frac{1000 \cdot 110}{5,5 \cdot 10^3} \left( 1 + \frac{9}{1,5} \right) = 140.$$

**Приклад 3.** Однофазний трансформатор має наступні параметри: номінальна потужність  $S_{ном} = 20000$  кВА, коефіцієнт потужності вантаження  $\cos\varphi = 0,8$ ;  $U_1 = 120$  кВ,  $U_2 = 38,5$  кВ, потужність холостого ходу  $D_{xx} = 47$  кВт, потужність короткого замикання  $D_{kz} = 129$  кВт. Знайти коефіцієнт трансформації  $k$  та коефіцієнт корисної дії  $\eta$  при номінальному навантаженні.

Знаходимо коефіцієнт трансформації за формулою:

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{38,5}{120} = 0,32.$$

Коефіцієнт корисної дії трансформатора знаходимо за формулою:

$$\eta = \frac{\beta S_{ном} \cos\varphi}{\beta S_{ном} \cos\varphi + P_{xx} + \beta^2 P_{kz ном}}.$$

При номінальному навантаженні коефіцієнт  $\beta$  дорівнює одиниці:

$$\eta = \frac{1 \cdot 20000 \cdot 0,8}{1 \cdot 20000 \cdot 0,8 + 47 + 1^2 \cdot 129} = 0,98.$$

**Приклад 4.** Трифазний трансформатор має наступні дані:  $S_{ном} = 100$  кВА – номінальна потужність;  $U_{1ном} = 660$  В – номінальна напруга на затискачах первинних обмоток;  $U_{2ном} = 230$  В – номінальна напруга на затискачах вторинних обмоток;  $P_{Fe} = 500$  Вт – втрати потужності в сталі трансформатора,  $P_{об.ном} = 1500$  Вт – втрати потужності в обмотках при номінальному струмі в них. Первинні і вторинні обмотки трансформатора з'єднані в зірку. Від трансформатора споживається активна потужність  $P_2 = 60$  кВт при коефіцієнті потужності  $\cos\varphi_2 = 0,8$ . Визначити:

1.  $k$  – лінійний коефіцієнт трансформації;
2.  $I_{1ном}$ ,  $I_{2ном}$  – номінальні струми в первинних і вторинних обмотках трансформатора;
3.  $k_{нв}$  – коефіцієнт навантаження;
4.  $I_1$ ,  $I_2$  – струми в первинних і вторинних обмотках трансформатора при фактичному навантаженні;



5.  $\sum P_{ном}$  – сумарні втрати потужності при номінальному навантаженні трансформатора;

6.  $\sum P$  – сумарні втрати потужності при фактичному навантаженню трансформатора;

7.  $\eta_{ном}$  – коефіцієнт корисної дії при номінальному навантаженні трансформатора;

8.  $\eta$  – коефіцієнт корисної дії при фактичному навантаженні трансформатора.

Лінійний коефіцієнт трансформації рівний:

$$k = \frac{U_{1 ном}}{U_{2 ном}} = \frac{660}{230} = 2,87.$$

Номінальні струми в обмотках трансформатора:

$$\text{- у первинних обмотках } I_{1 \hat{m}} = \frac{S_{\hat{m}}}{\sqrt{3}S_{1\hat{m}}} = \frac{100 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 660} = 87,5 \text{ А};$$

$$\text{- у вторинних обмотках } I_{2 \hat{m}} = \frac{S_{\hat{m}}}{\sqrt{3}S_{2\hat{m}}} = \frac{100 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 230} = 251 \text{ А}.$$

Коефіцієнт навантаження:

$$k_{нв} = \frac{P_2}{S_{ном} \cdot \cos\varphi_2} = \frac{60}{100 \cdot 0,8} = 0,75.$$

Струми в первинних і вторинних обмотках трансформатора при фактичному навантаженні:

$$\text{- у первинних обмотках } I_1 = k_{\hat{a}} I_{1 \hat{m}} = 0,75 \cdot 87,5 = 65,6 \text{ А};$$

$$\text{- у вторинних обмотках } I_2 = k_{\hat{a}} I_{2 \hat{m}} = 0,75 \cdot 251 = 188 \text{ А}.$$

Сумарні втрати потужності при номінальному навантаженні трансформатора:

$$\sum P_{ном} = P_{ном} + P_{об.ном} = 500 + 1500 = 2000 \text{ Вт}.$$

Сумарні втрати потужності при фактичному навантаженню трансформатора:

$$\sum \mathcal{D} = \mathcal{D}_{\tilde{n}\tilde{d}} + k_{i\tilde{a}}^2 \cdot \mathcal{D}_{i\tilde{a} \cdot \tilde{m}} = 500 + 0,75^2 \cdot 1500 = 1344 \text{ Вт},$$

де  $k_{нв}^2 \cdot P_{об.ном}$  – втрати потужності в обмотках трансформатора при фактичному навантаженні.

Коефіцієнт корисної дії при номінальному навантаженні трансформатора:

$$\begin{aligned} \eta_{ном} &= \frac{P_{2\text{ ном}}}{P_{2\text{ ном}} + \sum P_{ном}} = \frac{S_{ном} \cdot \cos\varphi_2}{S_{ном} \cdot \cos\varphi_2 + P_{ст} + P_{об.ном}} \\ &= \frac{100 \cdot 0,8}{100 \cdot 0,8 + 0,5 + 1,5} = 0,9756 = 98,56\% \end{aligned}$$

Коефіцієнт корисної дії при фактичному навантаженні трансформатора

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_2}{P_2 + \sum P} = \frac{k_{нв} \cdot S_{ном} \cdot \cos\varphi_2}{k_{нв} \cdot S_{ном} \cdot \cos\varphi_2 + P_{ст} + k_{нв}^2 \cdot P_{об.ном}} = \\ &= \frac{0,75 \cdot 100 \cdot 0,8}{0,75 \cdot 100 \cdot 0,8 + 0,75^2 \cdot 1,5} = 0,978 = 97,5\% \end{aligned}$$

## ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Знайти число витків обмоток трансформатора для отримання в режимі холостого ходу напруги на вторинній обмотці  $U_2=12$  В при напрузі первинної обмотки  $U_1=220$  В, якщо частота в мережі дорівнює 50 Гц, а максимальне значення основного магнітного потоку в осерді трансформатора  $\Phi_m=0,0036$  Вб.

2. При включенні трансформатора в мережу з напругою  $U_1=35$  кВ в режимі холостого ходу вторинна напруга  $U_2=400$  В. Нехтуючи струмом холостого ходу, визначити струм в первинній обмотці при струмі навантаження  $I_2=145$  А.

3. Трансформатор включений в мережу зі змінною напругою  $U_1=220$  В. Напруга на затискачах вторинної обмотки  $U_2=20$  В, її опір  $r=1$  Ом, сила струму у вторинній обмотці  $I_2=2$  А. Знайти коефіцієнт трансформації і ККД трансформатора, нехтуючи втратами в первинній обмотці і осерді.

4. Визначити ЕРС первинної обмотки трансформатора, що має 450 витків, якщо трансформатор увімкнений у мережу змінного струму з частотою 50 Гц, а магнітний потік в осерді становить 0,00217 Вб.

5. Визначити число витків вторинної обмотки трансформатора, якщо при магнітному потоці в осерді  $2 \cdot 10^{-3}$  Вб і частоті 50 Гц наведена ЕРС повинна складати 220 В.

6. Первинну обмотку знижувального трансформатора з коефіцієнтом трансформації 8 увімкнено в мережу з напругою 220 В. Опір вторинної обмотки 2 Ом, а сила струму в ній 2 А. Визначити величину індукованої у вторинній обмотці ЕРС і напругу на навантаженні.

7. У знижувальному трансформаторі з коефіцієнтом трансформації 100 напруга на навантаженні, ввімкнутому в коло вторинної обмотки, 11 В. Опір навантаження 10,8 Ом. Визначити напругу на первинній обмотці трансформатора, якщо опір його вторинної обмотки 0,2 Ом. Яка сила струму у первинній обмотці трансформатора, якщо його ККД 98%.

8. Втрати при холостому ході трансформатора складають  $P_x = 50$  Вт, при короткому замиканні  $P_k = 90$  Вт. При деякому навантаженні трансформатор

споживає потужність  $P = 8,5 \text{ кВт}$ . Визначити активний опір трансформатора при холостому ході, короткому замиканні і навантаженні, якщо відомо, що струм холостого ходу  $I_x = 2,5 \text{ А}$ , струм короткого замикання  $I_k = 26 \text{ А}$ , струм навантаженого трансформатора  $I_1 = 24 \text{ А}$ .

9. Визначити ЕРС первинної обмотки трансформатора, що має 450 витків, якщо трансформатор підключений до мережі змінного струму з частотою  $\nu = 50 \text{ Гц}$ , а магнітний потік у сердечнику  $\Phi = 2,17 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}$ .

10. Визначити переріз магнітопровода трансформатора з коефіцієнтом трансформації 25, який підключений до мережі з напругою  $U_1 = 10000 \text{ В}$  і частотою  $\nu = 50 \text{ Гц}$ , якщо магнітна індукція в магніто проводі  $B = 1 \text{ Тл}$ , а число витків у вторинній обмотці 300.

11. Трансформатор підключили до мережі змінного струму з напругою 220 В і частотою 50 Гц. Визначити коефіцієнт трансформації, якщо сердечник має активний переріз  $7,6 \text{ см}^2$ , найбільша магнітна індукція  $B_m = 0,95 \text{ Тл}$ , а число витків вторинної обмотки 40.

12. Однофазний трансформатор номінальної потужності  $S_{ном} = 630 \text{ кВ} \cdot \text{А}$  має число витків обмотки при первинної обмотки 600 і вторинної 40. Напряга на затискачах первинної обмотки при холостому ході  $U_x = 6000 \text{ В}$ . Знайти напругу на виводах вторинної і густину струму в обмотках трансформатора, якщо переріз проводів в первинній обмотці  $S_1 = 30 \text{ мм}^2$ , а у вторинній –  $S_2 = 420 \text{ мм}^2$ .

13. Для визначення втрат у сталі дроселя його спочатку включили в коло постійного струму. Опір виявився рівним 2 Ом. Потім до дроселя підвели змінну напругу. При цьому вольтметр показав 127 В, ваттметр – 75 Вт, амперметр – 2 А. Визначити втрати в сталі і міді дроселя.

14. Однофазний трансформатор номінальної потужності  $S_{ном} = 160 \text{ кВ} \cdot \text{А}$  включений у мережу змінного струму з частотою  $\nu = 50 \text{ Гц}$ . Знайти ЕРС первинної і вторинної обмоток, якщо активний переріз стержня і ярма  $S = 175 \text{ см}^2$ , найбільша магнітна індукція в стержні 1,5 Тл, число витків первинної обмотки 1032, вторинної – 40.

15. Максимальний магнітний потік в сердечнику однофазного трансформатора дорівнює  $0,005 \text{ Вб}$ . При холостому ході виміряна напруга на вторинній обмотці виявилась рівною  $120 \text{ В}$ . Число витків первинної обмотки  $500$ , частота мережі  $50 \text{ Гц}$ . Знайти коефіцієнт трансформації і напруга мережі живлення.

16. Трансформатор потужністю  $P_2=60 \text{ кВА}$  має втрати в сталі  $P_{ст}=400 \text{ Вт}$  і втрати в обмотках при повному навантаженні ( $100 \%$ )  $P_{обн}=1350 \text{ Вт}$ . Визначити коефіцієнт корисної дії при навантаженнях  $100 \%$ ,  $75 \%$ ,  $50 \%$ , і  $25 \%$  номінальної, вважаючи навантаження чисто активної ( $\cos \varphi = 1$ ).

17. Визначити число витків у первинній і вторинні обмотках трансформатора, підключених до мережі змінного струму з напругою  $220 \text{ В}$  і частотою  $50 \text{ Гц}$ , якщо в режимі холостого ходу напруга на вторинній обмотці  $12 \text{ В}$ , а магнітний потік в сердечнику  $\Phi_m = 0,25 \text{ мВб}$ .

18. Однофазний трансформатор з номінальною потужністю  $1600 \text{ кВ}\cdot\text{А}$  має число витків первинної і вторинної обмоток відповідно  $2193$  і  $232$ , активний перетин сердечника  $S = 530 \text{ см}^2$ . Обчислити магнітну індукцію в осерді трансформатора, активну і реактивну складові напруги короткого замикання, ЕРС, що наводиться у вторинній обмотці, якщо первинна обмотка включена в мережу змінного струму з напругою  $6300 \text{ В}$ . Напруга короткого замикання становить  $5,5\%$ , втрати при короткому замиканні трансформатора  $P_{\kappa} = 18 \text{ кВт}$ , втрати холостого ходу  $P_x = 3,3 \text{ кВт}$ .

19. Втрати трансформатора в режимі холостого ходу  $P_x = 150 \text{ Вт}$ , в режимі короткого замикання  $P_{\kappa} = 500 \text{ Вт}$ . Обчислити ККД трансформатора при номінальному режимі, якщо коефіцієнт потужності в цьому режимі дорівнює  $\cos \varphi = 0,9$ , а потужність навантаження  $S_2 = 5 \text{ кВ}\cdot\text{А}$ .

20. Трансформатор працює в номінальному режимі  $12$  год на добу, а решту часу – в режимі холостого ходу. Визначити середньодобовий ККД трансформатора, якщо його номінальна потужність  $100 \text{ кВт}$ , втрати холостого ходу  $1,2 \text{ кВт}$ , а втрати короткого замикання  $3,5 \text{ кВт}$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Городжа А. Д. Загальна електротехніка. К. : КНУБА, 2000. 150 с.
2. Кевшин А. Г. Електротехніка : конспект лекцій. Луцьк : Вежа-Друк, 2016. 69 с.
3. Кевшин А. Г., Галян В. В., Федосов С. А. Електротехніка : задачі у 2 ч. Ч. 1 : Кола постійного струму. Лінійні кола змінного струму. Трифазні кола електричного струму. Луцьк : Вежа-Друк, 2020. 39 с.
4. Кевшин А. Г., Галян В. В., Федосов С. А. Електротехніка: задачі у 2-х ч. Ч. 2: Трансформатори. Комплексний метод розрахунку електричних кіл синусоїдного струму. Луцьк : Вежа-Друк, 2020. 33 с.
5. Борисов Ю. М., Липатов Д. Н., Зорин Ю. Н. Электротехника : учебник для студ. вузов. М. : Энергоатомиздат, 1985. 180 с.
6. Вартабенян В. А. Загальна електротехніка. К. : Вища шк., 1979. 160 с.
7. Иванов А. О. Лабораторні роботи з електротехніки. К. : Вища шк., 1970. 76 с.
8. Малинівський С. М. Загальна електротехніка. Львів : Ви-во Львівської політехніки, 2001. 596 с.
9. Пантюшин В. С. Электротехника. М. : Высш. шк., 1976. 260 с.
10. Попов В. С. Николаев С. А. Общая электротехника с основами электроники. М. : Энергия, 1976. 312 с.
11. Рибалко М. П. Есауленко В. О., Костенко В. І. Теоретичні основи електротехніки: Лінійні електричні кола : підручник. Донецьк : Новий світ, 2003. 513 с.
12. Титаренко М. В. Електротехніка : навч. посіб. для студ. інж.-тех. спец. вузів. К. : Кондор, 2004. 240 с.
13. Шегедін О. І., Маляр В. С. Теоретичні основи електротехніки. Частина 1 : навч. посіб. для студ. дистанційної форми навчання електротехнічних та електромеханічних спец. вищих навч. закладів. Львів : Новий Світ, 2004. 168 с.
14. Яцун М. А. Електричні машини. Львів : Ви-во Львівської політехніки, 2011. 464 с.

Навчальне видання

**Кевшин Андрій Григорович**  
**Новосад Олексій Володимирович**  
**Федосов Сергій Анатолійович**

## **Електротехніка**

*Навчальний посібник*

Друкується в авторській редакції