

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ
ВОЛИНСЬКИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ПЕДАГОГІЧНОЇ ОСВІТИ

Павло Шигорін, Валентин Савош

АСТРОНОМІЯ

МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЛІМПІАД

ЛУЦЬК 2020

УДК 519.67
ББК 22.6 я 731
Ш 55

У посібнику викладено теоретичний матеріал із основних розділів сучасної астрономії та астрофізики необхідний для успішної підготовки до учнівських олімпіад з астрономії. Теоретичний матеріал доповнений задачами, більшість яких пропонувалися авторами учням на Всеукраїнських олімпіадах з астрономії різних етапів. Для кожної задачі наведено докладний розв'язок.

Посібник буде корисний для усіх, хто вивчає астрономію та займається підготовкою до астрономічних олімпіад.

Шигорін П. Астрономія (Матеріали для підготовки до олімпіад): навч. посіб. / Шигорін Павло, Савош Валентин – Луцьк, 2020. – 136 с.

Рецензенти:

Мартинюк О.С. – доктор педагогічних наук, професор кафедри експериментальної фізики та інформаційно-вимірювальних технологій СНУ імені Лесі Українки.

Ткаченко І.А. – доктор педагогічних наук, професор кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини, доцент.

Рекомендовано до друку кафедрою теоретичної та математичної фізики СНУ імені Лесі Українки (протокол №8 від 11 березня 2020 року).

Рекомендовано до друку вченою радою Волинського інституту післядипломної педагогічної освіти (протокол №3 від 31 березня 2020 року).

© Шигорін П., Савош В., 2020

Передмова

*Присвячується боротьбі
Людства з COVID-19*

Астрономія – фундаментальна наука про будову, динаміку, походження та еволюцію небесних тіл. Об'єктами дослідження астрономії є планети, комети, астероїди, зорі та зоряні скупчення, галактики та туманності, а також Всесвіт у цілому.

Астрономія побудована на теоретичних моделях, які засновані на основі великої кількості спостережень за небесними тілами. Досліджуючи рух планет, вивчаючи електромагнітне випромінювання небесних світил, його спектральні характеристики, було встановлено закони динаміки небесних (а також земних!) тіл, визначено відстані до планет та зір, описано їх будову і фізичні властивості, а також встановлено хімічний склад їхніх атмосфер, побудовано сценарії еволюції небесних світил впродовж мільйонів років.

Астрономія відноситься до найдавніших наук. Її зародження пов'язане з розвитком древніх цивілізацій (Вавилон, Єгипет, Греція, Індія, Китай, Майя). Упродовж своєї еволюції астрономія постійно здійснює суттєвий вплив на розвиток інших природничих наук. Особливе значення астрономія має для фізики. На основі астрономічних спостережень за рухами планет були сформульовані закони Кеплера, які згодом стали фундаментом для закону Всесвітнього тяжіння Ньютона. Розвиток фундаментальної концепції простору-часу, що має надзвичайно важливе значення у загальній теорії відносності та квантовій теорії поля, безпосередньо пов'язаний з астрофізичними дослідженнями. Зокрема, нового дихання теорія простору-часу набула після експериментальної реєстрації гравітаційних хвиль у 2015 році. Нещодавно перед фізиками-теоретиками з'явився новий виклик, пов'язаний із відкриттям темної матерії та темної енергії.

Дослідження космосу також стимулює розвиток технологій. Від моменту створення першої зорової труби Ліпперсгеєм, Янсенем та Метьюсом до конструювання таких телескопів як «Габбл», «Гершель»

та «Джеймс Вебб» минуло чотири століття. За цей час відбувся величезний технологічний стрибок та розвиток інженерії.

Запропонований Читачу посібник містить набір теоретичного матеріалу з основних розділів сучасної астрономії та астрофізики. У посібнику розглянуто фундаментальні закони та прикладні аспекти практичної астрономії та астрофізики. Зокрема описано елементи небесної сфери, системи небесних координат, основи вимірювання часу, способи та методи вимірювання відстаней в астрономії; наведено закони руху небесних тіл під дією сил гравітації та конфігурації планет; викладено основи фотометрії зір та ефектів їх просторового руху.

Докладний виклад теоретичного матеріалу доповнений низкою задач, які пропонувалися авторами учнівській молоді на різних етапах Всеукраїнських олімпіад з астрономії на Волині. Ідеї для деяких задач було взято з IV етапу учнівських та студентських олімпіад з астрономії та астрофізики. Усі задачі супроводжуються розв'язками із докладними поясненнями та ілюстраціями.

Посібник призначений для усіх, хто займається підготовкою до олімпіад з астрономії. Він також буде корисним учителям, які викладають астрономію чи інші природничі дисципліни, та стане дружнім їхнім учням.

*Павло Шигорін, Валентин Савош
березень 2020 року*

Зміст

Передмова	3
Розділ 1. Практична астрономія	6
1.1 Модель небесної сфери	6
1.2 Системи небесних координат	9
1.3 Річний рух Сонця	15
1.4 Вимірювання часу в астрономії	18
1.5 Розміри та відстані в астрономії	25
Задачі до розділу 1	29
Розв'язки задач до розділу 1	41
Розділ 2. Рух тіл під дією сили тяжіння	61
2.1 Закон Всесвітнього тяжіння	61
2.2 Закони Кеплера та конфігурації планет	68
2.3 Траєкторії міжпланетних мандрівок	74
Задачі до розділу 2	76
Розв'язки задач до розділу 2	82
Розділ 3. Елементи астрофізики	98
3.1 Фотометрія зір	98
3.2 Ефекти просторового руху зір	106
Задачі до розділу 3	111
Розв'язки задач до розділу 3	116
Література для подальшого вивчення	131
Предметний покажчик	132
Додаток 1	134

Розділ 1. Практична астрономія

1.1 Модель небесної сфери

У якому б місці земної поверхні ми не знаходились, нам завжди здається, що всі небесні тіла знаходяться від нас на однаковій відстані, ми бачимо небо над собою у формі сферичної поверхні. З метою наочності та для вивчення видимих положень і рухів небесних світил в астрономії запроваджується допоміжна сферична поверхня, яка моделює небосхил – небесна сфера.

Небесна сфера – уявна сфера довільного радіусу, на яку спроектовані всі світила так, як їх бачить спостерігач у певний момент часу з певної точки на поверхні землі. Таким чином, уявний спостерігач, котрий знаходиться в центрі небесної сфери, повинен бачити положення світил на поверхні у такому розміщенні, у якому справжній спостерігач бачить небесні світила на небі.

Розглянемо основні точки та елементи небесної сфери (Рис. 1.1). Верхня і нижня точки перетину небесної сфери з вертикальною лінією (лінією виска), яка проходить через центр сфери, називаються відповідно *зеніт* Z і *надир* Z_0 .

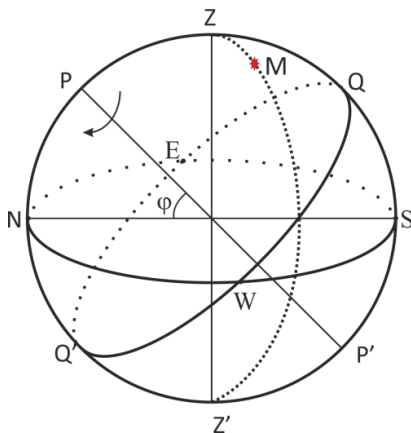


Рис. 1.1. Модель небесної сфери.

Велике коло небесної сфери $SWNE$, площина якого перпендикулярна до вертикальної лінії, називається *математичним горизонтом* (або істинним горизонтом). Математичний горизонт розділяє поверхню небесної сфери на дві половини: видиму та невидиму. Велике півколо, яке проходить через зеніт, світило M і надир, називається *вертикалом* або колом висоти.

Спостереження зоряного неба показують, що небесна сфера повільно обертається в напрямку зі сходу на захід. Для спостерігача, який знаходиться в північній півкулі Землі та повернутий обличчям на південь, це обертання відбувається зліва направо, за годинниковою стрілкою. Сузір'я піднімаються над горизонтом у східній частині неба і опускаються до горизонту в західній стороні. У дійсності ж Земля обертається навколо своєї осі у напрямку із заходу на схід. Цьому існують строгі докази: обертання площини маятника Фуко, відхилення падаючих тіл на захід тощо.

Видиме обертання небесної сфери називається *добовим обертанням*, оскільки його період дорівнює одній добі.

Діаметр небесної сфери, навколо якого вона обертається, називається *віссю світу*, а точки перетину осі світу з небесною сферою – *полюсами світу*. Вісь світу нахилена до математичного горизонту під кутом, що рівний географічній широті місця спостереження. Полюс, відносно якого небесна сфера обертається проти годинникової стрілки (для спостерігача, який перебуває у центрі сфери), називається *північним полюсом світу P* , протилежний йому – *південним полюсом світу P'* . Північний полюс світу знаходиться в сузір'ї Малої Ведмедиці поблизу Полярної зорі (α Малої Ведмедиці).

Велике коло небесної сфери $QWQ'E$, площина якого перпендикулярна до осі світу, називається небесним екватором. Небесний екватор ділить небесну сферу на дві півкулі: північну та південну. Велике півколо, яке проходить через полюси світу та світило, називається колом схилення.

Небесний екватор перетинається з математичним горизонтом у точці сходу E і у точці заходу W . Вертикал, який проходить через точку сходу, називається першим вертикалом.

Добовий рух небесних світил на небі здійснюється по добових паралелях – малих колах, що проходять через світила і площини яких паралельні до площини небесного екватора.

Велике коло небесної сфери $PZQSP'Z'Q'N$, яке проходить через полюси світу і зеніт, називається *небесним меридіаном*. Небесний меридіан ділить небесну сферу на дві півкулі: східну та західну. Площина небесного меридіану перетинається з площиною математичного горизонту вздовж прямої лінії NS , яка називається *полуденною лінією*. Полуденна лінія перетинається з небесним меридіаном у точці півночі N та у точці півдня S . Точкою півночі обирають ту, що лежить ближче до північного полюса світу.

Внаслідок добового обертання небесної сфери кожне світило двічі перетинає небесний меридіан. Момент проходження світила через меридіан називається *кульмінацією світила*. У верхній кульмінації світило перетинає небесний меридіан у точці, яка знаходиться ближче до зеніту (Рис 1.2а). У цей момент світило піднімається на максимальну висоту над горизонтом. У нижній кульмінації (Рис 1.2б) світило може перебувати як над горизонтом (для світил, що не заходять у даній місцевості) так і під горизонтом (для світил, які заходять).

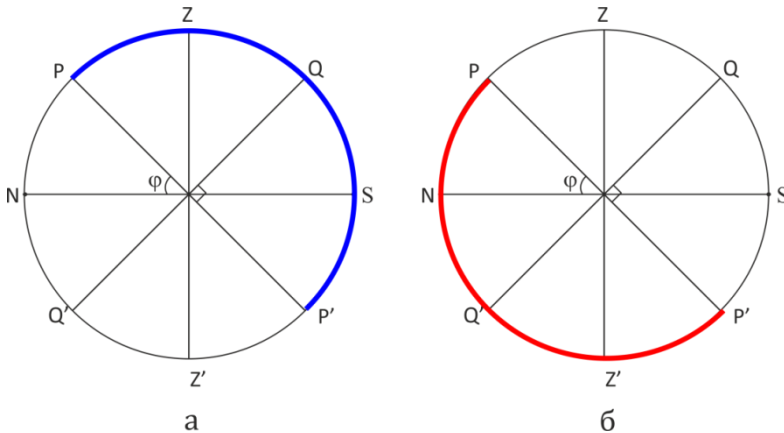


Рис 1.2. Зона верхніх (а) та нижніх (б) кульмінацій світила.

1.2 Системи небесних координат

Оскільки положення будь-якої точки на сфері можна однозначно задати двома величинами (центральною кутами, або ж дугами великих кіл), то положення світила на небі можна визначити, задаючи дві координати, які називаються небесними координатами.

При розв'язанні різноманітних задач астрономії користуються різними системами небесних координат. Ці системи відрізняються одна від одної вибором основної площини і початком відліку.

а) Горизонтальна система координат

У цій системі координат основною площиною є площина математичного горизонту. Положення світила на небесній сфері задається азимутом A і висотою світила над горизонтом h (див. Рис. 1.3).

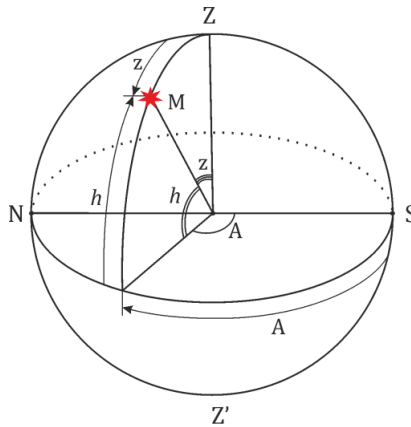


Рис. 1.3. Горизонтальна система координат.

Азимутом A світила M називається кут між площиною небесного меридіана і площиною вертикала світила. Азимут відраховують від точки півдня S на захід у напрямку добового обертання небесної сфери (в географії азимуту відраховуються від точки Півночі) уздовж математичного горизонту до вертикала світила.

Одиницею вимірювання азимутів є градус. Азимуту світил змінюються у межах від 0° до 360° . Наприклад азимут точки півночі становить $A_N = 180^\circ$.

Висотою h світила M називається кут між площиною горизонту і напрямом на світило, виміряний у площині вертикалу. Висоту світила

відраховують від горизонту вздовж вертикала до світила. Як і азимут, висота світила вимірюється в градусах. Вона змінюється у межах від 0° до -90° для світил під горизонтом, і у межах від 0° до $+90^\circ$ для світил над горизонтом.

Іноді замість висоти світила використовують іншу координату – *зенітну відстань світила* z . Для світил, що перебувають у видимій частині небесної сфери $z \leq 90^\circ$, а для світил під горизонтом $z \geq 90^\circ$.

Для одного і того ж світила зенітна відстань пов'язана з висотою наступним співвідношенням:

$$z + h = 90^\circ.$$

Таким чином, у горизонтальній системі небесних координат положення світила на небесній сфері можна задати наступними парами координат: $(A; h)$ або $(A; z)$.

При встановленні небесної сфери для спостерігача, який знаходиться у певному географічному пункті, керуються теоремою про висоту полюса світу (фактично Полярної зорі): висота полюса світу над горизонтом дорівнює географічній широті місця спостереження φ .

При добовому обертанні небесної сфери світила переміщуються по добових паралелях, тому впродовж доби обидві горизонтальні координати світила неперервно змінюються, набуваючи у різні моменти часу строго визначених значень. Це дозволяє завчасно визначити умови видимості небесних світил в задані моменти часу.

Проте горизонтальна система небесних координат не придатна для складання зоряних карт і каталогів. Для цього необхідна така система координат, у якій би обертання небесної сфери не впливало на значення координат світил.

б) Екваторіальна система координат

В екваторіальній системі небесних координат основною площиною є площина небесного екватора (див. Рис. 1.4). Залежно від вибору пари координат розрізняють першу та другу екваторіальні системи небесних координат.

У першій екваторіальній системі парою координат обирають годинний кут світила t та схилення світила δ .

Годинним кутом t світила M називається кут між площиною небесного меридіана і площиною кола схилення світила. Він відраховується від найвищої точки небесного екватора (точки Q) на захід уздовж небесного екватора до кола схилення світила.

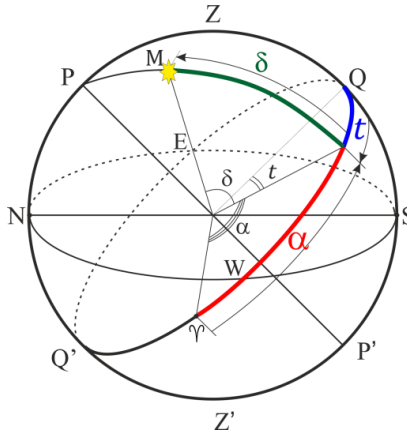


Рис. 1.4. Екваторіальна система небесних координат.

Годинний кут вимірюється в одиницях часу (годинах h , хвиликах m , секундах s) від 0^h до 24^h . Наприклад, годинний кут світила, що перетинає небесний меридіан у тій частині небесної сфери де знаходиться надир (момент нижньої кульмінації), дорівнює $t = 12^h$.

Схиленням світила M називається кут δ між площиною небесного екватора і напрямком на світило, виміряний у площині кола схилення. Схилення відраховують від небесного екватора вздовж кола схилення до світила.

Схилення відраховуються в межах від 0° до 90° у напрямку до північного полюса світу (у північній півкулі небесної сфери) і від 0° до -90° у напрямку до південного полюса світу (у південній півкулі небесної сфери).

У другій екваторіальній системі парою координат обирають пряме піднесення (пряме сходження) світила α та його схилення δ .

Прямим піднесенням світила називається кут α між напрямком на точку весняного рівнодення і площиною кола схилення світила, виміряний у площині небесного екватора. Пряме піднесення відраховують від точки весняного рівнодення назустріч видимому обертанню небесної сфери до кола схилення світила. Зауважимо, що

точка весняного рівнодення, як відправна точка для вимірювання прямого піднесення, є аналогом Гринвіча, як відправної точки для вимірювання географічної довготи.

Пряме піднесення вимірюють в одиницях часу від 0^h до 24^h .

Екваторіальні координати α і δ під час добового обертання небесної сфери не змінюються, оскільки вони відраховуються від точок небесного екватора, які самі беруть участь у добовому обертанні, а тому положення світила відносно цих точок не змінюється.

Друга екваторіальна система небесних координат є основою при складанні списків положень зір (зоряних каталогів) та зоряних карт.

Вище ми бачили, що одні небесні координати вимірюються у градусній мірі, а інші – у годинній. Тому виникає необхідність переведення одних одиниць у інші. Для встановлення зв'язку між двома мірами будемо виходити зі співвідношення:

$$360^\circ = 24^h.$$

Звідси

$$\begin{aligned} 1^h &= 15^\circ, & 1^m &= 15', & 1^s &= 15''. \\ 1^\circ &= 4^m, & 1' &= 4^s, & 1'' &= 1/15^s. \end{aligned}$$

Важливе значення має зв'язок між екваторіальними та горизонтальними небесними координатами. У загальному випадкові ці координати пов'язані формулами сферичної геометрії, які застосовують до паралактичного трикутника на небесній сфері (трикутник із вершинами: полюс світу P , зеніт Z і світило M) [1]. Проте у моменти кульмінацій світила ці співвідношення спрощуються, оскільки сферичний трикутник стає плоским.

Розглянемо зв'язок між екваторіальними та горизонтальними координатами світила у момент його верхньої кульмінації, яка може бути до півдня від зеніту ($\delta < \varphi$, Рис. 1.5), або до півночі від зеніту ($\delta > \varphi$).

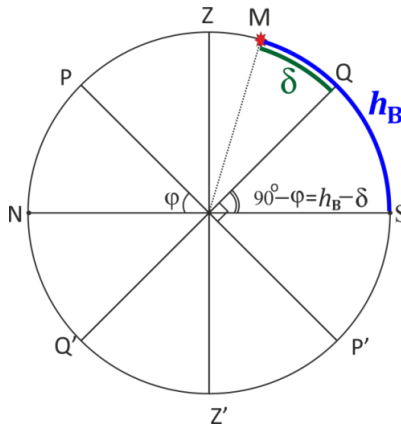


Рис. 1.5. Верхня кульмінація світила M на південь від zenіту.

Із геометричної побудови, яка зображена на Рис. 1.5 слідує, що у момент верхньої кульмінації світила до півдня його висота

$$h_B = 90^\circ - \varphi + \delta.$$

Аналогічні міркування показують, що для моменту верхньої кульмінації світила до півночі

$$h_B = 90^\circ + \varphi - \delta.$$

Для моменту нижньої кульмінації світила одержуємо формулу

$$h_H = \varphi + \delta - 90^\circ.$$

Одержані співвідношення між висотою світила його схиленням та географічною широтою дають можливість визначити умови видимості світила над горизонтом у певній місцевості.

Зокрема, світило ніколи не заходить у даній місцевості, якщо $h_H \geq 0$, тобто коли схилення світила задовольняє умові

$$\delta \geq 90^\circ - \varphi.$$

Наприклад на території Волині ($\varphi = 50^\circ$) ми завжди можемо спостерігати сузір'я Кассіопея. Схилення даного сузір'я знаходиться у межах від 46° до 77° , що задовольняє умову

$$\delta \geq 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ.$$

Для світил, які ніколи не сходять у даній місцевості, має виконуватися умова $h_B \leq 0$, тобто

$$\delta \leq \varphi - 90^\circ.$$

Зауважимо, що на земному екваторі ($\varphi = 0^\circ$) попередні дві умови не виконуються для жодного світила, тобто у цій місцевості усі небесні світила сходять і заходять.

У місцевості із широтою φ світило буде сходити і заходити, якщо виконується наступна умова на його схилення

$$|\delta| \leq 90^\circ - \varphi.$$

1.3 Річний рух Сонця

Ще одним важливим елементом небесної сфери є *екліптика* – велике коло небесної сфери, по якому центр диска Сонця здійснює видимий річний рух по небесній сфері. Якщо знехтувати нахилом орбіт планет сонячної системи до площини земної орбіти, то їхній рух на небесній сфері відбувається також уздовж екліптики. Площина екліптики нахилена до площини небесного екватора під кутом $\varepsilon = 23^{\circ}26'26'' = 23.45^{\circ}$ (Рис. 1.6). Екліптика перетинається з небесним екватором у двох точках, які називаються точками *весняного* (Υ) та *осіннього рівнодень* (Ω). Через точку весняного рівнодення Сонце 20 або 21 березня переходить з південної півкулі неба у північну. У цей день тривалість дня дорівнює тривалості ночі.

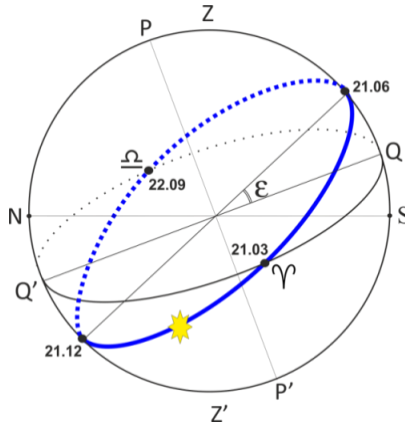


Рис. 1.6. Розміщення екліптики на небесній сфері. Також точками показано положення Сонця на екліптиці у дні рівнодень та сонцестоянь.

Осіньне рівнодення припадає на 22 або 23 вересня. Точки на екліптиці, які віддалені від точок рівнодень на 90° називаються точками *літнього* (20 або 21 червня) та *зимового* (21 або 22 грудня) *сонцестоянь*. У ці дні маємо найдовший день і найкоротшу ніч (літнє сонцестояння) та найдовшу ніч і найкоротший день (зимове сонцестояння).

Під час добового та річного руху Сонця по екліптиці його небесні координати неперервно змінюються. При розв'язуванні більшості задач можна наближено вважати, що екваторіальні координати Сонця (пряме піднесення та схилення) упродовж доби залишаються

незмінними, а змінюються лише зі зміною номера дня у році. При цьому можна використовувати наближений алгоритм розрахунку екваторіальних координат. Для цього спершу побудуємо таблицю опорних точок, які будуть базисними під час розрахунку екваторіальних координат на певну дату (Табл. 1.1).

Наближений розрахунок зміни прямого піднесення Сонця за добу заснований на співвідношенні

$$24^h = 1 \text{ рік} = 365.2422 \text{ діб.}$$

Звідси знаходимо, що зміна прямого піднесення Сонця за добу становить

$$\Delta\alpha_{\odot} = 3.94^m/\text{добу} \cong 4^m/\text{добу.}$$

Дата	Назва положення Сонця на екліптиці	Схилення δ_{\odot}	Пряме піднесення α_{\odot}
21.03	весняне рівнодення	0°00'00''	0 ^h
21.06	літнє сонцестояння	+23°26'26''	6 ^h
22.09	осіннє рівнодення	0°00'00''	12 ^h
21.12	зимове сонцестояння	-23°26'26''	18 ^h

Табл. 1.1. Екваторіальні координати Сонця у дні рівнодень та сонцестоянь.

При розрахунку схилення Сонця слід взяти до уваги, що наближений графік її річної зміни має вигляд синусоїди (Рис. 1.7).

Наближено схилення Сонця можемо розрахувати за формулою

$$\delta_{\odot}(n) = 23.45^{\circ} \sin\left(\frac{360^{\circ} n}{365.2422}\right),$$

де n – номер дня у році від точки весняного рівнодення.

Зауважимо, що через еліптичність земної орбіти, рух Сонця по екліптиці є нерівномірним, тому описана схема є наближеною.

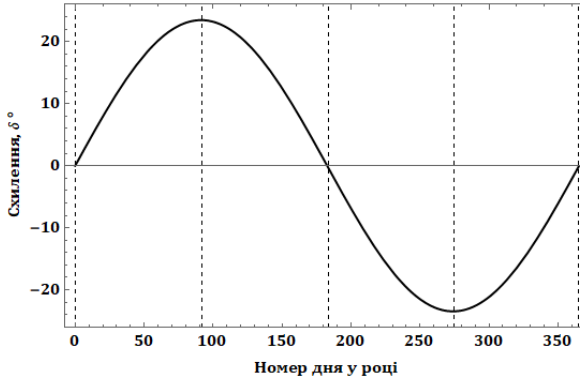


Рис. 1.7. Залежність схилення Сонця від номера дня у році.
Початок відліку днів – точка весняного рівнодення.

Застосуємо описану схему для розрахунку екваторіальних координат Сонця 8 квітня. Найближчою базисною точкою є день весняного рівнодення (21 березня). Кількість діб від дня весняного рівнодення до 8 квітня становить 18.

Таким чином, екваторіальні координати Сонця у цей день

$$\begin{aligned}\alpha_{\odot}(08.04) &= \alpha_{\odot}(21.03) + \Delta\alpha_{\odot} \times 18 \\ &= 0^h + 4^m \times 18 = 72^m = 1^h 12^m.\end{aligned}$$

$$\delta_{\odot}(08.04) = 23.45^{\circ} \sin\left(\frac{360^{\circ} \times 18}{356.2422}\right) = 7.15^{\circ} = 7^{\circ}08'$$

Точні значення екваторіальних координат Сонця 8 квітня, які можна знайти в астрономічному щорічнику, або ж за допомогою Stellarium, мають значення

$$\begin{aligned}\alpha_{\odot}(08.04) &= 1^h 10^m, \\ \delta_{\odot}(08.04) &= 7^{\circ}27'.\end{aligned}$$

Таким чином бачимо, що наближена схема дає добре узгодження з реальними значеннями.

1.4 Вимірювання часу в астрономії

Плин часу може бути вимірний будь-яким регулярно повторюваним (періодичним) процесом. Наше життя пов'язане з періодичними астрономічними явищами природи: з чергуванням дня та ночі, зміною пір року, які пов'язані з обертанням Землі навколо своєї осі та обертанням Землі навколо Сонця відповідно.

Таким чином, на основі астрономічних спостережень встановлюються дві основні одиниці часу: доба та рік.

Проміжок часу, за який Земля здійснює повний оберт навколо своєї осі відносно довільної точки на небі, називається добою. У залежності від вибору точки на небі розрізняють зоряну та істинну сонячну добу.

Зоряна доба – проміжок часу між двома послідовними однойменними кульмінаціями точки весняного рівнодення. Істинна сонячна доба – проміжок часу між двома послідовними однойменними кульмінаціями центра Сонця. Сонячна доба приблизно на 4 хвилини довша за зоряну, оскільки Сонце рухається серед зір у напрямку обертання Землі, і для того, щоб його наздогнати, Землі потрібно зробити серед зірок трохи більше одного оберту.

а) Зоряний час

За початок зоряної доби на даному меридіані береться момент верхньої кульмінації точки весняного рівнодення. Час, що пройшов від моменту верхньої кульмінації точки весняного рівнодення, називається зоряним часом Рис. 1.8.

Враховуючи, що кут, на який повернеться Земля від моменту верхньої кульмінації точки весняного рівнодення до будь-якого іншого моменту часу, дорівнює годинному куту точки весняного рівнодення, одержуємо, що значення зоряного часу

$$s = t_{\gamma}.$$

Оскільки точка весняного рівнодення на небосхилі нічим не помічена, то годинний кут неможливо безпосередньо виміряти. Тому зоряний час визначають шляхом вимірювання годинного кута t будь-якого світила з відомим прямим піднесенням α .

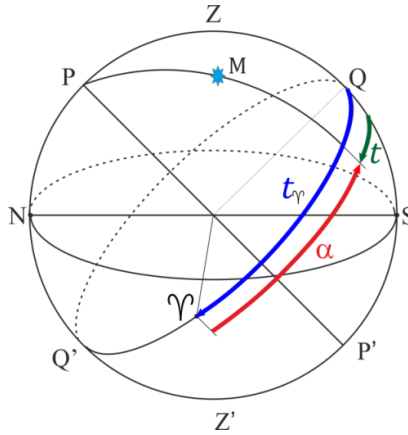


Рис. 1.8. Визначення зоряного часу в астрономії.

Очевидно, що

$$s = t + \alpha.$$

Зокрема найпростіший шлях визначення місцевого зоряного часу є пошук на небосхилі зорі, що перебуває на небесному меридіані у верхній кульмінації. Оскільки у неї в цей момент годинний кут $t = 0^h$, то зоряний час дорівнює прямому піднесенню цієї зорі

$$s = \alpha.$$

В один і той же фізичний момент різниця зоряних часів у двох пунктах земної кулі дорівнює різниці їх географічних довгот, виражених у годинній мірі

$$s_1 - s_2 = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Місцевий зоряний час на нульовому меридіані називається Всесвітнім або гринвіцьким зоряним часом s_0 .

б) *Істинний сонячний час.*

За початок істинної сонячної доби береться момент нижньої кульмінації центра Сонця. Час, що пройшов від моменту нижньої кульмінації центра Сонця, називається істинним сонячним часом

$$T_{\odot} = t_{\odot} + 12^h.$$

Незважаючи на простоту вимірювання часу істинними сонячними добами, ця система лічби часу не придатна для використання у повсякденному житті, через те, що тривалість істинної

сонячної доби змінюється протягом року. Така непостійність пов'язана з наступними двома факторами:

1) Сонце здійснює видимий річний рух не по небесному екватору, а по екліптиці, яка нахилена до екватора під кутом. Як наслідок, зміна прямого піднесення Сонця за одну добу поблизу точок сонцестоянь більша ніж поблизу точок рівнодень, а отже, проміжок часу між послідовними нижніми кульмінаціями Сонця поблизу точок сонцестоянь більший за відповідний проміжок часу поблизу точок рівнодень;

2) рух Сонця по екліптиці є нерівномірним через еліптичність орбіти Землі. Його лінійна швидкість поблизу перигелію більша ніж поблизу афелію.

Вказані фактори призводять, наприклад, до того, що тривалість найдовшої доби (22 грудня) більша за тривалість найкоротшої доби (16 вересня) на 51 секунду.

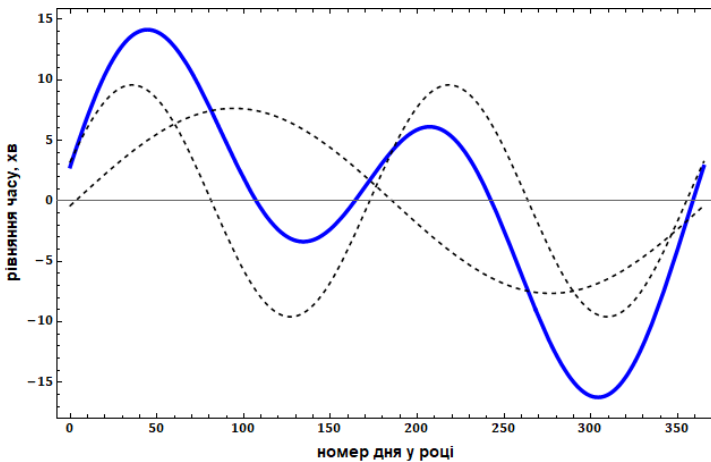


Рис. 1.9. Рівняння часу. Пунктирними лініями відокремлені ефекти пов'язані з еліптичністю орбіти Землі та нахилом її осі обертання до екліптики. Номер дня відраховується від 1 січня.

Інтегральний ефект зміщення сонячного часу у довільний день року зображено на Рис. 1.9.

в) *Середній сонячний час.*

Аби уникнути незручностей, пов'язаних з непостійністю істинної сонячної доби, запроваджується поняття середнього екваторіального Сонця – уявної точки, що рівномірно рухається по екватору й проходить точку весняного рівнодення одночасно зі справжнім Сонцем.

Проміжок часу між двома послідовними однойменними кульмінаціями середнього екваторіального Сонця називається *середньою сонячною добою*.

Час, що пройшов від моменту нижньої кульмінації середнього екваторіального Сонця, називається *середнім сонячним часом*.

$$T_m = t_m + 12^h.$$

Зв'язок між істинним сонячним часом та середнім сонячним часом виражається *рівнянням часу* η

$$T_m = T_{\odot} + \eta.$$

Значення η на будь-яку календарну дату наведено на Рис. 1.9, його також можна знайти в астрономічному щорічнику.

Наприклад, 12 лютого рівняння часу $\eta = +14^m 17^s$ (максимальне позитивне значення); 3 листопада $\eta = -16^m 24^s$ (максимальне негативне значення).

г) *Зв'язок сонячного та зоряного часу.*

При плануванні спостережень за небесними світилами виникає необхідність переводити зоряний час у сонячний. Наприклад ви плануєте спостереження планети у момент, коли вона найвище піднімається над горизонтом, тобто у момент верхньої кульмінації. У цей момент зоряний час дорівнює прямому піднесенню планети, адже годинний кут світил у верхній кульмінації дорівнює нулю. Для знаходження відповідного сонячного часу, який показує ваш годинник, потрібно знати дату спостереження. Алгоритм переведення заснований на використанні визначення зоряного часу

$$s = t + \alpha = t_{\odot} + \alpha_{\odot}.$$

Знаючи момент зоряного часу s , із цієї формули знаходимо годинний кут Сонця у момент спостереження

$$t_{\odot} = s - \alpha_{\odot}.$$

Тоді істинний сонячний час, що відповідає моменту спостережень

$$T_{\odot} = t_{\odot} + 12^h = s - \alpha_{\odot} + 12^h.$$

У цій формулі пряме піднесення Сонця для відповідної календарної дати α_{\odot} береться з ефемерид, або розраховується за наближеною схемою, що описана у пункті 1.3.

д) Поясний час.

З метою узгодження місцевого часу для людей, які живуть в різних куточках нашої планети (тобто на різній географічній довготі від Гринвіча) у 1884 році, за домовленістю більшості країн світу, була прийнята поясна система лічби середнього часу. За домовленістю, земну кулю, умовно, поділено на 24 годинних пояси ($-12 \leq N \leq +12$) шириною 15° по довготі починаючи з нульового меридіана. Через середину кожного годинного поясу проходить центральний меридіан поясу (Рис. 1.10).

Місцевий час центрального меридіана поясу N називається поясним часом T_N . Приймається, що в межах одного поясу час однаковий і дорівнює поясному.

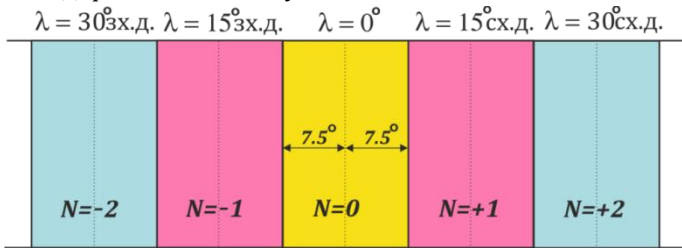


Рис. 1.10. Схема годинних поясів.

За нульовий центральний меридіан прийняли гринвіцький меридіан. Нульовий годинний пояс простягається по довготі на 7.5° на захід і на стільки ж на схід від гринвіцького меридіана. Україна розташована у другому годинному поясі ($N = +2$).

Поясний час пов'язаний із гринвіцьким часом наступним співвідношенням

$$T_N = T_0 + N^h.$$

е) Тропічний рік.

Для вимірювання великих проміжків часу використовується тропічний рік.

Проміжок часу між двома послідовними моментами проходження центра Сонця через точку весняного рівнодення

називається тропічним роком. Він містить 365.2422 середніх сонячних діб, або 365 діб 5 год 48 хв 46 с.

Оскільки тропічний рік містить не ціле число діб, то сонячний календар побудований з використанням високосних років. Відповідно до григоріанського календаря за чотири роки маємо три «звичайних» роки по 365 діб і один «високосний» – 366 діб. Дізнатися чи даний рік є високосним можна шляхом ділення року на чотири. Якщо ділення відбувається без остачі, то даний рік є високосним.

У багатьох астрономічних розрахунках та дослідженнях науковці користуються *юліанським датуванням* (JD)

Юліанська дата є числом середніх сонячних діб від полудня 1 січня 4713 року до н. е. за юліанським календарем. Наприклад, номер юліанського дня 1 січня 2000 року о 12:00 (початок епохи J2000) дорівнює JD 2 451 545. Номер дня, коли автори писали дані рядки становив JD 2 458 879.

е) Тривалість сонячної доби на планеті.

Розглянемо питання про тривалість сонячної доби на планеті та її зв'язок із періодом обертання планети навколо своєї осі T_{oc} та орбітальним періодом обертання планети навколо зорі T_{orb} (для земної сонячної доби – Землі навколо Сонця). Геометрія до визначення сонячної доби представлена на Рис. 1.11.

Розглянемо випадок, коли обертання планети навколо осі та орбітальний рух відбуваються в одному напрямі, що є характерним для більшості планет. Нехай положення планети «1» відповідає початку сонячної доби на планеті. За час, що дорівнює осьовому періоду обертання, планета переміститься на орбіті у положення «2». Як було означено вище, сонячна доба – це проміжок часу між двома послідовними нижніми кульмінаціями Сонця. Ми помічаємо, що у положенні «2» Земля ще не повернута до Сонця тією самою стороною, що й у положенні «1», тобто повторна нижня кульмінація ще не відбулася. Для цього Землі необхідно повернутися ще на додатковий кут (положення «3»), який на Рис. 1.11 позначено через ϕ . Знайдемо проміжок часу між положеннями «1» та «3», який і буде дорівнювати тривалості S сонячної доби на планеті.

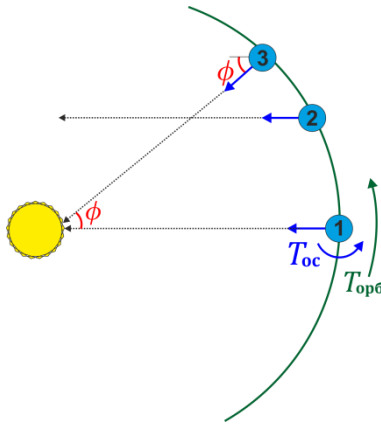


Рис. 1.11. Геометрія утворення сонячної доби.

За час S планета у своєму орбітальному русі пройде дугу, що відповідає куту

$$\phi = \frac{360^\circ}{T_{\text{орб}}} S.$$

За цей самий час планета повернеться навколо осі на кут

$$360^\circ + \phi = \frac{360^\circ}{T_{\text{ос}}} S.$$

Виключаючи з цих співвідношень кут ϕ , одержуємо формулу для визначення тривалості сонячної доби на планеті

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{ос}}} - \frac{1}{T_{\text{орб}}} \quad \text{або} \quad S = \frac{T_{\text{орб}} T_{\text{ос}}}{T_{\text{орб}} - T_{\text{ос}}}.$$

У випадку, коли осьове обертання відбувається у протилежну сторону по відношенню до орбітального руху, яке називають ретроградним обертанням (наприклад у випадку Венери та Урану), то положення планети «3» наступає раніше ніж положення «2» на той самий кут ϕ , тобто має місце співвідношення

$$360^\circ - \phi = \frac{360^\circ}{T_{\text{ос}}} S.$$

Звідси

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{ос}}} + \frac{1}{T_{\text{орб}}} \quad \text{або} \quad S = \frac{T_{\text{орб}} T_{\text{ос}}}{T_{\text{орб}} + T_{\text{ос}}}.$$

1.5 Розміри та відстані в астрономії

Визначення відстаней від Землі до тіл Сонячної системи засноване на вимірюванні їх паралаксів – зміщень положень тіл відносно певного фону при спостереженнях із різних точок. Геометрія утворення паралаксу та результати спостережень одного і того ж світила з різних точок земної поверхні зображені на Рис. 1.12.

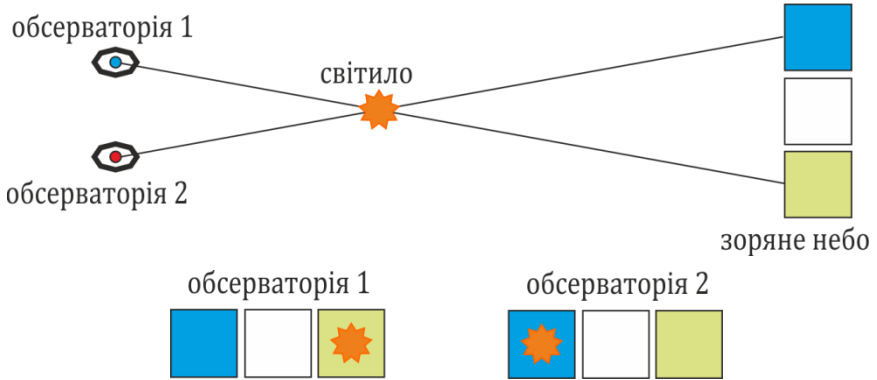


Рис. 1.12. Геометрія утворення паралаксу та результати спостережень одного і того ж світила з різних точок земної поверхні.

Добовим паралаксом світила p називається кут, під яким зі світила видно радіус Землі. Паралакс змінюється зі зміною висоти світила над горизонтом. Коли світило перебуває в зеніті, його паралакс дорівнює нулеві. Найбільшого значення цей кут досягає, коли світило перебуває на горизонті (Рис. 1.13).

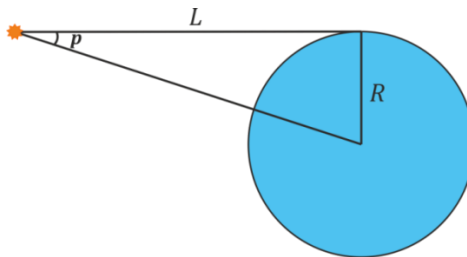


Рис. 1.13. Горизонтальний добовий паралакс світила.

Горизонтальний добовий паралакс Місяця досягає значення $57'$. У планет сонячної системи він менший $1'$.

Якщо відомий горизонтальний паралакс світила, то можна обчислити відстань від Землі до світила L . Із геометрії Рис. 1.13 одержуємо

$$\operatorname{tg} p = \frac{R}{L}.$$

Звідси

$$L = \frac{R}{\operatorname{tg} p} = \frac{R}{p}.$$

При виведенні останнього співвідношення ми скористалися властивістю функції тангенс при малих значеннях аргументу

$$\operatorname{tg} p \cong p.$$

Якщо паралакс вимірюється у секундах дуги, то відстань до світила обчислюється за формулою

$$L = \frac{206\,265\,R}{p''}.$$

Нагадаємо, що екваторіальний радіус Землі становить $R = 6378$ км.

Для встановлення основної одиниці вимірювання відстаней у межах сонячної системи – відстані від Землі до Сонця, яка називається *астрономічною одиницею* (а.о.), використовуємо значення добового паралаксу Сонця $p = 8.7941''$. Таким чином одержуємо значення

$$1 \text{ а. о.} = 149\,597\,870 \text{ км.}$$

Визначення відстані до зір та інших небесних тіл, які знаходяться за межами сонячної системи, засноване на вимірюванні річних паралаксів цих світил.

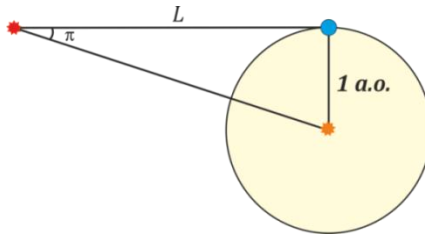


Рис. 1.14. Визначення річного паралаксу світила.

Річним паралаксом світила S називається кут π , під яким зі світила було б видно середній радіус земної орбіти (1 а.о.), за умови, що напрямок на зірку перпендикулярний до цього радіусу (Рис. 1.14).

Відстань від Землі до світила L за межами сонячної системи

$$L = \frac{1 \text{ а.о.}}{\text{tg } \pi} = \frac{1 \text{ а.о.}}{\pi} = \frac{206\,265 \text{ а.о.}}{\pi''}.$$

Якщо світило має річний паралакс $1''$, то його відстань до Землі становить 206 265 а.о. Таку відстань в астрономії приймають за один парсек (пк).

$$1 \text{ pk} = 206\,265 \text{ а.о.}$$

Ще однією поширеною одиницею вимірювання відстаней в астрономії є світловий рік (св. рік), який дорівнює відстані, яку проходить світло у вакуумі за один рік

$$1 \text{ св. р.} = 9.46 \times 10^{12} \text{ км} = 63\,240 \text{ а.о.}$$

$$1 \text{ pk} = 3.26 \text{ св. років}$$

Перейдемо до питання про лінійні та кутові розміри небесних світил.

Кутовим діаметром світила називається кут d , під яким з Землі спостерігається його диск (Рис. 1.15).

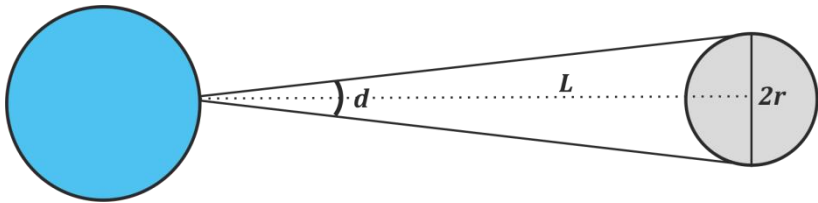


Рис. 1.15. Геометрія визначення кутового діаметра світила.

Кутовий діаметр Сонця через еліптичність земної орбіти змінюється у межах від $31'27''$ до $32'32''$. Кутовий діаметр Місяця

змінюється у межах від $29'20''$ до $34'06''$. Така близькість кутових розмірів пояснює різноманіття сонячних затемнень: часткові, кільцеподібні, повні.

Лінійний радіус світила r пов'язаний із його кутовим діаметром d та відстанню L співвідношенням

$$r = L \operatorname{tg}(d/2).$$

Зауважимо, що при обчисленні тангенсів малих кутів ($d \rightarrow 0$) можна скористатися наближеною схемою:

$$\operatorname{tg} d \cong d(\text{рад}) = \frac{d''}{206\,265}.$$

Схема наближеної оцінки кутових розмірів небесних світил за допомогою руки зображена на Рис. 1.16.

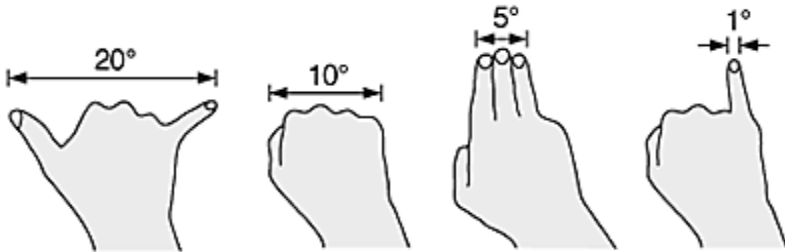


Рис. 1.16. Оцінка кутових розмірів за допомогою руки.

Задачі до розділу 1

- 1.1. На якій широті у день літнього сонцестояння висота Сонця в момент нижньої кульмінації дорівнює -6° ?
- 1.2. Мандрівник нахилився над криницею та побачив у воді відображення Капелли ($\alpha = 5^h 13^m$, $\delta = +45^\circ 47'$). Визначити на якій географічній широті знаходиться мандрівник та зоряний час у цей момент.
- 1.3. Упродовж ночі двічі спостерігалася кульмінація певної зорі: у верхній кульмінації її висота дорівнювала 80° , а у нижній становила 60° . Визначити широту місця спостереження та пору року, коли воно проводилося. Зробити схематичний рисунок.
- 1.4. У результаті спостережень за рухом Юпітера впродовж доби було виявлено, що планета перебувала на висоті 45° у верхній кульмінації на південь від зеніту і на висоті 2° у нижній кульмінації. Оцініть час, від моменту даного спостереження, через який Юпітер зійде над горизонтом у точці сходу. Нахилом орбіти Юпітера до екліптики можна знехтувати. Період обертання Юпітера навколо Сонця становить 11.86 років.
- 1.5. Висота Сонця над горизонтом в істинний полудень 21 грудня дорівнює $15^\circ 44'$. Визначте географічну широту місця спостереження. Зробити схематичне креслення умови задачі на моделі небесної сфери.
- 1.6. Визначте максимальну висоту, на яку може піднятися Місяць над горизонтом у Луцьку (широта $\varphi = 50^\circ 44'$). Орбіта Місяця нахилена до площини екліптики ($\varepsilon = 23^\circ 26'$) під кутом $5^\circ 09'$. Виконайте схематичне креслення умови задачі на моделі небесної сфери.
- 1.7. У день проведення олімпіади (11 січня) екваторіальні координати планети Марс несуттєво змінюються поблизу значень: $\delta = +2^\circ 30'$, $\alpha = 0^h 25^m$. Оцінити максимальну висоту

над горизонтом, на якій може спостерігатися планета у цей день на території Волині. Середня широта Волині $\varphi = 50^\circ 30'$. У якій частині небесної сфери можна спостерігати планету на максимальній висоті? Враховуючи, що пряме піднесення Сонця 11 січня становить $\alpha_{\odot} = 19^h 30^m$, оцініть місцевий сонячний час, коли Марс перебуватиме на максимальній висоті.

- 1.8.** Деякого дня у році на території Волині (середня широта $50^\circ 30'$) мінімальна довжина сонячної тіні від стовпа висотою 1.0 м становить 3.1 м. Розрахуйте схилення Сонця у цей день та оцініть відповідну календарну дату. При розрахунках вважайте Сонце точковим об'єктом, а явищем атмосферної рефракції знехтуйте.
- 1.9.** Під час навколосвітньої мандрівки ви здійснюєте політ на літакові із острова Ізабелла (Атлантичний океан, Галапагоські острови, широта острова $\varphi = 0$, західна довгота $\lambda = 91^\circ 20'$, годинний пояс $N = -6^h$) в Кенію помилуватися чудовими краєвидами озера Вікторія. Ваш літак має здійснити посадку в Найробі, що знаходиться на екваторі (східна довгота $\lambda = 36^\circ 40'$, $N = 3^h$). Оцініть, о котрій годині (за годинником аеропорту прибуття) здійснить посадку ваш літак, якщо час відправлення (за годинником аеропорту на острові Ізабелла) становив $9^h 00^m$. Середня швидкість літака $v = 1000$ км/год. При розрахунку вважати, що літак рухається за найкоротшим шляхом (по великому колу). Радіус Землі прийняти рівним 6378 км.
- 1.10.** Зоря Вега знаходиться у верхній кульмінації о $20^h 00^m 00^s$ за сонячним часом. О котрій годині відбудеться її нижня кульмінація через 8 днів?
- 1.11.** У південній Америці (Чилі) розташована унікальна обсерваторія «Ла-Сілья» (географічні координати: 29.25° пд. ш. та 70.73° зх. д.), яка є складовою частиною Європейської південної обсерваторії. 25 лютого 2017 року о 22:30 за поясним часом обсерваторії заплановано початок онлайн-трансляції

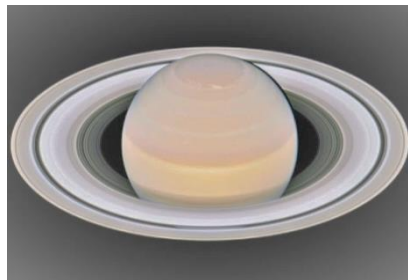
- рідкісного астрономічного явища: поглинання чорною дірою газової хмарини. Розрахуйте дату та час початку онлайн-трансляції за київським часом.
- 1.12.** Вкажіть та обґрунтуйте розміщення спостерігача на Землі, для якого тривалість сходу Сонця буде мінімальною. Розрахуйте відповідну тривалість сходу Сонця. Видимий кутовий радіус Сонця дорівнює $16'$.
- 1.13.** У 2020 році у м.Токіо (Японія) заплановано провести XXXII літні Олімпійські ігри. Церемонія відкриття ігор має розпочатися 24 липня о 19:00 за поясным часом Токіо (географічні координати: $35^{\circ}41'$ пн. ш., $139^{\circ}40'$ сх. д.). Розрахуйте дату та час початку церемонії за київським часом.
- 1.14.** Осьовий та орбітальний періоди обертання Землі становлять 23^h56^m та 8765^h48^m відповідно. Розрахуйте тривалість сонячної доби на Землі. Як би змінилась тривалість доби, якщо б обертання Землі було ретроградним?
- 1.15.** Висота найбільшого вулкану на Марсі 27 км. З якої максимальної відстані його може розгледіти космонавт, якщо цю гору видно на краєві диска планети? Роздільна здатність людського ока складає $1'$.
- 1.16.** На краю диска Сонця із земної обсерваторії був зафіксований протуберанець, кутовий розмір якого дорівнює $1'$. Оцініть лінійний розмір протуберанця? Відстань від Землі до Сонця становить 149 600 000 км.
- 1.17.** Знайдіть відношення довжини сонячної тіні, яку відкидає Нептун до довжини тіні від Землі у момент, коли планети перебувають на середній відстані від Сонця. Середня відстань Нептуна та Землі відповідно дорівнюють 30 а.о та 1 а.о. Діаметр Нептуна у 3.88 разів більший земного.

- 1.18.** На фото праворуч (автор Кріс Томас) зображена «Астрономічна картинка дня», яка фігурувала на сайті космічного агентства NASA (<https://apod.nasa.gov>) 29 вересня 2010 р. Беручи до уваги, що фотографія зроблена з поверхні Землі, а кутові розміри Місяця та розмах крил літака дорівнюють $30'$ та $45'$ м відповідно, оцініть на якій висоті над поверхнею Землі летить літак.



- 1.19.** На фото праворуч наведено зображення статуї «Христос-Спаситель» (Ріо-де-Жанейро, Бразилія) на фоні Місяця у повні. Статуя є 39.6 метрів заввишки та має розмах рук 28 метрів. Враховуючи, що середня відстань Місяця від Землі складає $384\,400$ км, а лінійний радіус Місяця становить 1737 км, оцініть відстань, з якої було зроблено знімок (відстань від статуї до фотографа).

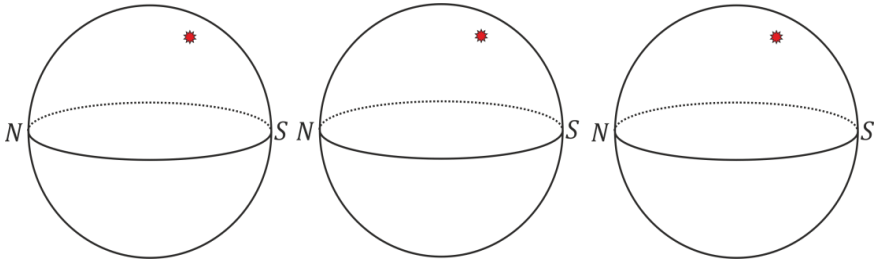
- 1.20.** На знімку праворуч наведено зображення планети Сатурн одержане космічним телескопом Габбл у червні 2018 року. У цей момент планета знаходилася на відстані 1.6 млрд км від поверхні Землі і мала кутовий діаметр $15''$. Використовуючи дане зображення оцініть радіус зовнішнього кільця Сатурна, а також відстань від центра планети до щілини Кассіні. Відповідь запишіть у кілометрах.



- 1.21. Використовуючи таблицю схилень Сонця, визначте дату початку і тривалість полярного дня на острові Діксон, географічна широта якого 73° .
- 1.22. Фотокамера, яка нерухомо «націлена» на південну частину неба, щоденно впродовж року робить коротку експозицію о 12:00 середнього сонячного часу на одну і ту ж фотопластинку. Визначити і зобразити траєкторію, яку опише центр диска Сонця на фотопластинці. Позначити на рисунку положення Сонця в дні рівнодень та сонцестоянь. Оцінити поперечні розміри траєкторії.
- 1.23. Визначити, які із запропонованих зір відносяться до таких, що 1) не заходять; 2) сходять і заходять; 3) не сходять для спостерігача у Луцьку ($\varphi = 50^\circ 44' 52''$).

Зоря	Пряме піднесення, α	Схилення, δ
Канопус	$06^h 23^m 57^s$	$-52^\circ 41' 44''$
Проціон	$07^h 39^m 19^s$	$+05^\circ 13' 20''$
Арктур	$14^h 15^m 40^s$	$+19^\circ 10' 56''$
Фомальгаут	$22^h 57^m 29^s$	$-29^\circ 37' 20''$
Альтаір	$19^h 50^m 47^s$	$+08^\circ 52' 06''$
Капелла	$05^h 16^m 41^s$	$+45^\circ 59' 53''$
Поллукс	$07^h 45^m 19^s$	$+28^\circ 01' 35''$

- 1.24. Для трьох спостерігачів, які знаходяться: А) у місцевості з широтою $\varphi = 45^\circ$; Б) на екваторі; В) на Північному полюсі, зобразити на моделі небесної сфери наступні елементи: полюс світу (P); вісь світу (PP'); небесний екватор (QQ'); добову паралель світила; позначити точки, які відповідають верхній (В) та нижній (Н) кульмінаціям світила.



- 1.25.** На Рис. 1.17 зображено фрагмент зоряного неба над Луцьком 15 січня 2015 року на момент часу 01:37. Позначені на рисунку зорі Капелла та Арктур мають наступні екваторіальні координати: $(\alpha_1 = 5^h 17^m, \delta_1 = +46^\circ)$ та $(\alpha_1 = 14^h 16^m, \delta_1 = +19^\circ)$ відповідно. Уважно дослідіть це зображення і виконайте наступні завдання:

А) Зобразіть на рисункові сузір'я Кассіопея, Волопас, Лев, Мала Ведмедиця.

Б) Враховуючи, що планета Юпітер у цей момент має пряме сходження $\alpha_1 = 9^h 32^m$, розрахуйте та позначте його положення на рисунку.

В) Обчисліть схилення Юпітера у розглянутий момент часу.

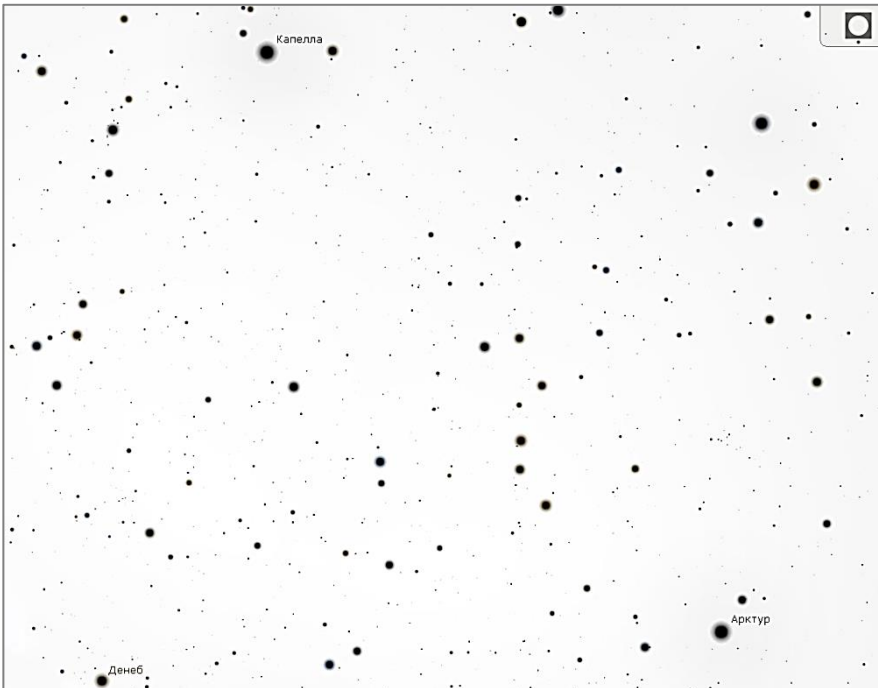


Рис. 1.17

1.26. На Рис. 1.18 наведено фрагмент зоряного неба над Луцьком (широта $\varphi = 50^\circ$) у день проведення олімпіади (12 січня 2018 року), а також вказано сторони горизонту. Виконайте наступні завдання:

- А) Позначте на даному знімку наступні сузір'я: Близнюки, Велика Ведмедиця, Великий Пес, Візничий, Дракон, Кассіопея, Мала Ведмедиця, Лев, Цефей.
- Б) Позначте на даному знімку небесний меридіан, полюс світу та зеніт.
- В) Визначте, які сузір'я у даний момент перебувають у кульмінації.
- Г) Оцініть зоряний час, що відповідає моменту проведення спостережень.

1.27. На Рис. 1.19 наведено фрагмент зоряного неба над Луцьком у день проведення олімпіади (11 січня 2019 року). Уважно вивчіть цей фрагмент та за допомогою карти зоряного неба і лінійки виконайте наступні завдання:

А) Позначте на цьому знімку наступні сузір'я: Лебідь, Ліра, Близнюки, Велика Ведмедиця, Оріон, Візничий, Дракон, Кассіопея, Мала Ведмедиця, Персей.

Б) Позначте на даному знімку Полярну зірку.

В) Визначте екваторіальні координати (пряме піднесення та схилення) для наступних зір: Вега, Капелла, Рігель, Сиріус.

Г) У день проведення олімпіади екваторіальні координати планети Марс несуттєво змінюються поблизу значень: $\delta = +2^{\circ}30'$, $\alpha = 0^h 25^m$. Розрахуйте та позначте на фрагменті зоряного неба положення Марса.

Д) На даному фрагменті зоряного неба також знаходиться зображення Місяця. Відомо, що він розміщений поруч із сузір'ям Водолія. Позначте на фрагменті зоряного неба положення Місяця.



Рис. 1.18



Рис. 1.19

1.28. На Рис. 1.20 наведено фрагмент зоряного неба над Луцьком у день проведення олімпіади (10 січня 2020 року). На даному знімку також зображено небесний екватор (Екватор) та небесний меридіан (Меридіан). Уважно вивчіть цей знімок та за допомогою карти зоряного неба і лінійки виконайте наступні завдання:

А) Позначте на даному знімку наступні сузір'я: Велика Ведмедиця, Пегас, Цефей, Кассіопея, Лев.

Б) Позначте на даному знімку Полярну зірку.

Визначте екваторіальні координати (пряме піднесення та схилення) для наступних зір: Проціон, Капелла, Бетельгейзе, Сиріус, Рігель.

В) Вкажіть назви сузір'їв, які перебувають в кульмінації.

Г) Зобразіть на фрагменті зоряного неба наступні астеризми:

1) Зимовий трикутник (вершини: α Великого Пса, α Малого Пса, α Оріона).

2) Зимове коло (вершини: α Великого Пса, α Малого Пса, β Близнюків, α Близнюків, β Візничого, α Візничого, α Тельця, β Оріона).

Д) На даному фрагменті зоряного неба також знаходиться зображення Місяця. Екваторіальні координати Місяця у момент, коли було зроблено знімок зоряного неба становлять $\alpha = 7^h 30^m$, $\delta = 22^\circ$.

1) Вкажіть назву сузір'я у якому перебуває Місяць.

2) Оцініть мінімальний проміжок часу від моменту, коли було зроблено знімок зоряного неба, після якого Місяць буде перебувати на максимальній висоті над горизонтом.

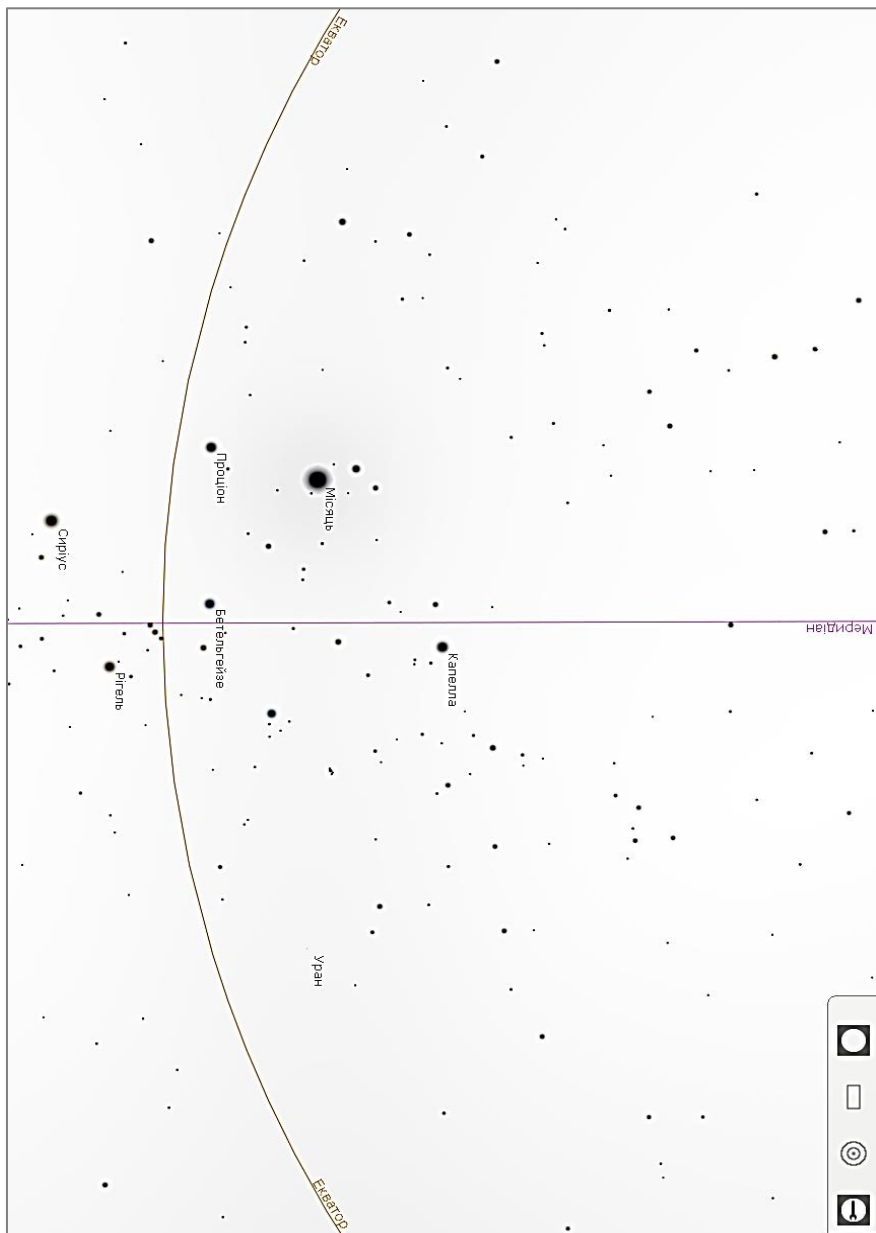


Рис. 1.20

Розв'язки задач до розділу 1

- 1.1. У момент нижньої кульмінації висота світила $h_{\text{Н}}$ пов'язана із його схиленням δ та широтою спостерігача співвідношенням

$$h_{\text{Н}} = \varphi + \delta - 90^\circ.$$

У день літнього сонцестояння схилення Сонця становить $\delta = 23^\circ 26'$. Тоді, якщо висота Сонця в нижній кульмінації дорівнює $h_{\text{Н}} = -6^\circ$, то географічна широта спостерігача

$$\begin{aligned}\varphi &= 90^\circ - h_{\text{Н}} - \delta \\ &= 90^\circ + 6^\circ - 23^\circ 26' = 66^\circ 34'.\end{aligned}$$

Зауважимо, що якщо значення висоти Сонця в нижній кульмінації $-6^\circ \leq h_{\text{Н}} \leq 0^\circ$, то у даній місцевості спостерігаються білі ночі.

- 1.2. Якщо мандрівник нахилився над криницею та побачив у воді відображення певної зорі, то ця зоря перебуває у зеніті, тобто висота світила у верхній кульмінації $h_{\text{В}} = 90^\circ$. У момент верхньої кульмінації висота світила $h_{\text{В}}$ пов'язана із його схиленням δ та широтою спостерігача співвідношенням

$$h_{\text{В}} = 90^\circ - \varphi + \delta.$$

Таким чином, географічна широта мандрівника

$$\varphi = 90^\circ - h_{\text{В}} + \delta = \delta = +45^\circ 47'.$$

Місцевий зоряний час

$$s = \alpha + t.$$

Оскільки зоря перебуває в зеніті, то вона також знаходиться на небесному меридіані у верхній кульмінації. Таким чином її годинний кут $t = 0^{\text{h}}$. Отже, зоряний час дорівнює прямому піднесенню Капелли, тобто

$$s = \alpha = 5^{\text{h}} 13^{\text{m}}.$$

- 1.3. У момент нижньої кульмінації висота світила h_N пов'язана із його схиленням δ та широтою спостерігача співвідношенням

$$h_N = \varphi + \delta - 90^\circ.$$

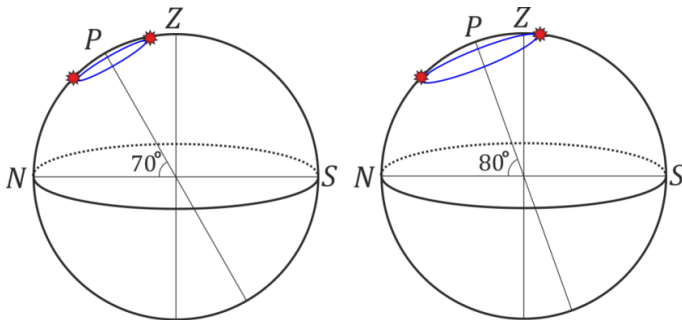
У момент верхньої кульмінації висота світила h_B пов'язана із його схиленням δ та широтою спостерігача співвідношеннями

$$\begin{aligned} h_B &= 90^\circ - \varphi + \delta & (\text{кульмінація до півдня}), \\ h_B &= 90^\circ + \varphi - \delta & (\text{кульмінація до півночі}). \end{aligned}$$

Виключимо із цих співвідношень невідоме схилення світила. Таким чином маємо два розв'язки для широти:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{h_B + h_N}{2}, & \varphi_2 &= \frac{180^\circ - h_B + h_N}{2}, \\ \varphi_1 &= \frac{80^\circ + 60^\circ}{2} = 70^\circ, & \varphi_2 &= \frac{180^\circ - 80^\circ + 60^\circ}{2} = 80^\circ. \end{aligned}$$

Схематичне зображення одержаних розв'язків на моделі небесної сфери має вигляд



- 1.4. Оскільки нахилом орбіти Юпітера до екліптики можна знехтувати, то вважаємо, що планета рухається по екліптиці. Небесні світила сходять у точці сходу, якщо вони перебувають на небесному екваторі. Знайдемо положення Юпітера на екліптиці. Для цього розрахуємо схилення Юпітера на момент спостережень. Використаємо співвідношення між висотою світила та його схиленням

$$h_H = \varphi + \delta - 90^\circ, \quad h_B = 90^\circ - \varphi + \delta.$$

Звідси

$$\delta = \frac{h_B + h_H}{2} = \frac{45^\circ + 2^\circ}{2} = 23,5^\circ = 23^\circ 30'.$$

Таким чином Юпітер перебуває у точці літнього сонцестояння. Час руху до небесного екватора становить чверть періоду обертання навколо Сонця. Отже, шуканий час

$$t = \frac{T}{4} = \frac{11,86 \text{ років}}{4} = 2,965 \text{ року} = 1083 \text{ доби.}$$

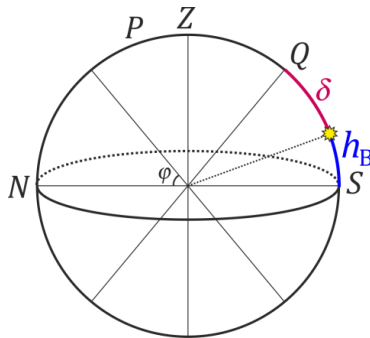
- 1.5. В істинний полудень Сонце перебуває у верхній кульмінації. 21 грудня його схилення становить $\delta = -23^\circ 26'$. Використаємо співвідношення між висотою світила та його схиленням

$$h_B = 90^\circ - \varphi + \delta.$$

Звідси

$$\varphi = 90^\circ + \delta - h_B = 90^\circ - 23^\circ 26' - 15^\circ 44' = 50^\circ 50'.$$

На даній широті знаходиться території Волині. Схематичне креслення умови задачі на моделі небесної сфери має наступний вигляд.



- 1.6. Максимальна висота, на яку може піднятися світило над горизонтом є його висотою у верхній кульмінації, яка, у випадку кульмінації на південь від зеніту, визначається співвідношенням

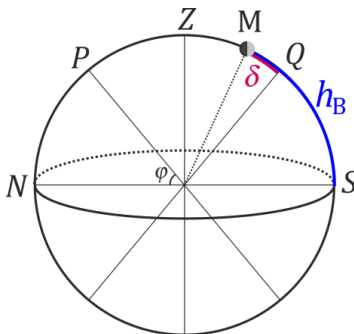
$$h_B = 90^\circ - \varphi + \delta.$$

Максимальне схилення Місяця

$$\delta_{\max} = 23^{\circ}26' + 5^{\circ}09' = 28^{\circ}35'.$$

Отже, максимальна висота, на яку може піднятися Місяць над горизонтом у Луцьку

$$h_{\text{в}} = 90^{\circ} - 50^{\circ}44' + 28^{\circ}35' = 67^{\circ}51'.$$



- 1.7. Планета перебуває на максимальній висоті у момент верхньої кульмінації

$$h_{\max} = 90^{\circ} - \varphi + \delta = 90^{\circ} - 50^{\circ}30' + 2^{\circ}30' = 42^{\circ}.$$

У момент верхньої кульмінації світило перебуває на півдні.

Знайдемо зоряний час верхньої кульмінації Марса

$$s = \alpha + t = 0^{\text{h}}25^{\text{m}} + 0^{\text{h}} = 0^{\text{h}}25^{\text{m}}.$$

З іншого боку

$$s = \alpha_{\odot} + t_{\odot} = 19^{\text{h}}30^{\text{m}} + t_{\odot} = 0^{\text{h}}25^{\text{m}}.$$

Звідси

$$t_{\odot} = 0^{\text{h}}25^{\text{m}} - 19^{\text{h}}30^{\text{m}} = -19^{\text{h}}05^{\text{m}} = 04^{\text{h}}55^{\text{m}}.$$

Таким чином, місцевий сонячний час верхньої кульмінації Марса

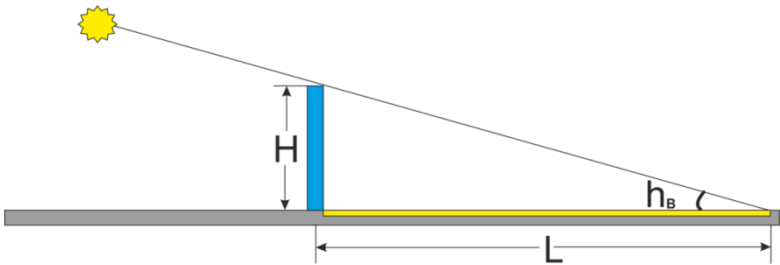
$$T_{\odot} = t_{\odot} + 12^{\text{h}} = 04^{\text{h}}55^{\text{m}} + 12^{\text{h}} = 16^{\text{h}}55^{\text{m}}.$$

Отже, о 5 годині вечора Марс перебуватиме у південній частині зоряного неба на висоті 42° .

- 1.8. Мінімальна довжина сонячної тіні від стовпа буде відкидатися у справжній полудень, коли Сонце перебуватиме у верхній кульмінації. Висоту Сонця у верхній кульмінації знаходимо з прямокутного трикутника

$$\tan h_B = \frac{H}{L} = \frac{1.0}{3.1} = 0.32,$$

$$h_B = 17.9^\circ.$$



Для знаходження схилення Сонця у цей момент скористаємося зв'язком між екваторіальними та горизонтальними координатами у момент верхньої кульмінації для північної півкулі

$$h_B = 90^\circ - \varphi + \delta_\odot.$$

Звідси

$$\delta_\odot = h_B - 90^\circ + \varphi = 17.9^\circ - 90^\circ + 50.5^\circ = -21.6^\circ.$$

Наближено схилення Сонця можемо розрахувати за формулою

$$\delta_\odot(n) = 23.45^\circ \sin\left(\frac{360^\circ n}{356.2422}\right).$$

Тоді знайдемо номер дня від 21 березня

$$-21.6^\circ = 23.45^\circ \sin\left(\frac{360^\circ n}{356.2422}\right),$$

$$\frac{360^\circ n}{356.2422} = (-1)^k \arcsin(-0.9211) + \pi k.$$

Знайдемо два найближчі номери дня

$$\frac{360^\circ n_1}{356,2422} = 247^\circ, \quad n_1 = 251,$$

$$\frac{360^\circ n_2}{356,2422} = 293^\circ, \quad n_2 = 298.$$

Відповідні дати: 27 листопада 2019 року та 13 січня 2020 року.

1.9. Розрахуємо спочатку час польоту літака

$$t = \frac{l}{v},$$

Тут l – відстань, яку пролетів літак. Якщо літак летить на невеликій висоті над поверхнею Землі, то

$$l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \times \Delta\lambda,$$

$$l = \frac{2\pi \times 6378 \text{ км}}{360^\circ} \times (36^\circ 40' - (-91^\circ 20')) = 14240 \text{ км.}$$

Тоді час польоту

$$t = \frac{14240 \text{ км}}{1000 \text{ км/год}} = 14,24 \text{ год} = 14 \text{ год } 15 \text{ хв.}$$

Різниця у часі двох аеропортів становить

$$N = 3 - (-6) = 9 \text{ год.}$$

Таким чином, відправлення літака із острова Ізабелла за поясним часом Найробі відбулося о

$$09:00 + 9 \text{ год} = 18:00.$$

Враховуючи час польоту літака одержуємо, що посадка має відбутися о

$$18:00 + 14 \text{ год } 15 \text{ хв} = 32 \text{ год } 15 \text{ хв} = 08:15.$$

Таким чином, за годинником Найробі, приземлення літака відбудеться о 08:15 наступної доби.

- 1.10. У момент верхньої кульмінації зоряний час дорівнює прямому піднесенню зорі

$$s = \alpha,$$

Відповідне значення сонячного часу одержимо зі співвідношення:

$$s = \alpha_{\odot} + t_{\odot} = \alpha.$$

Тоді сонячний час верхньої кульмінації

$$T_{\odot} = t_{\odot} + 12^h = \alpha - \alpha_{\odot} + 12^h = 20^h 00^m.$$

Через 8 днів пряме піднесення Сонця зміниться на величину

$$\Delta\alpha_{\odot} = \frac{4^m}{\text{добу}} \times 8 \text{ діб} = 32^m.$$

Тоді верхня кульмінація Веги через 8 діб відбудеться о

$$\begin{aligned} T'_{\odot} &= t'_{\odot} + 12^h = \alpha - \alpha'_{\odot} + 12^h = \alpha - (\alpha_{\odot} + 32^m) + 12^h \\ &= 19^h 28^m. \end{aligned}$$

Нижня кульмінація Веги через 8 днів відбудеться на 12 годин раніше верхньої, тобто о

$$T''_{\odot} = T'_{\odot} - 12^h = 19^h 28^m - 12^h = 07^h 28^m.$$

- 1.11. Для розрахунку різниці київського часу та часу обсерваторії розрахуємо номер поясу, у якому розташована Ла-Сілья.

$$N = \frac{\lambda}{15^{\circ}} = \frac{-70,73^{\circ}}{15^{\circ}} = -4,7 = -5.$$

Всесвітній час онлайн-трансляції

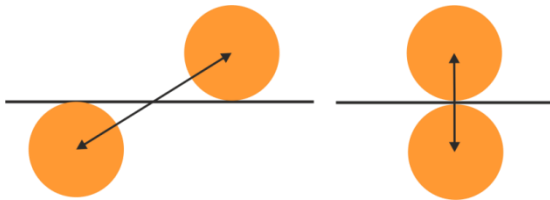
$$T_0 = T_{\text{Ла-Сілья}} - N = 22:30 - (-5 \text{ год}) = 27:30.$$

Звідси знаходимо київський час трансляції

$$T_{\text{Київ}} = T_0 + 2 \text{ год} = 27:30 + 2 \text{ год} = 29:30 = 05:30.$$

Таким чином, за київським часом онлайн-трансляція почнеться о 05:30 наступної доби (26 лютого).

- 1.12. Геометрія сходу Сонця залежить від широти місцевості і має вигляд



Тривалість сходу буде мінімальною (рисунок праворуч), якщо диск Сонця сходить перпендикулярно до горизонту. Така ситуація відбувається лише для спостерігача на екваторі ($\varphi = 0$), де небесний екватор, а отже, і добові паралелі світла, є перпендикулярним до горизонту.

Відповідна тривалість сходу Сонця (від моменту, коли верх диска Сонця торкнувся горизонту до моменту, коли низ диска торкається горизонту)

$$\Delta t = \frac{d}{360^\circ} 24^h = \frac{2 \times 16'}{360 \times 60'} 24^h = 0.0356^h = 2.13^m.$$

Примітка: коректніше брати за період обертання Землі навколо своєї осі значення $23^h 56^m$. Тоді мінімальна тривалість сходу Сонця 2.09^m .

- 1.13. Знайдемо різницю в поясному часі між Києвом та Токіо. Місцевість з довготою $139^\circ 40'$ сх. д. знаходиться у +9 годинному поясі:

$$139^\circ / 15^\circ = 9.27.$$

Всесвітній час на момент 19:00 у Токіо становить

$$T_0 = 19:00 - 9^h = 10:00.$$

Оскільки київський час є часом у +2 годинному поясі, то відповідний київський час

$$T_{\text{Київ}} = T_0 + 2^h = 10:00 + 2^h = 12:00.$$

Таким чином, початок церемонії відкриття XXXII літніх Олімпійських ігор за київським часом 12:00. Дата та ж сама – 24 липня.

- 1.14. Тривалість сонячної доби у випадку прямого обертання

$$S = \frac{T_{\text{орб}} T_{\text{ос}}}{T_{\text{орб}} - T_{\text{ос}}} \\ = \frac{(8765 \times 60 + 48)^m \times (23 \times 60 + 56)^m}{(8765 \times 60 + 48)^m - (23 \times 60 + 56)^m} = 1440^m = 24^h.$$

Тривалість сонячної доби у випадку ретроградного обертання

$$S = \frac{T_{\text{орб}} T_{\text{ос}}}{T_{\text{орб}} + T_{\text{ос}}} \\ = \frac{(8765 \times 60 + 48)^m \times (23 \times 60 + 56)^m}{(8765 \times 60 + 48)^m + (23 \times 60 + 56)^m} = 1432^m = 23^h 52^m.$$

- 1.15. Для максимальної віддаленості космонавта від поверхні Марса L кутовий розмір вулкану d буде мінімальним і дорівнювати роздільній здатності людського ока $1'$.

Одержуємо

$$\operatorname{tg} d = \frac{l}{L}, \quad \operatorname{tg} 1' = \frac{27 \text{ км}}{L}.$$

Звідси

$$L = \frac{27 \text{ км}}{\operatorname{tg} 1'} = \frac{27 \text{ км}}{\operatorname{tg} \left(\frac{1}{60}\right)^\circ} = 92800 \text{ км}.$$

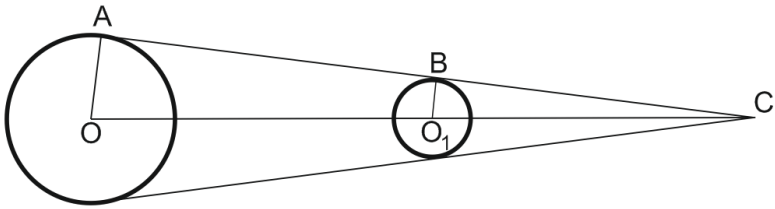
- 1.16. Кутовий розмір протуберанця

$$\operatorname{tg} d = \frac{l}{L}, \quad \operatorname{tg} 1' = \frac{l}{149\,600\,000 \text{ км}}.$$

Тоді лінійні розміри протуберанця

$$l = 149\,600\,000 \text{ км} \times \operatorname{tg} 1' = 149\,600\,000 \text{ км} \times \operatorname{tg} \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \\ = 43\,500 \text{ км}.$$

- 1.17. Зобразимо геометрію утворення сонячної тіні від планети



Тут $OA = R_{\odot}$ – радіус Сонця, $OO_1 = a$ – середня відстань планети від Сонця, $O_1C = L$ – довжина тіні.

Із подібності трикутників OAC та O_1BC одержуємо співвідношення

$$\frac{O_1C}{OC} = \frac{O_1B}{OA} \quad \text{або} \quad \frac{L}{L+a} = \frac{R_{\text{планети}}}{R_{\odot}},$$

З останнього співвідношення одержуємо

$$L = a \frac{R_{\text{планети}}}{R_{\odot} - R_{\text{планети}}} \cong a \frac{R_{\text{планети}}}{R_{\odot}},$$

Таким чином, відношення довжини тіні Нептуна до довжини тіні Землі складає

$$\frac{L_{\text{Нептун}}}{L_{\text{Земля}}} = \frac{a_{\text{Нептун}} R_{\text{Нептун}}}{a_{\text{Земля}} R_{\text{Земля}}} = \frac{30}{1} \times 3.88 = 116.$$

- 1.18.** Для оцінки будемо вважати, що крила літака закривають половину поверхні Місяця, тобто їх кутові розміри $d = 15'$. Тоді відстань від фотокамери до літака

$$L = \frac{l}{\operatorname{tg} d} = \frac{45 \text{ м}}{\operatorname{tg} \left(\frac{15}{60} \right)^{\circ}} = 10300 \text{ м.}$$

Зауважимо, як говорилося вище, при обчисленні тангенсів малих кутів ($d \rightarrow 0$) можна скористатися наближеною схемою:

$$\operatorname{tg} d \cong d(\text{рад}) = \frac{d''}{206\,265}.$$

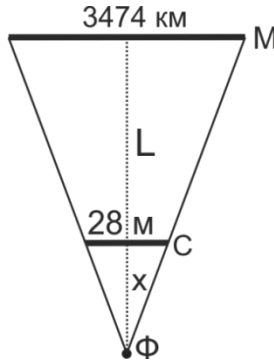
Тоді

$$\operatorname{tg} 15' \cong \frac{15 \times 60''}{206\,265} = 0,00436332.$$

Точне значення становить

$$\operatorname{tg} 15' = 0,00436335.$$

- 1.19. Геометрична схема утворення даного зображення має наступний вигляд



Із подібності трикутників одержуємо

$$\frac{x}{L} = \frac{28 \text{ м}}{3474 \text{ км}}$$

Таким чином відстань, з якої було зроблено знімок (відстань від статуї до фотографа) становить

$$x = \frac{28 \text{ м}}{3474 \text{ км}} \times 384\,400 \text{ км} = 3100 \text{ м} = 3,1 \text{ км}.$$

- 1.20. Спочатку встановимо масштаб малюнка. За допомогою лінійки знаходимо діаметр планети на зображенні. Він становить 2,35 см.

Знайдемо лінійний діаметр планети D за кутовим діаметром d і відстанню до планети L :

$$D = L \operatorname{tg} d = 1,6 \times 10^9 \text{ км} \times \operatorname{tg} \left(\frac{15^\circ}{3600} \right) = 116\,355 \text{ км}.$$

Таким чином масштаб малюнка

$$\frac{116355 \text{ км}}{2.35 \text{ см}} = 49\,513 \frac{\text{км}}{\text{см}}$$

Вимірюємо діаметр зовнішнього кільця. Одержуємо значення 5.30 см. Таким чином, радіус зовнішнього кільця Сатурна становить

$$\frac{5.30 \text{ см}}{2} \times 49\,513 \frac{\text{км}}{\text{см}} = 131\,000 \text{ км.}$$

Аналогічно для щілини Кассіні. Діаметр 4.60 см. Таким чином, відстань від центра планети до щілини Кассіні становить

$$\frac{4.6 \text{ см}}{2} \times 49\,513 \frac{\text{км}}{\text{см}} = 114\,000 \text{ км.}$$

- 1.21. Безперервний полярний день розпочинається і триває у ті дні в році, коли Сонце не заходить під горизонт. Математично це означає, що висота Сонця у нижній кульмінації має бути невід'ємною

$$h_{\odot\text{Н}} \geq 0^\circ.$$

Як відомо, висота світила у нижній кульмінації пов'язана з його схиленням та широтою місця спостереження співвідношенням

$$h_{\text{Н}} = \varphi + \delta - 90^\circ.$$

Одержуємо умову, яку має задовольняти схилення Сонця у ті дні, коли воно не заходить за горизонт

$$\varphi + \delta_{\odot} - 90^\circ \geq 0.$$

Звідси знаходимо

$$\delta_{\odot} \geq 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 73^\circ = 17^\circ.$$

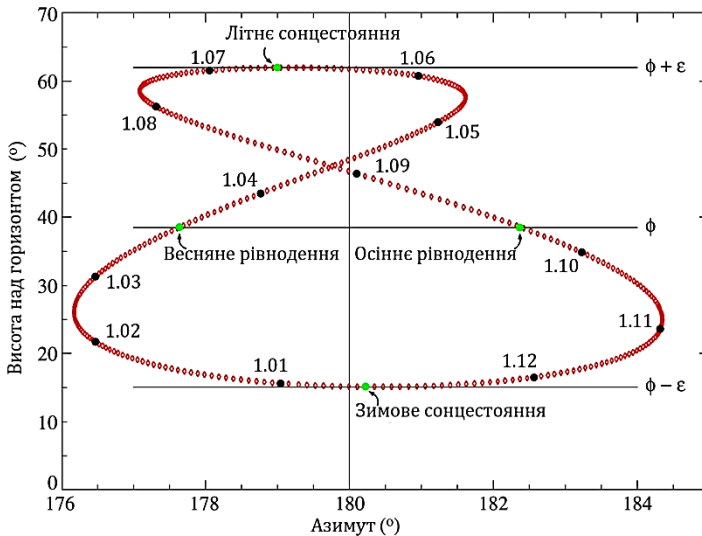
За допомогою таблиці схилення Сонця (Додаток 1) знаходимо календарні дати для яких $\delta_{\odot} = 17^\circ$:

8 травня (початок полярного дня),

6 серпня (кінець полярного дня).

Тривалість безперервного полярного дня на острові Діксон складає 90 днів.

- 1.22. Річна траєкторія південного Сонця називається аналемою. Її вигляд нагадує вісімку і залежить від широти місця спостереження. Нижче наведено аналему одержану з гринвіцької обсерваторії (зображення розміщене за адресою: https://en.wikipedia.org/wiki/Analemma#/media/File:Analemma_Earth.png).



Така форма аналеми пов'язана з двома факторами: зміною схилення Сонця упродовж року у межах від -23.4° до $+23.4^\circ$, що призводить до зміни висоти Сонця у верхній кульмінації та нерівномірності істинного сонячного часу, що призводить до зміни азимуту Сонця у полудень. Поперечні розміри аналеми: Висота дорівнює різниці максимального та мінімального значень схилення Сонця $23.4^\circ - (-23.4^\circ) = 46.8^\circ$. Ширина дорівнює різниці максимального та мінімального значень рівняння часу, тобто різниці максимального випередження та відставання істинного сонячного часу від середнього $14^m 17^s - (-16^m 24^s) = 30^m 41^s = 7.7^\circ$

- 1.23. Світило відноситься до такого, що не заходить, якщо його висота у нижній кульмінації невід'ємна, тобто

$$h_{\text{н}} = \varphi + \delta - 90^\circ \geq 0.$$

$$\delta \geq 90^\circ - \varphi.$$

Для широти Луцька одержуємо, що світило не заходить за горизонт, якщо його схилення задовольняє умову

$$\delta \geq 90^\circ - 50^\circ 44' 52'' = 39^\circ 15' 08''.$$

До таких світил відносяться тільки зоря Капелла.

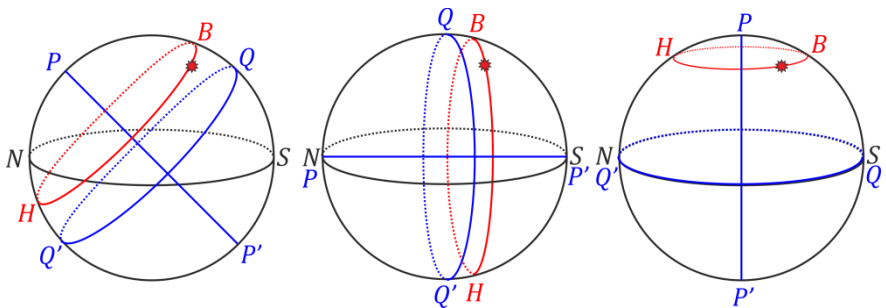
Світило не сходить, якщо його висота у нижній кульмінації недодатна, тобто

$$h_{\text{в}} = 90^\circ - \varphi + \delta \leq 0.$$

$$\delta \leq \varphi - 90^\circ = 50^\circ 44' 52'' - 90^\circ = -39^\circ 15' 08''.$$

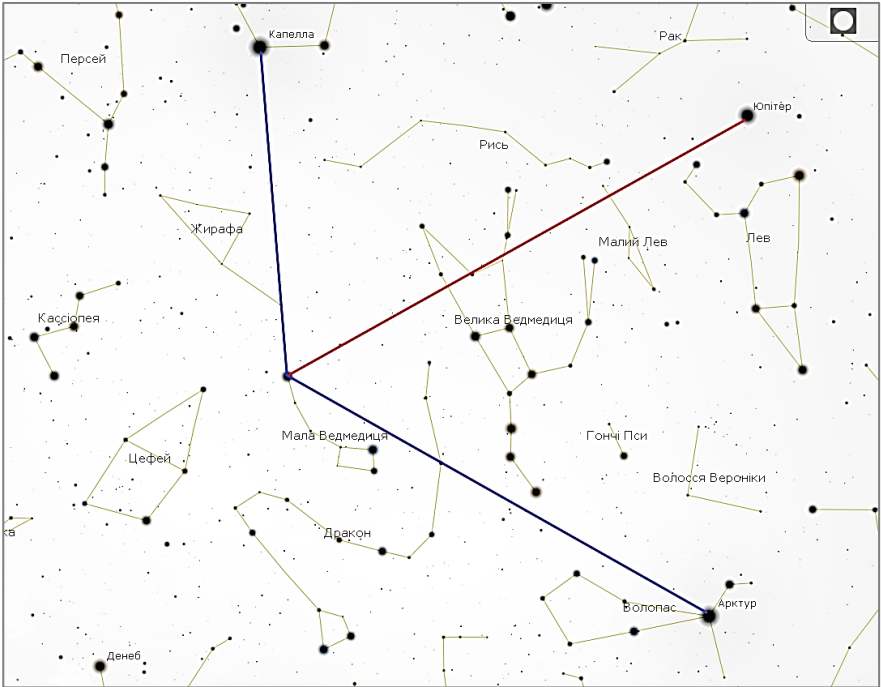
Отже, не сходить лише Канопус. Інші зорі – сходять і заходять.

- 1.24.



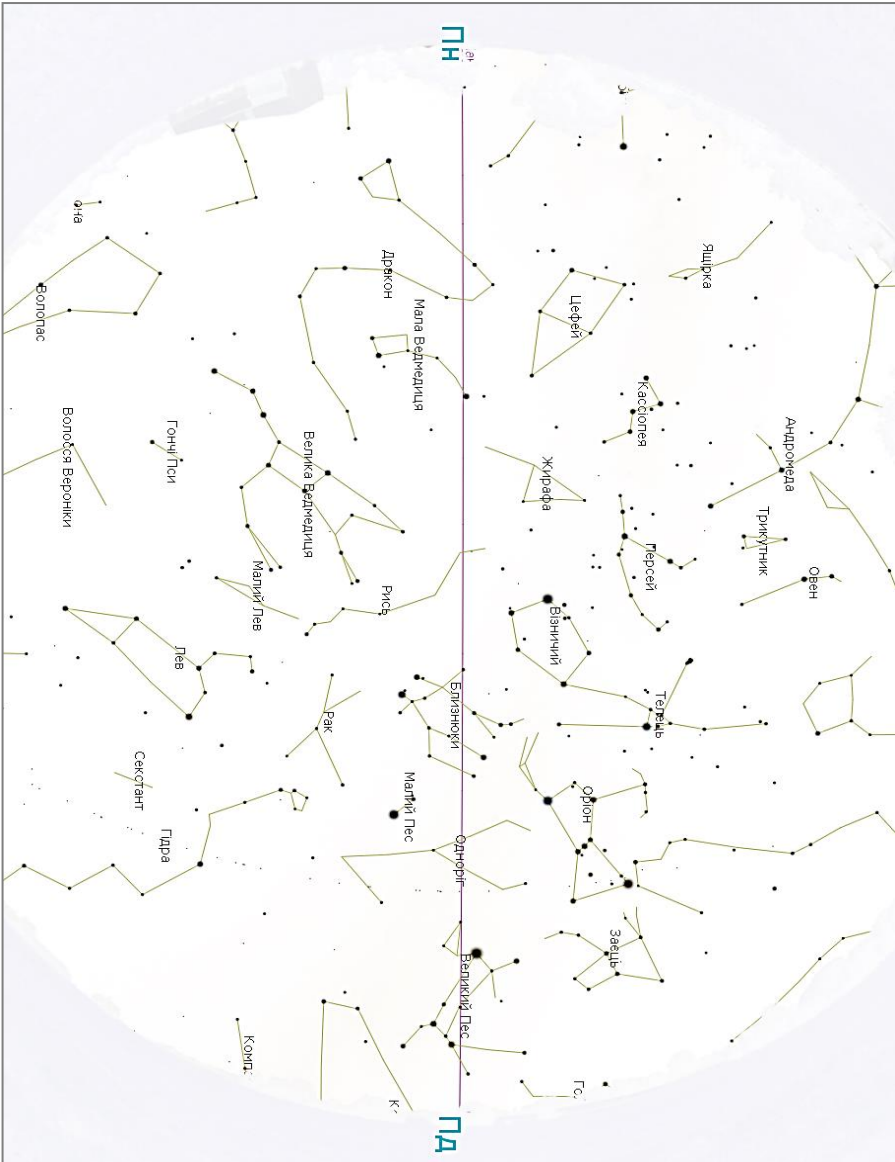
- 1.25. Відповідні сузір'я зображено на фрагменті зоряного неба. Для розрахунку положення Юпітера на зоряній карті з'єднаємо Полярну зірку із зорями Капелла та Арктур. Утворені промені визначають прямі піднесення та схилення світил. Різниця прямих піднесень Капелли та Арктура відповідає куту між променями на зорі і становить 9 годин. Оскільки за умовою задачі пряме піднесення Юпітера у цей день становить $9^{\text{h}}32^{\text{m}}$, то відповідна різниця із прямими піднесеннями Капелли та Арктура становить чотири та п'ять годин відповідно. Таким чином, положення Юпітера на зоряній карті має бути на

промені від Полярної зорі, що відповідає куту $4/9$ від кута між напрямками на Капеллу та Арктур. Таке світило знаходиться поблизу сузір'я Лева.



Для оцінки схилення Юпітера спочатку визначимо масштаб рисунка. За допомогою лінійки визначаємо відстань від Полярної зорі до Капелли. Вона становить 4.4 см. У градусній мірі ця відстань дорівнює $90^\circ - 46^\circ = 44^\circ$. Таким чином масштаб рисунка $44^\circ/4.4 \text{ см} = 10^\circ/\text{см}$. Оскільки відстань від Полярної зорі до Юпітера становить 7.2 см, то різниця схилень Полярної зорі і планети дорівнює $7.2 \text{ см} \times 10^\circ/\text{см} = 72^\circ$. Остаточно, схилення Юпітера $\delta_{\text{Ю}} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. Точне значення схилення планети у цей день становить 16° . Похибка пов'язана із тим, що фрагмент зоряного неба є проекцією сфери на площину.

- 1.26. А) Використовуючи карту зоряного неба встановлюємо розміщення заданих сузір'їв (див. рисунок).



Б) Небесний меридіан це велике коло небесної сфери, яке проходить через точки Півночі та Півдня, полюси світу та зеніт.

Полнос світу знаходиться поблизу Полярної зірки (яскрава зоря у хвості Малої Ведмедиці).

Зеніт знаходиться на висоті 90° над горизонтом, тобто на кутовій відстані $90^\circ - 50^\circ 44' = 39^\circ 16' = 39.3^\circ$ від Полярної зірки. На основі зоряної карти визначаємо екваторіальні координати Сиріуса (найяскравішої зорі сузір'я Великий Пес: $\alpha = 6^h 45^m$, $\delta = -17^\circ$) і розраховуємо кутовий масштаб фрагмента зоряного неба. Відстань від Сиріуса до Полярної зірки становить 8 см, а різниця їх схилень $90^\circ - (-17^\circ) = 107^\circ$. Тому масштаб карти $107^\circ / 8 \text{ см} = 13.4^\circ / \text{см}$. Таким чином, зеніт віддалений від Полярної зірки на відстань $39.3^\circ \div 13.4^\circ / \text{см} = 2.9 \text{ см}$.

В) В кульмінації перебувають ті сузір'я, які перетинає небесний меридіан: Великий Пес, Близнюки, Дракон.

Г) Зоряний час за означенням

$$s = \alpha + t.$$

Оскільки у момент проведення спостережень Сиріус знаходиться поблизу небесного меридіана, то він перебуває у верхній кульмінації, а отже його годинний кут $t = 0^h$.

Таким чином, зоряний час, що відповідає моменту проведення спостережень

$$s = 6^h 45^m.$$

1.27.

А) Див. фрагмент зоряного неба.

Б) Див. фрагмент зоряного неба.

Г) За допомогою карти зоряного неба знаходимо

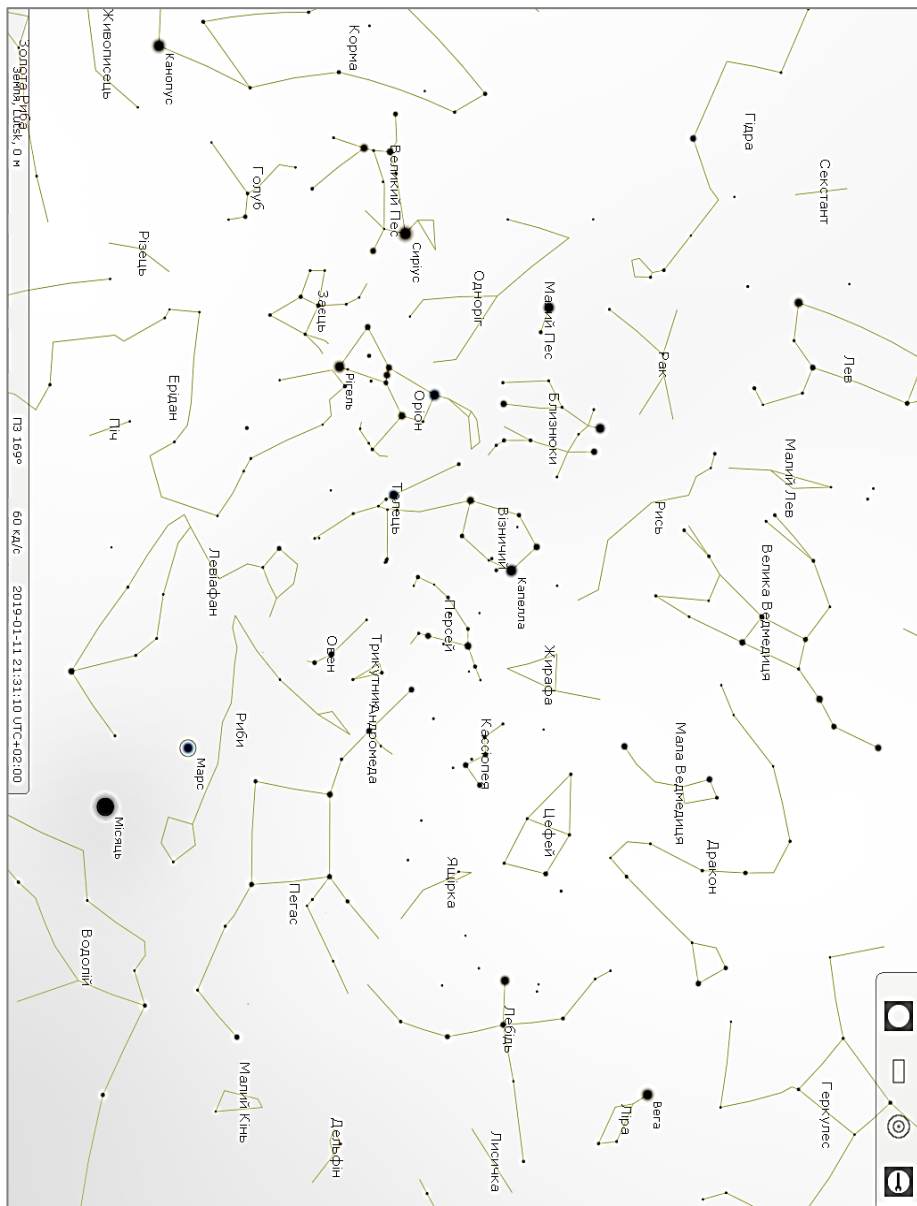
Вега: $\delta = +39^\circ$, $\alpha = 18^h 36^m$;

Капелла: $\delta = +46^\circ$, $\alpha = 5^h 16^m$;

Рігель: $\delta = -8^\circ$, $\alpha = 5^h 14^m$;

Сиріус: $\delta = -16^\circ$, $\alpha = 6^h 45^m$;

Д) Див. фрагмент зоряного неба.



1.28.

А) Див. фрагмент зоряного неба.

Б) За допомогою карти зоряного неба знаходимо екваторіальні координати зір:

Проціон $\alpha = 7^{\text{h}}40^{\text{m}}$, $\delta = 5^{\circ}$;

Капелла $\alpha = 5^{\text{h}}15^{\text{m}}$, $\delta = 45^{\circ}$;

Бетельгейзе $\alpha = 5^{\text{h}}55^{\text{m}}$, $\delta = 7^{\circ}$;

Рігель $\alpha = 5^{\text{h}}15^{\text{m}}$, $\delta = -8^{\circ}$;

В) У кульмінації перебувають сузір'я, які перетинають небесний меридіан: Візничий, Оріон.

Г) Див. фрагмент зоряного неба.

Д1) Місяць перебуває у сузір'ї Близнюки.

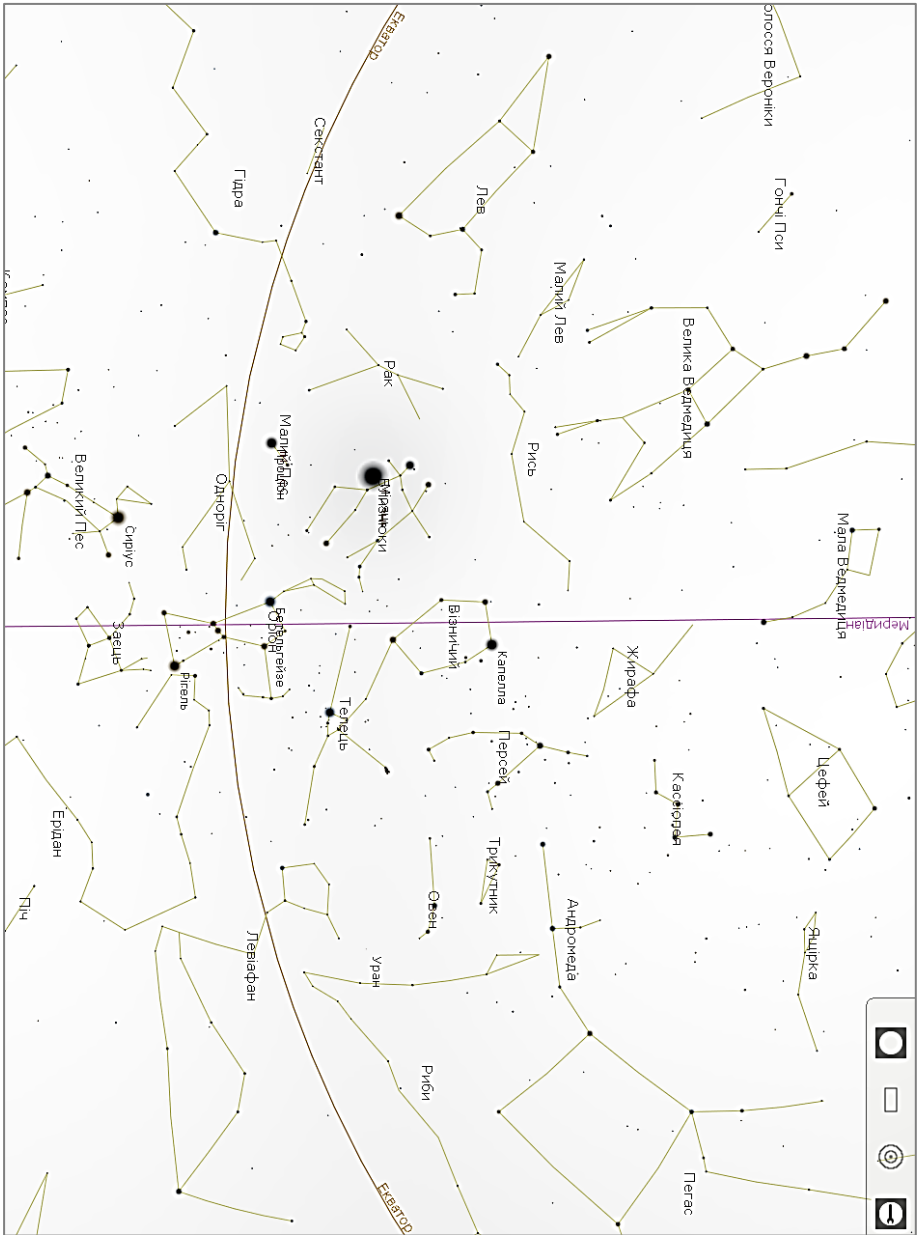
Д2) У момент, коли було зроблено знімок зоряного неба, пояс Оріона знаходиться на небесному меридіані, тобто у верхній кульмінації. Зоряний час у цей момент дорівнює прямому піднесенню зір із поясу Оріона і становить

$$\frac{\alpha_{\text{Бетельгейзе}} + \alpha_{\text{Рігель}}}{2} = \frac{5^{\text{h}}55^{\text{m}} + 5^{\text{h}}15^{\text{m}}}{2} = 5^{\text{h}}35^{\text{m}}.$$

У момент, коли Місяць буде у верхній кульмінації, зоряний час буде становити $7^{\text{h}}30^{\text{m}}$. Таким чином, шуканий проміжок часу становить

$$\Delta s = 7^{\text{h}}30^{\text{m}} - 5^{\text{h}}35^{\text{m}} = 1^{\text{h}}55^{\text{m}}.$$

Тобто приблизно через дві години.



Розділ 2. Рух тіл під дією сили тяжіння

2.1 Закон Всесвітнього тяжіння

Рух небесних тіл здійснюється під дією *гравітаційної взаємодії*, яка описується *законом Всесвітнього тяжіння*, що був відкритий Ньютоном (1687р.). Згідно із цим законом модуль сили взаємодії між двома тілами масами m_1 та m_2 , відстань між центрами яких дорівнює r , визначається формулою

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Тут $G = 6.6742 \times 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравітаційна стала.

Із закону Всесвітнього тяжіння випливає, що сила гравітаційної взаємодії між тілами прямо пропорційна добутку мас та обернено пропорційна квадрату відстані між тілами. Зауважимо, що гравітаційна взаємодія завжди створює притягання між тілами, або окремими частинами одного тіла.

Відповідна потенціальна енергія гравітаційної взаємодії має вигляд

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Ця енергія явно не залежить від часу та взаємної орієнтації тіл, а визначається лише відстанню між тілами. Наслідком такої залежності потенціальної енергії є виконання двох законів збереження: повної механічної енергії та моменту імпульсу

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - G \frac{m_1 m_2}{r} = \text{const},$$

$$\mathbf{L} = m_1 [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1] + m_2 [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2] = \text{const}.$$

Прискорення вільного падіння на поверхні небесного тіла (*поверхнева гравітація*) масою M та радіусом R визначається співвідношенням

$$g = G \frac{M}{R^2}.$$

Поверхневу гравітацію також можна виразити через середню густину небесного тіла ρ , яка визначається співвідношенням

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

Одержимо

$$g = \frac{4}{3}\pi G\rho R.$$

На основі законів динаміки руху тіл під дією гравітації можна розрахувати космічні швидкості. Швидкість руху тіла масою m на коловій орбіті поблизу поверхні планети масою M та радіусом R (без урахування опору повітря) називається *першою космічною швидкістю* (Рис. 2.1).

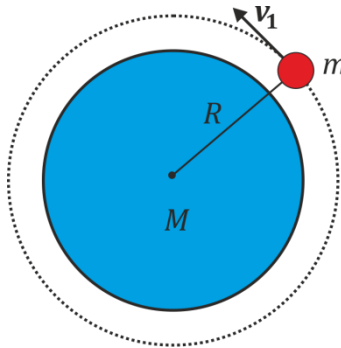


Рис. 2.1. Рух тіла по коловій орбіті під дією сили гравітації.

Розглянемо рух тіла масою m коловій орбіті поблизу поверхні планети масою M та радіусом R . Другий закон Ньютона у цьому випадку має вигляд

$$ma = G \frac{mM}{R^2}.$$

Використовуючи формулу доцентрового прискорення, одержуємо

$$\frac{v_1^2}{R} = G \frac{M}{R^2}.$$

Звідси

$$v_1 = \sqrt{G \frac{M}{R}} = \sqrt{gR}.$$

Друга космічна швидкість – мінімальна швидкість, яку необхідно надати тілу на поверхні планети (або іншого масивного небесного тіла), щоб воно вийшло за межі гравітаційної дії цієї планети. Із закону збереження енергії одержуємо

$$\frac{mv_2^2}{2} - G \frac{mM}{R} = \frac{mv_\infty^2}{2} - G \frac{mM}{r_\infty}.$$

Оскільки $v_\infty = 0$, $r_\infty \rightarrow \infty$, то

$$v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}v_1.$$

На основі другої космічної швидкості засноване визначення *гравітаційного радіусу* чорної діри R_S (радіусу Шварцшильда). Він дорівнює радіус сферичного тіла масою M , при якому його друга космічна швидкість дорівнює швидкості світла

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}.$$

При стисненні об'єкта у кулю з радіусом рівним радіусу Шварцшильда або меншим за нього, відбувається незворотний гравітаційний колапс, тобто об'єкт перетворюється на чорну діру.

Використовуючи зв'язок швидкості руху тіла v по колу радіуса r із його періодом обертання T

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

одержуємо співвідношення між періодом обертання тіла на коловій орбіті T , радіусом орбіти r і масою центрального тіла M , навколо якого відбувається рух

$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{G \frac{M}{r}},$$

або

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}.$$

Остання формула відома як третій закон Кеплера, узагальнений Ньютоном (докладно про закони Кеплера буде описано у наступному параграфі). За допомогою цієї формули можна «зважувати» космічні тіла. Наприклад, визначаючи зі спостережень період обертання Землі навколо Сонця та відстань від Землі до Сонця за допомогою методу паралаксів, можемо розрахувати масу Сонця. Аналогічно, вивчаючи рух системи Місяць-Земля, можемо визначити масу Землі.

Розглянемо деякі аспекти стійкості системи трьох тіл на прикладі системи Сонце-Земля-Місяць (Рис. 2.2).

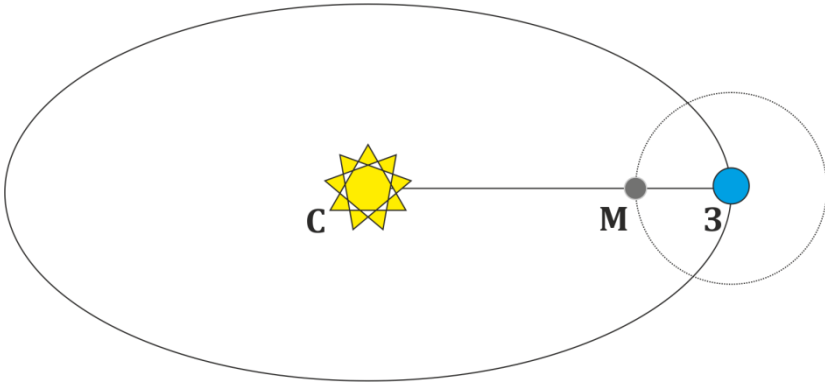


Рис. 2.2. Система трьох тіл Сонце–Земля–Місяць.

Критерієм стійкості системи трьох тіл Сонце–Земля–Місяць є та умова, що прискорення, якого набуває Місяць під дією Землі, буде не меншим аніж різниця прискорень Місяця та Землі під дією Сонця

$$a_{МЗ} \geq a_{МС} - a_{ЗС}.$$

На основі закону Всесвітнього тяжіння одержуємо

$$a_{МЗ} = \frac{G \frac{m_M m_3}{r_{МЗ}^2}}{m_M} = G \frac{m_3}{r_{МЗ}^2};$$

$$a_{МС} = \frac{G \frac{m_M m_C}{r_{МС}^2}}{m_M} = G \frac{m_C}{r_{МС}^2};$$

$$a_{ЗС} = \frac{G \frac{m_3 m_C}{r_{ЗС}^2}}{m_3} = G \frac{m_C}{r_{ЗС}^2}.$$

Отже, отримуємо критерій стійкості

$$\frac{m_3}{r_{МЗ}^2} \geq \frac{m_C}{r_{МС}^2} - \frac{m_C}{r_{ЗС}^2}.$$

Нехай $r_{МЗ} = L$, $r_{ЗС} = r$. Тоді $r_{МС} = r - L$.

Оскільки $L \ll r$, то

$$\frac{m_3}{L^2} \geq \frac{m_c}{r^2} \left(1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{L}{r}\right)^2} \right) \cong \frac{2m_c L}{r^3}.$$

Таким чином, радіус орбіти Місяця має задовольняти умові

$$L \leq \sqrt[3]{\frac{m_3}{2m_c}} r.$$

Оцінимо одержане значення граничного радіусу орбіти Місяця, за якого він буде залишатися супутником Землі

$$L_{\max} = \sqrt[3]{\frac{1}{2 \times 330\,000}} \times 1 \text{ а. о.} = 0.0115 \text{ а. о.} = 1.72 \text{ млн км.}$$

Одержане число суттєво перевищує значення середньої відстані від Місяця до Землі (384 000 км). Тому загрози, що найближчим часом Місяць відірветься від Землі і перейде на орбіту навколо Сонця немає.

Застосуємо закони гравітації до опису обертання *галактики*, що являє собою систему гравітаційно зв'язаних зір та зоряних скупчень, міжзоряного газу, а також темної матерії. Найменші галактики містять кілька сотень мільйонів (10^8) зір, а у найбільших кількість зір досягає сотень трильйонів (10^{14}). Усі об'єкти у складі галактик беруть участь в обертанні навколо спільного центру мас. Сонячна система входить до складу галактики Чумацький Шлях (Milky Way).

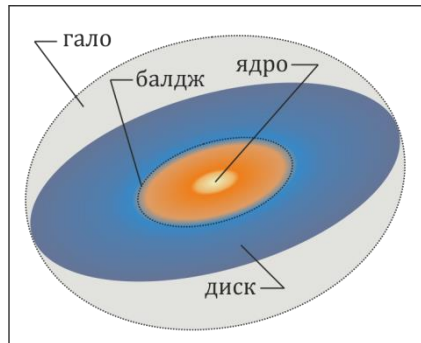


Рис. 2.3. Зображення та будова галактики NGC 2903.

Будова галактики NGC 2903, яка знаходиться у сузір'ї Лева, зображена на Рис. 2.3.

У центрі галактики міститься активне *ядро*. Навколо ядра щільно розташована група зір, яка утворює яскраву область галактики під назвою *балдж*. Більшість елементів галактики розташована у тонкому прошарку, який називають *диском* галактики. Усі видимі компоненти галактики знаходяться усередині сферичного утворення, яке майже не здійснює електромагнітного випромінювання. Це утворення має назву *гало* галактики. Гало галактики утворене з таких компонентів як зорі (внутрішнє гало), розрідженого газу та темної матерії (зовнішнє гало).

Як зазначалося вище, гало галактики не має електромагнітного випромінювання, тому не може бути зареєстроване у телескоп (оптичний, радіо чи гамма). Відкриття гало було пов'язане із аналізом кривих обертання галактик навколо центру під дією сил гравітації.

Спочатку розглянемо динаміку обертання галактики без гало темної матерії. Нехай ядро галактики має радіус R_0 та масу M_0 . Припустимо, що ядро має однорідну густину ρ_0 . Маса галактики поза ядром набагато менша ніж у ядрі. Тоді другий закон Ньютона для зорі масою m , що знаходиться на відстані r від центру галактики має вигляд

$$ma = F,$$

$$\frac{mv^2(r)}{r} = G \frac{mM}{r^2}.$$

Тут $v(r)$ – орбітальна швидкість зорі, яка знаходиться на відстані r від центру галактики.

Оскільки,

$$M = \begin{cases} M_0 \frac{r^3}{R_0^3}, & r \leq R_0, \\ M_0, & r > R_0, \end{cases}$$

одержуємо

$$v(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{GM_0}{R_0^3}} r, & r \leq R_0, \\ \sqrt{\frac{GM_0}{r}}, & r > R_0. \end{cases}$$

Теоретична крива, яка описує одержані залежності швидкості обертання диску галактики від відстані до центру галактики, а також

крива, взята зі спостережень, зображені на Рис. 2.4. На даному рисунку можемо побачити розбіжність кривих обертання, яке пояснюється наявністю гало темної матерії з густиною, залежною від відстані до центру галактики.

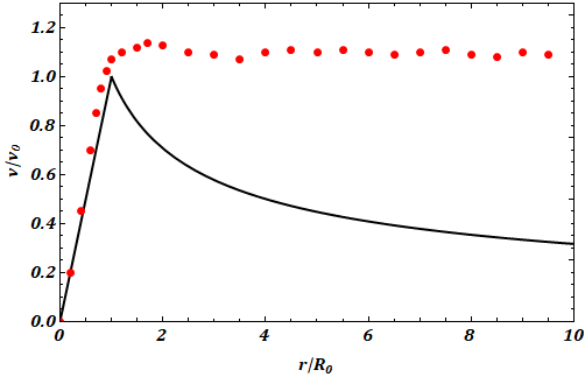


Рис. 2.4. Криві обертання диска галактики. Суцільна крива відповідає теоретичній моделі без гало темної матерії. Експериментальні дані зображені точками.

Фактично, в області $r > R_0$, швидкість обертання диска галактики моделюється співвідношенням

$$v(r) = \sqrt{G \frac{M_0 + M_{\text{TM}}(r)}{r}} \cong \text{const.}$$

Тут $M_{\text{TM}}(r)$ є залежна від відстані до центра галактики маса темної матерії.

2.2 Закони Кеплера та конфігурації планет

Розглянемо застосування законів небесної механіки до опису кінематики сонячної системи.

Сонячна система складається з однієї зірки (Сонця), восьми великих планет та їхніх супутників, а також менших небесних тіл, таких як астероїди, комети та метеорити.

Центральним тілом сонячної системи є Сонце. Навколо Сонця обертається вісім великих планет: Меркурій (0.387 а. о.), Венера (0.723 а. о.), Земля (1 а. о.), Марс (1.524 а. о.), Юпітер (5.203 а. о.), Сатурн (9.539 а. о.), Уран (19.191 а. о.) і Нептун (30.071 а. о.).

Рух планет навколо Сонця здійснюється під дією сили Всесвітнього тяжіння і описується трьома законами Кеплера, які він встановив емпіричним шляхом на основі аналізу результатів власних спостережень та 20-річних спостережень Тихо Браге. Ці закони мають наступне формулювання

1. Усі планети рухаються по еліпсах, в одному із фокусів яких (спільного для всіх планет) знаходиться Сонце (1609 р.).
2. Радіус-вектор планети, проведений із Сонця, за однакові проміжки часу описує однакові площі (1609 р.).
3. Квадрати періодів обертання планет навколо Сонця відносяться, як куби їх середніх відстаней до Сонця (1619 р.)

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

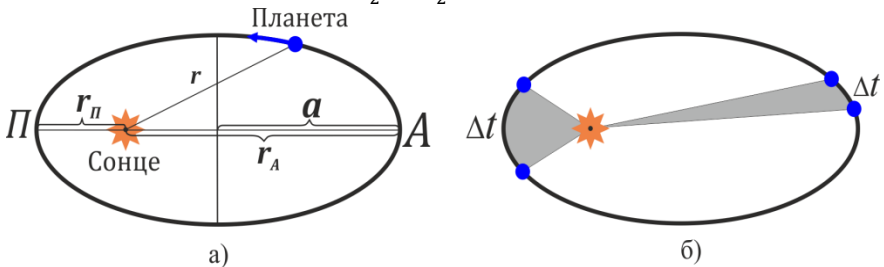


Рис. 2.3. Ілюстрації до законів Кеплера. а) перший закон, б) другий закон.

Нагадаємо, що еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней до яких від двох заданих (фокусів) є величина стала. Параметрами, які задають еліпс, є *велика піввісь* a (Рис. 2.3) та *ексцентриситет* e . Іноді велику піввісь орбіти називають середньою відстанню планети до Сонця. Ексцентриситет визначається відношенням відстані фокуса від центра еліпса до великої півосі. Якщо ексцентриситет дорівнює нулю, то еліпс вироджується у коло.

Найближча до Сонця точка орбіти планети називається *перигелієм* (Π), а найбільш віддалена – *афелієм* (A).

Перигелійна r_{Π} та афелійна r_A віддалі пов'язані з ексцентриситетом e і великою піввіссю a еліпса співвідношеннями

$$r_{\Pi} = a(1 - e), \quad r_A = a(1 + e).$$

З останніх формул слідує, що

$$a = \frac{r_A + r_{\Pi}}{2}, \quad e = \frac{r_A - r_{\Pi}}{r_A + r_{\Pi}}.$$

З другого закону Кеплера (закону збереження проекції моменту імпульсу) слідує, що швидкості планети в афелії та перигелії пов'язані співвідношенням

$$v_A r_A = v_{\Pi} r_{\Pi}.$$

Оскільки $r_A > r_{\Pi}$, то $v_A < v_{\Pi}$.

Таким чином, лінійна швидкість руху планети по орбіті є нерівномірною. Вона досягає максимального значення у перигелії і є мінімальною в афелії.

Швидкість небесного тіла, яке обертається навколо масивного тіла масою M під дією гравітації, у довільній точці на орбіті з радіус-вектором \mathbf{r} визначається за допомогою інтегралу енергії (закону збереження енергії)

$$v(r) = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}.$$

Середня швидкість планети (колова швидкість) v_0 виражається через період її обертання навколо Сонця T за допомогою співвідношення

$$v_0 = \frac{2\pi a}{T}.$$

Зауважимо, що період обертання небесного тіла навколо центра тяжіння називається *сидеричним* або зоряним періодом. У третьому законі Кеплера фігурує саме сидеричний період.

Сидеричний період обертання Землі відрізняється від сидеричних періодів обертання інших планет. Це призводить до того, що положення планет відносно Сонця та Землі безперервно змінюються.

Положення планет відносно Сонця та Землі називаються конфігураціями планет. Серед безлічі конфігурацій виділяють декілька особливих положень. Розрізняють чотири конфігурації *нижніх планет* (Меркурій, Венера) і чотири конфігурації *верхніх планет* (Марс, Юпітер, Сатурн, Уран, Нептун).

Для нижніх планет особливими є наступні положення (Рис. 2.4): а) верхнє сполучення; б) західна елонгація; с) нижнє сполучення; д) східна елонгація.

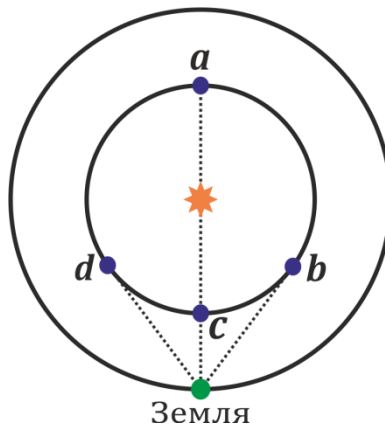


Рис. 2.4. Конфігурації нижньої планети.

У моменти сполучень, коли екліптична довгота планети дорівнює довготі Сонця, нижня планета, перебуваючи на одній прямій із Сонцем та Землею, ховається у сонячних променях.

У моменти елонгацій нижня планета досягає найбільшого кутового відхилення від Сонця. Під час східної елонгації планета спостерігається на заході, у променях вечірньої заграви, після заходу Сонця (Рис. 2.5). При західній елонгації планету видно на сході перед світанком.

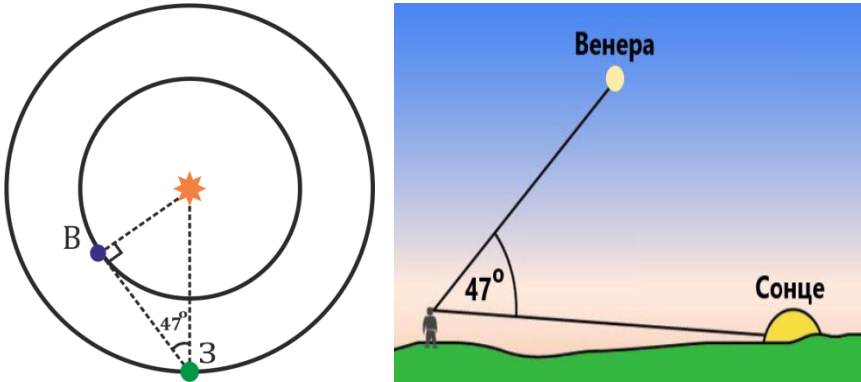


Рис. 2.5. Найбільша східна елонгація Венери. Ліворуч показано взаємне розміщення планет та Сонця. Праворуч – взаємне розміщення спостерігача на Землі, Венери та Сонця під час його заходу за горизонт.

Найбільша елонгація Венери дорівнює 47° , Меркурія – 28° . Через невелику елонгацію Меркурій майже завжди закритий променями ранкової або вечірньої заграви.

Для верхніх планет характерними є наступні чотири конфігурації (Рис. 2.6): а) сполучення; б) західна квадратура; с) протистояння; д) східна квадратура.

Під час протистояння планета перебуває на небосхилі у точці, протилежній напрями на Сонце. В моменти квадратур верхня планета перебуває на кутовій відстані 90° від Сонця. Положення, коли Земля, Сонце і верхня планета лежать на одній прямій, називається сполученням верхньої планети з Сонцем.

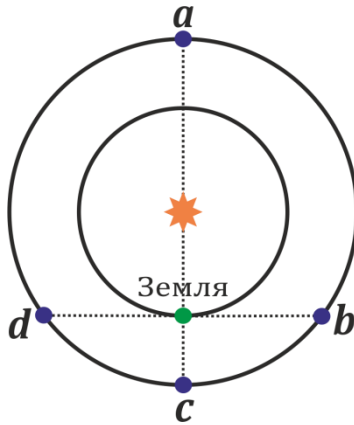


Рис. 2.6. Конфігурації верхньої планети.

Видимий рух верхніх планет відрізняється від руху нижніх планет. Коли верхню планету видно після заходу Сонця на західному небосхилі, вона переміщується на фоні зірок із заходу на схід (прямий рух), як і Сонце. Оскільки швидкість руху Сонця по екліптиці більша швидкості руху довільної верхньої планети, то воно поступово наздоганяє планету, ховаючи її в своїх променях. Коли Сонце переганяє верхню планету, вона стає видимою на сході перед світанком.

Швидкість прямого руху планети поступово зменшується, планета зупиняється і починає назадній рух зі сходу на захід. Через деякий час планета знову зупиняється, змінює напрямок свого руху на прямий, і усі явища повторюються у тому ж порядку.

Повторюваність конфігурацій планет характеризується їх *синодичним* періодом обертання S .

Синодичним періодом обертання планети S називається проміжок часу між двома послідовними однойменними конфігураціями планети. Синодичний період S пов'язаний із сидеричним (зоряним) T рівнянням синодичного руху

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\oplus}}, \quad (\text{нижні планети});$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T}, \quad (\text{верхні планети}).$$

Тут $T_{\oplus} = 365.2422$ діб = 1 рік – сидеричний період обертання Землі навколо Сонця.

Визначаючи зі спостережень синодичні періоди обертань планет, на основі рівняння синодичного руху знаходимо сидеричний період обертання планети, тобто час, протягом якого планета робить оберт навколо Сонця. Якщо відомий сидеричний період обертання планети, то за допомогою третього закону Кеплера, можна визначити середню відстань від Сонця до даної планети. Оскільки для Землі $T_{\oplus} = 1$ рік, $a_{\oplus} = 1$ а.о. то, для зручності обчислень, третій закон Кеплера для інших планет Сонячної системи можна записати у вигляді

$$T^2 = a^3,$$

де період T має визначатися у роках, а середня відстань планети a в астрономічних одиницях.

2.3 Траєкторії міжпланетних мандрівок

Розглянемо питання про розрахунок найбільш економічної траєкторії космічного апарату для переведення його із орбіти однієї планети на іншу (наприклад із орбіти Землі на орбіту Марса). Така траєкторія називається *гоманівською* і являє собою півеліпс із Сонцем у фокусі. Перигелієм (1) та апогелієм (2) у нього є дві орбіти планет між якими відбувається запуск космічного апарату (Рис. 2.7).

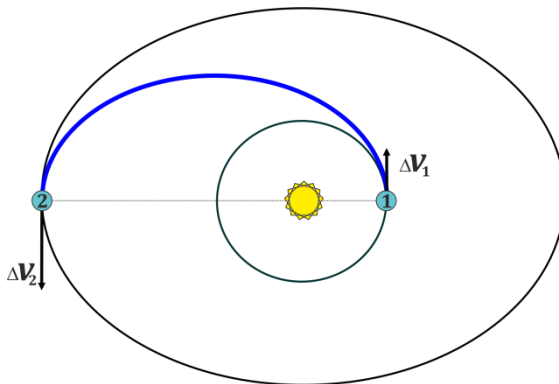


Рис. 2.7. Гоманівська траєкторія.

Велика піввісь гоманівського еліпсу дорівнює

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2},$$

де a_1 та a_2 є великі півосі для орбіт планет.

У процесі переходу із земної орбіти на гоманівську траєкторію космічний апарат у точці 1 має отримати приріст швидкості Δv_1 , а у точці 2, для переходу на орбіту вищої планети, йому надається додаткова швидкість Δv_2 . Значення цих швидкостей залежить від радіусів початкової та кінцевої орбіт. Час подорожі космічного апарату визначається як половина періоду руху по гоманівському еліпсу.

Розглянемо випадок переходу із земної орбіти на орбіту Марса. Для великої півосі гоманівської траєкторії знаходимо

$$a = \frac{a_3 + a_M}{2} = \frac{1 \text{ а. о.} + 1.52 \text{ а. о.}}{2} = 1.26 \text{ а. о.}$$

Використаємо інтеграл енергії

$$v(r) = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}.$$

Для спрощення будемо вважати орбіти Землі та Марса коловими, тоді

$$v_3 = \sqrt{G \frac{M}{a_3}} = 29.7 \frac{\text{км}}{\text{с}},$$

$$v_M = \sqrt{G \frac{M}{a_M}} = 24.2 \frac{\text{км}}{\text{с}},$$

$$v_{\text{гом(пер)}} = v(a_3) = \sqrt{GM \left(\frac{2}{a_3} - \frac{1}{a} \right)} = 32.8 \frac{\text{км}}{\text{с}},$$

$$v_{\text{гом(ап)}} = v(a_M) = \sqrt{GM \left(\frac{2}{a_M} - \frac{1}{a} \right)} = 21.6 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Таким чином, прирости швидкості космічного апарату дорівнюють

$$\Delta v_1 = v_{\text{гом(пер)}} - v_3 = 32.8 \frac{\text{км}}{\text{с}} - 29.7 \frac{\text{км}}{\text{с}} = 3.1 \frac{\text{км}}{\text{с}},$$

$$\Delta v_2 = v_M - v_{\text{гом(ап)}} = 24.2 \frac{\text{км}}{\text{с}} - 21.6 \frac{\text{км}}{\text{с}} = 2.6 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Час подорожі

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 2.22 \times 10^7 \text{ с} = 258 \text{ діб}.$$

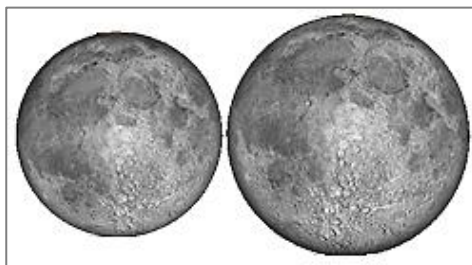
Задачі до розділу 2

- 2.1 Людина, що перебуває у стані спокою на екваторі Землі, рухається з певною швидкістю відносно її центра. Космонавт, що стоїть на екваторі Місяця, рухається з певною швидкістю відносно центра Місяця. У скільки разів відрізняються швидкості людини та космонавта, якщо відомо, що радіус Землі у 4 рази більший за радіус Місяця.
- 2.2 Корабель пливе уздовж меридіана. Моряк за допомогою секстанта вимірює висоту Полярної зірки. За добу її висота змінилася з 55° до 45° . З якою швидкістю пливе корабель і в який бік, якщо вважати, що його швидкість постійна?
- 2.3 Прискорення вільного падіння на поверхні Марса і Меркурія приблизно однакові і дорівнюють 3.7 м/с^2 . Проте діаметр Марса в 1.4 рази більший, ніж діаметр Меркурія. Порівняйте густини планет і перші космічні швидкості для цих планет. Планети вважати кулями.
- 2.4 Світовий рекорд зі стрибків у висоту на Землі становить 2.45 м. Визначте, на яку відповідну висоту зміг би підскочити рекордсмен в умовах гравітації Місяця? Маса Землі у 81 разів більша маси Місяця, відношення радіуса Землі до радіуса Місяця дорівнює 3.66.
- 2.5 Як зміниться прискорення вільного падіння на поверхні планети, якщо маса планети збільшиться в m разів, а середня густина планети збільшиться в n разів?
- 2.6 Уявіть собі, що ви мандруєте поясом астероїдів. Характерна густина порід астероїдів становить 3.5 г/см^3 . Якими повинні бути мінімальні розміри астероїда, на поверхні якого можна бігати з такою ж швидкістю, як на Землі, без загрози «упасти» в космос?

- 2.7 На малюнку зображено два фотознімки Місяця, зроблені однією фотокамерою, встановленою на телескопі, що знаходиться на поверхні Землі. Перший знімок зроблений в момент, коли Місяць знаходився в перигеї, другий – в апогеї. На основі цих даних визначте ексцентриситет орбіти Місяця.



- 2.8 Визначте ексцентриситет орбіти комети, якщо відомо, що її лінійна швидкість в перигелії більша у 4.5 разів за швидкість в афелії.
- 2.9 На фото (автор Кеоні Еверінгтон) наведено поруч два зображення Місяця у повні (28 липня 2017р. – міні-Місяць та 2 січня 2018р. – супер-Місяць). Куткові розміри Місяця дорівнюють $29'38''$ та $33'15''$. Враховуючи, що середня відстань Місяця від Землі складає 384 400 км, обчислити відстань від Землі до Місяця у перигеї та апогеї.



- 2.10 У жовтні 2015 року жителі Землі спостерігали заворожливе астрономічне явище – малий парад планет. При цьому Венера, Марс та Юпітер перебувають в сполученні. Розрахуйте мінімальний проміжок часу, через який Венера та Марс знову будуть перебувати у сполученні. Орбіти планет вважати

коловими. Сидеричні періоди обертань планет $T_B = 225^d$, $T_M = 689^d$.

- 2.11** Протистояння малої планети повторюється через кожні 512 діб. Визначити середню відстань планети до Сонця в а.о.
- 2.12** У таблиці наведені календарні дати послідовних найбільших західних елонгацій Меркурія у 2015 та 2016 роках. На основі цих даних розрахуйте орієнтовні дати наступних найбільших західних елонгацій Меркурія у 2017 році, а також середню відстань планети до Сонця.

2015 рік	2016 рік	2017 рік
24 лютого	6 лютого	
24 червня	5 червня	
15 жовтня	28 вересня	

- 2.13** Останнє протистояння Марса відбулося 22 травня 2016 року. Розрахуйте орієнтовну дату наступного протистояння Марса із Землею. Зоряні періоди обертання Марса та Землі 687 і 365.26 діб відповідно. Отриману дату записати у системі Юліанського датування (номер юліанського дня на момент 1 січня 2000 року – JD 2 451 545).
- 2.14** У таблиці наведені дати послідовних протистоянь Юпітера (Юпітер, Земля та Сонце розташовані на одній прямій) за попередні три роки. На основі цих даних визначте синодичний період протистоянь Юпітера та спрогнозуйте дати цих протистоянь у 2019 та 2020 роках. Зобразіть схематично на одному рисунку розміщення Юпітера, Землі та Сонця для протистоянь у період з 2016 по 2020 роки. На основі одержаних результатів, оцініть період обертання Юпітера навколо Сонця.

2016	2017	2018	2019	2020
8 березня	7 квітня	9 травня		

- 2.15** Внутрішня планета А і зовнішня планета В при спостереженнях із Землі мають однаковий синодичний період S . Чому дорівнює синодичний період планети А при спостереженні з планети В?
- 2.16** Обчислити гіпотетичний період обертання Місяця навколо Землі при умові, що маса Землі зросла вчетверо, а Місяць опинився на вдвічі більшій відстані. Сидеричний період обертання Місяця при його реальній орбіті дорівнює 27.3 діб.
- 2.17** Для геостаціонарного супутника Землі оцініть проміжок часу, впродовж якого він перебуває в тіні від Землі за період свого обертання. *Примітка: геостаціонарний супутник при своєму русі постійно перебуває над однією і тією ж точкою земної поверхні.*
- 2.18** Визначте відношення маси Землі до маси Марса, якщо супутник Фобос віддалений від Марса на 9300 км і здійснює один оберт навколо планети за 7 год 40 хв. Відстань від Землі до Місяця 380 тисяч кілометрів. Місяць здійснює оберт навколо Землі за 27.3 діб.
- 2.19** Найближчий супутник Юпітера Іо обертається навколо нього за 42 год 28 хв на середній відстані 421 800 км. За скільки діб другий супутник Юпітера – Європа, обертається навколо нього? Велика піввісь орбіти Європи – 671 100 км.
- 2.20** Супутник робить один повний оберт за 4.7 доби навколо астероїда діаметр якого становить 215 км. Радіус орбіти супутника 1190 км. Орбіту супутника вважати коловою. Оцінити густину астероїда.
- 2.21** Супутник Нептуна Тритон має радіус орбіти, що дорівнює радіусу орбіти Місяця навколо Землі, але робить один оберт навколо Нептуна за 6 діб. У скільки разів відрізняються маси Нептуна і Землі?
- 2.22** Космічний телескоп «Габбл» є унікальною багатоцільовою орбітальною обсерваторією. Максимальна та мінімальна його висота над поверхнею Землі становлять 541 км та 537 км відповідно. Розрахуйте кількість обертів, які здійснює Габбл навколо Землі за одну добу. Радіус та маса Землі дорівнюють

6378 км та 5.97×10^{24} кг відповідно. Гравітаційна стала $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$.

2.23 Комета Енке (2P/Encke), яка відноситься до короткоперіодичних комет, востаннє наближалася на мінімальну відстань до Сонця (перебувала у перигелії своєї орбіти) 10 березня 2017 року. Відстані комети до Сонця у перигелії та афелії орбіти становлять відповідно 0.33 а.о. та 4.11 а.о. Розрахуйте дату наступного перигелію комети.

2.24 Екзопланетна система TRAPPIST-1, яка знаходиться у сузір'ї Водолія, складається із центральної зорі TRAPPIST-1 та семи планет земної групи. Найбільшу схожість із Землею має четверта екзопланета цієї системи – TRAPPIST-1e. На основі даних наведених у таблиці, виконайте наступні завдання:

- а) розрахуйте прискорення вільного падіння на поверхні екзопланети (поверхневу гравітацію);
- б) оцініть масу центральної зорі у системі TRAPPIST-1 (відповідь виразіть у масах Сонця).

Параметр екзопланети TRAPPIST-1e	Значення
Маса	$0.772 M_{\oplus}$
Радіус	$0.910 R_{\oplus}$
Велика піввісь орбіти	0.029 а.о.
Орбітальний період	6 діб 2 год

Тут M_{\oplus} – маса Землі, R_{\oplus} – радіус Землі.

2.25 Екзопланетна система Kepler-65, яка знаходиться у сузір'ї Ліра, складається з центральної зорі Kepler-65 та чотирьох планет земної групи. Найбільшу схожість із Землею має четверта екзопланета цієї системи – Kepler-65e, яка була відкрита у 2019 році. На даний момент відсутні дані спостережень про середню відстань цієї екзопланети від центральної зорі. На основі даних наведених у таблиці, виконайте наступні завдання:

- а) розрахуйте середню відстань екзопланети Kepler-65e від центральної зорі Kepler-65 (в а.о.)

б) розрахуйте прискорення вільного падіння на поверхні екзопланети (поверхневу гравітацію) та порівняйте його із земним;

Параметр екзопланетної системи Kepler-65	Значення
Маса центральної зорі	$1,25 M_{\odot}$
Маса екзопланети	$200 M_{\oplus}$
Радіус екзопланети	$14 R_{\oplus}$
Орбітальний період	258 діб

Тут M_{\oplus} – маса Землі, R_{\oplus} – радіус Землі, M_{\odot} – маса Сонця.

- 2.26** Розгляньте ситуацію, коли астронавт наближається до чорної діри. На його тіло будуть діяти припливні гравітаційні сили, які намагаються розтягнути тіло уздовж напрямку на центр діри. Вважаючи, що людина може витримати розтягуючу силу, що дорівнює її вазі на Землі, оцінити масу чорної діри, в яку космонавт може «пірнути» та витримати припливні сили до моменту досягнення радіуса сфери Шварцшильда чорної діри.
- 2.27** 93 Мінерва є астероїдом із головного поясу. Його геометрія близька до сферичної з радіусом 156 км. Астероїд відноситься до типу С (темні вуглецеві об'єкти) із середньою густиною 1900 кг/м^3 . Велика піввісь орбіти астероїда становить 2.75 а. о. Спостереження показують наявність в астероїда супутника – астероїда із значно меншою масою. Оцініть найбільшу відстань між астероїдом 93 Мінерва та його супутником, за якої буде існувати ця гравітаційно зв'язана система.
- 2.28** Розглянемо галактику NGC 2885, що знаходиться у сузір'ї Лева. Вона складається з кулястого скупчення зір (ядра галактики) радіусом $R_0 = 4 \text{ кпк}$ та тонкого кільця радіусом $R_0 \leq r \leq 15R_0$. Прийmemo, що видима маса кільця набагато менша за масу ядра. Експериментальним шляхом встановлено, що лінійна швидкість зір у кільці не залежить від відстані до центру галактики і приблизно становить $v = 240 \text{ км/с}$. Знайдіть залежність густини темної матерії від відстані до центру галактики, якщо її розподіл є сферично-симетричний. Також оцініть співвідношення між масою ядра M_0 та масою гало темної матерії $M_{\text{ТМ}}$.

Розв'язки задач до розділу 2

2.1 Лінійна швидкість тіла на екваторі планети

$$v = \frac{2\pi R}{T},$$

Тоді

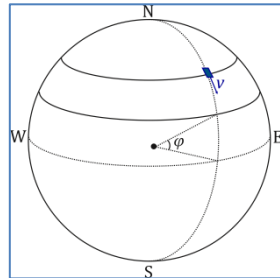
$$\frac{v_3}{v_M} = \frac{\frac{2\pi R_3}{T_3}}{\frac{2\pi R_M}{T_M}} = \left(\frac{R_3}{R_M}\right) \times \left(\frac{T_M}{T_3}\right).$$

Період обертання Місяця навколо осі збігається з його орбітальним періодом обертання навколо Землі (синхронне обертання) і дорівнює 27.3 доби.

Остаточно

$$\frac{v_3}{v_M} = \left(\frac{4}{1}\right) \times \left(\frac{27.3}{1}\right) = 109 \text{ разів.}$$

2.2 Як відомо (теорема про висоту полюсу світу над горизонтом), висота Полярної зорі дорівнює географічній довготі місцевості. Таким чином корабель пливе уздовж меридіана у напрямі зменшення широти (від N до S) з місцевості із широтою $\varphi_1 = 55^\circ$ у місцевість із широтою $\varphi_2 = 45^\circ$. Знайдемо шлях, який має подолати корабель плывучи з постійною швидкістю



$$l = vt = 2\pi R_3 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{360^\circ},$$

Звідси

$$v = 2\pi R_3 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{360^\circ t} = 2\pi \times 6378 \times \frac{55^\circ - 45^\circ}{360^\circ \times 24} = 46.4 \frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

2.3 Поверхнева гравітація

$$g = \frac{4}{3}\pi G\rho R.$$

Перша космічна швидкість

$$v_1 = \sqrt{gR}.$$

Таким чином, одержуємо

$$\frac{\rho_{\text{Мерк}}}{\rho_{\text{Марс}}} = \frac{g_{\text{Мерк}}}{g_{\text{Марс}}} \times \frac{R_{\text{Марс}}}{R_{\text{Мерк}}} = \frac{1.4}{1} = 1.4,$$

$$\frac{v_{1(\text{Мерк})}}{v_{1(\text{Марс})}} = \sqrt{\frac{g_{\text{Мерк}}}{g_{\text{Марс}}} \times \frac{R_{\text{Мерк}}}{R_{\text{Марс}}}} = \sqrt{\frac{1}{1.4}} = 0.85.$$

2.4 Максимальна висота стрибка

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Поверхнева гравітація

$$g = G \frac{M}{R^2}.$$

Таким чином, одержуємо

$$\frac{h_M}{h_3} = \frac{g_3}{g_M} = \left(\frac{M_3}{M_M}\right) \times \left(\frac{R_M}{R_3}\right)^2 = \left(\frac{81}{1}\right) \times \left(\frac{1}{3.66}\right)^2 = 6.$$

Отже, максимальна висота стрибка на поверхні Місяця могла би бути

$$h_M = 6 \times 2.45 \text{ м} = 14.7 \text{ м}.$$

2.5 Прискорення вільного падіння

$$g = G \frac{M}{R^2}.$$

Виразимо радіус планети через густину та масу. Оскільки

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3},$$

то

$$R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}.$$

Таким чином, залежність прискорення вільного падіння від маси планети M та її густини ρ має вигляд

$$g \sim MR^{-2} \sim (M\rho^2)^{1/3}.$$

Якщо маса планети збільшиться в m разів, а середня густина планети збільшиться в n разів, то

$$g' = g(m \cdot n^2)^{1/3}.$$

- 2.6 На поверхні Землі можна бігати без загрози «упасти» в космос зі швидкостями, що не перевищують першу космічну швидкість, яка для Землі становить 7.9 км/с. Отже будемо шукати розмір астероїда з умови, що його перша космічна швидкість така ж як і на поверхні Землі.

$$v_1 = \sqrt{gR} = R \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}.$$

$$R = \frac{v_1}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}} = \frac{7900}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi \times 6.67 \times 10^{-11} \times 3500}} = 8 \times 10^6 \text{ м} = 8000 \text{ км}$$

- 2.7 Як було показано в параграфі 2.2, ексцентриситет орбіти пов'язаний із відстанню до об'єкта у перицентрі та апоцентрі співвідношенням

$$e = \frac{r_A - r_{\Pi}}{r_A + r_{\Pi}} = \frac{r_A - 1}{r_A + 1},$$

З геометричних міркувань випливає, що

$$\frac{r_A}{r_{\Pi}} = \frac{d_{\Pi}}{d_A},$$

де d_{Π} та d_A кутові діаметри Місяця в перигеї та апогеї.

За допомогою лінійки визначасмо, що $d_{\Pi} = 3.6$ см, $d_A = 3.2$ см.

Таким чином, знаходимо, що ексцентриситет орбіти Місяця становить

$$e = \frac{\frac{d_{\Pi}}{d_A} - 1}{\frac{d_{\Pi}}{d_A} + 1} = \frac{\frac{3.6}{3.2} - 1}{\frac{3.6}{3.2} + 1} = 0.059.$$

Табличне значення ексцентриситету Місяця дорівнює 0.055.

- 2.8 Визначте ексцентриситет орбіти комети, якщо відомо, що її лінійна швидкість в перигелії більша у 4.5 разів за швидкість в афелії.

Ексцентриситет орбіти

$$e = \frac{r_A - r_{\Pi}}{r_A + r_{\Pi}} = \frac{\frac{r_A}{r_{\Pi}} - 1}{\frac{r_A}{r_{\Pi}} + 1},$$

Оскільки

$$v_A r_A = v_{\Pi} r_{\Pi},$$

то

$$\frac{r_A}{r_{\Pi}} = \frac{v_{\Pi}}{v_A} = 4.5,$$

Отже,

$$e = \frac{4.5 - 1}{4.5 + 1} = 0.64.$$

Такий ексцентриситет у комети 67P/Чурюмова-Герасименко.

- 2.9 Спочатку визначимо ексцентриситет орбіти Місяця

$$e = \frac{r_A - r_{\Pi}}{r_A + r_{\Pi}} = \frac{r_A}{r_{\Pi}} - 1$$

$$= \frac{33'15''}{29'38''} - 1 = \frac{33.25}{29.63} - 1$$

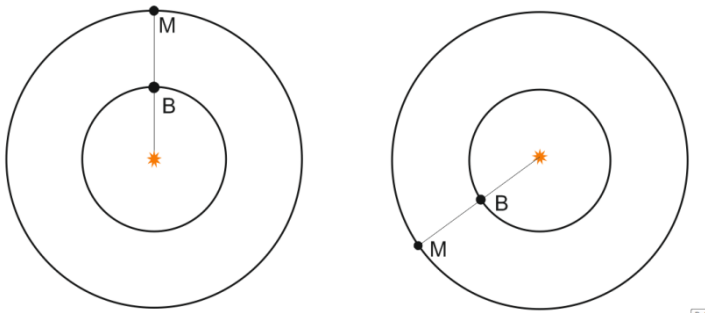
$$= \frac{33'15''}{29'38'' + 1} = \frac{33.25}{29.63 + 1} = 0,058.$$

Відстані від Землі до Місяця у перигеї та апогеї становлять

$$r_{\Pi} = a(1 - e) = 384\,400(1 - 0,058) = 362\,105 \text{ км.}$$

$$r_A = a(1 + e) = 384\,400(1 + 0,058) = 406\,695 \text{ км.}$$

2.10 Розглянемо схематично конфігурації планет у сполученнях



Два послідовних сполучення відбудуться через проміжок часу S , за який Венера пережене Марс на кут 360° . За час S планети повернуться навколо Сонця на кути

$$\varphi_B = \frac{360^\circ}{T_B} S, \quad \varphi_M = \frac{360^\circ}{T_M} S.$$

Тоді

$$\varphi_B - \varphi_M = 360^\circ = \left(\frac{360^\circ}{T_B} - \frac{360^\circ}{T_M} \right) S.$$

Звідси знаходимо мінімальний проміжок часу, через який повторюються сполучення Венери та Марса з Сонцем

$$S = \frac{T_M T_B}{T_M - T_B} = \frac{698 \times 225}{698 - 225} \cong 334 \text{ доби.}$$

2.11 Напишемо рівняння синодичного руху малої планети

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_{\Pi}},$$

Звідси орбітальний період малої планети

$$T_{\Pi} = \frac{ST_3}{S - T_3} = \frac{512 \times 365,2422}{512 - 365,2422} = 1274 \text{ діб} = 3,49 \text{ років.}$$

Середню відстань малої планети до Сонця знайдемо із третього закону Кеплера

$$a_{\Pi} = \sqrt[3]{T_{\Pi}^2} = \sqrt[3]{3,49^2} = 2,3 \text{ а. о.}$$

Таким чином, мала планета про яку йдеться у задачі, знаходиться в поясі астероїдів (2.2 а.о - 3.6 а.о).

2.12 На основі даних таблиці знаходимо інтервали часу між послідовними західними елонгаціями

$$T_1 = 120^d, \quad T_2 = 113^d, \quad T_3 = 114^d, \\ T_4 = 120^d, \quad T_5 = 115^d.$$

Синодичний період повторення західних елонгацій Меркурія знайдемо як середнє арифметичне

$$S = \frac{120 + 113 + 114 + 120 + 115}{5} = 116,4^d = 0,318 \text{ року.}$$

Заповнюємо таблицю відповідними датами

2015 рік	2016 рік	2017 рік
24 лютого	6 лютого	19 січня
24 червня	5 червня	17 травня
15 жовтня	28 вересня	12 вересня

На основі рівняння синодичного руху знаходимо сидеричний (зоряний) період обертання Меркурія

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_3},$$

$$T_M = \frac{ST_3}{S + T_3} = \frac{0,318 \times 1}{0,318 + 1} = 0,24 \text{ року.}$$

На основі третього закону Кеплера знаходимо відстань від Меркурія до Сонця

$$a_M = \sqrt[3]{T_M^2} = \sqrt[3]{0,24^2} = 0,386 \text{ а. о.}$$

- 2.13 Розрахуємо час повторення певної конфігурації Марса та Землі (синодичний період без урахування еліптичності орбіт)

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{Землі}}} - \frac{1}{T_{\text{Марса}}},$$

$$S = \frac{T_{\text{Землі}} T_{\text{Марса}}}{T_{\text{Марса}} - T_{\text{Землі}}} = \frac{365,26 \times 687}{687 - 365,26} = 780 \text{ діб.}$$

780 діб після 22 травня 2016 року припадає на 11 липня 2018 року (точний результат з урахуванням еліптичності дає 27 липня 2018 року). Юліанська дата на момент 1 січня 2000 року становить JD 2 451 545. Від 1 січня 2000 року до 11 липня 2018 року пройде

$$5 \times 366 + 13 \times 365 + 191 = 6766 \text{ діб.}$$

Отже у системі Юліанського датування наступне протистояння Марса відбудеться у день з номером

$$\text{JD } 2\,451\,545 + 6766 = \text{JD } 2\,458\,311.$$

- 2.14 Знайдемо проміжки часу між послідовними протистояннями

$$8.03.2016 - 7.04.2017: \quad 395 \text{ діб}$$

$$7.04.2017 - 9.05.2018: \quad 397 \text{ діб}$$

Таким чином середній синодичний період Юпітера $S = 396$ діб (точне значення 398,88 діб)

Протистояння у 2019 році: $9.05.2018 + 396 \text{ діб} = 9.06.2019$ (за ефемеридами Юпітера 10.06.2019)

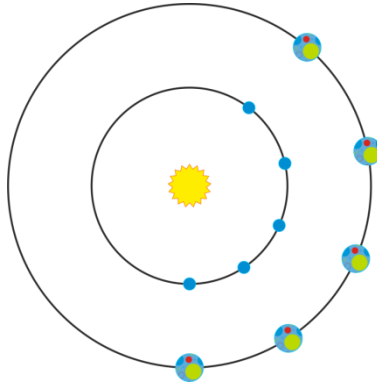
Протистояння у 2020 році: $9.06.2019 + 396 \text{ діб} = 9.07.2020$ (за ефемеридами Юпітера 14.07.2020)

2016	2017	2018	2019	2020
8 березня	7 квітня	9 травня	9 червня	9 липня

Знайдемо зоряний (сидеричний) період обертання Юпітера

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{\text{Ю}}}$$

$$T_{\text{Ю}} = \frac{ST_{\oplus}}{S - T_{\oplus}} = \frac{396 \times 365,2422}{396 - 365,2422} = 4702 \text{ діб} = 12,87 \text{ років}$$



- 2.15 Внутрішня планета А і зовнішня планета В при спостереженні з Землі мають однаковий синодичний період S . Чому дорівнює синодичний період планети А при спостереженні з планети В?

Позначимо сидеричні періоди обертання планет А та В навколо Сонця через T_A та T_B . Тоді за умовою задачі

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_3} \Rightarrow \frac{1}{T_A} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T_3}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_B} \Rightarrow \frac{1}{T_B} = \frac{1}{T_3} - \frac{1}{S}$$

Рівняння синодичного руху для планет А та В має вигляд

$$\frac{1}{S_{AB}} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} = \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{T_3} \right) - \left(\frac{1}{T_3} - \frac{1}{S} \right) = \frac{2}{S}$$

Таким чином, синодичний період планети А при спостереженні з планети В дорівнює

$$S_{AB} = \frac{S}{2}.$$

- 2.16 Період обертання визначається масою центрального тіла та великою піввіссю орбіти

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (2a_0)^3}{G(4M_0)}} = \sqrt{2}T_0 = \sqrt{2} \times 27.3 \text{ діб} = 38.6 \text{ діб}.$$

- 2.17 Спочатку визначимо радіус орбіти супутника (висоту супутника над поверхнею Землі). За другим законом Ньютона для руху тіла масою m по круговій орбіті радіусу r під дією сили Всесвітнього тяжіння збоку Землі масою M_3 знаходимо

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM_3}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_3}{r}}.$$

Період обертання по колу

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Тоді радіус геостационарної орбіти супутника

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_3 T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24} \times (24 \times 3600)^2}{4\pi^2}} = 42000 \text{ км}.$$

Довжина орбіти супутника

$$L = 2\pi r = 2\pi \times 42\,000 \text{ км} = 264\,000 \text{ км}.$$

Оскільки довжина конуса сонячної тіні від Землі приблизно дорівнює 1.4 млн км, то на висоті геостационарного супутника тінь можна вважати циліндричною з діаметром, що дорівнює

$$2R_3 = 2 \times 6378 \text{ км} = 12\,760 \text{ км}.$$

Тоді проміжок часу, упродовж якого геостационарний супутник Землі буде перебувати в тіні, становить

$$\Delta t = \frac{12760}{264000} \times 24 \text{ год} = 1,16 \text{ год} = 70 \text{ хв.}$$

2.18 За узагальненим третім законом Кеплера знаходимо

$$T_{\text{Фобос}}^2 = \frac{4\pi^2 r_{\text{Фобос}}^3}{GM_{\text{Марс}}}, \quad T_{\text{Місяць}}^2 = \frac{4\pi^2 r_{\text{Місяць}}^3}{GM_{\text{Земля}}},$$

Звідси

$$\begin{aligned} \frac{M_{\text{Земля}}}{M_{\text{Марс}}} &= \left(\frac{r_{\text{Місяць}}}{r_{\text{Фобос}}} \right)^3 \times \left(\frac{T_{\text{Фобос}}}{T_{\text{Місяць}}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{380000}{9300} \right)^3 \times \left(\frac{7,67}{27,3 \times 24} \right)^2 = 9,14. \end{aligned}$$

2.19 За третім законом Кеплера знаходимо

$$\frac{T_{\text{Європа}}^2}{T_{\text{Іо}}^2} = \frac{r_{\text{Європа}}^3}{r_{\text{Іо}}^3},$$

Звідси

$$\begin{aligned} T_{\text{Європа}} &= T_{\text{Іо}} \sqrt{\frac{r_{\text{Європа}}^3}{r_{\text{Іо}}^3}} \\ &= 42,47 \sqrt{\left(\frac{671100}{421800} \right)^3} = 85,23 \text{ год} = 85 \text{ год } 14 \text{ хв.} \end{aligned}$$

2.20 За узагальненим третім законом Кеплера знаходимо

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM},$$

Звідси визначаємо масу астероїда

$$\begin{aligned} M &= \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \\ &= \frac{4\pi^2 \times 1\,190\,000^3}{6,67 \times 10^{-11} \times (4,7 \times 24 \times 3600)^2} = 6,04 \times 10^{18} \text{ кг.} \end{aligned}$$

Середня густина речовини астероїда

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{6M}{\pi d^3}$$

$$= \frac{6 \times 6,04 \times 10^{18}}{\pi \times 215\,000^3} = 1160 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

- 2.21 Супутник Нептуна Тритон має радіус орбіти, що дорівнює радіусу орбіти Місяця навколо Землі, але робить один оберт навколо Нептуна за 6 діб. У скільки разів відрізняються маси Нептуна і Землі?

За узагальненим третім законом Кеплера знаходимо

$$T_{\text{Тритон}}^2 = \frac{4\pi^2 r_{\text{Тритон}}^3}{GM_{\text{Нептун}}}, \quad T_{\text{Місяць}}^2 = \frac{4\pi^2 r_{\text{Місяць}}^3}{GM_{\text{Земля}}}.$$

Звідси

$$\frac{M_{\text{Земля}}}{M_{\text{Нептун}}} = \left(\frac{r_{\text{Місяць}}}{r_{\text{Тритон}}}\right)^3 \times \left(\frac{T_{\text{Фобос}}}{T_{\text{Місяць}}}\right)^2 = \left(\frac{T_{\text{Фобос}}}{T_{\text{Місяць}}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{6}{27,3}\right)^2 = 0,048$$

- 2.22 Розрахуємо період обертання Габбла навколо Землі

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3,$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} a^3},$$

Велика піввісь орбіти космічного апарата

$$a = \frac{r_{\text{max}} + r_{\text{min}}}{2} = \frac{h_{\text{max}} + R_{\oplus} + h_{\text{min}} + R_{\oplus}}{2} = \frac{h_{\text{max}} + h_{\text{min}}}{2} + R_{\oplus}$$

$$= \frac{541 + 537}{2} + 6378 = 6917 \text{ км} = 6,917 \times 10^6 \text{ м}.$$

Одержуємо

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}} (6,917 \times 10^6)^3} = 5725 \text{ с}$$

$$= 95,4 \text{ хв} = 1,59 \text{ год.}$$

Кількість обертів Габбла навколо Землі за добу

$$N = \frac{t}{T} = \frac{24}{1,59} = 15.$$

- 2.23 Наступний перигелій комети відбудеться через проміжок часу, що дорівнює періоду обертання комети.

Із третього закону Кеплера знаходимо

$$T = \sqrt{a^3}.$$

Велика піввісь орбіти комети

$$a = \frac{r_{\text{п}} + r_{\text{л}}}{2} = \frac{0,33 \text{ а. о.} + 4,11 \text{ а. о.}}{2} = 2,22 \text{ а. о.}$$

Період обертання комети

$$T = \sqrt{2,22^3} = 3,31 \text{ року} = 1208 \text{ діб.}$$

Наступний після 10 березня 2017 року перигелій комети відбудеться 30 червня 2020 року.

- 2.24 а) Прискорення вільного падіння на поверхні планети

$$g = G \frac{M}{R^2},$$

$$\frac{g}{g_{\oplus}} = \frac{M/M_{\oplus}}{(R/R_{\oplus})^2} = \frac{0,772}{0,910^2} = 0,932,$$

$$g = 0,932 g_{\oplus} = 9,15 \text{ м/с}^2.$$

б) Масу зорі оцінимо на основі третього закону Кеплера, узагальненого Ньютоном

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2},$$

$$v = \frac{2\pi R}{T}.$$

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2},$$

$$\frac{M}{M_{\odot}} = \frac{\left(\frac{R}{1 \text{ а. о.}}\right)^3}{\left(\frac{T}{365.2422 \text{ діб}}\right)^2} = \frac{0.029^3}{\left(\frac{6.083 \text{ діб}}{365.2422 \text{ діб}}\right)^2} = 0.088.$$

$$M = 0.088 M_{\odot}.$$

- 2.25 а) Для розрахунку середньої відстані екзопланети до центральної зорі скористаємося третім законом Кеплера, узагальненого Ньютоном:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}.$$

Для спрощення обчислень, напишемо цей закон для системи Земля-Сонце:

$$T_{\oplus}^2 = \frac{4\pi^2 a_{\oplus}^3}{GM_{\odot}}.$$

Розділивши обидві формули, одержимо

$$\frac{a^3}{a_{\oplus}^3} = \left(\frac{T}{T_{\oplus}}\right)^2 \frac{M}{M_{\odot}} = \left(\frac{258}{365}\right)^2 \frac{1.25 M_{\odot}}{M_{\odot}} = 0.625$$

Звідси

$$a = \sqrt[3]{0.625} = 0.855 \text{ а. о.}$$

- б) Поверхнева гравітація на планеті Kepler-65e та Землі

$$g = G \frac{M}{R^2},$$

$$g_{\oplus} = G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}.$$

Звідси

$$g = g_{\oplus} \frac{M}{M_{\oplus}} \left(\frac{R_{\oplus}}{R} \right)^2 = 9,8 \times \frac{200}{1} \times \left(\frac{1}{14} \right)^2 = 10 \frac{M}{c^2},$$

$$g \cong g_{\oplus}.$$

2.26 Нехай маса чорної діри буде M . Спочатку знайдемо радіус Шварцшильда

$$R = \frac{2GM}{c^2}.$$

Умовно розділимо астронавта масою m та висотою $2L$ на дві рівних частини, які будуть розміщуватися під горизонтом подій та над ним. Тоді припливна сила на дві частини астронавта дорівнює різниці сил тяжіння на них збоку чорної діри

$$\begin{aligned} F &= \frac{GmM}{2(R-L)^2} - \frac{GmM}{2(R+L)^2} = \frac{GmM}{2R^2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{L}{R}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{L}{R}\right)^2} \right) \\ &\cong \frac{GmM}{2R^2} \left(1 + \frac{2L}{R} - 1 + \frac{2L}{R} \right) = \frac{2GmML}{R^3} \\ &= \frac{2GmML}{\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3} = \frac{mLc^6}{4G^2M^2}. \end{aligned}$$

З іншого боку

$$F \leq mg.$$

Тоді

$$\frac{mLc^6}{4G^2M^2} \leq mg.$$

Нехай зріст астронавта буде 1.8 метра, тоді для маси чорної діри отримуємо оцінку

$$M \geq \frac{c^3}{2G} \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{(3 \times 10^8)^3}{2 \times 6.67 \times 10^{-11}} \sqrt{\frac{0,9}{9,8}} = 6.1 \times 10^{34} \text{ кг} \cong 31000 M_{\odot}.$$

2.27 Орбіту астероїда 93 Мінерва будемо вважати коловою із радіусом $r = 2.75$ а.о. Нехай відстань між астероїдом та супутником буде L . Критерієм стійкості системи трьох тіл Сонце-астероїд-супутник (\odot -A-C) є та умова, що прискорення, якого набуває супутник під дією астероїда, буде не меншим аніж різниця прискорень супутника та астероїда під дією Сонця. Математично ця умова має вигляд

$$a_{CA} \geq a_{C\odot} - a_{A\odot}.$$

На основі закону Всесвітнього тяжіння одержуємо

$$a_{CA} = G \frac{m_A}{L^2};$$

$$a_{C\odot} = G \frac{m_{\odot}}{(r-L)^2};$$

$$a_{A\odot} = G \frac{m_{\odot}}{r^2}.$$

Таким чином, критерій стійкості

$$\frac{m_A}{L^2} \geq \frac{m_{\odot}}{(r-L)^2} - \frac{m_{\odot}}{r^2}.$$

Оскільки $L \ll r$, то

$$\frac{m_A}{L^2} \geq \frac{m_{\odot}}{r^2} \left(1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{L}{r}\right)^2} \right) \cong \frac{2m_{\odot}L}{r^3}.$$

Таким чином, радіус орбіти супутника має задовольняти умові

$$L \leq \sqrt[3]{\frac{m_A}{2m_{\odot}}} r.$$

Маса астероїда сферичної форми

$$m_A = \rho_A V_A = \frac{4}{3} \pi R_A^3 \rho_A$$

$$= \frac{4}{3} \pi \times (156\,000)^3 \times 1900 = 3.02 \times 10^{19} \text{ кг.}$$

Оцінимо одержане значення граничного радіусу орбіти супутника, за якого він буде залишатися супутником астероїда 93 Мінерва

$$L_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3.02 \times 10^{19}}{2 \times 2.00 \times 10^{30}}} \times 2.75 \text{ а. о.} = 0.000538 \text{ а. о.} = 81 \text{ 000 км.}$$

2.28 Спочатку оцінімо масу ядра з другого закону Ньютона

$$\frac{v^2}{R_0} = \frac{GM_0}{R_0^2}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{R_0 v^2}{G} \\ &= \frac{4000 \times 206265 \times 1.496 \times 10^{11} \times (240 \times 10^3)^2}{6.67 \times 10^{-11}} \\ &= 1.1 \times 10^{41} \text{ кг.} \end{aligned}$$

Напишемо закон обертання для зорі, що розміщена у кільці, тобто за межами ядра

$$v^2 = G \frac{M_0 + M_{\text{ТМ}}(r)}{r}.$$

Звідси одержуємо

$$\begin{aligned} v^2 r &= GM_0 + GM_{\text{ТМ}}(r), \\ v^2 dr &= GdM_{\text{ТМ}}(r) = 4\pi G\rho_{\text{ТМ}}(r)r^2 dr. \end{aligned}$$

Остаточно, густина темної матерії

$$\rho_{\text{ТМ}}(r) = \frac{v^2}{4\pi G r^2} = \frac{M_0}{4\pi R_0 r^2}.$$

Оцінімо масу темної матерії у галактиці NGC 2885

$$M_{\text{ТМ}} = \int \rho_{\text{ТМ}}(r) dV = \int_{R_0}^{15R_0} \rho_{\text{ТМ}}(r) 4\pi r^2 dr = \frac{M_0}{R_0} \int_{R_0}^{15R_0} dr = 14M_0.$$

Розділ 3. Елементи астрофізики

3.1 Фотометрія зір

Вивчення фізичної природи небесних світил засноване на кількісному та якісному аналізі їхнього електромагнітного випромінювання. Мірою інтенсивності видимого випромінювання небесних світил є *блиск* – освітленість, що створена небесним світилом на приймачі променевої енергії (око, фотопластинка, світлочутлива матриця, тощо).

Блиск світил вимірюється не у фізичних одиницях освітленості (люксах), а у відносних одиницях – *зоряних величинах*. Оцінка блиску світил зоряними величинами була запроваджена давньогрецьким астрономом Гіппархом. Вона заснована на фізіології сприйняття світла людським оком¹, яке чітко відрізняє різницю інтенсивності джерел світла, якщо одне із них яскравіше другого приблизно у 2.5 рази. Найяскравіші зорі Гіппарх назвав зорями першої величини, менш яскраві – зорями другої величини і т.д., а ледве помітні шостої величини. Блиск кожної наступної групи зір зменшується в 2.512 разів у порівнянні з попередньою.

Надалі блиск світила будемо позначати через E , а видиму зоряну величину m (від лат. *magnitude* – величина). Для кількісного розрахунку зоряних величин використовують правило Погсона: при відмінності блиску світил у 100 разів різниця їх зоряних величин дорівнює 5. Відповідно до цього правила має місце формула

$$m_2 - m_1 = 2.512 \lg \frac{E_1}{E_2}.$$

¹ Така властивість ока описується психофізіологічним законом Вебера-Фехнера (XIX ст.). Згідно з цим законом: зміна будь-якого сприйняття прямо пропорційна відносній зміні подразнення, тобто, коли інтенсивність якої-небудь фізичної величини збільшувати у геометричній прогресії, то відчуття цієї величини буде збільшуватись в арифметичній прогресії. Як наслідок, відчуття пропорційне логарифму інтенсивності стимулювання.

При різниці зоряних величин $\Delta m = 1^m$ блиск світил відрізняється у 2.512. Чим світило яскравіше, тим меншою його є зоряна величина.

Шкала зоряних величин є відносною, тому виникає необхідність вибору певного «еталонного» світила для відліку блиску. Вимірювання блиску світил також залежить від властивостей приймачів випромінювання, кожен із яких має свою спектральну чутливість. Сумарний потік випромінювання небесним світилом у всьому діапазоні спектру характеризується болометричною зоряною величиною.

Еталонним світилом у системі візуальних зоряних величин є α Малої Ведмедиці ($m = 2.12^m$). Декілька яскравих зір на небосхилі Північної півкулі мають зоряну величину, близьку до нуля (Вега $m = 0.03^m$, Арктур $m = -0.05^m$). Найяскравіша зоря нашого зоряного неба – Сіріус (α Великого Пса) має зоряну величину $m = -1.58^m$.

У планет блиск змінюється в залежності від умов їх освітлення Сонцем. Максимальний блиск Венери становить $m = -4.9^m$, Юпітера – $m = -2.94^m$. Візуальний блиск Сонця досягає значення $m = -26.74^m$, а Місяця у повні $m = -12.74^m$.

Зауважимо, що незброєне людське око ще може сприймати світила із блиском, що відповідає приблизно шостій зоряній величині. Для візуального спостереження світил із зоряною величиною, що перевищує 6^m , використовують оптичні телескопи. Граничну зоряну величину світила m_T , яке ще видно у телескоп (для світила, що перебуває у зеніті), називають *проникною силою телескопа*. Ця величина визначається діаметром вхідного отвору телескопа D (діаметр об'єктива або дзеркала).

Нехай світило має для незброєного ока із діаметром зіниці приблизно $d = 6$ мм видимий блиск $m_{\text{око}}$, тоді дивлячись у телескоп із діаметром дзеркала D це світило буде мати видимий блиск m_T . Оскільки світловий потік, який реєструється спостерігачем, пропорційний до площі детектора, тобто площі зіниці ока або площі дзеркала телескопа, то одержуємо

$$m_T - m_{\text{око}} = 2.5 \lg \frac{E_{\text{око}}}{E_T} = 5 \lg \frac{d}{D} = 5 \lg \frac{6}{D} = 3.9^m - 5 \lg D_{\text{мм}}.$$

$$m_T = m_{\text{око}} + 3.9^m - 5 \lg D_{\text{мм}}.$$

Припустимо у вас є телескоп із діаметром вхідного отвору 80 см. Тоді спостерігаючи в телескоп за Юпітером у максимумі блиску ($m_{\text{орко}} = -2.94^m$) будемо його бачити як світило з блиском

$$m_{\text{T}} = -2.94^m + 3.9^m - 5 \lg 800 = -13.5^m.$$

Для проникної сили телескопа із діаметром вхідного отвору 80 см одержуємо значення

$$m_{\text{ТГ}} = 6^m - 3.9^m + 5 \lg D_{\text{мм}} = 2.1^m + 5 \lg D_{\text{мм}} = 16.6^m.$$

Таким чином, у такий телескоп можна спостерігати об'єкти з видимим блиском до 16.6^m .

Для телескопів важливими параметрами є *роздільна здатність* α_R та *кутове збільшення* Γ . Роздільна здатність телескопа

$$\alpha_R = \frac{1.22\lambda}{D}.$$

Якщо діаметр вхідного отвору вимірювати в міліметрах, а роздільну здатність у секундах дуги, то одержимо формулу зручну для розрахунків

$$\alpha_R'' = \frac{140}{D_{\text{мм}}}.$$

За означенням, кутове збільшення телескопа

$$\Gamma = \frac{F}{f}.$$

Тоді

$$\beta = \Gamma\alpha.$$

Тут λ – довжина хвилі електромагнітного випромінювання (для оптичних телескопів приймають значення 550 нм), F – фокусна відстань об'єктива, f – фокусна відстань окуляра, α – реальні кутові розміри об'єкта спостереження, β – кутові розміри об'єкта при спостереженнях у телескоп. Зауважимо, що людське око може розгледіти об'єкт, у якого кутові розміри не менші за $1' = 60''$.

При спостереженнях Крабоподібної туманності (об'єкт M1 або NGC 1952), яка має видимої зоряної величини $+8.4^m$ та кутові розміри $420'' \times 290''$, у телескоп із діаметром вхідного отвору $D = 80$ см і двадцятикратним кутовим збільшенням $\Gamma = 20\times$ будемо її бачити як світило із видимим блиском

$$m_{\text{T}} = 8.4^m + 3.9^m - 5 \lg 800 = -2.2^m,$$

та кутовими розмірами

$$(420'' \cdot 20) \times (290'' \cdot 20) = 2.3^\circ \times 1.6^\circ.$$

Видимий блиск зорі визначається не лише світністю (потужністю випромінювання) L , а й відстанню до неї r . Тобто дві зорі з однаковою потужністю, які знаходяться на різних відстанях до спостерігача, будуть мати різні візуальні зоряні величини. Щоб порівняти потужності випромінювання двох зір, необхідно вирахувати їх зоряні величини, які б вони мали, знаходячись на однаковій відстані до спостерігача. Прийнято порівнювати блиск зір на відстанях 10 пк. Зоряна величина світила на відстані 10 пк називається *абсолютною зоряною величиною* M .

Як відомо, освітленість обернено пропорційна квадрату відстані від джерела до приймача променевої енергії. Тому для світила, що знаходиться на відстані r , видима зоряна величина пов'язана з абсолютною зоряною величиною співвідношенням

$$M - m = 2.512 \lg \frac{E_r}{E_{10 \text{ пк}}} \cong 5 \lg \frac{10 \text{ пк}}{r} = 5 - 5 \lg r_{\text{пк}}.$$

Звідси для абсолютної зоряної величини одержуємо

$$M = m + 5 - 5 \lg r_{\text{пк}}.$$

Зазвичай відстань до зір r визначається через річний паралакс π зі співвідношення $r = 1/\pi''$, де паралакс вимірюється у секундах градуса, а відстань у парсеках. Тоді

$$M = m + 5 + 5 \lg \pi''.$$

Якщо візуальний блиск Сонця $m_\odot = -26.74^m$, то йому відповідає абсолютна зоряна величина $M_\odot = +4.83^m$, тобто на відстані 10 пк Сонце виглядало б ледь помітною зорею.

Знаючи абсолютну зоряну величину, можна оцінити *світність зорі* L , тобто потужність її випромінювання. Якщо позначити через E освітленість створену зорею на межі земної атмосфери, то її світність

$$L = 4\pi r^2 E,$$

де r відстань від Землі до зорі.

Світність двох зір пов'язана із їх абсолютними зоряними величинами співвідношенням

$$\lg \frac{L_1}{L_2} = 0.4(M_2 - M_1).$$

Звідси світність зорі, виражена в одиницях світності Сонця,

$$L = 10^{0.4(M_\odot - M)}.$$

З іншого боку, світність зорі визначається потужністю її електромагнітного випромінювання. Для розрахунку цієї потужності використовують теорію випромінювання абсолютно чорного тіла. Згідно із *законом Стефана-Больцмана*, інтегральна потужність випромінювання одиниці площі поверхні абсолютно чорного тіла за усіма частотами визначається абсолютною температурою тіла T

$$u = \sigma T^4, \quad \sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4).$$

Тоді світність зорі радіусом R і температурою поверхні T визначається співвідношенням

$$L = uS = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Світність Сонця визначається на основі вимірювання сонячної сталої q – кількості електромагнітної енергії, яку одержує від Сонця площадка 1 м^2 , що знаходиться поблизу поверхні планети за межами її атмосфери і розміщена перпендикулярно до сонячних променів, за одну секунду. Вимірювання показують, що сонячна стала для Землі

$$q = 1.36 \text{ кВт}/\text{м}^2.$$

З іншого боку

$$q = \frac{L_{\odot}}{4\pi a^2}.$$

Тоді світність Сонця

$$\begin{aligned} L_{\odot} &= 4\pi a^2 q \\ &= 4 \times 3.14 \times (149.6 \times 10^9)^2 \times 1360 \\ &= 3.82 \times 10^{26} \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Тепер можемо оцінити ефективну температуру поверхні Сонця.

$$T_{\odot} = \sqrt[4]{\frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2 \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{3.82 \times 10^{26}}{4\pi (696 \times 10^6)^2 \times 5.67 \times 10^{-8}}} = 5768 \text{ К}.$$

На небесній сфері також знаходяться світила, які створюють світловий потік не за рахунок власних джерел енергії, а шляхом відбивання електромагнітного випромінювання від зір. Наприклад планети сонячної системи та їх супутники створюють свій блиск шляхом відбивання випромінювання Сонця. Відношення потоку відбитого поверхнею небесного світила у всіх напрямках випромінювання до падаючого потоку випромінювання називається *альбедо*.

Розглянемо питання про спектральну класифікацію зір. Аналіз спектрів випромінювання зір надає нам інформацію про фізичні умови в атмосфері зорі, оскільки саме там формується спектр. Зокрема можемо одержати інформацію про хімічний склад атмосфери зорі, ефективну температуру, швидкість осьового обертання, поверхневу гравітацію тощо.

Відповідно до закону зміщення Віна максимум потоку випромінювання локалізується у певному діапазоні довжин хвиль поблизу λ_{\max} , який залежить від температури

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad b = 0.00289 \text{ м} \cdot \text{К}.$$

Таким чином, зорі різних спектральних класів мають різну ефективну температуру й різний візуальний колір: від яскраво-блакитного (гарячі зорі з температурою 50 000–60 000 К) до темно-червоного (холодні зорі з температурою 1000–3000 К).

Загальноживаною є класифікація спектральних класів розроблена Вільямом Морганом та Філіпом Кінаном (йоркська класифікація), що ґрунтується на значеннях ефективної температури зорі та її світності. Класифікація, що заснована лише на ефективній температурі, називається гарвардською класифікацією спектральних класів.

Для позначення спектральної класифікації зір послідовно вживають латинські літери O, B, A, F, G, K та M, де клас O відповідає найгарячішим зорям, а класи K та M – найхолоднішим зорям.²

Оскільки ефективна температура зорі визначає її спектральний клас, а також світність, то між світністю та спектральним класом має існувати залежність. Така залежність була побудована 1910 року Ейнаром Герцшпрунгом та Генрі Ресселом. Вона має форму діаграми і використовується для класифікації зір та відповідає сучасній уяві про зоряну еволюцію. *Діаграма Герцшпрунга–Рессела*, або діаграма «спектр-світність» зображена на Рис. 3.1.

Для більш прецизійної класифікації спектральних властивостей зір у межах одного класу, Морган та Кінан, разом з літерами для

² Щоб легше запам'ятати цю послідовність використовують мнемонічну фразу «O Be A Fine Girl, Kiss Me».

позначення підкласів, запропонували використовувати арабські цифри від 0 до 9.

Другим параметром у їхній класифікації є світність зорі, яка відповідає певній ширині та формі ліній поглинання в спектрах. Було виявлено, що ці характеристики залежать від поверхневої гравітації, а значить, від маси та розмірів зорі.

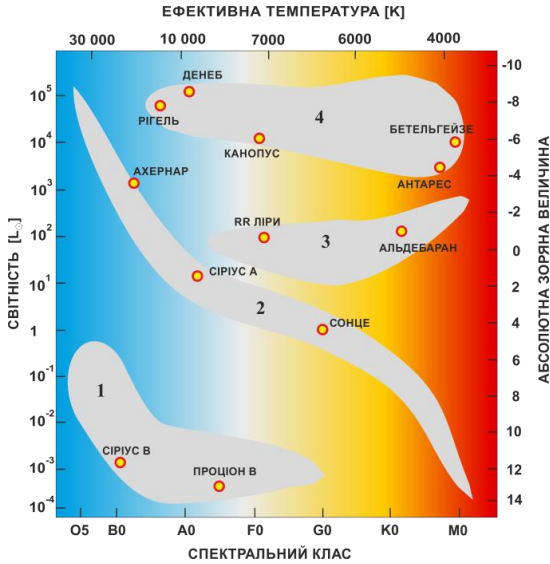


Рис. 3.1. Діаграма Герцшпрунга-Рессела.

Розрізняють наступні класи світності:

- 0 – гіпергіганти;
- Ia – яскраві надгіганти;
- Ib – надгіганти;
- II – яскраві гіганти;
- III – гіганти;
- IV – субгіганти;
- V – зорі головної послідовності;
- VI – субкарлики;
- VII – білі карлики.

Наприклад, Сонце належить до спектрального класу G2V і, відповідно, є зорею головної послідовності. Найяскравіша зоря неба північної півкулі, Сіріус, має спектральний клас A1V, а отже, є білою зорею головної послідовності.

Основні фізичні характеристики різних спектральних класів наведено у Табл. 3.1.

Клас зорі	Температура К	Колір	Радіус R_{\odot}	Маса M_{\odot}	Світність L_{\odot}
O	$\geq 33\ 000$	синій	≥ 6.6	≥ 16	$\geq 30\ 000$
B	10 000–30 000	біло-блакитний	1.8–6.6	2.1–16	25–30 000
A	7 500 – 10 000	білий	1.4–1.8	1.4–2.1	5–25
F	6 000 – 7 500	біло-жовтуватий	1.15–1.4	1.04–1.4	1.5–5
G	5 200 – 6 000	жовтий	0.96–1.15	0.8–1.04	0.6–1.5
K	3 700 – 5 200	помаранчевий	0.7–0.96	0.45–0.8	0.08–0.6
M	$\leq 3\ 700$	червоний	≤ 0.7	≤ 0.45	≤ 0.08

Таблиця 3.1

Джерелом енергії зір є реакції термоядерного синтезу, тобто ядра зірок є природними реакторами. Головну роль у виділенні енергії відіграють реакції перетворення водню у гелій. Перетворення водню у гелій у надрах зір із масою меншою або порядку сонячної відбувається за протон-протонним циклом. У масивніших зір домінуючим є вуглецево-азотний цикл.

Зменшення маси зорі зі світністю L на Δm за час Δt шляхом випромінювання описується формулою Айнштейна

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = L \Delta t.$$

Тут $c = 3 \times 10^8$ м/с є швидкість світла у вакуумі.

3.2 Ефекти просторового руху зір

Якщо зіставити сучасне розташування зір на небосхилі із давніми зоряними каталогами (наприклад Альмагестом Птолемея, II ст.), то можна помітити, що майже за 2000 років їх положення суттєво змінилися. Ці зміщення у положеннях зір не пов'язані із періодичними змінами координат завдяки руху Землі навколо власної осі та навколо Сонця. Вони є наслідком просторового руху зір.

Кутове зміщення видимого розташування зорі на небесній сфері за один рік, пов'язане із її рухом відносно Сонячної системи називають *власним рухом зорі*.

Розрізняють зміну у положенні зорі по прямому піднесенню μ_α та по схиленню μ_δ (Рис. 3.2).

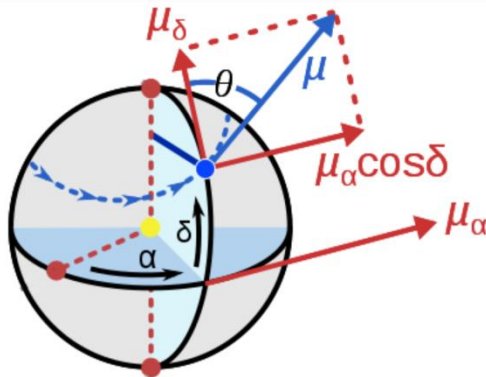


Рис. 3.2. Компоненти власного руху зорі.

Результуючий власний рух зорі визначають за формулою

$$\mu = \sqrt{\mu_\delta^2 + (\mu_\alpha \cos \delta)^2}.$$

Дані про власні рухи зір наведені у зоряних каталогах, наприклад у каталозі європейського космічного агентства «Hipparcos» (режим доступу <http://sci.esa.int/hipparcos/>). Значення власного руху задають у секундах дуги на рік (″/рік). Рекордсменом за власним рухом серед зір є зоря Барнарда (сузір'я Змієноця), яку називають «летючою зорею». Її власний рух становить $\mu = 10.36''/\text{рік}$.

Власний рух (кутова швидкість об'єкта на небесній сфері) визначає *тангенціальну* складову лінійної швидкості руху зорі у просторі (Рис. 3.3).

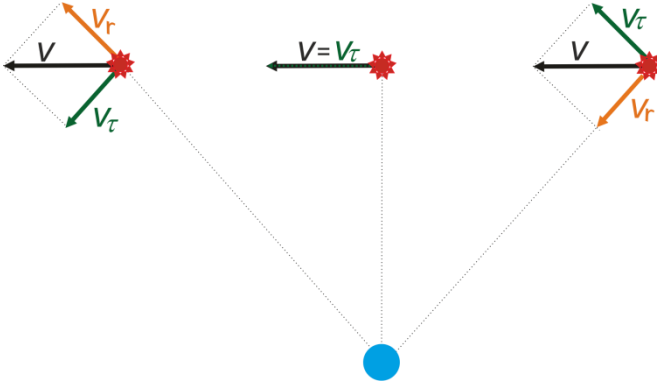


Рис. 3.3. Тангенціальна та радіальна компоненти відносної просторової швидкості зорі.

Для зорі, яка знаходиться на відстані r від сонячної системи знаходимо

$$V_t = \mu r = \frac{\mu''}{206265} r.$$

Якщо виразити відстань до зорі через паралакс, то одержимо робочу формулу

$$V_t = 4.74 \frac{\mu''}{\pi''} \left(\frac{\text{КМ}}{\text{с}} \right).$$

Тут власний рух слід підставляти в секундах дуги на рік, а паралакс у секундах дуги.

Поряд з тангенціальною складовою просторової швидкості зоря має також радіальну компоненту, яка визначається як проекція відносної просторової швидкості зорі на промінь зорю. Радіальну компоненту просторової швидкості зорі називають променевою швидкістю та позначають V_r . Променева швидкість має знак «+», якщо об'єкт віддаляється від спостерігача, та знак «-», коли об'єкт наближається.

Таким чином, у будь-який момент часу відносна просторова швидкість зорі дорівнює

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_t^2}.$$

Як зазначалося вище, тангенціальну складову швидкості можна визначити на основі спостережень за кутовим зміщенням зорі. Променева швидкість зорі визначається на основі ефекту Доплера, який полягає у зміні довжини хвилі (або частоти), яку реєструє спостерігач через відносний рух джерела та спостерігача.

Променеву швидкість зорі визначають на основі аналізу зміщення спектральних ліній випромінювання зорі відносно лабораторних спектрів. Зсув спектральної лінії у бік коротких хвиль («блакитний зсув», Рис. 3.4), свідчить що джерело наближається до спостерігача, а зсув у бік довгих хвиль («червоний зсув», Рис. 3.5) означає, що джерело віддаляється.



Рис. 3.4 Блакитний зсув. Спектральні лінії зміщені у бік коротких хвиль (нижній спектр) по відношенню до лабораторних (верхній спектр). Дане джерело світла рухається до спостерігача.



Рис. 3.5 Червоний зсув. Спектральні лінії зміщені у бік довгих хвиль (нижній спектр) по відношенню до лабораторних (верхній спектр). Дане джерело світла рухається від спостерігача.

Червоний чи *блакитний зсув* позначаються літерою z . Кількісно він визначається відносною зміною довжини хвилі, що реєструється, λ та лабораторною довжиною λ_0

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}.$$

З іншого боку, розрахунок зсуву на основі ефекту Доплера дає наближену формулу (для невеликих значень зсуву $|z| \ll 1$)

$$z = \frac{V_r}{c}.$$

У випадку значного зсуву ($|z| \gtrsim 0.1$) необхідно використовувати точну релятивістську формулу

$$z + 1 = \sqrt{\frac{c + V_r}{c - V_r}}.$$

Таким чином, при $V_r \ll c$, променеву швидкість розраховують за формулою

$$V_r = zc = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} c.$$

Доплерівська спектроскопія відіграє важливу роль у відкритті екзопланетних систем. Зокрема цей метод дозволяє виявити масивну екзопланету (щонайменше кілька земних мас), яка знаходиться поблизу центральної зорі. Така подвійна система здійснює рух навколо спільного центру мас. Центральна зоря буде рухатися по своїй орбіті, періодично наближаючись та віддаляючись відносно земного спостерігача. Накладання руху центра мас екзопланетної системи відносно Землі та обертального руху її центральної зорі навколо центра мас призводить до періодичних коливань променевої швидкості.

Статистичний аналіз спектрів даної зорі дозволяє визначити період та амплітуду коливань променевої швидкості. Доплерівська спектроскопія дає можливість не лише виявити екзопланету, але й оцінити відстань екзопланети до центральної зорі, період її обертання та нижню межу її маси. Станом на 2020 рік, близько 30% екзопланет було відкрито за допомогою ефекту Доплера.

Ефект Доплера також використовується для оцінки відстаней до галактик. Галактики є надзвичайно віддаленими об'єктами. Відстань до найближчих із них вимірюється в мегапарсеках (найближчою до Сонячної системи є галактика Андромеда (M31). Відстань до неї становить 778 кпк).

У визначенні відстаней до галактик важливу роль відіграє ефект Доплера. Як показують спостереження, лінії у спектрах усіх віддалених галактик ($r \geq 10$ Мпк) зсунуті у бік червоного кольору. Таким чином галактики віддаляються одна від одної. Швидкість розбігання галактик може бути визначена на основі червоного зсуву.

Аналізуючи червоний зсув у спектрах галактик, Едвін Габбл у 1929 році виявив, що наближено швидкість віддалення галактик від Землі V_r прямо пропорційна відстані до них r . Математичний запис закону Габбла має вигляд

$$V_r = Hr$$

Коефіцієнт пропорційності H називається постійною Габбла. Її значення становить $H = 74.2$ (км/с)/Мпк.³

Вимірюючи червоний зсув у спектрах галактики, можемо розрахувати відстань до неї за формулою

$$r = \frac{c}{H}z.$$

³ Значення постійної Габбла, яке систематично уточнюється, наведено станом на 18.03.2020. Її первинне значення, розраховане зі спостережень Габблом, становило $H = 500$ (км/с)/Мпк.

Задачі до розділу 3

- 3.1** Розсіяне зоряне скупчення має видимий візуальний блиск 1^m . Припускаючи, що скупчення складається лише із зір шостої зоряної величини, яке максимальне число зір можна побачити неозброєним оком?
- 3.2** Різниця зоряних величин двох зір, що мають однакову світність становить 5^m . У скільки разів одна зоря знаходиться далі від іншої?
- 3.3** Кулясте зоряне скупчення містить сто однакових зір восьмої зоряної величини. Визначте сумарну видиму зоряну величину даного скупчення. Чи можна таке зоряне скупчення побачити «неозброєним оком», тобто без телескопа?
- 3.4** У сузір'ї Великого Лева (Leo Major, LMa) в 2004 р. спалахнула яскрава зоря, що за блиском була тільки трохи слабшою від Венери. Її позначили SN2004A та віднесли до типу Ia. Про зорі цього типу відомо, що в максимумі блиску їх абсолютна зоряна величина є однаковою і дорівнює -19.3^m . Видима зоряна величина SN2004A у максимумі блиску становила -4.3^m . Яка відстань від Землі до SN2004A?
- 3.5** Галактика Цівочне колесо (M101, NGC 5457), яка знаходиться у сузір'ї Велика Ведмедиця, знаходиться на відстані 6.4 млн парсеків від Землі і має видиму зоряну величину 7.8^m . Припустімо, що дана галактика складається тільки із зір, подібних нашому Сонцю. Скільки таких зір має містити галактика, якщо абсолютна зоряна величина Сонця становить 4.8^m ?
- 3.6** Зоряна система складається з двох зір. Видима зоряна величина першого компонента системи становить $m_1 = -3^m$, а другого $m_2 = -1^m$. Визначити сумарну видиму зоряну величину подвійної зоряної системи.

3.7 У двох однакових галактиках спалахнули дві однакові наднові зорі типу SN Ia, причому в максимумі блиску видима зоряна величина надвної в першій галактиці становить $+17^m$, а надвної у другій: $+15^m$.

А) Яка з галактик знаходиться на більшій відстані від Землі?

Б) У скільки разів відрізняються відстані від Землі до цих галактик?

3.8 Абсолютна зоряна величина центральної зорі у системі Trappist-1 становить 18.4^m . Визначте видиму зоряну величину цієї зорі з поверхні екзопланети Trappist-1c, яка віддалена від центральної зорі на середню відстань 0.0158 а.о. Порівняйте його із видимою зоряною величиною Сонця з поверхні Землі.

3.9 Визначити видиму зоряну величину Землі для спостерігача, що знаходиться на поверхні Місяця у момент «повної Землі». Альbedo Землі 0.43, альbedo Місяця 0.07, видима зоряна величина Місяця $m_M = -12.5^m$, середній радіус Землі $R_3 = 6378$ км, середній радіус Місяця $R_M = 1738$ км.

3.10 Упродовж місяця видимий діаметр Юпітера зменшився від $50''$ до $47''$. Чому буде дорівнювати видима зоряна величина Юпітера у кінці місяця, якщо на початку місяця вона дорівнювала $m = -2.9^m$?

3.11 «Kepler-65» Екзопланетна система Kepler-65, яка знаходиться у сузір'ї Ліра, складається із центральної зорі Kepler-65 та чотирьох планет земної групи. Найбільшу схожість із Землею має четверта екзопланета цієї системи – Kepler-65e, яка була відкрита у 2019 році. На даний момент відсутні дані спостережень про середню відстань цієї екзопланети від центральної зорі. На основі даних наведених у таблиці, виконайте наступні завдання:

А) розрахуйте середню відстань екзопланети Kepler-65e від центральної зорі Kepler-65 (в а.о.)

Б) розрахуйте «сонячну сталу» для екзопланети Kepler-65e, тобто кількість електромагнітної енергії, яку отримує 1 м^2 поверхні екзопланети за 1 секунду, якщо промені падають перпендикулярно до її поверхні. Порівняйте одержаний результат із сонячною сталою для Землі. Зробіть висновки про придатність даної екзопланети для життя за умови, що на ній присутня атмосфера.

Параметр	Значення
Маса зорі Kepler-65	$1.25 M_{\odot}$
Ефективна температура поверхні зорі Kepler-65	6211 K
Радіус зорі Kepler-65	$1.41 R_{\odot}$
Орбітальний період обертання екзопланети Kepler-65e навколо зорі	258 діб
Сонячна стала для Землі	1367 Вт/м^2
Ефективна температура поверхні Сонця	5778 K

Тут M_{\oplus} – маса Землі, R_{\odot} – радіус Сонця, M_{\odot} – маса Сонця.

- 3.12** У 386 році китайські літописці відмітили появу в сузір'ї Стрільця «зорі-гості». За сучасними оцінками її видима зоряна величина була $+1.5^m$, а відстань до зорі оцінюється у 16 000 світлових років. Визначити, що спостерігали древні китайці: спалах нової чи наднової зорі?
- 3.13** У лютому 2013 року над Челябінськом вибухнув метеорит. За оцінками метеорне тіло мало поперечний діаметр порядку 15 м. Якщо допустити, що це тіло мало кулясту форму і альbedo як у Місяця (7%), визначити, який був його блиск на відстані Місяця від Землі? Вважати, що освітлена сторона цього метеорного тіла була повернута до Землі в момент спостереження. Яким повинен бути діаметр об'єктива телескопа D (мм), щоб зафіксувати це тіло?

- 3.14** Змінна зоря типу UV Кита, що має температуру поверхні 3000 К під час спалаху змінила свій блиск на 2 зоряні величини. У максимумі спалаху зі спектрофотометричних спостережень встановлено, що температура склала 12000 К. Оцініть, яка частина площі зорі охоплена спалахом. При розв'язанні вражайте, що спалах відбувся поблизу центру видимого диску зорі.
- 3.15** Оцінити температуру поверхні малої планети Седна у момент, коли вона знаходиться в афелії орбіти, якщо велика піввісь її орбіти $a = 484$ а.о., ексцентриситет $e = 0.84$. Альбеда Седни становить 0.32. Температура поверхні Сонця 5770 К. Радіус Сонця 696 000 км.
- 3.16** Видима зоряна величина Веги (α Ліри) дорівнює 0.03^m , її річний паралакс $0.13''$. Визначити, до якого спектрального класу вона відноситься, якщо її ефективна температура $T = 9300$ К. Оцінити значення маси Веги у порівнянні з масою Сонця. Встановити колір зорі.
- 3.17** Лінія водню 6563 \AA у спектрі зорі, яка швидко обертається, має ширину $\Delta\lambda = 6.5 \text{ \AA}$. Вражаючи, що розширення лінії відбувається завдяки обертанню зорі, оцініть якою є лінійна швидкість обертання зорі на екваторі. Вражайте, що промінь зору лежить у площині обертання зорі.
- 3.18** Деяка подвійна система зір з масами компонентів $m_1 = 12M_\odot$, $m_2 = 3M_\odot$ здійснює обертання навколо спільного центру мас за 12 діб. Менш масивний компонент є рентгенівським пульсаром із власним періодом пульсацій 0.15 с (у системі відліку, в якій він є нерухомим). Знайдіть відносну та абсолютну зміну періоду пульсара унаслідок ефекту Доплера. Вражайте, що орбіта пульсара є коловою, і промінь зору спостерігача лежить у площині орбіти.
- 3.19** Зоря Барнарда, станом на 2020 рік, має екваторіальні координати $\alpha = 17^h 57^m 47.5^s$, $\delta = +04^\circ 45' 04.2''$. Компоненти власного руху зорі становлять $\mu_\alpha = -0.863''/\text{рік}$, $\mu_\delta =$

10.38''/рік. Паралакс зорі 0.547''. Радіальна швидкість зорі дорівнює $V_r = -110.6$ км/с. На основі цих даних визначте:

А) положення зорі на небесній сфері станом на 2020 рік. У межі якого сузір'я потрапляє зоря? Чи доступна зоря Барнарда для спостережень із території України станом на 2020 рік?

Б) якими будуть екваторіальні координати зорі через тисячу років? Вкажіть положення зорі на небесній сфері. Якщо просторовим рухом сузір'я знехтувати, то чи залишиться зоря у межах того самого сузір'я?

В) в який бік і наскільки зміщена лінія водню H_β у спектрі зорі (лабораторне значення довжини хвилі лінії $\lambda_0 = 486.1$ нм)? Яке значення має просторова швидкість зорі? Який кут утворює просторова швидкість зорі з напрямком «зоря – земний спостерігач»?

Г) розрахуйте час (у роках), через який відбудеться (чи відбулося) мінімальне зближення зорі Барнарда із Сонцем за умови, що швидкість зорі Барнарда відносно Сонця є сталою. Знайдіть мінімальну відстань між Сонцем і зорею Барнарда у цей час;

Д) видима зоряна величина зорі Барнарда станом на 2020 рік становить 9.50^m . Якою вона буде (чи була) на мінімальній відстані до Сонця?

3.20 Еліптична галактика М49 (NGC 4472) є найяскравішою зі скупчень галактик у сузір'ї Діви. Червоне зміщення у спектрах випромінювання галактики становить 0.0033. Видима зоряна величина галактики $+9.4^m$. Визначте світність галактики виражену у світностях Сонця.

Розв'язки задач до розділу 3

- 3.1 Неозброєним оком можна побачити зорі до шостої зоряної величини. Нехай число зір шостої величини буде N . Блиск однієї такої зорі позначимо E_1 . Тоді сумарний блиск усіх зір $E_N = NE_1$. Для різниці зоряних величин одержуємо

$$m_N - m_1 = 2.5 \lg \frac{E_1}{E_N} = 2.5 \lg \frac{1}{N} = -2.5 \lg N.$$

З іншого боку

$$m_N - m_1 = 1^m - 6^m = -5^m.$$

Отже,

$$\begin{aligned} 2.5 \lg N &= 5 \\ N &= 10^2 = 100. \end{aligned}$$

Таким чином, максимальне число зір з яких може складатися зоряне скупчення, і які ще можна спостерігати неозброєним оком, становить 100.

- 3.2 Нехай перша зоря має видиму зоряну величину m_1 і знаходиться на відстані r_1 . Другій відповідають значення m_2 і r_2 .

Тоді

$$m_1 - m_2 = 2.5 \lg \frac{E_2}{E_1} = 2.5 \lg \frac{\frac{L}{4\pi r_2^2}}{\frac{L}{4\pi r_1^2}} = 5 \lg \frac{r_1}{r_2}.$$

Одержуємо

$$5 = 5 \lg \frac{r_1}{r_2}.$$

Звідси

$$\frac{r_1}{r_2} = 10^1 = 10.$$

- 3.3 Для зорі восьмої зоряної величини маємо $m_1 = 8^m$. Нехай видимий блиск однієї такої зорі буде E_1 . Тоді сто зір будуть створювати блиск $E_{100} = 100E_1$. Знайдемо видиму зоряну величину, що відповідає такому блискові

$$m_{100} - m_1 = 2.5 \lg \frac{E_1}{E_{100}} = -2.5 \lg 100 = -5^m.$$

Остаточно

$$m_{100} = -5^m + m_1 = -5^m + 8^m = 3^m.$$

Оскільки сумарний блиск $3^m < 6^m$, то дане скупчення можна спостерігати неозброєним оком.

- 3.4 Скористаємося зв'язком між абсолютною зоряною величиною M та видимою m

$$M = m + 5 - 5 \lg r_{\text{пк}}.$$

Звідси

$$\lg r_{\text{пк}} = \frac{1}{5}(5 - 4.3 + 19.3) = 4.$$

$$r_{\text{пк}} = 10^4 \text{ пк} = 10\,000 \text{ пк}.$$

- 3.5 Знайдемо абсолютну зоряну величину галактики

$$m - M = 5 \lg \frac{r}{10 \text{ пк}},$$

$$7.8^m - M = 5 \lg \frac{6.4 \times 10^6}{10} = 29,$$

$$M = 7.8^m - 29 = -21.2^m.$$

Скористаємося формулою Погсона

$$M_{\odot} - M = 2.5 \lg \frac{E}{E_{\odot}}.$$

Якщо галактика складається із N сонцеподібних зір, то сумарний світловий потік від галактики

$$E = NE_{\odot}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}M_{\odot} - M &= 2.5 \lg N, \\4.8^m - (-21.2^m) &= 2.5 \lg N, \\26 &= 2.5 \lg N, \\\lg N &= 10.4, \\N &= 10^{10.4} = 2.5 \times 10^{10}.\end{aligned}$$

- 3.6 Зоряна система складається з двох зір. Видима зоряна величина першого компонента системи становить $m_1 = -3^m$, а другого $m_2 = -1^m$. Визначити сумарну видиму зоряну величину подвійної зоряної системи. Нехай блиск першої зорі становить E_1 , а другої - E_2 . Тоді

$$m_1 - m_2 = 2.5 \lg \frac{E_2}{E_1}.$$

Звідси

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^{0.4(m_1 - m_2)} = 10^{0.4(-3+1)} = 0.158.$$

Позначимо через m_3 видиму зоряну величину зоряної системи.

Маємо

$$\begin{aligned}m_1 - m_3 &= 2.5 \lg \frac{E_3}{E_1} = 2.5 \lg \frac{E_1 + E_2}{E_1} = 2.5 \lg \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \\-3^m - m_3 &= 2.5 \lg(1 + 0.158) = 0.16^m.\end{aligned}$$

Остаточно, видима зоряна величина системи зір

$$m_3 = -3^m - 0.16^m = -3.16^m.$$

- 3.7 Оскільки спалахнули однакові наднові зорі типу SN Ia, то їх світності є однаковими $L_1 = L_2 = L$. Нехай перша зоря має видиму зоряну величину m_1 і знаходиться на відстані від Землі r_1 . Другій відповідають значення m_2 і r_2 .

Тоді

$$17 - 15 = 2.5 \lg \frac{E_2}{E_1} = 2.5 \lg \frac{\frac{L}{4\pi r_2^2}}{\frac{L}{4\pi r_1^2}} = 5 \lg \frac{r_1}{r_2}.$$

Одержуємо

$$2 = 5 \lg \frac{r_1}{r_2}.$$

Звідси

$$\frac{r_1}{r_2} = 10^{0.4} = 2.5.$$

Отже, на більшій відстані знаходиться перша галактика. Відстані до Землі відрізняються у 2,5 рази.

- 3.8 Нехай m_T видима зоряна величина зорі Trappist-1 з поверхні екзопланети Trappist-1c. Тоді

$$m_T = M + 5 \lg \frac{r}{10 \text{ пс}},$$

$$m_T = 18.4^m + 5 \lg \frac{0.0158}{10 \times 206265} = -22.2^m.$$

Для порівняння, видима зоряна величина Сонця з поверхні Землі становить -26.7^m .

- 3.9 Знайдемо освітленість, яку створює Сонце на поверхні Землі

$$E_3 = \frac{L_\odot}{4\pi a^2}.$$

Тоді «світність» Землі, тобто відбитий світловий потік від Сонця поверхнею Землі

$$L_3 = E_3 \times \pi R_3^2 A_3.$$

Тут A_3 - сферичне альbedo.

Для освітленості створеною Землею на поверхні Місяця одержуємо

$$E_{M3} = \frac{L_3}{2\pi r_{M3}^2} = \frac{R_3^2 A_3 L_\odot}{8a^2 r_{M3}^2}.$$

Множник 1/2 замість 1/4 пов'язаний із тим, що сонячне світло відбивається лише у половину півсфери.

Аналогічно можемо одержати вираз для освітленості створеної Місяцем на поверхні Землі

$$E_{3M} = \frac{L_M}{2\pi r_{M3}^2} = \frac{R_M^2 A_M L_\odot}{8(a + r_{M3})^2 r_{M3}^2}.$$

Для різниці видимих зоряних величин одержимо

$$m_M - m_3 = 2.5 \lg \frac{E_{3M}}{E_{M3}} = 2.5 \lg \frac{\frac{R_M^2 A_M L_\odot}{8(a + r_{M3})^2 r_{M3}^2}}{\frac{R_3^2 A_3 L_\odot}{8a^2 r_{M3}^2}},$$

$$m_M - m_3 = 2.5 \lg \frac{R_M^2 A_M a^2}{R_3^2 A_3 (a + r_{M3})^2} \approx 2.5 \lg \frac{A_M R_M^2}{A_3 R_3^2}.$$

Підставимо числові значення

$$-12.5^m - m_3 \approx 2.5 \lg \frac{0.07 \times 1738^2}{0.43 \times 6378^2} = -3.6^m.$$

Остаточно, видима зоряна величина Землі для спостерігача, що знаходиться на поверхні Місяця у момент «повної Землі»,

$$m_3 = -12.5^m + 3.6^m = -8.9^m.$$

- 3.10** Зміна видимої зоряної величини пов'язана зі зміною відстані від Юпітера до Землі. Видимий кутовий діаметр визначається зі співвідношення

$$\operatorname{tg} \frac{d}{2} = \frac{R}{r},$$

де R – радіус Юпітера, r – відстань від Юпітера до Землі. Тоді

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\operatorname{tg} \frac{d_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{d_2}{2}} \approx \frac{d_1}{d_2} = \frac{50''}{47''} = 1.064.$$

Зміна видимої зоряної величини

$$\Delta m = m_2 - m_1 = 2.5 \lg \frac{E_1}{E_2} = 2.5 \lg \frac{r_2^2}{r_1^2} = 5 \lg 1.064 = 0.13^m.$$

Видима зоряна величина Юпітера у кінці місяця

$$m_2 = m_1 + \Delta m = -2.9^m + 0.13^m = -2.77^m.$$

- 3.11** А) Для розрахунку середньої відстані екзопланети до центральної зорі скористаємося третім законом Кеплера, узагальненого Ньютоном:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM},$$

Для спрощення обчислень, напишемо цей закон для системи Земля–Сонце:

$$T_{\oplus}^2 = \frac{4\pi^2 a_{\oplus}^3}{GM_{\odot}}.$$

Розділивши обидві формули, одержимо

$$\frac{a^3}{a_{\oplus}^3} = \left(\frac{T}{T_{\oplus}}\right)^2 \frac{M}{M_{\odot}} = \left(\frac{258}{365}\right)^2 \frac{1,25 M_{\odot}}{M_{\odot}} = 0,625.$$

Звідси

$$a = \sqrt[3]{0,625} = 0,855 \text{ а.о.}$$

Б) Кількість електромагнітної енергії, яку випромінює зоря в системі Kepler-65 за одиницю часу становить

$$L = \sigma T^4 \times 4\pi R^2.$$

Тоді «сонячна стала» для екзопланети

$$q = \frac{L}{4\pi a^2} = \sigma T^4 \times \frac{R^2}{a^2}.$$

Для Землі сонячна стала

$$q_{\oplus} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a_{\oplus}^2} = \sigma T_{\odot}^4 \times \frac{R_{\odot}^2}{a_{\oplus}^2}.$$

Остаточно

$$q = q_{\oplus} \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4 \times \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \times \left(\frac{a_{\oplus}}{a}\right)^2,$$

$$q = q_{\oplus} \left(\frac{6211}{5778}\right)^4 \times \left(\frac{1,41}{1}\right)^2 \times \left(\frac{1}{0,855}\right)^2 = 3,63 q_{\oplus},$$

$$q = 3,63 \times 1367 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = 4962 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

3.12 Знайдемо абсолютну зоряну величину «зорі-гості»

$$M = m + 5 - 5 \lg r_{\text{лк}} = 1,5^m + 5 - 5 \lg \frac{16\,000}{3,26} = -12^m.$$

При спалахові нової зорі її абсолютна зоряна величина у максимумі блиску знаходиться в межах: $-8^m \leq M \leq -7^m$. Таким чином, відбувся спалах наднової. Її назва SN 386.

3.13 Позначимо видиму зоряну величину метеориту m , а Місяця $m_{\text{М}}$. Тоді для різниці видимих зоряних величин одержимо

$$\begin{aligned}
 m - m_M &= 2.5 \lg \frac{E_{\text{Місяця}}}{E_{\text{Метеорита}}} = 2.5 \lg \frac{R_{\text{Місяця}}^2}{R_{\text{Метеорита}}^2} \\
 &= 5 \lg \frac{3474000}{15} = 26.8^m.
 \end{aligned}$$

Якщо видима зоряна величина Місяця у повні $m_M = -12.7^m$, то максимально можлива зоряна величина метеориту

$$m = m_M + 26.8^m = -12.7^m + 26.8^m = 14.1^m.$$

Неозброєним оком таке небесне тіло побачити не можна. Знайдемо мінімальний діаметр об'єктива телескопа, необхідного щоби зафіксувати тіло. Скористаємося формулою проникної сили телескопа

$$m_T = 6^m - 3.9^m + 5 \lg D_{\text{мм}}.$$

Звідси

$$\begin{aligned}
 14.1^m &= 6^m - 3.9^m + 5 \lg D_{\text{мм}}, \\
 5 \lg D_{\text{мм}} &= 12, \\
 D_{\text{мм}} &= 10^{2.4} = 252 \text{ мм}.
 \end{aligned}$$

- 3.14 Будемо вважати, що спалах відбувся поблизу центру видимої півкулі зорі. Світність зорі до спалаху L_1 пов'язана з її температурою T_1 та площею поверхні її видимої півкулі S_1 співвідношенням

$$L_1 = S_1 \sigma T_1^4.$$

Додаткова світність зорі під час спалаху, який охопив поверхню зорі площею S_2 становить

$$L_2 = S_2 \sigma T_2^4.$$

Тоді сумарна світність зорі у момент спалаху

$$L = L_1 + L_2 = \sigma(S_1 T_1^4 + S_2 T_2^4).$$

Зміна видимого блиску після спалаху

$$\Delta m = m_2 - m_1 = 2.5 \lg \frac{L_1}{L_2} = 2.5 \lg \frac{S_1 T_1^4}{S_1 T_1^4 + S_2 T_2^4} = -2^m,$$

$$\frac{S_1 T_1^4 + S_2 T_2^4}{S_1 T_1^4} = 10^{0.8} = 6.3,$$

$$1 + 256 \times \frac{S_2}{S_1} = 6.3,$$

$$\frac{S_2}{S_1} = 0.02 = 2\%.$$

Таким чином, спалах охопив 2% площі поверхні зорі.

3.15 Освітленість, яку створює Сонце на Седні

$$E = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a^2(1+e)^2} = \frac{\sigma T_{\odot}^4 4\pi R_{\odot}^2}{4\pi a^2(1+e)^2}.$$

За одиницю часу планета отримує енергію

$$\frac{W}{t} = (1-A)ES = \frac{(1-A)\sigma T_{\odot}^4 4\pi R_{\odot}^2}{4\pi a^2(1+e)^2} \pi R_{\text{Седна}}^2.$$

В умовах термодинамічної рівноваги, планета випромінює стільки ж енергії як і поглинає. Тому, відповідно до закону Стефана-Больцмана, одержуємо

$$\frac{W}{t} = \sigma T_{\text{Седна}}^4 4\pi R_{\text{Седна}}^2 = \frac{(1-A)\sigma T_{\odot}^4 4\pi R_{\odot}^2}{4\pi a^2(1+e)^2} \pi R_{\text{Седна}}^2.$$

Звідси

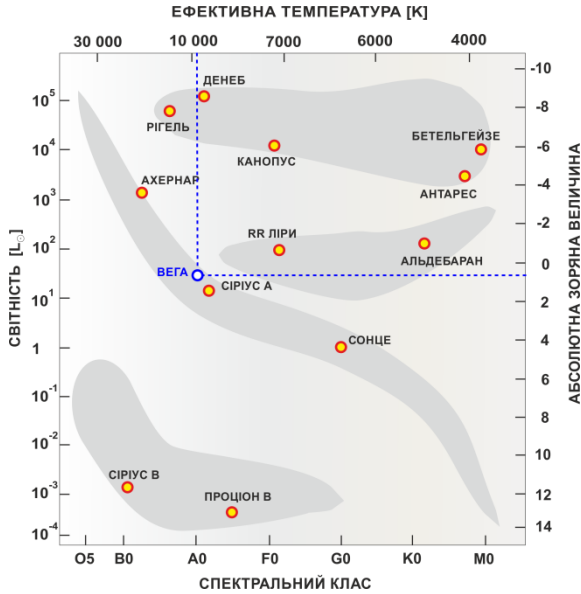
$$T_{\text{Седна}} = T_{\odot} \sqrt[4]{\frac{(1-A)R_{\odot}^2}{4a^2(1+e)^2}},$$

$$T_{\text{Седна}} = 5770 \sqrt[4]{\frac{(1-0.32)(696 \times 10^6)^2}{4 \times (484 \times 149.6 \times 10^9)^2(1+0.84)^2}} = 8.5 \text{ К}.$$

3.16 Спектральний клас можемо визначити за допомогою діаграми Герцшпрунга – Рассела. Для цього потрібно мати два параметра: ефективну температуру T та абсолютну зоряну величину M . На основі заданих в умові параметрів знаходимо

$$M = m + 5 + 5 \lg \pi'' = 0.03 + 5 + 5 \lg 0.13 = 0.60^m.$$

Позначаємо на діаграмі Герцшпрунга – Рессела точку з координатами $(T, M) = (9300 \text{ К}, 0.60^M)$.



Помічаємо, що Vega потрапила в область головної послідовності і відноситься до спектрального класу A0V.

На основі таблиці 3.1 визначаємо, що маса Веги має порядок $2M_{\odot}$. Колір зорі – білий.

- 3.17 При обертанні зорі навколо своєї осі діаметрально протилежні точки створюють електромагнітне випромінювання, одне з яких має блакитний, а інше – червоний зсув. Ці зсуви є однаковими за модулем, тому $\delta\lambda = 2\Delta\lambda$, де $\Delta\lambda$ доплерівське зміщення. Застосовуючи формулу ефекту Доплера, одержуємо

$$\delta\lambda = 2\Delta\lambda = 2\lambda_0 \frac{V_r}{c}.$$

Звідси знаходимо, що лінійна швидкість точок на екваторі зорі

$$V_r = \frac{c\delta\lambda}{2\lambda_0} = \frac{3 \times 10^8 \times 6.5}{2 \times 6563} = 1.49 \times 10^5 \text{ м/с} = 149 \text{ км/с}.$$

3.18 Частота випромінювання, яку реєструє земний спостерігач, буде змінюватися навколо значення власного періоду пульсацій рентгенівського пульсара $P_0 = 0.15$ с. Це пов'язано з ефектом Доплера, що виникає завдяки орбітальному рухові пульсара навколо спільного центру мас подвійної системи зір. Розрахуємо відповідну швидкість. Для цього спочатку визначимо радіуси орбіт подвійної системи. Застосуємо третій закон Кеплера та умову стійкості центру мас системи

$$T^2 = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)^3}{G(m_1 + m_2)}, \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

На основі цих співвідношень знаходимо радіус орбіти рентгенівського пульсара

$$a_2 = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{15M_{\odot}GT^2}{4\pi^2}},$$

$$a_2 = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{15 \times 2 \times 10^{30} \times 6.67 \times 10^{-11} \times (12 \times 24 \times 3600)^2}{4\pi^2}},$$

$$a_2 = 3.03 \times 10^{10} \text{ м} = 0.20 \text{ а.о.}$$

Тоді орбітальна швидкість рентгенівського пульсара

$$V = \frac{2\pi a_2}{T} = \frac{2 \times 3.14 \times 3.03 \times 10^{10}}{12 \times 24 \times 3600} = 184000 \text{ м/с.}$$

Відносна зміна періоду пульсацій

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta(c\lambda)}{c\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}.$$

Використовуючи формулу ефекту Доплера

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{V}{c},$$

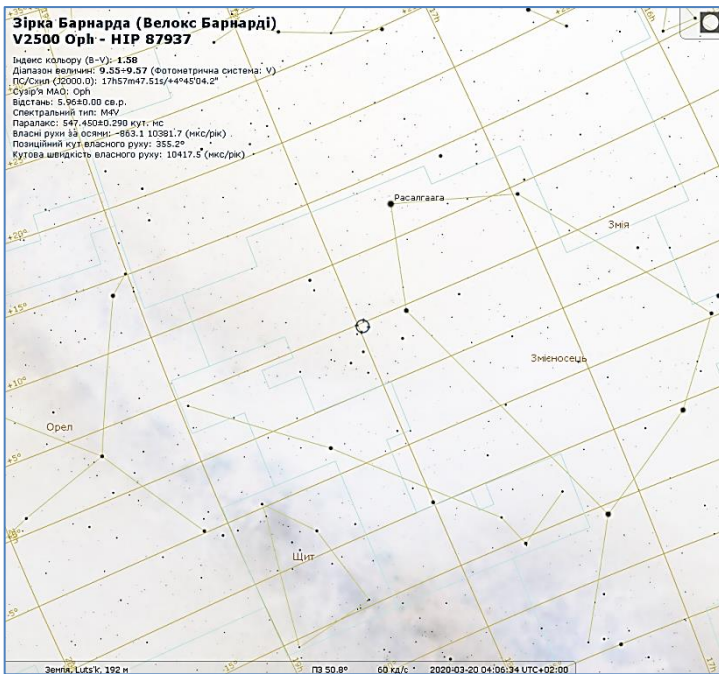
знаходимо

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{V}{c} = \frac{184000}{3 \times 10^8} = 6 \times 10^{-4}.$$

Абсолютна зміна періоду пульсацій

$$\Delta P = \frac{\Delta P}{P_0} \times P_0 = 6 \times 10^{-4} \times 0,15 \text{ с} = 90 \text{ мкс.}$$

- 3.19 А) Внизу наведено скріншот вікна віртуальної обсерваторії Stellarium. Місце розташування – Луцьк. Дата 20.03.2020 року. Час – 04:06. Положення зорі Барнарда на небесній сфері показано кружечком. Зоря знаходиться у сузір'ї Змієносець. Робимо висновок, що у 2020 році зоря Барнарда доступна для спостережень із території України.



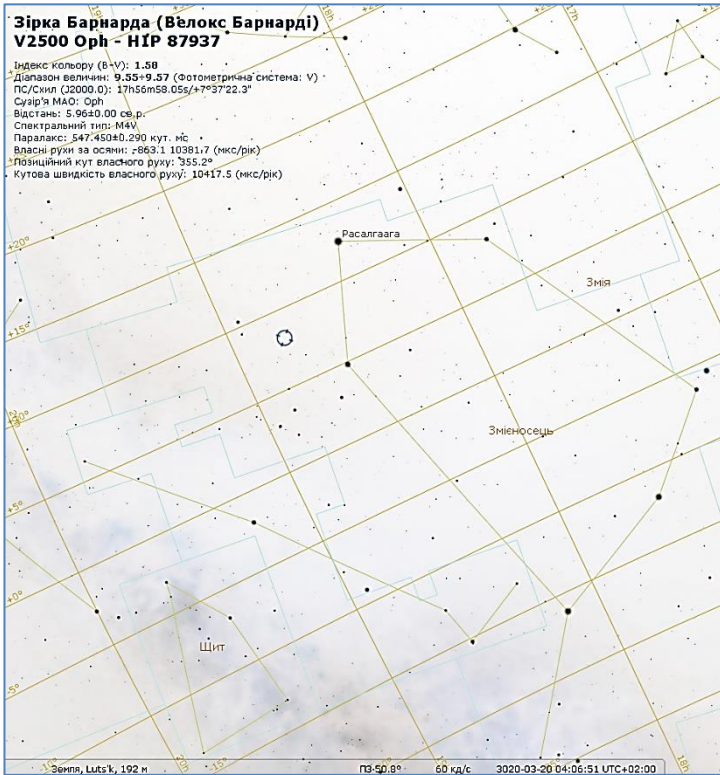
- Б) розрахуємо екваторіальні координати зорі через проміжок часу $\Delta t = 1000$ років,

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \mu_\alpha \Delta t \\ &= 17^{\text{h}}57^{\text{m}}47,5^{\text{s}} + (-0,863''/\text{рік}) \times 1000 \text{ років} \\ &= 17^{\text{h}}57^{\text{m}}47,5^{\text{s}} - 863'' = 17^{\text{h}}57^{\text{m}}47,5^{\text{s}} - 57,5^{\text{s}} \end{aligned}$$

$$= 17^{\text{h}}56^{\text{m}}50.0^{\text{s}}$$

$$\begin{aligned}\delta &= \delta_0 + \mu_{\delta}\Delta t = 04^{\circ}45'04.2'' + 10.38''/\text{рік} \times 1000 \text{ років} \\ &= 04^{\circ}45'04.2'' + 10380'' = 07^{\circ}38'04.2''.\end{aligned}$$

Зоря надалі залишиться поблизу сузір'я Змієносець.



В) Оскільки променева швидкість зорі від'ємна, то зоря наближається до нас, а у її спектрах відбувається блакитне зміщення (довжина хвилі зменшується). Розрахуємо величину зміщення

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{V_r}{c} = -486.1 \text{ нм} \times \frac{110.6}{300\,000} = -0.18 \text{ нм} = -1.8 \text{ \AA}.$$

Для розрахунку просторової швидкості спочатку знайдемо її тангенціальну складову

$$V_{\tau} = 4.74 \frac{\mu''}{\pi''} = 4.74 \frac{\sqrt{\mu_{\delta}^2 + (\mu_{\alpha} \cos \delta)^2}}{\pi''},$$

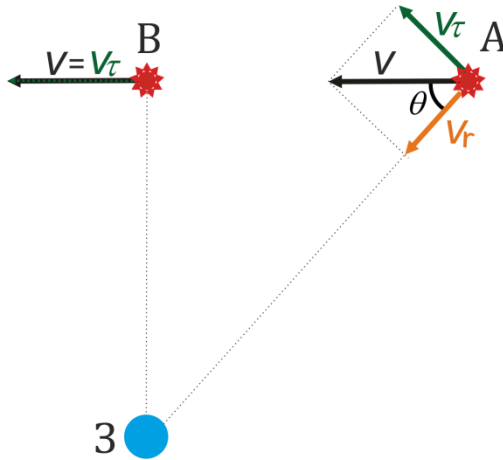
$$V_{\tau} = 4.74 \frac{\sqrt{(10.38''/\text{рік})^2 + (-0.863''/\text{рік} \times \cos 4.75^\circ)^2}}{0.547''},$$

$$V_{\tau} = 90.26 \text{ км/с.}$$

Тоді просторова швидкість зорі Барнарда

$$V = \sqrt{V_{\tau}^2 + V_r^2} = \sqrt{(-110.6)^2 + 90.26^2} = 142.8 \text{ км/с.}$$

Позначимо кут, який утворює просторова швидкість зорі з напрямком «зоря – земний спостерігач», через θ (рис. внизу)



Знаходимо

$$\cos \theta = \frac{V_r}{V} = \frac{110.6}{142.8} = 0.7745, \quad \theta = 39.2^\circ$$

Г) мінімальне зближення зорі Барнарда із Сонцем відбудеться, коли зоря буде в позиції В. Час руху зорі від положення А до В дорівнює

$$\Delta t = \frac{AB}{V} = \frac{A3 \cos \theta}{V}.$$

Відстань від зорі до сонячної системи на момент 2020 року становить

$$A3 = \frac{1}{\pi''} = \frac{1}{0,547''} = 1,83 \text{ пк} = 5,64 \times 10^{13} \text{ км}.$$

Тоді

$$\Delta t = \frac{5,64 \times 10^{13} \text{ км} \times 0,7745}{142,8 \text{ км/с}} = 3,06 \times 10^{11} \text{ с} = 9695 \text{ років}.$$

Мінімальна відстань між Сонцем і зорею Барнарда у цей час

$$B3 = A3 \operatorname{tg} \theta = 1,83 \text{ пк} \times \operatorname{tg} 39,2^\circ = 1,49 \text{ пк}.$$

Д) Зміна видимої зоряної величини

$$m_2 - m_1 = 5 \lg \frac{r_2}{r_1}.$$

Тоді на мінімальній відстані до сонячної системи зоря Барнарда буде мати видиму зоряну величину

$$m_2 = 9,50^m + 5 \lg \frac{1,49}{1,83} = 9,05^m.$$

3.20 Застосовуємо закон Габбла і визначимо відстань до галактики

$$v = Hr,$$

$$r = \frac{v}{H} = \frac{cz}{H},$$

$$r = \frac{3 \times 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}} \times 0,0033}{74,2 \text{ (км/с) / Мпк}} = 13,3 \text{ Мпк}.$$

Тоді абсолютна зоряна величина галактики

$$M = m + 5 - 5 \lg r = 9,4 + 5 - 5 \lg(13,3 \times 10^6),$$

$$M = -16,2^m.$$

Скористаємося зв'язком між абсолютною зоряною величиною та світністю

$$M_{\odot} - M = 2.5 \lg \frac{L}{L_{\odot}},$$

$$L = 10^{0.4(M_{\odot} - M)} L_{\odot},$$

$$L = 10^{0.4(4.8+16.2)} L_{\odot} = 2.5 \times 10^8 L_{\odot}.$$

Таким чином, світність M49 становить 2.5×10^8 світностей Сонця.

Література для подальшого вивчення

1. Шигорін П.П. Вибрані питання астрономії та астрофізики. Луцьк, 2020. 136 ст.
2. Пришляк М.П., Кравцова О.М. Астрономія: Підручник для 11 класу ЗЗСО, Харків: Ранок, 2019. 272 ст.
3. Камін О.Л., Камін О.О. Космічна Одиссея (цікава олімпіада з астрономії, фізики Космосу, фізики Землі, фізики польоту). Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2016. 224 с.
4. Бурий А.Р. Астрономічна олімпіада: базові завдання, Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, 2018. 207 с.
5. Aniket S. Problems and Solutions: International Olympiads on Astronomy and Astrophysics, Published by Universities Press (India), 2015. 304 p.

Предметний покажчик

абсолютна зоряна величина.....	99	закони Кеплера.....	66
азимут світила.....	7	зеніт.....	4
альbedo.....	100	зенітна відстань світила.....	8
аналема.....	51	зоряна доба.....	16
астрономічна одиниця.....	24	зоряний час.....	16
афелій.....	67	істинний сонячний час.....	17
балдж.....	64	кульмінація світила.....	6
блакитний зсув.....	106	кутове збільшення телескопа.....	98
блиск світила.....	96	кутовий діаметр світила.....	25
велика піввісь.....	67	лінійний радіус світила.....	26
вертикал.....	5	математичний горизонт.....	5
верхня планета.....	68	надир.....	4
видима зоряна величина.....	96	небесний меридіан.....	6
висота світила.....	7	нижня планета.....	68
вісь світу.....	5	парсек.....	25
власний рух зорі.....	104	перигелій.....	67
галактика.....	63	перша космічна швидкість.....	60
гало галактики.....	64	поверхнева гравітація.....	59
годинний кут.....	9	полуденна лінія.....	6
гоманівська траєкторія.....	72	полюс світу.....	5
горизонтальна система координат.....	7	поясний час.....	20
гравітаційна взаємодія.....	59	променева швидкість зорі.....	105
гравітаційний радіус.....	61	проникна сила телескопа.....	97
диск галактики.....	64	пряме піднесення світила.....	9
діаграма Герцшпрунга-Рессела.....	101	ретроградне обертання.....	22
діаметр вхідного отвору телескопа.....	97	рівняння часу.....	19
добове обертання.....	5	річний паралакс.....	25
друга космічна швидкість.....	60	роздільна здатність телескопа.....	98
екваторіальна система координат.....	8	світловий рік.....	25
екліптика.....	13	світність зорі.....	99
ексцентриситет.....	67	світність Сонця.....	100
елонгація.....	68	середній сонячний час.....	19
ефективна температура.....	100	середня сонячна доба.....	19
закон Всесвітнього тяжіння.....	59	сидеричний період обертання.....	68
закон Габбла.....	108	синодичний період обертання.....	70
закон зміщення Віна.....	101	сонячна система.....	66
закон Стефана-Больцмана.....	100	спектральна класифікація зір.....	101

сполучення планети із Сонцем	68	точка осіннього рівнодення	13
схилення світила.....	9	тропічний рік.....	19, 20
тангенціальна швидкість зорі.....	105	червоний зсув.....	106
точка весняного рівнодення	13	юліанське датування	21
точка зимового сонцестояння.....	13	ядро галактики.....	64
точка літнього сонцестояння	13		

Додаток 1

Таблиця схилень Сонця упродовж року
(середнє значення за 4-річний цикл)

День	СІЧ	ЛЮТ	БЕР	КВІТ	ТРАВ	ЧЕРВ	ЛИП	СЕРП	ВЕР	ЖОВ	ЛИСТ	ГРУД
1	-23°04'	-17°20'	-7°49'	+4°18'	+14°54'	+21°58'	+23°09'	+18°10'	+8°30'	-2°57'	-14°14'	-21°43'
2	-22°59'	-17°03'	-7°26'	+4°42'	+15°12'	+22°06'	+23°05'	+17°55'	+8°09'	-3°20'	-14°34'	-21°52'
3	-22°54'	-16°46'	-7°03'	+5°05'	+15°30'	+22°14'	+23°01'	+17°40'	+7°47'	-3°44'	-14°53'	-22°01'
4	-22°48'	-16°28'	-6°40'	+5°28'	+15°47'	+22°22'	+22°56'	+17°24'	+7°25'	-4°07'	-15°11'	-22°10'
5	-22°42'	-16°10'	-6°17'	+5°51'	+16°05'	+22°29'	+22°51'	+17°08'	+7°03'	-4°30'	-15°30'	-22°18'
6	-22°36'	-15°52'	-5°54'	+6°13'	+16°22'	+22°35'	+22°45'	+16°52'	+6°40'	-4°53'	-15°48'	-22°25'
7	-22°28'	-15°34'	-5°30'	+6°36'	+16°39'	+22°42'	+22°39'	+16°36'	+6°18'	-5°16'	-16°06'	-22°32'
8	-22°21'	-15°15'	-5°07'	+6°59'	+16°55'	+22°47'	+22°33'	+16°19'	+5°56'	-5°39'	-16°24'	-22°39'
9	-22°13'	-14°56'	-4°44'	+7°21'	+17°12'	+22°53'	+22°26'	+16°02'	+5°33'	-6°02'	-16°41'	-22°46'
10	-22°05'	-14°37'	-4°20'	+7°43'	+17°27'	+22°58'	+22°19'	+15°45'	+5°10'	-6°25'	-16°58'	-22°52'
День	СІЧ	ЛЮТ	БЕР	КВІТ	ТРАВ	ЧЕРВ	ЛИП	СЕРП	ВЕР	ЖОВ	ЛИСТ	ГРУД
11	-21°56'	-14°18'	-3°57'	+8°07'	+17°43'	+23°02'	+22°11'	+15°27'	+4°48'	-6°48'	-17°15'	-22°57'
12	-21°47'	-13°58'	-3°33'	+8°28'	+17°59'	+23°07'	+22°04'	+15°10'	+4°25'	-7°10'	-17°32'	-23°02'
13	-21°37'	-13°38'	-3°10'	+8°50'	+18°14'	+23°11'	+21°55'	+14°52'	+4°02'	-7°32'	-17°48'	-23°07'
14	-21°27'	-13°18'	-2°46'	+9°11'	+18°29'	+23°14'	+21°46'	+14°33'	+3°39'	-7°55'	-18°04'	-23°11'
15	-21°16'	-12°58'	-2°22'	+9°33'	+18°43'	+23°17'	+21°37'	+14°15'	+3°16'	-8°18'	-18°20'	-23°14'
16	-21°06'	-12°37'	-1°59'	+9°54'	+18°58'	+23°20'	+21°28'	+13°56'	+2°53'	-8°40'	-18°35'	-23°17'
17	-20°54'	-12°16'	-1°35'	+10°16'	+19°11'	+23°22'	+21°18'	+13°37'	+2°30'	-9°02'	-18°50'	-23°20'
18	-20°42'	-11°55'	-1°11'	+10°37'	+19°25'	+23°24'	+21°08'	+13°18'	+2°06'	-9°24'	-19°05'	-23°22'
19	-20°30'	-11°34'	-0°48'	+10°58'	+19°38'	+23°25'	+20°58'	+12°59'	+1°43'	-9°45'	-19°19'	-23°24'
20	-20°18'	-11°13'	-0°24'	+11°19'	+19°51'	+23°26'	+20°47'	+12°39'	+1°20'	-10°07'	-19°33'	-23°25'

День	СІЧ	ЛЮТ	БЕР	КВІТ	ТРАВ	ЧЕРВ	ЛИП	СЕРП	ВЕР	ЖОВ	ЛИСТ	ГРУД
21	-20°05'	-10°52'	0°00'	+11°39'	+20°04'	+23°26'	+20°36'	+12°19'	+0°57'	-10°29'	-19°47'	-23°26'
22	-19°52'	-10°30'	+0°24'	+12°00'	+20°16'	+23°26'	+20°24'	+11°59'	+0°33'	-10°50'	-20°00'	-23°26'
23	-19°38'	-10°08'	+0°47'	+12°20'	+20°28'	+23°26'	+20°12'	+11°39'	+0°10'	-11°12'	-20°13'	-23°26'
24	-19°24'	-9°46'	+1°11'	+12°40'	+20°39'	+23°25'	+20°00'	+11°19'	-0°14'	-11°33'	-20°26'	-23°26'
25	-19°10'	-9°24'	+1°35'	+13°00'	+20°50'	+23°24'	+19°47'	+10°58'	-0°37'	-11°54'	-20°38'	-23°25'
26	-18°55'	-9°02'	+1°58'	+13°19'	+21°01'	+23°23'	+19°34'	+10°38'	-1°00'	-12°14'	-20°50'	-23°23'
27	-18°40'	-8°39'	+2°22'	+13°38'	+21°12'	+23°21'	+19°21'	+10°17'	-1°24'	-12°35'	-21°01'	-23°21'
28	-18°25'	-8°17'	+2°45'	+13°58'	+21°22'	+23°19'	+19°08'	+9°56'	-1°47'	-12°55'	-21°12'	-23°19'
29	-18°09'	-8°03'	+3°09'	+14°16'	+21°31'	+23°16'	+18°54'	+9°35'	-2°10'	-13°15'	-21°23'	-23°16'
30	-17°53'		+3°32'	+14°35'	+21°41'	+23°13'	+18°40'	+9°13'	-2°34'	-13°35'	-21°33'	-23°12'
31	-17°37'		+3°55'		+21°50'		+18°25'	+8°52'		-13°55'		-23°08'