Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки
Факультет економіки та управління
Кафедра економіки, безпеки та інноваційної діяльності підприємства

Тетяна Данилюк
Олена Скорук

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ

Конспект лекцій

Луцьк
2018

УДК 519.863(075.8)
Д 17

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки (протокол № 9 від 20.06.2018 р.)

Рецензенти:

Ліпич Л. Г., д.е.н., професор, декан факультету економіки та управління Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки

Войтович С. Я., к.е.н., професор кафедри менеджменту та маркетингу Луцького національного технічного університету

Данилюк Т. І., Скорук О. В.

Д-17 Оптимізаційні методи та моделі : конспект лекцій / Укладачі Тетяна Іллівна Данилюк, Олена Володимирівна Скорук. – Луцьк : ПП «Поліграфія», 2018. – 150 с.

У виданні узагальнено і розкрито сутність та зміст математичних методів кількісного обґрунтування рішень в задачах, що пов’язані з управлінням організаційними системами.

Рекомендовано студентам освітнього ступеня бакалавр, галузі знань 07 «Управління та адміністрування», спеціальності 071 «Облік і оподаткування» за освітньою програмою «Облік і аудит», спеціальності 072 «Фінанси, банківська справа та страхування» за освітньою програмою «Фінанси і кредит», спеціальності 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» за освітньою програмою «Економіка підприємства», галузі знань 07 «Соціальні та поведінкові науки», спеціальності 051 «Економіка» за освітньою програмою «Аналітична економіка».

УДК 519.863(075.8)

ЗМІСТ

Передмова

Вплив інтеграційних процесів на економіку України, ускладнення зв'язків між суб'єктами господарювання, коливання ринкового попиту і пропозиції, зростання обсягів інформації посилює вимоги до планування і управління діяльністю, для підвищення ефективності якої необхідно використовувати сучасну методологію моделювання та інструментарій прийняття управлінських рішень.

Головне завдання фахівців з економіки та підприємництва – керувати економічними системами, розробляючи і впроваджуючи стратегічні та тактичні плани, що передбачає використання знань про системи, здобуття нової інформації та застосування її з метою відшукання найефективніших способів досягнення заданих результатів.

Важливою для нашого суспільства є проблема вдосконалення керування економічними системами на базі комп'ютерних технологій, тобто інтенсивного впровадження систем підтримки прийняття рішень, які окрім загального програмного забезпечення містять у собі банк економіко-математичних методів і моделей.

Метою викладання навчальної дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» є кількісне обґрунтування рішень, що приймаються щодо управління соціально-економічними (організаційними) системами, які функціонують в умовах обмежень і у яких процеси можуть розвиватися за різними варіантами, кожен з яких має свої переваги та недоліки. Мета курсу – надати студентам алгоритми вибору з усіх можливих варіантів найкращого з точки зору встановленого критерію (критеріїв).

Основними завданнями вивчення дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» є вироблення практичних навичок розв'язування екстремальних економічних задач, що складається з побудови економіко-математичної моделі, підготовки інформації, відшукання оптимального плану, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є математичні методи кількісного обґрунтування рішень в задачах, що пов'язані з управлінням організаційними системами.

До кінця навчання студенти будуть компетентними у таких питаннях:

– основні поняття та класифікація задач оптимізації;

– умови оптимальності для задач математичного програмування;

– елементи теорії двоїстості;

– задачі лінійного та параметричного програмування;

– загальну постановку задачі дискретного та стохастичного програмування;

– загальну постановку та методи нелінійного і динамічного програмування;

– елементи теорії ігор;

– елементи теорії сіткового планування та управління;

– розв’язання задач математичного програмування загальновідомими методами;

– перевірка адекватності моделі;

– особливості використання сучасних пакетів прикладних програм для розв’язання задач оптимізації.

Структура навчальної дисципліни

Таблиця 1

Назва змістових модулів і тем	Усього	Лек.	Прак.	Сам. роб.	Конс.
1	2	3	4	5	6
Змістовий модуль 1. Теоретико-методичні основи оптимізаційних методів. Задачі лінійного програмування					
Тема 1. Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки	6	2	2	2	
Тема 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі	12	4	2	5	1
Тема 3. Загальна задача лінійного програмування та методи її розв’язання	15	4	4	6	1
Тема 4. Симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування	15	4	4	6	1
Тема 5. Двоїстість у задачах лінійного програмування	13	4	2	6	1
Тема 6. Аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач	11	2	2	6	1
Тема 7. Транспортна задача. Постановка, методи розв’язування та аналізу	14	4	4	5	1
Разом за змістовим модулем 1	86	24	20	36	6
Змістовий модуль 2. Спеціальні розділи дослідження операцій					
Тема 8. Цілочислове лінійне програмування	13	4	2	6	1
Тема 9. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем	15	4	4	6	1
Тема 10. Квадратичне програмування	12	2	4	5	1
Тема 11. Динамічне програмування	10	2	2	5	1
Тема 12. Теорія ігор і прийняття рішень	14	4	4	6	
Разом за змістовим модулем 2	64	16	16	28	4
Усього годин	150	40	36	64	10

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1
ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МЕТОДІВ. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

ТЕМА 1
КОНЦЕПТУАЛЬНІ АСПЕКТИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ

1.1. Сутність моделювання як методу наукового пізнання
1.2. Особливості і принципи математичного моделювання
1.3. Основні дефініції економіко-математичного моделювання
1.4. Особливості економічних спостережень і вимірів
1.5. Етапи економіко-математичного моделювання
1.6. Елементи класифікації економіко-математичних моделей
1.7. Роль прикладних економіко-матматичних досліджень

1.1. Сутність моделювання як методу наукового пізнання

Модель від лат. («modulus» — зразок, норма, міра.) – це об'єкт, що заміщує оригінал і відбиває його найважливіші риси й властивості для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез.

Математична модель – це абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь і/чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється.

Сутність методології математичного моделювання полягає в заміні досліджуваного об'єкта його «образом» – математичною моделлю – і подальшим вивченням (дослідженням) моделі на підставі аналітичних методів та обчислювально-логічних алоритмів, які реалізуються за допомогою комп'ютерних програм. Робота не із самим об'єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість відносно швидко і безболісно досліджувати його основні (суттєві) властивості та поведінку за будь-яких імовірних ситуацій (це переваги теорії). Водночас обчислювальні (комп'ютерні, симулятивні, імітаційні) експерименти з моделями об'єктів дозволяють ретельно та досить глибоко вивчати об'єкт, що недоступно суто теоретичним підходам (це перевага експерименту).

Вже сама постановка питання щодо математичного моделювання будь-якого об'єкта породжує чіткий план дій, який умовно можна поділити на три етапи: модель – алгоритм – програма (рис.1.1).

На *першому етапі* обирається (чи будується) «еквівалент» об'єкта, що відображає в математичній формі найважливіші (ключові) його властивості – закони, яким він підпорядковується, зв'язки, що притаманні складовим його частинам, тощо. Математична модель (чи її фрагменти) досліджуються теоретичними методами, що дає змогу отримати важливі (концептуального характеру) нові знання про об'єкт.

Другий етап – вибір (чи розроблення) алгоритму для реалізації моделі на комп'ютері. Модель подається у формі, зручній для застосування числових методів, визначається послідовність обчислювальних і логічних операцій, котрі необхідно здійснити, щоб отримати шукані величини із заданою точністю.

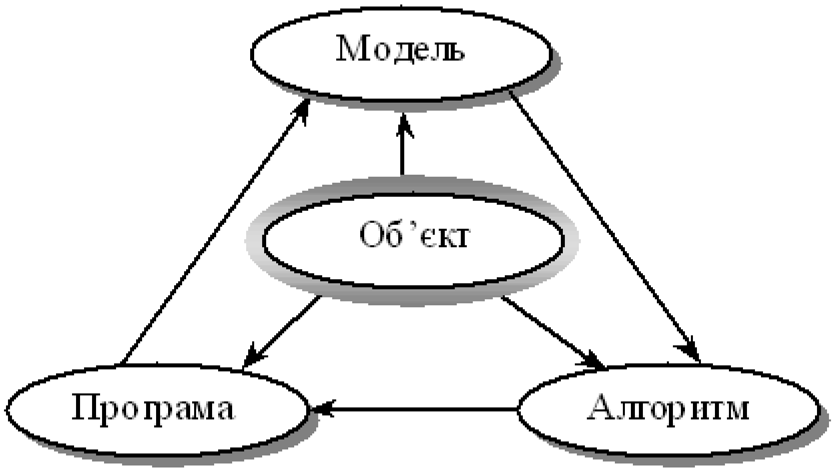

Рис. 1.1. Узагальнена схема математичного моделювання

На *третьому етапі* створюються програми, що «переносять» модель і алгоритм на доступну комп'ютерну мову. Їх можна назвати «електронним» еквівалентом досліджуваного об'єкта, що є придатним для безпосереднього експериментування на комп'ютері.

Створивши *тріаду*: «*модель – алгоритм – програма*», дослідник (системний аналітик) отримує універсальний, гнучкий і відносно дешевий інструмент, який тестується в «пробних» обчислювальних експериментах. Після того як *адекватність* (достатній рівень відповідності, зважаючи на цілі та прийняту систему гіпотез) тріади щодо досліджуваного об'єкта засвідчена, з моделлю проводять різноманітні та детальні «досліди», які дають нову інформацію про необхідні якісні та кількісні властивості й характеристики об'єкта. Процес моделювання супроводжується поліпшенням та уточненням, за необхідності, всіх складових (ланок) тріади.

1.2. Особливості і принципи математичного моделювання

Головна особливість моделювання полягає у тому, що це метод опосередкованого пізнання за допомогою об'єктів-заміщувачів. Саме ця особливість моделювання визначає специфічні форми використання абстракцій, аналогій, гіпотез, інших категорій і методів пізнання.

Сформулюємо принципи, які визначають ті загальні вимоги, яким повинна задовольняти правильно побудована математична модель деякого об'єкта (системи).

Принцип 1. Полярність діалектичної пари «модель – об'єкт». Ця діалектична пара завжди полярна, має два полюси – «модель» і «об'єкт».

Принцип 2. Первинність об'єкта. З двох взаємно пов'язаних полюсів діалектичної пари «модель – об'єкт» один із них (об'єкт) є первинним, інший (модель) – похідним від нього.

Принцип 3. Зумовленість моделі об'єктом. Наявність полюсу «модель» зумовлює необхідність наявності полюсу «об'єкт».

Принцип 4. Множинність моделей щодо об'єкта дослідження. Як «модель» для об'єкта, так і «об'єкт» для даної «моделі» семантично та інтерпретаційно багатозначні: «об'єкт» описується не однією, а багатьма «моделями», «модель» віддзеркалює властивості не одного, а багатьох «об'єктів».

Принцип 5. Адекватність. Цей принцип передбачає відповідність моделі меті дослідження, прийнятій системі гіпотез за рівнем складності й організації, а також відповідність реальній системі (об'єкту). Доки не вирішено питання, чи правильно відображає модель досліджувану систему (об'єкт), цінність моделі незначна.

Принцип 6. Спрощення за умови збереження суттєвих (ключових) властивостей об'єкта (системи). Модель повинна бути в деяких аспектах суттєво простішою від прототипу – в цьому власне й полягає сенс моделювання, тобто модель ігнорує несуттєві властивості об'єкта. Цей принцип може бути названий принципом абстрагування від другорядних деталей.

Практичні рекомендації щодо зменшення складності моделі:

- зменшення кількості змінних за допомогою виключення несуттєвих змінних або їх об'єднання. Процес перетворення (редукції) моделі в модель з меншою кількістю змінних і обмежень називають *агрегуванням;*
- зміна природи змінних величин й параметрів. Змінні величини й параметри наближено розглядаються як постійні, дискретні — як неперервні тощо;
- зміна функціональної залежності між змінними. Нелінійна залежність замінюється зазвичай лінійною, дискретна функція розподілу ймовірностей — неперервною тощо;
- зміна обмежень (збільшення, виключення чи модифікація). Після зняття обмежень одержуємо оптимістичне рішення, після введення — песимістичне. Варіюючи обмеженнями, можна знайти можливі граничні значення ефекту чи ефективності. Такий спосіб часто застосовують для знаходження попередніх оцінок ефективності рішень на етапі постановки задач;
- обмеження точності моделі. Точність результатів моделі не може бути вищою за точність вхідних даних.

Принцип 7. Блочна побудова. За дотримання цього принципу блочної побудови полегшується розроблення складних моделей і з'являється можливість використання накопиченого досвіду та адаптації готових блоків із мінімально необхідними зв'язками між ними. Виокремлення блоків відбувається з урахуванням розподілення моделі за етапами й режимами функціонування об'єкта (системи).

Складні об’єкти (системи) потребують розроблення цілої ієрархії моделей. Виокремлюють такі рівні, як вся система, підсистеми, підсистеми керування тощо.

Існують різні *форми зображення* математичної моделі. Найтиповіші групи їх різновидів – інваріантна, алгоритмічна, аналітична, схемна.

Наголосимо, що використання математичних методів в економічному аналізі жодною мірою не зводиться до підбору прийнятих формул, підстановки в них певних чисел та певного чаклування, в результаті чого виходить «відповідь».

Нагадаємо рекомендації відомого американського вченого Р.Хемінга: «Мета обчислень – розуміння, а не числа»; «перш ніж розв’язувати задачу, подумай, що робити з її розв’язком».

1.3. Основні дефініції економіко-математичного моделювання

Якщо йдеться про математичну модель, що описує механізм функціонування певної гіпотетичної економічної чи соціально-економічної системи, то таку модель називають економіко-математичною чи просто економічною.

Під економіко-математичною моделлю розуміють концентроване вираження найсуттєвіших економічних взаємозв’язків досліджуваних об’єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей і рівнянь.

Математична модель – це об’єкт, котрий створюється системним аналітиком для отримання нових знань про об’єкт-оригінал і відбиває лише суттєві (з погляду системного аналітика) властивості об’єкта-оригіналу.

Модель вважається адекватною об’єкту-оригіналу, якщо вона з достатнім ступенем наближення, на рівні розуміння системним аналітиком модельованого процесу відбиває закономірності процесу функціонування реальної економічної системи у зовнішньому середовищі.

Як було зазначено, під моделюванням розуміють процес побудови, вивчення й використання моделей.

Процес моделювання включає три системотвірних елементи:

- суб’єкт дослідження (системний аналітик);
- об’єкт дослідження;
- модель, яка опосередковує відносини між об’єктом, який вивчається, та суб’єктом, який пізнає (системним аналітиком).

У загальних рисах можна виокремити чотири основні етапи процесу математичного моделювання економічних систем і подати їх за такою узагальненою схемою (рис.1.2).

Рис. 1.2. Узагальнена схема процесу економіко-математичного моделювання

1.4. Особливості економічних спостережень і вимірів

Головним гальмом для практичного застосування математичного моделювання в економіці є проблема наповнення розроблених моделей конкретною та якісною інформацією. Точність і повнота первинної інформації, реальні можливості її збору й опрацювання справляють визначальний вплив на вибір типів прикладних моделей. З іншого боку, завдання моделювання економіки висувають нові вимоги до системи інформації.

Залежно від модельованих об’єктів і призначення моделей використовувана в них вхідна інформація має суттєво відмінний характер і походження. Вона може бути розподіленою на дві категорії: щодо минулого розвитку та сучасного стану об’єктів (економічне спостереження й опрацювання); про майбутній розвиток об’єктів, яка включає дані про очікувані зміни, внутрішні параметри та зовнішні умови (прогнози). Інша категорія інформації є результатом самостійних досліджень, які також можуть проводитися за допомогою моделювання.

Методи економічних спостережень і використання їхніх результатів розробляються економічною статистикою. З огляду на це варто визначити лише специфічні проблеми економічних спостережень, які стосуються моделювання економічних процесів. В економіці чимало процесів є масовими: вони характеризуються закономірностями, що не проявляються на підставі лише одного чи кількох спостережень. Тому моделювання в економіці має спиратися на масові спостереження.

Інша проблема породжується динамічністю економічних процесів, мінливістю їхніх параметрів і структурних відношень. Унаслідок цього доводиться постійно вивчати економічні процеси, здійснювати їх моніторинг. Оскільки спостереження за цими процесами й опрацювання емпіричних даних зазвичай забирають досить багато часу, то, будуючи економіко-математичні моделі, необхідно коригувати вхідну інформацію з урахуванням її надходження із деяким запізненням у часі.

Дослідження кількісних відношень економічних процесів і явищ спирається на економічні виміри. Точність проведення вимірювань значною мірою впливає на точність кінцевих результатів кількісного аналізу. Тому застосування математичного моделювання загострило проблему вимірювання та кількісного зіставлення різних аспектів і явищ соціально-економічного розвитку та повноти одержуваних даних, захисту їх від навмисних і технічних викривлень (деформації).

1.5. Етапи економіко-математичного моделювання

В різних галузях знань, зокрема в економіці, етапи моделювання набувають специфічних рис. Проаналізуймо послідовність і зміст етапів одного циклу економіко-математичного моделювання.

1. Постановка економічної проблеми та розроблення концептуальної моделі. Головне на цьому етапі — чітко сформулювати сутність проблеми (цілі дослідження), припущення, що приймаються, і ті питання, на які необхідно одержати відповіді. З урахуванням цілей дослідження проводиться якісний аналіз об’єкта; виокремлюються, абстрагуючись від другорядних, найважливіші риси і властивості об’єкта, що моделюється. З позиції системного підходу вивчаються структура об’єкта й головні взаємозв’язки між його елементами (підсистемами). Обираються та обґрунтовуються основні показники й система гіпотез, що пояснюють поведінку та розвиток об’єкта і на основі яких буде відбуватись подальша формалізація.

На цьому етапі моделювання широко застосовуються якісні методи описання систем, знакові та мовні моделі. Таке попереднє, наближене зображення системи називають концептуальною моделлю.

2. Розроблення математичних моделей. Це етап формалізації економічної проблеми, вираження її у вигляді конкретних математичних залежностей і відношень (функцій, рівнянь, нерівностей тощо). На цьому етапі проводиться теоретичне (аналітичне) дослідження моделі, обираються методи дослідження й розв’язку.

Метою теоретичного (аналітичного) дослідження є з’ясування загальних властивостей моделі. Найважливіший момент — доведення існування розв’язку для моделі. Знання загальних властивостей моделі настільки важливе, що часто задля доведення подібних властивостей дослідники свідомо йдуть на ідеалізацію первинної моделі. У тому разі, коли аналітичними методами не вдається з’ясувати загальні властивості моделі, а спрощення моделі спричиняється до недопустимих (неадекватних) результатів, переходять до числових методів дослідження.

3. Реалізація моделі у вигляді пакету прикладних програм (ППП) та проведення розрахунків. Цей етап включає розробку алгоритмів для числового розв’язування задачі, складання програм на ЕОМ (можливе використання існуючих ППП з відповідною адаптацією) і безпосереднє проведення розрахунків. Труднощі цього етапу зумовлені передусім великою розмірністю економічних задач, необхідністю опрацювання значних масивів інформації. Завдяки високій швидкодії сучасних ЕОМ вдається проводити числові «модельні» експерименти, вивчаючи «поведінку» моделі за різних значень деяких умов. Дослідження, що проводяться за допомогою числових методів, можуть стати суттєвим доповненням до результатів аналітичного дослідження. Клас економічних задач, які можна розв’язувати числовими методами, значно ширший, ніж клас задач, доступних аналітичному дослідженню.

4. Перевірка адекватності моделі. Вимога адекватності є суперечною вимозі простоти, і це слід враховувати, перевіряючи модель на адекватність. Початковий варіант моделі попередньо перевіряється за такими основними аспектами: чи всі суттєві параметри включені в модель; чи містить модель несуттєві параметри; чи правильно відображені функціональні зв’язки між параметрами; чи правильно визначені обмеження на значення параметрів тощо.

Для встановлення відповідності створюваної моделі оригіналу використовують такі методи:

- порівняння результатів моделювання з окремими експериментальними результатами, одержаними за однакових (подібних) умов;
- використання інших схожих моделей;
- порівняння структури і функціонування моделі з прототипом.

Головним шляхом перевірки адекватності моделі досліджуваного об’єкта виступає практика. Але вона потребує накопичення статистики, котра не завжди буває достатньою для отримання надійних даних. Для багатьох моделей перші два методи виявляються менш прийнятними. Тоді залишається лише один шлях: висновок про подібність моделі та прототипу робити на підставі порівняння їхніх структур і виконуваних функцій. Такі висновки не мають формального характеру, оскільки ґрунтуються на досвіді та інтуїції дослідника.

Згідно з результатами перевірки моделі на адекватність приймається рішення про можливість її практичного використання чи проведення коригування.

5. Аналіз числових результатів та прийняття відповідних рішень. Результати досліджень подаються у вигляді, зручному для огляду, і на основі обробки отриманих результатів проводиться аналіз матеріалів дослідження моделі. На цьому, завершальному, етапі виникає питання про правильність і повноту результатів моделювання, про можливість практичного застосування останніх, і, найголовніше, про досягнення цілей дослідження.

Звернімо увагу на зворотні зв'язки етапів, які виникають унаслідок того, що в процесі дослідження виявляються недоліки попередніх етапів моделювання. Недоліки, які не вдається виправити на проміжних етапах моделювання, усуваються в наступних циклах. Але результати кожного циклу мають і цілком самостійне значення. Розпочавши дослідження від побудови простої моделі, можна швидко одержати корисні результати, а потім перейти до створення досконалішої моделі.

1.6. Елементи класифікації економіко-математичних моделей

Для класифікації економіко-математичних моделей використовують різні класифікаційні ознаки.

За цільовим призначенням економіко-математичні моделі поділяються на *теоретико-аналітичні,* що використовуються під час дослідження загальних властивостей і закономірностей економічних процесів, і *прикладні*, що застосовуються у розв'язанні конкретних економічних задач (моделі економічного аналізу, прогнозування, управління).

Відповідно до загальної класифікації математичних моделей вони поділяються на *функціональні* та *структурні*, а також *проміжні* форми (структурно-функціональні). Типовими структурними моделями є моделі міжгалузевих зв'язків. Прикладом функціональної моделі може слугувати модель поведінки споживачів в умовах товарно-грошових відносин.

Моделі поділяють на *дескриптивні* та *нормативні*. Прикладом дескриптивних моделей є виробничі функції та функції купівельного попиту, побудовані на підставі опрацювання статистичних даних. Типовим прикладом нормативних моделей є моделі оптимального (раціонального) планування, що формалізують у той чи інший спосіб цілі економічного розвитку, можливості і засоби їх досягнення.

За характером відображення причинно-наслідкових аспектів розрізняють *моделі жорстко детерміновані* і *моделі*, *що враховують випадковість і невизначеність*.

За способами відображення чинника часу економіко-математичні моделі поділяються на *статичні* й *динамічні*.

Моделі економічних процесів надзвичайно різноманітні за формою математичних залежностей. Важливо виокремити клас *лінійних моделей*, що набули значного поширення завдяки зручності їх використання. Відмінності між лінійними і нелінійними моделями є суттєвими не лише з математичного погляду, а й у теоретико-економічному плані, адже багато залежностей в економіці мають принципово нелінійний характер.

За співвідношенням екзогенних і *ендогенних змінних*, які включаються в модель, вони поділяються на *відкриті* і *закриті*. Повністю відкритих моделей не існує; модель повинна містити хоча б одну ендогенну змінну. Повністю закриті економіко-математичні моделі, тобто такі, що не містять екзогенних змінних, надзвичайно рідкісні. Переважна більшість економіко-математичних моделей посідає проміжну позицію і розрізняється за ступенем відкритості (закритості).

Класифікація видів математичних моделей може проводитися й за такими ознаками: аналітичне та комп'ютерне моделювання (рис.1.3).

Для *аналітичного моделювання* характерним є те, що процеси функціонування елементів системи записують у вигляді деяких математичних співвідношень (алгебраїчних, інтегро-диференційних, кінцево-різницевих тощо) чи логічних умов.

Рис. 1.3. Аналітичне та комп'ютерне моделювання

Комп'ютерне моделювання характеризується тим, що математична модель системи (використовуючи основні співвідношення аналітичного моделювання) подається у вигляді деякого алгоритму та програми, придатної для її реалізації на комп'ютері, що дає змогу проводити з нею обчислювальні експерименти. Залежно від математичного інструментарію (апарату), що використовується в побудові моделі, та способу організації обчислювальних експериментів можна виокремити три взаємопов'язані види моделювання: чисельне, алгоритмічне (імітаційне) та статистичне.

У *чисельному моделюванні* для побудови комп'ютерної моделі використовуються методи обчислювальної математики, а обчислювальний експеримент полягає в чисельному розв'язанні деяких математичних рівнянь за заданих значень параметрів і початкових умов.

Алгоритмічне (імітаційне) моделювання (може бути детермінованим та стохастичним) — це вид комп'ютерного моделювання, для якого характерним є відтворення на комп'ютері (імітація) процесу функціонування досліджуваної складної системи.

Статистичне моделювання – це вид комп'ютерного моделювання, який дозволяє отримати статистичні дані відносно процесів у модельованій системі.

1.7. Роль прикладних економіко-матматичних досліджень

Можна виокремити щонайменше чотири аспекти застосування математичних методів і моделей у вирішенні практичних проблем.

1. *Удосконалення системи економічної інформації.* Математичні методи й моделі дають змогу упорядковувати економічну інформацію, виявляти недоліки в наявній інформації та розробляти вимоги до підготовки нової інформації чи її коригування. Розроблення і застосування економіко-математичних моделей вказують шляхи вдосконалення системи економічної інформації, орієнтованої на вирішення певних завдань планування та управління.

2. *Інтенсифікація і підвищення точності економічних розрахунків.* Формалізація економічних задач і застосування комп’ютерів значно прискорюють типові, масові розрахунки, підвищують точність і скорочують трудомісткість, дають змогу проводити багатоваріантні економічні дослідження та обґрунтування складних заходів, недосяжні за панування «ручної» технології.

3. *Поглиблення кількісного аналізу економічних проблем.* Завдяки застосуванню економіко-математичного моделювання створюються нові можливості економічного аналізу; вивчення чинників, які впливають на економічні процеси; кількісного оцінювання наслідків змін умов розвитку економічних об’єктів тощо.

4. *Розв’язання принципово нових економічних задач.* За допомогою математичного моделювання вдається розв’язувати економічні задачі, які в інший спосіб розв’язати практично неможливо, наприклад, відшукання оптимального варіанта народногосподарського плану, імітація народногосподарських заходів, автоматизація контролю за функціонуванням складних економічних об’єктів.

Сфера практичного застосування економіко-математичного моделювання обмежується можливостями та ефективністю формалізації економічних проблем і ситуацій, а також станом інформаційного, математичного, технічного забезпечення використовуваних моделей. Намагання будь-якою ціною застосувати математичну модель може не дати очікуваних результатів через відсутність необхідних умов.

ТЕМА 2
ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ

2.1. Історична довідка
2.2. Сутність оптимізаційних методів і моделей. Математичне програмування
2.3. Математична постановка оптимізаційної задачі
2.4. Класифікація оптимізаційних задач
2.5. Приклади побудови лінійних оптимізаційних математичних моделей

2.1. Історична довідка

Оптимізаційні задачі були відомі ще в стародавній Греції. Однак, сучасне математичне програмування передусім розглядає властивості та розв'язки математичних моделей економічних процесів. Тому початком його розвитку як самостійного наукового напряму слід вважати перші спроби застосування методів математичного програмування в прикладних дослідженнях, насамперед в економіці.

1939 р. – Леонід Віталійович Канторович монографія «Математичні методи організації і планування виробництва». Він заклав основи ***теорії оптимального виробничого планування й лінійного програмування;***

1947 р. – Дж. Данцигом (США) розроблений основний метод розв'язування задач лінійного програмування – ***симплексний метод***, що вважається початком формування лінійного програмування як самостійного напряму в математичному програмуванні;

1947 р. – Дж. Нейман / розвиток ***концепції двоїстості***, що уможливило розширення практичної сфери застосування методів лінійного програмування;

1951 р. – Дж. Данцигом та Т. Купмансом введений ***термін «лінійне програмування»*** Однак у своїй монографії Дж. Данциг зазначає, що Л. В. Канторовича слід визнати першим, хто виявив, що широке коло важливих виробничих задач може бути подане у чіткому математичному формулюванні, яке уможливлює підхід до таких задач з кількісного боку та розв'язання їх чисельними методами;

1951 р. – Г. Кун і А. Таккер / розроблено методи ***нелінійного програмування***;

1953 р. – Р. Белман / розвиток ***динамічного програмування;***

1954 р. – Чарнес і Лемке розглянули наближений метод розв'язання задач з ***сепарабельним опуклим функціоналом та лінійними обмеженнями;***

1955 р. – роботи, присвячених ***квадратичному програмуванню***.

На сучасному етапі математичне програмування включає широке коло задач з відповідними методами розв'язання, що охоплюють різноманітні проблеми розвитку та функціонування реальних економічних систем. Розробляються банки економіко-математичних моделей, які в поєднанні з потужною, швидкодіючою обчислювальною технікою та сучасними програмними продуктами утворюватимуть системи ефективної підтримки прийняття рішень у різних сферах економіки.

2.2. Сутність оптимізаційних методів і моделей. Математичне програмування

Математичне програмування (mathematical programming) – розроблення за допомогою математичних розрахунків програми дій для досягнення певної мети; вибір найкращого (найефективнішого), з усіх можливих, варіанту розвитку деякого економічного процесу.

Сутність задачі економічного вибору та пов'язаною з цим необхідністю використання моделей та методів математичного програмування проілюструємо на прикладі.

Приклад 2.1. Підприємство спеціалізується на виготовленні та реалізації електроплит і морозильних камер. Припустимо, що збут продукції необмежений, проте обсяги ресурсів (праці й основних матеріалів) обмежені. Завдання полягає у визначенні такого плану виробництва продукції на місяць, за якого виручка була б найбільшою.

Норми використання ресурсів та їх загальний запас, а також ціни одиниці кожного виду продукції наведені в табл. 2.1.

Розглянемо кілька можливих варіантів виробничої програми.

Перша виробнича програма. Виробництво тільки морозильних камер.

520 / 9,2 = 56 морозильних камер (використаний ресурс – роб. час);

240 / 3 = 80 морозильних камер (використаний ресурс – листове залізо).

Висновок: повністю використовуючи людські ресурси і частково листове залізо у місяць можна виготовляти 56 морозильних камер.

Виручка від реалізації продукції: 56 * 300 = 16 800 ум. од.

Таблиця 2.1

Інформація, необхідна для складання виробничої програми

Вид продукції	Норми витрат на одиницю продукції			Ціна одиниці продукції, ум. од.
	робочого часу, люд.-год.	листового заліза, $м^2$	скла, $м^2$	
Морозильна камера, шт.	9,2	3	–	300
Електрична плита, шт.	4	6	2	200
Загальний запас ресурсу на місяць	520	240	40	–

Друга виробнича програма. Виробництво тільки електроплит.

520 / 4=130 електроплит (використаний ресурс – роб. час);

240 / 6=40 електроплит (використаний ресурс – листове залізо);

40 / 2=20 електроплит (використаний ресурс – скло).

Висновок: повністю використовуючи скло та частково листове залізо і людські ресурси у місяць можна виготовляти 20 електроплит.

Виручка від реалізації продукції: 20 * 200 = 4 000 ум. од.

Третя виробнича програма. Виробництво морозильних камер та електроплит.

На виробництво 20 електроплит буде використано таку кількість ресурсів (табл. 2.2).

Залишки першого та другого ресурсів забезпечать виробництво морозильних камер обсягом:

робочий час: 440 / 9,2 = 47 морозильних камер

листове залізо: 120 / 3 = 40 морозильних камер

Таблиця 2.2

Інформація про використання ресурсів на виробництво 20 електроплит

Ресурси	використано	залишок
робочий час:	20 * 4 = 80 (люд.-год.)	520 – 80 = 440 (люд.-год.)
листове залізо:	20 * 6 = 120 (м^2)	240 – 120 = 120 (м^2)
скло:	20 * 2 = 40 (м^2)	

Третя виробнича програма передбачає виробництво 20 електроплит та 40 морозильних камер.

Виручка від реалізації продукції: 20 * 200 + 40*300 = 16 000 ум. од.

Отже, перша виробнича програма для підприємства краща, ніж друга та третя.

2.3. Математична постановка оптимізаційної задачі

Економічну систему можна схематично подати у вигляді прямокутника (рис. 2.1).

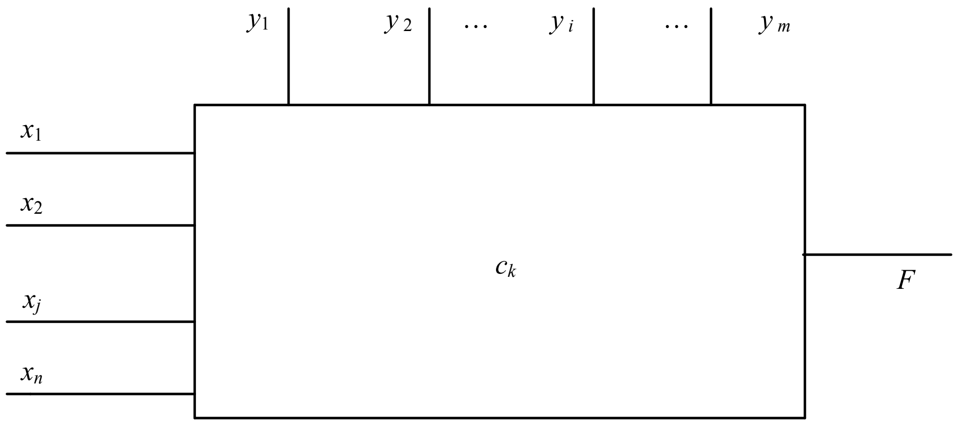

Рис. 2.1. Схема економічної системи

Параметри c_k ($k = 1, 2, ..., l$) є ***кількісними характеристиками системи.*** Наприклад, якщо йдеться про таку економічну систему, як виробниче підприємство, то значення c_k характеризують наявність ресурсів (основні засоби, трудові ресурси, матеріальні ресурси, складські та виробничі приміщення тощо), рівень фондовіддачі та продуктивності праці, норми витрат ресурсів, ціну та собівартість проміжної і кінцевої продукції, норми податків, проценти за кредит, ціни на придбані ресурси тощо.

Частина параметрів c_k для певної системи може бути ***сталими величинами,*** наприклад, заробітна плата управлінського персоналу, амортизаційні відрахування, орендна плата, виплата відсотків за кредитом тощо, а частина – ***змінними,*** тобто залежатиме від певних умов, як, скажімо, урожайність сільськогосподарських культур, собівартість продукції, реалізаційні ціни на рослинницьку й тваринницьку продукцію.

Змінні величини бувають незалежними чи залежними, дискретними чи неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, залежною змінною є чистий прибуток, собівартість продукції, незалежною від процесу функціонування підприємства величиною є початковий розмір статутного фонду, дискретною – кількість основного виробничого персоналу, неперервною – гарантійний запас матеріальних ресурсів на складі для безперебійної діяльності, детермінованою – норма висіву насіння кукурудзи на гектар, випадковою – кількість телят, які народяться у плановому періоді.

Вхідні змінні економічної системи бувають двох видів:

– керовані x_j $(j=1,2,...,n)$, значення яких можна змінювати в деякому інтервалі;

– некеровані змінні y_i $(i=1,2,\ ...,\ m)$, значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, обсяг придбаного пального – керована, а температура повітря – некерована змінна. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу – некерованою.

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай F – вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною F, якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$F = f\,(x_1, x_2, ..., x_n;\ \ y_1, y_2, ..., y_m;\ \ c_1, c_2, ..., c_l). \qquad (2.1)$$

Функцію F називають ***цільовою функцією***, або ***функцією мети***. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення F відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача економіко-математичного моделювання формулюється так:

Знайти такі значення керованих змінних x_j, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення

$$\max_{x_j}(\min)\ F^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ c_1, c_2, \ldots, c_l)\,. \qquad (2.2)$$

Можливості вибору x_j завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо.

Наприклад, площа посіву озимої пшениці обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду:

$$\begin{gathered} q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m; c_1, c_2, \ldots, c_l)\{\le, =, \ge\}0; \\ (i = 1, 2, \ldots, S). \end{gathered} \qquad (2.3)$$

Тут набір символів ($\le$, $=$, $\ge$) означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу $\le$, для інших – рівності (=), а для решти – нерівності типу $\ge$.

Система (2.3) називається ***системою обмежень***, або ***системою умов*** задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_j мають бути невід'ємними:

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,\ 2,\ ...,\ n)\,. \qquad (2.4)$$

Залежності (2.2) – (2.4) утворюють ***економіко-математичну модель*** економічної системи. Розробляючи таку модель, слід дотримуватись певних правил:

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.

2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило, не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладнені моделі важко реалізувати на ЕОМ як з огляду на неможливість їх інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

3. Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ЕОМ.

4. Необхідно, щоб множина змінних x_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях за змоги слід уникати обмежень типу «=», а також суперечливих обмежень. Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система

(2.3), (2.4) має єдиний розв'язок, то не існує набору різних планів, а отже, й задачі вибору оптимального з них.

Будь-який набір змінних x_1, x_2, ..., x_n, що задовольняє умови (2.3) і (2.4), називають ***допустимим планом***, або ***планом***. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною ***стратегією економічної системи, програмою дій***. Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (2.2).

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (2.3) і (2.4), тобто множина всіх допустимих планів утворює ***область існування планів***.

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається ***оптимальним***. Оптимальний план є ***розв'язком задачі економіко-математичного моделювання*** (2.2) – (2.4).

Повертаючись до вищенаведеного прикладу побудуємо економіко-математичну модель даної задачі.

Позначимо через x_1 кількість вироблених морозильних камер, а через x_2 – електроплит. Виразимо математично умови, що обмежують використання ресурсів.

Виходячи з нормативів використання кожного з ресурсів на одиницю продукції, що наведені в табл.2.1, запишемо сумарні витрати робочого часу:

$$9{,}2x_1 + 4x_2$$

За умовою задачі ця величина не може перевищувати загальний запас даного ресурсу, тобто 520 люд.-год. Ця вимога описується такою нерівністю:

$$9{,}2x_1 + 4x_2 \le 520.$$

Аналогічно запишемо умови щодо використання листового заліза та скла:

$$3x_1 + 6x_2 \le 240;$$
$$2x_2 \le 40.$$

Необхідно серед множини всіх можливих значень x_1 та x_2 знайти такі, за яких сума виручки максимальна, тобто: $\max F = 300x_1 + 200x_2$.

Отже, умови задачі, описані в прикладі 2.1, можна подати такою економіко-математичною моделлю:

$$\max F = 300x_1 + 200x_2,$$

за умов:

$$\begin{aligned} &9{,}2x_1 + 4x_2 \le 520; \\ &3x_1 + 6x_2 \le 240; \\ &\quad 2x_2 \le 40; \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Остання умова фіксує неможливість набуття змінними від'ємних значень, тому що кількість виробленої продукції не може бути від'ємною. Розв'язавши задачу відповідним методом математичного програмування, отримуємо такий розв'язок: для максимальної виручки від реалізації продукції необхідно виготовляти морозильних камер – 50 штук, електроплит – 15 ($x_1 = 50, x_2 = 15$).

Перевіримо виконання умов задачі:

$$9{,}2 \cdot 50 + 4 \cdot 15 = 520;$$
$$3 \cdot 50 + 6 \cdot 15 = 240;$$
$$2 \cdot 15 = 30 < 40.$$

Всі умови задачі виконуються, до того ж оптимальний план дає змогу повністю використати два види ресурсів з мінімальним надлишком третього.

Виручка становитиме: $F = 300 \cdot 50 + 200 \cdot 15 = 18\,000$ ум. од.

Отриманий оптимальний план у порівнянні з першим варіантом виробничої програми уможливлює збільшення виручки на $18\,000 - 16\ 800 = 1200$ ум.од., тобто на $\frac{1200}{16\ 800}100\,\% = 7{,}1\,\%$.

Зауважимо, що в класичній постановці задачі економіко-математичного моделювання передбачається одна цільова функція, яка кількісно визначена. У реальних економічних системах на роль критерію оптимальності (ефективності) претендують кілька десятків показників. Наприклад, максимум чистого доходу від реалізації виробленої продукції чи максимум рівня рентабельності, мінімум собівартості виробленої продукції або мінімум витрат дефіцитних ресурсів. Крім того, бажаним є застосування кількох критеріїв одночасно, причому вони можуть бути взагалі несумісними. Наприклад, вимога досягти максимальної ефективності виробництва за мінімальних витрат ресурсів з погляду постановки математичної задачі є некоректною. Мінімальні витрати ресурсів – це нульові витрати, що мають місце за повної відсутності будь-якого процесу виробництва. Аналогічно максимальна ефективність може бути досягнута лише у разі використання певних обсягів (звичайно не нульових) ресурсів. Тому коректними є постановки задач такого типу: досягти максимальної ефективності при заданих витратах чи досягти заданого ефекту за мінімальних витрат.

Оскільки не існує єдиного універсального критерію економічної ефективності, то досить часто вдаються до розгляду багатокритеріальної оптимізації. Хоча задача економіко-математичного моделювання передбачає одну цільову функцію, розроблено математичні методи, що дають змогу будувати компромісні плани, тобто здійснювати багатокритеріальну оптимізацію.

2.4. Класифікація оптимізаційних задач

Задачі, які розв’язуються методами математичного програмування класифікують за такими ознаками:

– За характером залежності між змінними: ***лінійні, нелінійні***.

Якщо цільова функція та обмеження є лінійними функціями, тобто вони містять змінні у першому або нульовому степені, то така задача є лінійною. В усіх інших випадках задача буде нелінійною.

Важливою перевагою лінійних задач є те, що для їх розв’язування розроблено універсальний метод, який називається ***симплексним методом.*** Теоретично кожну задачу лінійного програмування можна розв’язати. Для деяких класів лінійних задач, що мають особливу структуру, розробляють спеціальні методи розв’язування, які є ефективнішими. Наприклад, транспортну задачу можна розв’язати симплексним методом, але ефективнішими є спеціальні методи, наприклад метод потенціалів.

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються в умовах невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто є неадекватними, а тому доводиться будувати ***нелінійні*** та ***стохастичні*** моделі. Розв’язувати нелінійні задачі набагато складніше, ніж лінійні, оскільки немає універсального методу розв’язування таких задач. Для окремих типів нелінійних задач розроблено численні спеціальні ефективні методи розв’язування. Проте слід зазначити, що на практиці застосовують, здебільшого, лінійні економіко-математичні моделі. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) лінійними. Такий підхід на практиці є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні виокремлюють ***опукле програмування.*** Для задач опуклого програмування існує низка добре обґрунтованих та ефективних методів їх розв’язування. Зазначимо, що задачі лінійного програмування є частковим випадком задач опуклого програмування. ***Квадратичне програмування*** – цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

– За характером змінних: ***дискретні, неперервні***.

Дискретними називають задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. Окремий клас становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень, тобто задачі ***цілочислового програмування***. Якщо всі змінні можуть набувати будь-якого значення в деяких інтервалах числової осі, то задача є ***неперервною***.

– За врахуванням фактору часу: ***статичні, динамічні***.

Економічні процеси розвиваються в часі, а тому відповідні моделі мають відображати динаміку. Це означає, що для знаходження оптимального плану потрібно застосовувати класи задач математичного програмування ***статичні*** (однокрокові) і ***динамічні*** (багатокрокові).

Важливо чітко усвідомити відмінність між одно- та багатокроковими задачами. Багатокроковість як метод розв’язування задач математичного програмування зумовлюється, насамперед, їх багатовимірністю. Сутність цього методу полягає в тому, що оптимальні значення розглядуваної множини змінних знаходять крок за кроком, послідовно застосовуючи індукцію, причому рішення, яке приймається на кожному кроці, має задовольняти умови оптимальності щодо рішення, прийнятого на попередньому кроці. Така процедура може бути і не бути пов'язаною з часом. Однокрокові задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються одночасно на останній ітерації (кроці) алгоритму. Потрібно розрізняти ітераційність алгоритму і його багатокроковість. Наприклад, симплекс-метод розв’язування задач лінійного програмування є ітераційним, тобто якимось чином задаємо допустимий план і в результаті деякої кількості ітерацій дістаємо оптимальний план. Тут виконуються ітерації (кроки) алгоритму симплексного методу, але це не інтерпретується як багатокроковість економічного процесу (явища). Деякі задачі математичного програмування можна розглядати як одно або багатокрокові залежно від способу їх розв’язування. Якщо задачу можна розв’язувати як однокрокову, то розв’язувати її як багатокрокову недоцільно, аби не застосовувати для знаходження оптимального плану складніших методів. Проте більшість економічних процесів є динамічними, їх параметри змінюються в часі й залежать від рішень керівництва, що їх доводиться приймати з метою досягнення розвитку економічної системи за траєкторією, яка визначається стратегічним планом.

– За наявністю інформації про змінні є задачі: ***в умовах повної визначеності (детерміновані), в умовах неповної інформації (стохастичні), в умовах невизначеності.***

Детерміновані задачі не містять випадкових змінних і параметрів, котрі набувають значень відповідно до функції розподілу. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі врожайності сільськогосподарських культур задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо врожайності задані функціями розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням α і дисперсією σ, то така задача є стохастичною.

Якщо у відповідних економічних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі, то задачу можна розв’язувати як детерміновану. У противному разі адекватна економіко-математична модель має бути стохастичною, тобто містити випадкові функції та величини.

– За числом критеріїв оцінювання альтернатив: ***прості (однокритеріальні)***, ***складні (багатокритеріальні)***.

Як окремий клас розглядають ***дробово-лінійне програмування,*** коли обмеження є лінійними, а цільова функція – дробово-лінійна. Особливий клас становлять задачі ***теорії ігор,*** які широко застосовуються в ринковій економіці. Адже тут діють дві чи більше конфліктних сторін, які мають цілі, що не збігаються, або протилежні цілі. У сукупності задач теорії ігор, у свою чергу, також виокремлюють певні підкласи. Наприклад, ***ігри двох осіб із нульовою сумою***.

2.5. Приклади побудови лінійних оптимізаційних математичних моделей

Складність економічних систем (явищ, процесів) як об'єктів досліджень вимагає їх ретельного вивчення з метою з'ясування найважливіших функціональних залежностей, внутрішніх взаємозв'язків між їхніми елементами. В результаті здійснюються можливі спрощення та допущення, що, очевидно, погіршує адекватність побудованих математичних моделей і є чудовим приводом для критики. Однак лише прийняття певних допущень уможливлює формалізацію будь-якої економічної ситуації.

Не існує загальних рекомендацій щодо процесу моделювання, тому в кожному конкретному разі вимоги до побудови математичної моделі залежать від цілей та умов досліджуваної системи.

У процесі застосування математичного моделювання в економіці чітка постановка задачі та її формалізація є найскладнішим етапом дослідження, вимагає ґрунтовних знань передусім економічної суті процесів, які моделюються. Однак, вдало створена математична модель може надалі застосовуватись для розв'язування інших задач, які не мають відношення до ситуації, що початково моделювалася. Починаючи з робіт Л.В.Канторовича, в математичному програмуванні сформовано певний набір класичних постановок задач, економіко-математичні моделі яких широко використовуються в практичних дослідженнях економічних проблем.

Наведемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування (більшість сформульованих задач будуть вивчатися далі).

Всі розглянуті задачі залежно від наявності та точності початкової інформації, мети дослідження, ступеня врахування невизначеності, специфіки застосування до конкретного процесу можуть бути сформульовані як у вигляді статичних, детермінованих, неперервних лінійних задач, так і в складнішій постановці, де один, кілька чи всі параметри визначаються з певним рівнем імовірності та використовуються нелінійні залежності.

***Задача визначення оптимального плану виробництва*:** для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях(задана асортиментність).

Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон – кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності — мінімальна вартість раціону.

Транспортна задача: розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів.

Критерії оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

***Задача оптимального розподілу виробничих потужностей*:** розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств.

Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

Задача про призначення: нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна чисельність кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв’язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади.

Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

Задача комівояжера: розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої – вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

Наведемо кілька розглянутих вище типових задач математичного програмування, сформульованих у термінах лінійного програмування.

2.5.1 Задача визначення оптимального плану виробництва

Для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску n видів продукції $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за умови найкращого способу використання її наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяні m ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне оснащення тощо. Відомі загальні запаси ресурсів $b_i \left(i = \overline{1,m}\right)$, норми витрат i-го ресурсу на виробництво одиниці j-ої продукції $a_{ij} \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$ та прибуток з одиниці j-ої реалізованої продукції $c_j \left(j = \overline{1,n}\right)$.

Критерій оптимальності: максимум прибутку.

Позначимо через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обсяги виробництва відповідно першого, другого і т. д. видів продукції.

Оскільки на одиницю продукції 1-го виду витрачається a_{11} ресурсу першого виду, то на виробництво першого виду продукції обсягом x_1 необхідно витратити $a_{11}x_1$ цього ресурсу. На другий вид продукції обсягом x_2 витрати першого ресурсу дорівнюватимуть $a_{12}x_2$ і т. д. На виробництво всіх видів продукції буде використано такий обсяг першого ресурсу: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$. Ця величина має не перевищувати наявного обсягу першого ресурсу — b_1. Отже, обмеження щодо використання першого ресурсу матиме вигляд: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$. Аналогічно записують обмеження стосовно використання всіх інших виробничих ресурсів. Прибуток від реалізації виготовленої продукції всіх видів становитиме: $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$.

Загалом лінійна економіко-математична модель даної задачі матиме вигляд:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n \le b_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 .$$

Математична модель виробничої задачі може бути застосована для різних економічних задач, де виникає проблема вибору найкращого варіанта розподілу обмеженої кількості ресурсів, хоча з першого погляду може здаватися, що постановка задачі не стосується виробничих процесів. Наведемо кілька конкретних прикладів виробничих задач.

Приклад 2.2. Підприємство повинне випустити 2 види продукції P_1 та P_2, для виготовлення якої використовують 3 види сировини S_1, S_2, S_3. Норми витрат сировини, прибуток від реалізації одиниці продукції, а також запаси сировини всіх видів вказані у табл. 2.3. Скласти план випуску продукції, що забезпечить максимальний прибуток від реалізації.

Таблиця 2.3

Вихідні дані для розв’язання задачі

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції		Запаси сировини (кг)
	P_1	P_2	
S_1	5	2	120
S_2	8	7	250
S_3	1	4	80
Прибуток від реалізації одиниці продукції, грн..	48	70	

Побудова економіко-математичної моделі

Необхідно скласти такий план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

Позначимо x_1, x_2 – число одиниць (кг) продукції відповідно P_1 та P_2 запланованих для виробництва. Для їх виготовлення необхідно:

$5x_1 + 2x_2$ одиниць ресурсу S_1,

$8x_1 + 7x_2$ одиниць ресурсу S_2,

$x_1 + 4x_2$ одиниць ресурсу S_3.

Цільова функція (критерій оптимальності):

Загальний прибуток від реалізації x_1 одиниць продукції P_1 та x_2 одиниць продукції виду P_2:

$$\max F = 48x_1 + 70x_2 \tag{2.5}$$

Так як споживання ресурсів S_1, S_2 та S_3 не повинно перевищувати їх запасів, відповідно 120, 250 і 80 одиниць, зв’язок між використанням ресурсів та їх запасами виражається системою нерівностей:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 120 \\ 8x_1 + 7x_2 \le 250 \\ x_1 + 4x_2 \le 80 \end{cases} \tag{2.6}$$

За змістом задачі змінні $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Отже, задача формулюється так: знайти такий план випуску продукції $X = (x_1, x_2)$, який задовольняє систему (2.6) і при якому функція (2.5) приймає максимальне значення.

Математична модель задачі має такий вигляд:

$$\max F = 48x_1 + 70x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 120 \\ 8x_1 + 7x_2 \le 250 \\ x_1 + 4x_2 \le 80 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$

Приклад 2.3. На ринок поставляється картопля з трьох фермерських господарств за цінами відповідно 80, 75 та 65 коп. за 1 кг. На завантаження 1 т картоплі в господарствах відповідно витрачається по 1, 6 та 5 хвилин. Замовлено 12 т картоплі, і для своєчасної доставки необхідно, щоб на її завантаження витрачалося не більше сорока хвилин. Потрібно визначити, з яких фермерських господарств і в якій кількості необхідно доставляти картоплю, щоб загальна вартість закупівлі була мінімальною, якщо фермери можуть виділити для продажу відповідно 10, 8 та 6 т картоплі.

Побудова економіко-математичної моделі.

Позначимо: x_1 — кількість картоплі, що буде закуплена у першому господарстві (т); x_2, x_3 — кількість картоплі, закупленої відповідно у другого та третього фермерів (т).

Поставка потрібної кількості картоплі описується рівністю:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

наступне обмеження описує витрати часу на завантаження продукції:

$$x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 40,$$

обмеження щодо можливостей поставок продукції з кожного господарства:

$$x_1 \le 10;$$

$$x_2 \le 8;$$

$$x_3 \le 6.$$

Вартість продукції, що закуповується, визначається як сума добутків ціни на відповідні її обсяги. Ціни 1 т картоплі відповідно дорівнюють 800, 750 та 650 грн в даних трьох фермерських господарствах. Отже, цільову функцію можна записати так:

$$F = 800x_1 + 750x_2 + 650x_3.$$

Економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$\min F = 800x_1 + 750x_2 + 650x_3$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12; \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 40; \\ x_1 \le 10; \\ x_2 \le 8; \\ x_3 \le 6. \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \ (i = 1, 2, 3).$$

2.2.2 Задача про «дієту»

Деякий раціон складається з n видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного продукту – $c_j \left(j = \overline{1, n}\right)$, кількість необхідних організму поживних речовин m та потреба в кожній i-ій речовині – $b_i \left(i = \overline{1, m}\right)$. В одиниці j-го продукту міститься $a_{ij} \left(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\right)$ поживної речовини i. Необхідно знайти оптимальний раціон $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності: мінімальна вартість раціону.

Позначимо через x_1, x_2, …, x_n – кількість відповідного j-го виду продукту $\left(j = \overline{1, n}\right)$. Система обмежень описуватиме забезпечення в раціоні кожної поживної речовини не нижче зазначеного рівня $b_i \left(i = \overline{1, m}\right)$. Економіко-математична модель матиме вигляд:

$$\min F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n \ge b_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., \ x_n \ge 0.$$

Аналогічно як у виробничій задачі, економіко-математична модель задачі про «дієту» (або про суміш) також може описувати інші економічні процеси. По суті цей тип задач дає змогу знаходити оптимальне поєднання деякого набору компонент в одне ціле, причому таке поєднання має задовольняти певні умови.

Приклад 2.4. Денний раціон студента складається з сала, хліба та цукерок. Відомі вартості одиниці кожного продукту, потреба у поживних речовинах та кількість поживних речовин в одиниці продукту. Визначити,. які продукти і в якій кількості потрібно купувати студенту, щоб витратити якомога менше грошей з урахуванням потреб дієтологів.

Таблиця 2.4

Вихідні дані для розв'язання задачі

Назва продукту	Вміст поживних речовин в 1 кг продукту, г			Ціна за 1 кг, грн.
	білки	жири	вуглеводи	
Сало	50	750	–	55
Хліб	85	50	780	10
Цукерки	10	25	670	60
Мінімальні потреби організму у поживних речовинах, г	100	60	500	

Побудова економіко-математичної моделі

Необхідно скласти денний раціон, який має мінімальні вартість, в якому вміст кожного виду поживних речовин було б не меншу встановленої межі.

Позначимо x_1 – кількість (кг) сала, x_2 – кількість (кг) хліба, x_3 – кількість (кг) цукерок. Денний раціон буде містити:

$50x_1 + 85x_2 + 10x_3$ потреби організму у білках,
$750x_1 + 50x_2 + 25x_3$ потреби організму у жирах,
$780x_2 + 670x_3$ потреби організму у вуглеводах.

Цільова функція (критерій оптимальності):
Загальна вартість продуктів:

$$\min F = 55x_1 + 10x_2 + 60x_3 \tag{2.7}$$

Вміст поживних речовин (білка, жиру та вуглеводів) в раціоні повинен бути не менше 100, 60 та 500 одиниць.

Математична модель задачі матиме вигляд:

$$F = 55x_1 + 10x_2 + 60x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 50x_1 + 85x_2 + 10x_3 \geq 100 \\ 750x_1 + 50x_2 + 25x_3 \geq 60 \\ 780x_2 + 670x_3 \geq 500 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$

Приклад 2.5. Стандартом передбачається, що октанове число бензину А-76 має бути не нижчим 76, а вміст сірки — не більшим, ніж 0,3%. Для виготовлення такого бензину на заводі використовуються чотири компоненти. Дані про обсяги запасів компонентів, які змішуються, їх вартості, октанові числа та вміст сірки наведені в таблиці 2.5:

Таблиця 2.5

Техніко-економічні показники компонент бензину

Показник	Компонента бензину			
	№ 1	№ 2	№ 3	№4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	0,35	0,35	0,30	0,20
Наявний обсяг, т	700	600	500	300
Вартість, грош. од./т	40	45	60	90

Необхідно визначити, скільки тонн кожного компонента потрібно використати для того, щоб отримати 1000 т бензину А-76 з мінімальною собівартістю.

Побудова економіко-математичної моделі

Позначимо через x_j кількість j-го компонента в суміші (т), j=1,2,3,4.

Перше обмеження забезпечує потрібне значення октанового числа в суміші:

$$68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 1000 .$$

Вміст сірки в суміші має не перевищувати 0,3 %:

$$0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \leq 0{,}3 \cdot 1000 ,$$

а загальна маса утвореної суміші має дорівнювати 1000 т:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 .$$

Використання кожного компонента має не перевищувати його наявного обсягу:

$$x_1 \leq 700;$$
$$x_2 \leq 600;$$
$$x_3 \leq 500;$$
$$x_4 \leq 300.$$

Собівартість суміші визначається за формулою:

$$F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4 .$$

Загалом, економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$\min F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} 68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76\,000; \\ 0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \geq 300; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000; \\ x_1 \leq 700; \\ x_2 \leq 600; \\ x_3 \leq 500; \\ x_4 \leq 300. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,4}).$$

Приклад 2.6. Учасник експедиції складає рюкзак, і йому необхідно розв'язати питання про те, які взяти продукти. У розпорядженні є м'ясо, борошно, сухе молоко, цукор. У рюкзаку залишилось для продуктів лише 45 дм^3 об'єму, до того ж необхідно, щоб загальна маса продуктів не перевищувала 35 кг. Лікар експедиції рекомендував, щоб м'яса (за масою) було більше, ніж борошна принаймні удвічі, борошна не менше, ніж молока, а молока хоча б у вісім разів більше, ніж цукру. Скільки і яких продуктів потрібно покласти в рюкзак, щоб сумарна калорійність продуктів була найбільшою? Характеристики продуктів наведені в табл.2.6.

Таблиця 2.6

Характеристики продуктів

Показники	Продукт			
	м'ясо	борошно	молоко	цукор
Об'єм (дм^3/кг)	1	1,5	2	1
Калорійність (ккал/кг)	1500	5000	5000	4000

Побудова економіко-математичної моделі

Позначимо через x_1, x_2, x_3, x_4 масу (в кг) м'яса, борошна, молока і цукру відповідно.

Сумарна маса продуктів має не перевищувати 35 кг:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 35,$$

а об'єм, який вони мають займати, – не більше 45 дм^3:

$$x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 45.$$

Крім того, мають виконуватися співвідношення стосовно пропорцій за масою продуктів:

а) м’яса принаймні удвічі більше, ніж борошна, отже:

$$x_1 \ge 2x_2;$$

б) борошна не менше, ніж молока: $x_2 \ge x_3$;

в) молока хоча б у вісім разів більше, ніж цукру: $x_3 \ge 8x_4$.

Калорійність всього набору продуктів можна визначити так:

$$F = 1500x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 + 4000x_4.$$

Отже, економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$\max F = 1500x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 + 4000x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 35; \\ x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 45; \\ x_1 \ge 2x_2; \\ x_2 \ge x_3; \\ x_3 \ge 8x_4. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,4}).$$

2.5.3 Транспортна задача

Розглядається m пунктів виробництва та n пунктів споживання деякої однорідної продукції. Відомі обсяги виробництва продукції у кожному i-му пункті – $a_i \left(i = \overline{1,m}\right)$ та потреби кожного j-го пункту споживання – $b_j \left(j = \overline{1,n}\right)$. Також задана матриця розмірністю $m \times n$, елементи якої $c_{ij} \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$ є вартостями транспортування одиниці продукції з i-го пункту виробництва до j-го пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції $X = x_{ij} \, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ з урахуванням наявності продукції у виробників та забезпечення вимог споживачів.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень.

Позначимо через x_{ij} обсяг продукції, що перевозиться від i-го виробника до j-го споживача.

Можна вивезти від кожного виробника продукцію, що є в наявності. Тому для кожного i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ має виконуватись умова: $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i$. Забезпечення кожного споживача потрібною кількістю продукції дає умова: $x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j$ для кожного $j(j = \overline{1,n})$. Загальна вартість перевезень є сумою добутків $c_{ij} x_{ij}$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$. Необхідно, щоб виконувалась умова

$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Отже, економіко-математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$\min F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} +$$
$$+ c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$$

за умов:

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} \le a_1;$$
$$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} \le a_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} \le a_m.$$
$$x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1;$$
$$x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n.$$
$$x_{ij} \ge 0 \ (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}).$$

Як і в двох попередніх задачах математична модель транспортної задачі може використовуватись і тоді, коли в постановці задачі немає навіть згадки про перевезення продукції тощо.

Приклад 2.7. Фермерське господарство спеціалізується на вирощуванні озимої пшениці і має три ділянки землі площею S_1 = 40 га, S_2 = 90 га, S_3 = 55 га. Враховуючи наявну кількість посівного матеріалу, є можливість засіяти всю площу озимою пшеницею трьох сортів. Кількість пшениці сорту «Миронівська-808» забезпечить посів на 80 га, «Безоста-1» – 60 га та «Одеська-51» – 45 га. Урожайність сорту «Миронівська-808» на даних ділянках становить відповідно 41 ц/га, 40 ц/га, 46 ц/га. Аналогічно для сорту «Безоста-1» маємо: 38 ц/га, 41 ц/га, 45 ц/га, а для «Одеської-51» — 30 ц/га, 28 ц/га, 40 ц/га.

Необхідно розподілити посівний матеріал за земельними ділянками так, щоб отримати максимальний урожай (валовий збір) озимої пшениці.

Побудова економіко-математичної моделі.

Позначимо через x_{ij} площу (га) i-ої земельної ділянки, що буде засіяна j-м сортом озимої пшениці (домовимося, що сорти «Миронівська-808», «Безоста-1», «Одеська-51» відповідатимуть номерам 1, 2, 3), (i = 1, 2, 3), (j = 1, 2, 3).

Тоді використання земельних угідь описуватиме така система обмежень:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40;$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 90;$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 55.$$

Використання посівного матеріалу формально можна описати так:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80;$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60;$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45.$$

Валовий збір зерна розраховується як сума добутків урожайностей відповідних сортів пшениці на їх посівні площі, тобто:

$$\begin{gathered} F = 41x_{11} + 40x_{21} + 46x_{31} + \\ + 38x_{12} + 41x_{22} + 45x_{32} + \\ + 30x_{13} + 28x_{23} + 40x_{33}. \end{gathered}$$

Отже, економіко-математична модель задачі загалом буде мати вигляд:

$$\begin{gathered} \max F = 41x_{11} + 40x_{21} + 46x_{31} + \\ + 38x_{12} + 41x_{22} + 45x_{32} + \\ + 30x_{13} + 28x_{23} + 40x_{33} \end{gathered}$$

за умов:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 90; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 55; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60; \\ x_{13} + x_{22} + x_{33} = 45. \end{cases} \quad x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, 2, 3), \ (j = 1, 2, 3).$$

Приклад 2.8. У кожного із постачальників накопичено відповідно 300, 250, 110 одиниць товару. Потреби споживачів складають відповідно 100, 200, 150, 210 одиниць товару. Вартості перевезення товару від i-го постачальника до j-го споживача подано у вигляді матриці, яку називають матрицею тарифів:

$$C = \begin{pmatrix} 70 & 50 & 15 & 80 \\ 80 & 90 & 40 & 60 \\ 50 & 10 & 90 & 11 \end{pmatrix}$$

Маємо транспортну задачу з правильним балансом, тобто обсяги потреб та запасів рівні:

$$100 + 200 + 150 + 210 = 300 + 250 + 100 = 660$$

Побудова економіко-математичної моделі

Організувати перевезення однорідного вантажу від трьох постачальників A_1, A_2, A_3 до чотирьох споживачів B_1, B_2, B_3, B_4 так, щоб забезпечити мінімальну вартість перевезень.

Позначимо x_{ij} – кількість товару, перевезеного від i-го постачальника до j-го споживача. Для зручності побудови математичної моделі, сформуємо умову задачі у вигляді табл. 2.7.

Таблиця 2.7

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	70 x_{11}	50 x_{12}	15 x_{13}	80 x_{14}	300
A_2	80 x_{21}	90 x_{22}	40 x_{23}	60 x_{24}	250
A_3	50 x_{31}	10 x_{32}	90 x_{33}	11 x_{34}	110
Потреби	100	200	150	210	660

За табл. бачимо, що кількість товару, перевезеного від постачальників задовольняє умову (a) ,а кількість товару, доставленого споживачам, задовольняє умову (b):

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 300 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 250 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 110 \end{cases} \quad (a) \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 200 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 150 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 210 \end{cases} \quad (b)$$

Загальна вартість усіх перевезень повинна бути мінімальною, тобто

$$F = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + C_{13}x_{13} + C_{14}x_{14} + C_{21}x_{21} + C_{22}x_{22} + C_{23}x_{23} + C_{24}x_{24} + C_{31}x_{31} + C_{32}x_{32} + C_{33}x_{33} + C_{34}x_{34} \to \min$$

за умов

$$(a), (b), x_{ij} \geq 0 \ (i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,4}).$$

2.5.4. Задача про банк: визначають оптимальний розподіл коштів, розміщених у кредитах та цінних паперах для одержання максимального прибутку.

Критерій оптимальності - максимальний прибуток.

Приклад 2.9. Власні кошти банку складають 100 млн $. Доходність від кредитів та цінних паперів відповідно складає 50 млн. $ та 80 млн. $. Частина їх, але не менше 35 млн. $ – кредити (неліквідні активи банку). Ліквідні активи – цінні папери – мають складати не менше 30% коштів, розміщених у кредитах та цінних паперах. Визначити скільки коштів потрібно вкласти у кредити а скільки у цінні папери для одержання максимального прибутку.

Побудова економіко-математичної моделі

Позначимо: x – капітал (млн. $), виражений у кредитах;

y – капітал (млн. $), вкладений у цінні папери.

Цільова функція:

загальний прибуток від x кредитів та y цінних паперів:

$$\max F = 50x + 80y$$

Обмеження:

– обмеження власного капіталу: $x + y \leq 100$

– обмеження по кредитах: $x \geq 35$

– обмеження по цінним паперам: $y = 0,3\ (x + y)$

Умови невід’ємності змінних:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Математична модель задачі:

$$\max F = 50x + 80y$$

$$\begin{cases} x + y \leq 100 \\ x \geq 35 \\ y \geq 0,3(x + y) \end{cases}$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

ТЕМА 3
ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

3.1. Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування

3.2. Форми запису задач лінійного програмування

3.3. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

3.4. Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування

3.5 Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

3.1. Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування

Під **задачею лінійного програмування (ЗЛП)** розуміють задачу знаходження мінімуму (максимуму) лінійної функції від n змінних на множині розв'язків системи лінійних нерівностей або лінійних рівнянь.

Математична модель загальної задачі лінійного програмування подається у вигляді:

$$\max (\min)\ F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad . \qquad (3.1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m. \end{cases} \qquad (3.2)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \quad (3.3)$$

Отже, потрібно знайти значення змінних x_1, x_2, …, x_n, які задовольняють умови (3.2) і (3.3), і цільова функція (3.1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Для загальної задачі лінійного програмування використовуються такі поняття.

Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати якого задовольняють систему обмежень (3.2) та умови невід'ємності змінних (3.3), називається ***допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування***.

Допустимий план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається ***опорним планом*** задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє не менше, ніж m лінійно незалежних обмежень системи (3.2) у вигляді рівностей, а також обмеження (3.3) щодо невід'ємності змінних.

Опорний план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, називається ***невиродженим***, якщо він містить точно m додатних змінних, інакше він ***вироджений***.

Опорний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, за якого цільова функція (3.1) досягає масимального (чи мінімального) значення, називається ***оптимальним розв'язком (планом) задачі лінійного програмування***.

Оптимальний план є розв'язком ЗЛП.

Під час розв'язання задачі ЛП можливі три випадки:

1. Існує оптимальний план (єдиний або нескінченна множина оптимальних планів).
2. Оптимальний план не існує, хоча плани цієї задачі існують, але на непорожній множині планів цільова функція не обмежена (зверху – в задачі максимізації, знизу – в задачі мінімізації).
3. Оптимального плану не існує, тому що в задачі не існує жодного плану.

Існують такі форми задач лінійного програмування:

Загальна форма ЗЛП

Можна використати і більш стислий запис:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \; \{\le, \ge, =\} b_i$$

$$i = \overline{1, m}, \; x_j \in R, \; j = \overline{1, n}$$

В ***загальній формі ЗЛП*** умови невід'ємності можуть накладатися або на деякі змінні або не накладатися зовсім.

Стандартна (симетрична) форма ЗЛП

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1, n}$$

або

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1, n}$$

Канонічна (основна) форма ЗЛП

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$$

За канонічної форми ЗЛП в системі обмежень всі b_i (i = 1, 2, …, m) невід'ємні, а всі обмеження є рівностями.

Будь-яка ЗЛП може бути зведена до канонічної, стандартної чи загальної форми. Вказані вище три форми ЗЛП еквівалентні в тому розумінні, що кожна з них за допомогою нескладних перетворень може бути представлена у формі іншої задачі.

Правила переходу від однієї форми ЗЛП до іншої:

1. Заміна нерівності виду «≥» на нерівність виду «≤».

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n \leq -b_i$$

2. Зведення задачі мінімізації функції до задачі максимізації:

$$F \to \min \quad \Leftrightarrow \quad -F \to \max$$

3. Перехід від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей і навпаки:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \geq 0)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \geq 0)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} \leq b_i \\ -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n + x_{n+1} \geq -b_i \end{cases}$$

4. Заміна змінних, на які не накладено умови невід'ємності:

Якщо на змінну x_k не накладено умови невід'ємності, то її потрібно замінити двома змінними u_k, v_k увівши заміну $x_k = u_k - v_k$, причому $u_k \geq 0$, $v_k \geq 0$.

Приклад 3.1. Записати у канонічній формі наступну ЗЛП:

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq -2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Розв'язування. Щоб записати задачу у канонічній формі треба від нерівностей перейти до рівностей. Маємо чотири нерівності, отже, вводимо чотири додаткові невід'ємні змінні: x_6, x_7, x_8, x_9.

Першу нерівність помножимо спочатку на (–1), щоб позбутися від'ємної правої частини.

$$-2x_1 - x_3 + x_4 - x_5 \geq 2$$

Одержимо канонічну форму ЗЛП:

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

3.2. Форми запису задач лінійного програмування

Задачу лінійного програмування зручно записувати за допомогою знака суми «Σ». Справді, задачу (3.1) – (3.3) можна подати так:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \, (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.4)$$

Ще компактнішим є запис задачі лінійного програмування у векторно-матричному вигляді:

$$\max(\min) Z = CX$$

за умов:

$$AX = A_0; \qquad (3.5)$$

$$X \geq 0,$$

де

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11}, \; a_{12}, \; \ldots, \; a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \; \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}, \; a_{m2}, \; \ldots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

є матрицею коефіцієнтів при змінних;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — вектор змінних; } A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ — вектор вільних членів;}$$

$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Часто задачу лінійного програмування зручно записувати у векторній формі:

$$\max(\min)Z = CX$$

за умов:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0; \tag{3.6}$$

$$X \geq 0,$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

є векторами коефіцієнтів при змінних.

3.3. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

Розглянемо на площині x_1Ox_2 сумісну систему лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m. \end{cases} \tag{3.7}$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0.$$

Кожна нерівність цієї системи геометрично визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (i=1,2, ..., m). Умови невід'ємності змінних визначають півплощини з граничними прямими $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$. Система сумісна, тому півплощини як опуклі множини, перетинаючись, утворюють спільну частину, що є опуклою множиною і являє собою сукупність точок, координати кожної з яких є розв'язком даної системи (рис. 3.1).

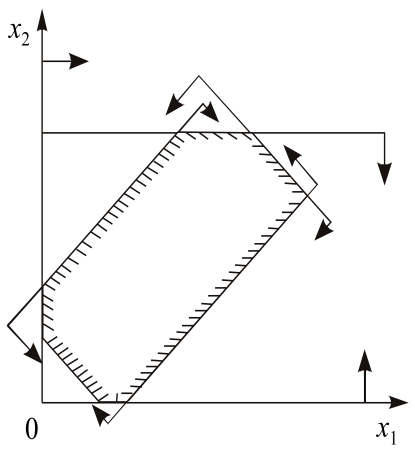

Рис. 3.1

Сукупність цих точок (розв'язків) називають ***багатокутником розв'язків***, або ***областю допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування***. Це може бути точка (єдиний розв'язок), відрізок, промінь, багатокутник, необмежена багатокутна область.

Якщо в системі обмежень (3.7) буде три змінних, то кожна нерівність геометрично визначатиме півпростір тривимірного простору, граничними площинами котрого будуть $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$, а умови невід'ємності – півпростори з граничними площинами $x_j=0$ (j = 1, 2, 3), де i – номер обмеження, а j–– номер змінної. Якщо система обмежень сумісна, то ці півпростори як опуклі множини, перетинаючись, утворять у тривимірному просторі спільну частину, що називається ***багатогранником розв'язків***. Він може бути точкою, відрізком, променем, багатокутником, багатогранником, багатогранною необмеженою областю.

Нехай у системі обмежень (3.7) кількість змінних більша, ніж три: x_1, x_2,… x_n; тоді кожна нерівність визначає півпростір n-вимірного простору з граничною гіперплощиною $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ (i = 1, 2, ..., m). Кожному обмеженню виду (3.7) відповідають гіперплощина та напівпростір, який лежить з одного боку цієї гіперплощини, а умови невід'ємності — півпростори з граничними гіперплощинами $x_j = 0$ (j=1, 2, 3, ..., n).

Якщо система обмежень сумісна, то за аналогією з тривимірним простором вона утворює спільну частину в n-вимірному просторі — опуклий багатогранник допустимих розв'язків.

Отже, геометрично задача лінійного програмування являє собою відшукання координат такої точки багатогранника розв'язків, при підстановці яких у цільову лінійну функцію остання набирає максимального (мінімального) значення, причому допустимими розв'язками є усі точки багатогранника розв'язків.

Цільову функцію

$$\begin{cases} -x_2 + 5 = 0, \\ -x_1 - 1/2\,x_2 + 6 = 0. \end{cases}$$

в n-вимірному просторі основних змінних можна геометрично інтерпретувати як сім'ю паралельних гіперплощин, положення кожної з яких визначається значенням параметра Z.

Розглянемо геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування на прикладі. Нехай фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукрові буряки на площі 20 га, відвівши під цукрові буряки не менше як 5 га. Техніко-економічні показники вирощування цих культур маємо у табл.3.1:

Таблиця 3.1

Показники вирощування сільськогосподарських культур

Показник (із розрахунку на 1 га)	Озима пшениця	Цукрові буряки	Наявний ресурс
Затрати праці, людино-днів	5	25	270
Затрати праці механізаторів, людино-днів	2	8	80
Урожайність, тонн	3,5	40	—
Прибуток, тис. грн	0,7	1	—

Критерієм оптимальності є максимізація прибутку.

Запишемо економіко-математичну модель структури виробництва озимої пшениці та цукрових буряків, ввівши такі позначення:

x_1 — шукана площа посіву озимої пшениці, га;

x_2 — шукана площа посіву цукрових буряків, га.

Задача лінійного програмування має такий вигляд:

$$\max Z = 0{,}7x_1 + x_2 \tag{3.8}$$

за умов:

$$x_1 + x_2 \le 20; \tag{3.9}$$

$$5x_1 + 25x_2 \le 270; \tag{3.10}$$

$$2x_1 + 8x_2 \le 80; \tag{3.11}$$

$$x_2 \ge 5; \tag{3.12}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{3.13}$$

Геометричну інтерпретацію задачі зображено на рис. 3.2.

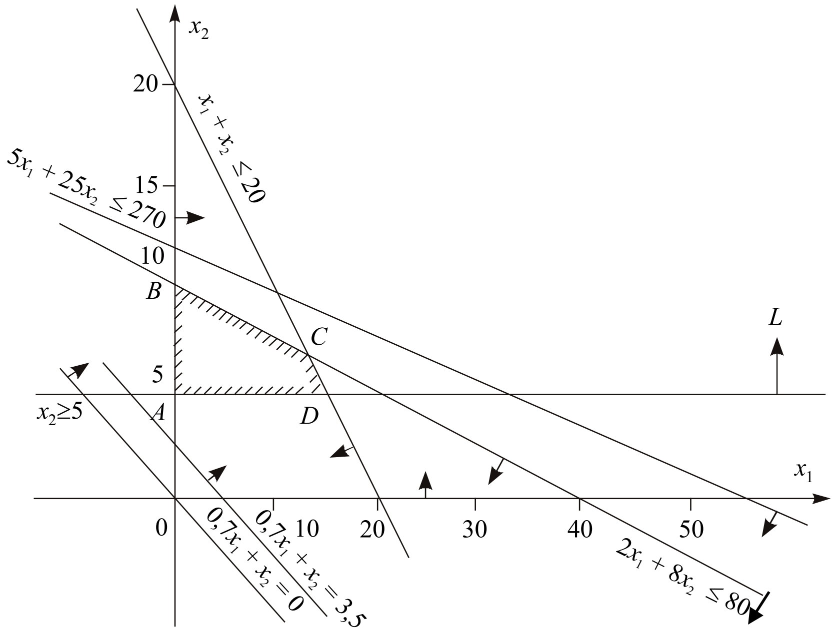

Рис. 3.2. Область допустимих розв'язків задачі

Область допустимих розв'язків цієї задачі дістаємо так. Кожне обмеження, наприклад $x_1 + x_2 \leq 20$, задає півплощину з граничною прямою $x_1 + x_2 = 20$. Будуємо її і визначаємо півплощину, яка описується нерівністю $x_1 + x_2 \leq 20$. З цією метою в нерівність $x_1+x_2 \leq 20$ підставляємо координати характерної точки, скажімо, $x_1=0$ і $x_2=0$. Переконуємося, що ця точка належить півплощині $x_1+x_2 \leq 20$. Цей факт на рис.3.2 ілюструємо відповідною напрямленою стрілкою. Аналогічно будуємо півплощини, які відповідають нерівностям (3.10)—(3.13). У результаті перетину цих півплощин утворюється область допустимих розв'язків задачі (на рис.3.2 – чотирикутник *ABCD*). Цільова функція $Z = 0,7x_1 + x_2$ являє собою сім'ю паралельних прямих, кожна з яких відповідає певному значенню Z. Зокрема, якщо Z=0, то маємо $0,7x_1 + x_2 = 0$. Ця пряма проходить через початок системи координат. Коли Z=3,5, то маємо пряму $0,7x_1 + x_2 = 3,5$.

3.4. Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Властивості розв'язків задачі лінійного програмування формулюються у вигляді чотирьох теорем.

Властивість 1. (Теорема 3.1) Множина всіх планів задачі лінійного програмування опукла.

Властивість 2. (Теорема 3.2) Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатогранника розв'язків. Якщо ж цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього багатогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Властивість 3. (Теорема 3.3) Якщо відомо, що система векторів $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ($k \leq n$) у розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0$, $X \geq 0$ лінійно незалежна і така, що

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_kx_k = A_0,$$

де всі $x_j \geq 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ є кутовою точкою багатогранника розв’язків.

Властивість 4. (Теорема 3.4) Якщо $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – кутова точка багатогранника розв’язків, то вектори в розкладі $A_1x_1 + + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0$, $X \geq 0$, що відповідають додатним x_j, є лінійно незалежними.

Наслідок 1. Оскільки вектори $A_1, A_2, \ldots, A_n$ мають розмірність m, то кутова точка багатокутника розв’язків має не більше, ніж m додатних компонентів $x_i > 0 \ (i = \overline{1, m})$.

Наслідок 2. Кожній кутовій точці багатокутника розв’язків відповідає $k \leq m$ лінійно незалежних векторів системи $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

З наведених властивостей можна зробити висновок, що якщо функціонал задачі лінійного програмування обмежений на багатограннику розв’язків, то:

1) існує така кутова точка багатогранника розв’язків, в якій лінійний функціонал досягає свого оптимального значення;

2) кожний опорний план відповідає кутовій точці багатогранника розв’язків.

Тому для розв’язання задачі лінійного програмування необхідно досліджувати лише кутові точки багатогранника (опорні плани), не включаючи до розгляду внутрішні точки множини допустимих планів.

3.5 Графічний метод розв’язування задач лінійного програмування

Для розв’язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач із двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Обмежене використання графічного методу зумовлене складністю побудови багатогранника розв’язків у тривимірному просторі (для задач з трьома змінними), а графічне зображення задачі з кількістю змінних більше трьох взагалі неможливе.

Розглянемо задачу.

Знайти

$$\max(\min) Z = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{3.15}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_m. \end{cases} \tag{3.16}$$

$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \tag{3.17}$$

Припустимо, що система (3.15) за умов (3.16) сумісна і багатокутник її розв’язків обмежений.

Згідно з геометричною інтерпретацією задачі лінійного програмування (п.3.3) кожне i-те обмеження-нерівність у (3.16) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (i = 1, 2, …, m). Системою обмежень (3.16) графічно можна зобразити спільну частину, або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множину точок, координати яких задовольняють всі обмеження задачі – ***багатокутник розв'язків***.

Умова (3.17) невід'ємності змінних означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору. Цільова функція задачі лінійного програмування геометрично інтерпретується як сім'я паралельних прямих $c_1x_1+c_2x_2$ = const.

Скористаємося для графічного розв'язання задачі лінійного програмування властивостями, наведеними в п.3.4: якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатокутника розв'язків. Якщо ж цільова функція досягає екстремального значення більш як в одній вершині багатокутника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин.

Отже, розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину багатокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої в (3.15) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування складається з таких кроків:

1. Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (3.16) знаків нерівностей на знаки рівностей.

2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.

3. Знаходимо багатокутник розв'язків задачі лінійного програмування.

4. Будуємо вектор $\overrightarrow{N} = (c_1;\, c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі.

5. Будуємо пряму $c_1x_1+c_2x_2$=const, перпендикулярну до вектора $\overrightarrow{N}$.

6. Рухаючи пряму $c_1x_1+c_2x_2$=const в напрямку вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція набирає екстремального значення.

7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки:

1. Цільова функція набирає максимального значення в єдиній вершині A багатокутника розв'язків (рис. 3.3).

2. Максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка AB (рис. 3.4). Тоді задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани.

3. Задача лінійного програмування не має оптимальних планів: якщо цільова функція необмежена згори (рис.3.5) або система обмежень задачі несумісна (рис. 3.6).

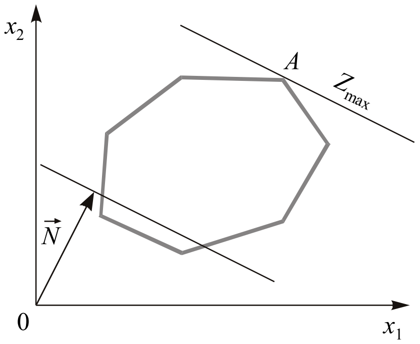

Рис. 3.3

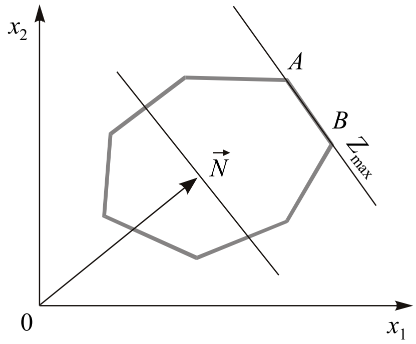

Рис. 3.4

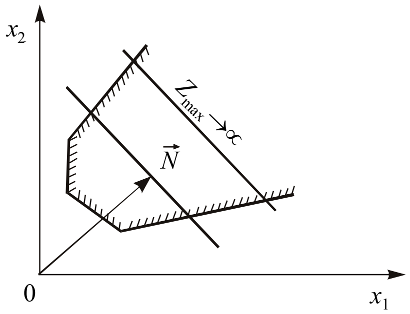

Рис. 3.5

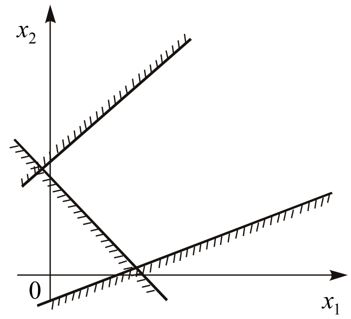

Рис. 3.6

4. Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв’язків (рис. 3.7 і 3.8). На рис. 3.7 у точці *B* маємо максимум, на рис. 3.8 у точці *A* – мінімум, на рис. 3.9 зображено, як у разі необмеженої області допустимих планів цільова функція може набирати максимального чи мінімального значення у будь-якій точці променя.

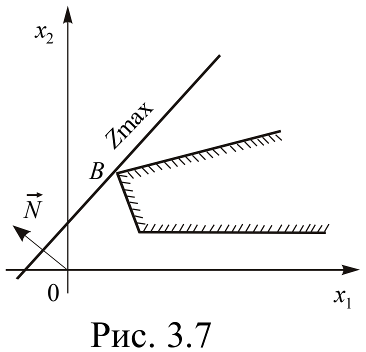

Рис. 3.7

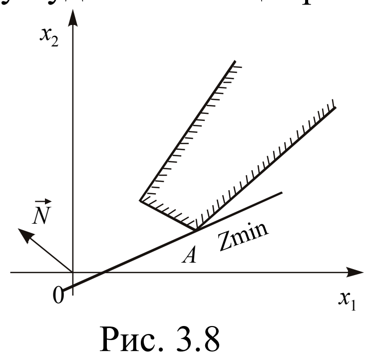

Рис. 3.8

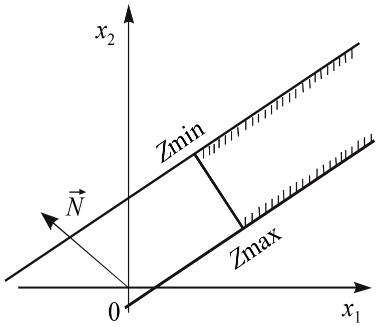

Рис. 3.9

Розв'язувати графічним методом можна також задачі лінійного програмування n-вимірного простору, де $n > 3$, якщо при зведенні системи нерівностей задачі до системи рівнянь шляхом введення додаткових змінних кількість змінних n на дві більша, ніж число обмежень m, тобто $n - m = 2$.

Тоді, як відомо з курсу вищої математики, можна дві з n змінних, наприклад x_1 та x_2, вибрати як вільні, а інші m зробити базисними і виразити через вільні. Припустимо, що це зроблено. Отримаємо $m = n - 2$ рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3; \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n. \end{cases}$$

Оскільки всі значення $x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, n})$, то мають виконуватись умови:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0; \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4 \geq 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n \geq 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Розглянемо, як можна зобразити ці умови геометрично. Візьмемо, наприклад, першу з них:

$$x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0.$$

Узявши величину x_3 рівною своєму крайньому значенню — нулю, отримаємо рівняння:

$$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0.$$

Це рівняння прямої. Для такої прямої $x_3 = 0$, по одну сторону від неї $x_3 > 0$, а по другу – $x_3 < 0$. Відмітимо ту сторону прямої $\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0$, де $x_3 > 0$.

В аналогічний спосіб побудуємо і всі інші обмежуючі прямі: $x_4 = 0$; $x_5 = 0; \dots; x_n = 0$ і відмітимо для кожної з них півплощину, де відповідна змінна більше нуля.

У такий спосіб отримують n–2 прямі та дві осі координат ($x_1 = 0, x_2 = 0$). Кожна з них визначає півплощину, де виконується умова $x_i > 0 \ (i = \overline{1, n-2})$.

Частина площини в x_1Ox_2 належить водночас всім півплощинам, утворюючи багатокутник допустимих розв'язків.

Припустимо, що в задачі необхідно знайти максимальне значення функціонала:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Підставивши вирази для x_3, x_4, x_5, ...; x_n з (3.18) у цей функціонал, зведемо подібні доданки і отримаємо вираз лінійної функції F всіх n змінних лише через дві вільні змінні x_1 та x_2:

$$F = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2,$$

де γ_0 – вільний член, якого в початковому вигляді функціонала не було.

Очевидно, що лінійна функція $F' = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2$ досягає свого максимального значення за тих самих значень x_1 та x_2, що й $F = \gamma_0 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2$. Отже, процедура відшукання оптимального плану з множини допустимих далі здійснюється за алгоритмом для випадку двох змінних.

ТЕМА 4
СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Початковий опорний план
4.2. Перехід від одного опорного плану до іншого
4.3. Оптимальний розв'язок. Критерій оптимальності плану
4.4. Розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом

Графічний метод для визначення оптимального плану задач лінійного програмування доцільно застосовувати лише для задач із двома змінними. За більшої кількості змінних необхідно застосовувати інший метод. З властивостей розв'язків задачі лінійного програмування відомо: оптимальний розв'язок задачі має знаходитись в одній з кутових точок багатогранника допустимих розв'язків. Тому найпростіший спосіб відшукання оптимального плану потребує перебору всіх кутових точок (допустимих планів задачі, які ще називають опорними). Порівняння вершин багатогранника можна здійснювати тільки після відшукання якоїсь однієї з них, тобто знайшовши початковий опорний план. Кожний опорний план визначається системою m лінійно незалежних векторів, які містяться в системі обмежень задачі з n векторів $A_1, A_2, ..., A_n$. Отже, загальна кількість опорних планів визначається кількістю комбінацій $C_n^m = \frac{n}{m(n-m)}$. Задачі, що описують реальні економічні процеси, мають велику розмірність, і простий перебір всіх опорних планів таких задач є дуже складним, навіть за умови застосування сучасних ЕОМ. Тому необхідне використання методу, який уможливлював би скорочення кількості обчислень. 1949 року такий метод був запропонований американським вченим Дж.Данцігом – так званий симплексний метод, або ***симплекс-метод***.

Ідея цього методу полягає в здійсненні спрямованого перебору допустимих планів у такий спосіб, що на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного плану до наступного, який за значенням цільової функції був би хоча б не гіршим за попередній. Значення функціонала при переході змінюється в потрібному напрямку: збільшується (для задачі на максимум) чи зменшується (для задачі на мінімум).

Процес розв'язання задачі симплекс-методом має ітераційний характер: однотипні обчислювальні процедури (ітерації) повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

Отже, симплекс-метод – це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

4.1. Початковий опорний план

Розглянемо задачу лінійного програмування, записану в канонічній формі:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,...,n).$$

Не порушуючи загальності, допустимо, що система рівнянь містить перші m одиничних векторів. Отримаємо:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} x_1 \quad + a_{1,m+1}x_{m+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ \quad x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad\quad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.2}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,...,n). \tag{4.3}$$

Система обмежень (4.2) у векторній формі матиме вигляд:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + ... + x_nA_n = A_0, \tag{4.4}$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \ A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}, \ \dots, \ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$A_1, A_2, ..., A_m$ – лінійно незалежні одиничні вектори m-вимірного простору, що утворюють одиничну матрицю і становлять базис цього простору. Тому в розкладі (4.4) базисними змінними будуть $x_1, x_2, ..., x_m$, а інші змінні – вільні. Прирівняємо всі вільні змінні до нуля, тобто $x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, ..., x_n = 0$. Оскільки $b_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m})$, а вектори $A_1, A_2, ..., A_m$ – одиничні, то отримаємо один із розв'язків системи обмежень (4.2):

$$X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, ..., x_m = b_m, x_{m+1} = 0, ..., x_n = 0), \tag{4.5}$$

тобто допустимий план.

Такому плану відповідає розклад

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_m A_m = A_0, \qquad (4.6)$$

де $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — лінійно незалежні вектори і за властивістю 3 розв'язків задачі лінійного програмування (п.3.4) план X_0 є кутовою точкою багатогранника розв'язків, а отже, може бути початковим опорним планом.

4.2. Перехід від одного опорного плану до іншого

Розглянемо, як, виходячи з початкового опорного плану (4.6), перейти до наступного опорного плану, що відповідає цілеспрямованому процесу перебору кутових точок багатогранника розв'язків.

Оскільки $A_1, A_2, \ldots, A_m$ є базисом m-вимірного простору, то кожен з векторів співвідношення (4.5) може бути розкладений за цими векторами базису, причому у єдиний спосіб:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i, \; j = 1,2,\ldots,n.$$

Розглянемо такий розклад для довільного небазисного вектора, наприклад, для A_{m+1}:

$$x_{1,m+1} A_1 + x_{2,m+1} A_2 + \ldots + x_{m,m+1} A_m = A_{m+1}. \qquad (4.7)$$

Припустимо, що у виразі (4.7) існує хоча б один додатний коефіцієнт $x_{i,m+1}$.

Введемо деяку поки що невідому величину $\theta > 0$, помножимо на неї обидві частини рівності (4.7) і віднімемо результат з рівності (4.6). Отримаємо:

$$(x_1 - \theta \cdot x_{1,m+1}) A_1 + (x_2 - \theta \cdot x_{2,m+1}) A_2 + \ldots + (x_m - \theta \cdot x_{m,m+1}) A_m + \theta \cdot A_{m+1} = A_0. \qquad (4.8)$$

Отже, вектор

$$X_1 = (x_1 - \theta \cdot x_{1,m+1};\, x_2 - \theta \cdot x_{2,m+1}; \ldots x_m - \theta \cdot x_{m,m+1};\, \theta; 0, \ldots, 0)$$

є планом задачі у тому разі, якщо його компоненти невід'ємні. За допущенням $\theta > 0$, отже, ті компоненти вектора X_1, в які входять $x_{i,m+1} \le 0$, будуть невід'ємними, тому необхідно розглядати лише ті компоненти, які містять додатні $x_{i,m+1}$ $(i = 1,2,\ldots,m)$. Тобто необхідно знайти таке значення $\theta > 0$, за якого для всіх $x_{i,m+1} > 0$ буде виконуватися умова невід'ємності плану задачі:

$$x_i - \theta \cdot x_{i,m+1} \ge 0. \qquad (4.9)$$

З (4.9) отримуємо, що для шуканого $\theta > 0$ має виконуватися умова $\theta \le \frac{x_i}{x_{i,m+1}}$. Отже, вектор X_1 буде планом задачі для будь-якого θ, що задовольняє умову:

$$0 < \theta \le \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}},$$

де мінімум знаходимо для тих *i*, для яких $x_{i,m+1} > 0$.

Опорний план не може містити більше ніж *m* додатних компонент, тому в плані X_1 необхідно перетворити в нуль хоча б одну з компонент. Допустимо, що $\theta = \theta^* = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}$ для деякого значення *i*, тоді відповідна компонента плану X_1 перетвориться в нуль. Нехай це буде перша компонента плану, тобто:

$$\theta^* = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}.$$

Підставимо значення θ^* у вираз (4.8):

$$(x_1 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{1,m+1})A_1 + (x_2 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{2,m+1})A_2 + ... + (x_m - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1})A_m +$$
$$+ \frac{x_1}{x_{1,m+1}} A_{m+1} = A_0,$$

якщо позначити $x_i - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{i,m+1} = x_i'$ $(i = \overline{2,m})$, $\frac{x_1}{x_{1,m+1}} = x_{m+1}'$, то рівняння можна подати у вигляді:

$$x_2' A_2 + x_3' A_3 + ... + x_m' A_{m+1} + x_{m+1}' A_{m+1} = A_0,$$

якому відповідає такий опорний план:

$$X_2 = (0; x_2'; x_3'; ...; x_m'; x_{m+1}'; 0; ...; 0).$$

Для визначення наступного опорного плану необхідно аналогічно продовжити процес: будь-який вектор, що не входить у базис, розкласти за базисними векторами, а потім визначити таке $\theta^* > 0$, для якого один з векторів виключається з базису.

Отже, узагальнюючи розглянутий процес, можемо висновувати: визначення нових опорних планів полягає у виборі вектора, який слід ввести в базис, і вектора, який необхідно вивести з базису. Така процедура відповідає переходу від одного базису до іншого за допомогою методу Жордана-Гаусса.

Необхідно зазначити, що для випадку, коли вектор A_{m+1} підлягає включенню в базис, а в його розкладі (4.7) всі $x_{i,m+1} \le 0$, то, очевидно, не існує такого значення $\theta > 0$, яке виключало б один з векторів. У такому разі план X_1 містить m+1 додатних компонент, отже, система векторів $A_1, A_2, ..., A_m, A_{m+1}$ буде лінійно залежною і визначає не кутову точку багатогранника розв'язків. Функціонал не може в ній набирати максимального значення. Це означає, що функціонал є необмеженим на багатограннику розв'язків.

4.3. Оптимальний розв'язок. Критерій оптимальності плану

Симплексний метод уможливлює направлений перебір опорних планів, тобто перехід від одного плану до іншого, який є хоча б не гіршим від попереднього за значенням функціонала. Отже, окремим питанням стає вибір вектора, який необхідно вводити в базис при здійсненні ітераційної процедури симплексного методу.

Розглянемо задачу лінійного програмування (4.1) – (4.3).

Допустимо, що вона має опорні плани і вони є невиродженими. Розглянемо початковий опорний план виду (4.5):

$$X_0 = \left(x_1 = b_1,\, x_2 = b_2, ..., x_m = b_m,\, x_{m+1} = 0, ..., x_n = 0\right).$$

Такому плану відповідає розклад за базисними векторами

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_m A_m = A_0 \tag{4.10}$$

та значення функціонала:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_m x_m = F(X_0). \tag{4.11}$$

Кожен з векторів $A_1, A_2, ..., A_m$ можна розкласти за векторами базису, причому у єдиний спосіб:

$$x_{1j} A_1 + x_{2j} A_2 + ... + x_{mj} A_m = A_j \quad (j = \overline{1, n}), \tag{4.12}$$

тому такому розкладу відповідатиме і єдине значення функціонала:

$$F_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + ... + c_m x_{mj} \quad (j = \overline{1, n}). \tag{4.13}$$

Позначимо через c_j коефіцієнт функціонала, що відповідає вектору A_j, та $\Delta_j = F_j - c_j$ (їх називають оцінками відповідних векторів плану) $(j = \overline{1, n})$. Тоді справедливим є таке твердження (***умова оптимальності плану*** задачі лінійного програмування): якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів A_j $(j = \overline{1, n})$ у даному базисі задовольняє умову:

$$\Delta_j = F_j - c_j \geq 0, \tag{4.14}$$

то план X_0 є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування (4.1) – (4.3).

Аналогічно формулюється умова оптимальності плану задачі на відшукання мінімального значення функціонала: якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів $A_j \ (j = \overline{1,n})$ у даному базисі задовольняє умову

$$\Delta_j = F_j - c_j \le 0, \tag{4.15}$$

то план X_0 є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування.

Отже, для того, щоб план задачі лінійного програмування був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб його оцінки $\Delta_j = F_j - c_j$ були невід'ємними для задачі на максимум та недодатними для задачі на мінімум.

4.4. Розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом

Розглянемо, як, виходячи з початкового опорного плану задачі лінійного програмування, за допомогою симплексного методу знайти оптимальний план.

Продовжимо розгляд задачі (4.1)-(4.3), опорний план якої $X_0 = \left(x_1 = b_1,\, x_2 = b_2, \ldots, x_m = b_m,\, x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0\right)$. Для дослідження даного плану на оптимальність (за умовою оптимальності плану задачі лінійного програмування) необхідно вектори $A_j \,(j = \overline{1,n})$ системи обмежень (4.2) розкласти за базисними векторами $A_1, A_2, \ldots, A_m$ і розрахувати значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$.

Всі подальші обчислення зручно проводити в ***симплексній таблиці*** (табл.4.1).

У стовпці «Базис» записані змінні, що відповідають базисним векторам, а в стовпці «$C_{баз}$» – коефіцієнти функціонала відповідних базисних векторів. У стовпці «План» – початковий опорний план X_0, в цьому ж стовпці в результаті обчислень отримують оптимальний план. У стовпцях $x_j \,(j = \overline{1,n})$ записані коефіцієнти розкладу кожного *j*-го вектора за базисом, які відповідають у першій симплексній таблиці коефіцієнтам при змінних у системі (4.2). У ($m+1$)-му рядку в стовпці «План» записують значення функціонала для початкового опорного плану $F(X_0)$, а в інших стовпцях x_j – значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$. Цей рядок симплексної таблиці називають ***оцінковим***.

Значення $F(X_0)$ знаходять підстановкою компонент опорного плану в цільову функцію, а значення $F(X_j)$ – при підстановці коефіцієнтів розкладу кожного *j*-го вектора за векторами базису, тобто ці значення в табл.4.1 отримують як скалярний добуток:

$$F(X_0) = C_{\text{áàç}} X_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i;$$

$$F_j = F(X_j) = C_{\text{áàç}} X_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \ j = 1,2,\ldots,n,$$

де c_i – коефіцієнти функціонала, що відповідають векторам базису.

Таблиця 4.1

Перша симплексна таблиця для розв'язку задач лінійного програмування

i	Базис	$C_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_k	…	c_n	θ_i
				x_1	x_2	…	x_l	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_k	…	x_n	
1	x_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1k}	…	a_{1n}	θ_1
2	x_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2j}	…	a_{2k}	…	a_{2n}	θ_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	x_l	c_l	b_l	0	0	…	1	…	0	$a_{l,m+1}$	…	a_{lj}	…	a_{lk}	…	a_{ln}	θ_l
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	x_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mj}	…	a_{mk}	…	a_{mn}	θ_m
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		$F(X_0)$	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_j	…	Δ_k	…	Δ_n	

Після заповнення табл.4.1 розраховують значення оцінок плану (останній рядок): $\Delta_j = F_j - c_j = F(X_j) - c_j = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \right) - c_j, \quad j = 1,2,...,n$. Потім згідно з умовою оптимальності плану задачі лінійного програмування, якщо всі $\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$ (для задачі на максимум), то план є оптимальним. Допустимо, що одна з оцінок $\Delta_j = F_j - c_j < 0$, тоді план X_0 не є оптимальним і необхідно здійснити перехід до наступного опорного плану, якому буде відповідати більше значення функціонала. Якщо від'ємних оцінок кілька, то включенню до базису підлягає вектор, який вибирається як $\min(F_j - c_j)$. Мінімум знаходять для тих індексів *j*, де $\Delta_j = F_j - c_j < 0$. Якщо існує кілька однакових значень оцінок, що відповідають $\min(F_j - c_j)$, то з відповідних їм векторів до базису включають той, якому відповідає максимальне значення функціонала.

Якщо хоча б для однієї від'ємної оцінки $\Delta_j = F_j - c_j < 0$ всі коефіцієнти розкладу a_{ij} відповідного вектора недодатні, то це означає, що функціонал є необмеженим на багатограннику розв'язків, тобто багатогранник у даному разі являє собою необмежену область і розв'язком задачі є $X = \infty$.

Нехай $\min(F_j - c_j) = F_k - c_k = \Delta_k$, тобто мінімальне значення досягається для *k*-го вектора $m \leq k \leq n$. Тоді до базису включається вектор A_k. Відповідний стовпчик симплексної таблиці називають ***напрямним***.

Для того, щоб вибрати вектор, який необхідно вивести з базису (згідно з процедурою переходу від одного опорного плану задачі до іншого – п.4.2), розраховують останній стовпчик табл.4.1 – значення θ_i.

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}, \; i = 1,2,...,m, \; a_{ik} > 0.$$

З розрахованих значень необхідно вибрати найменше $\theta^* = \min \theta_i, \; i = 1,2,...,m, \; a_{ik} > 0$. Тоді з базису виключають *i*-ий вектор, якому відповідає θ^*.

Допустимо, що $\theta^* = \min \; \theta_l = \dfrac{b_l}{a_{lk}}$ відповідає вектору, що знаходиться в *l*-му рядку табл. 4.1. Відповідний рядок симплексної таблиці називають ***напрямним***.

Перетином напрямного стовпчика та напрямного рядка визначається елемент симплексної таблиці a_{lk}, який називають ***розв'язувальним елементом***. За допомогою елемента a_{lk} і методу Жордана-Гаусса розраховують нову симплексну таблицю, що визначатиме наступний опорний план задачі.

Для визначення нового опорного плану необхідно всі вектори розкласти за векторами нового базису. Вектор A_k, який необхідно вводити до базису, в розкладі за початковим базисом має вигляд:

$$A_k = a_{1k} A_1 + ... + a_{lk} A_l + ... + a_{mk} A_m. \qquad (4.16)$$

Вектор A_l виходить з базису, і його розклад за новим базисом отримаємо з виразу (4.16):

$$A_l = \frac{1}{a_{lk}}\left(A_k - a_{1k}A_1 - \ldots - a_{mk}A_m\right). \tag{4.17}$$

Розклад вектора A_0 за початковим базисом має вигляд:

$$A_0 = b_1 A_1 + \ldots + b_l A_l + \ldots + b_m A_m . \tag{4.18}$$

Для запису розкладу вектора в новому базисі підставимо вираз (4.17) у рівняння (4.18), маємо:

$$A_0 = b_1 A_1 + \ldots + b_l \left[\frac{1}{a_{lk}}(A_k - a_{1k}A_1 - \ldots - a_{mk}A_m)\right] + \ldots + b_m A_m =$$
$$= \left(b_1 - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{1k}\right)A_1 + \ldots + \frac{b_l}{a_{lk}}A_k + \ldots + \left(b_m - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{mk}\right)A_m .$$

Отже, значення компонент наступного опорного плану розраховуються за формулами:

$$\begin{cases} b_i' = b_i - \dfrac{b_l}{a_{lk}}a_{ik} \quad (i \neq j); \\ b_k' = \dfrac{b_l}{a_{lk}} \qquad (i = j). \end{cases} \tag{4.19}$$

Розклад за початковим базисом будь-якого з векторів має вигляд:

$$A_j = a_{1j}A_1 + \ldots + a_{lj}A_l + \ldots + a_{mj}A_m . \tag{4.20}$$

Розклад за новим базисом отримаємо підстановкою (4.17) у (4.20):

$$A_j = a_{1j}A_1 + \ldots + a_{lj}\left[\frac{1}{a_{lk}}(A_k - a_{1k}A_1 - \ldots - a_{mk}A_m)\right] + \ldots + a_{mj}A_m =$$
$$= \left(a_{1j} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{1k}\right)A_1 + \ldots + \frac{a_{lj}}{a_{lk}}A_k + \ldots + \left(a_{mj} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{mk}\right)A_m =$$
$$= a_{1j}'A_1 + \ldots + a_{kj}'A_k + \ldots + a_{mj}'A_m .$$

Новий план: $X_1 = (x_1 = a_{1j}'; \ldots; x_k = a_{kj}'; \ldots; x_m = a_{mj}')$, де

$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik} \quad (i \neq j); \\ a'_{kj} = \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} \qquad (i = j). \end{cases} \tag{4.21}$$

Формули (4.19) та (4.21) є формулами повних виключень Жордана-Гаусса.

Отже, щоб отримати коефіцієнти розкладу векторів $A_0, A_1, ..., A_n$ за векторами нового базису (перехід до наступного опорного плану та створення нової симплексної табл.4.2), необхідно:

1) розділити всі елементи напрямного рядка на розв'язувальний елемент;
2) розрахувати всі інші елементи за формулами повних виключень Жордана—Гаусса (правило прямокутника).

Потім необхідно здійснити перевірку нових значень оцінкового рядка. Якщо всі $F_j - c_j \geq 0$, то план X_1 — оптимальний, інакше переходять до відшукання наступного опорного плану. Процес продовжують до отримання оптимального плану, чи встановлення факту відсутності розв'язку задачі.

Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $F_j - c_j \geq 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибираючи розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок (одну ітерацію) симплекс-методом. У результаті отримаємо новий опорний план, якому відповідає те саме значення функціонала, що і для попереднього плану, тобто функціонал досягає максимального значення в двох точках багатогранника розв'язків, а отже, за властивістю 2 (п.3.2) розв'язків задачі лінійного програмування така задача має нескінченну множину оптимальних планів.

Розв'язання задачі лінійного програмування на відшукання мінімального значення функціонала відрізняється лише умовою оптимальності опорного плану. До базису включають вектор, для якого $\Delta_j = \max(F_j - c_j)$, де максимум знаходять для тих j, яким відповідають $\Delta_j = F_j - c_j > 0$. Всі інші процедури симплексного методу здійснюються аналогічно, як у задачі лінійного програмування на відшукання максимального значення функціонала.

Таблиця 4.2

Друга симплексна таблиця для відшукання опорного (оптимального) плану

i	Базис	$С_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_k	…	c_n	θ_i
				x_1	x_2	…	x_l	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_k	…	x_n	
1	x_1	c_1	b'_1	1	0	…	0	…	0	$a'_{1,m+1}$	…	a'_{1j}	…	a'_{1k}	…	a'_{1n}	θ_1
2	x_2	c_2	b'_2	0	1	…	0	…	0	$a'_{2,m+1}$	…	a'_{2j}	…	a'_{2k}	…	a'_{2n}	θ_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	x_l	c_l	b'_l	0	0	…	1	…	0	$a'_{l,m+1}$	…	a'_{lj}	…	a'_{lk}	…	a'_{ln}	θ_l
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	x_m	c_m	b'_m	0	0	…	0	…	1	$a'_{m,m+1}$	…	a'_{mj}	…	a'_{mk}	…	a'_{mn}	θ_m
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		$F(X_1)$	0	0	…	0	…	0	Δ'_{m+1}	…	Δ'_j	…	Δ'_k	…	Δ'_n	

ТЕМА 5
ДВОЇСТІСТЬ У ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

5.1. Економічна інтерпретація прямої та двоїстої задач лінійного програмування

5.2. Правила побудови двоїстих задач

5.3. Основні теореми двоїстості та їх економічний зміст

5.1. Економічна інтерпретація прямої та двоїстої задач лінійного програмування

Кожна задача лінійного програмування пов’язана з іншою, так званою ***двоїстою*** задачею.

Економічну інтерпретацію кожної з пари таких задач розглянемо на прикладі виробничої задачі (п. 2.5.1).

Пряма задача:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (5.1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n \le b_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \qquad (5.2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \ . \qquad (5.3)$$

Необхідно визначити, яку кількість продукції кожного *j*-го виду x_j $(j = \overline{1,n})$ необхідно виготовляти в процесі виробництва, щоб максимізувати загальну виручку від реалізації продукції підприємства. Причому відомі: наявні обсяги ресурсів – b_i $(i = \overline{1,m})$; норми витрат *i*-го виду ресурсу на виробництво одиниці *j*-го виду продукції – a_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, а також c_j $(j = \overline{1,n})$ – ціни реалізації одиниці *j*-ої продукції.

Розглянемо тепер цю саму задачу з іншого погляду. Допустимо, що за певних умов доцільно продавати деяку частину чи всі наявні ресурси. Необхідно визначити ціни ресурсів. Кожному ресурсу b_i $(i = \overline{1,m})$ поставимо у відповідність його оцінку y_i $(i = \overline{1,m})$. Умовно вважатимемо, що y_i – ціна одиниці *i*-го ресурсу.

На виготовлення одиниці *j*-го виду продукції витрачається згідно з моделлю (5.1) – (5.3) *m* видів ресурсів у кількості відповідно $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \ldots, a_{mj}$. Оскільки ціна одиниці *i*-го виду ресурсу дорівнює y_i $(i = \overline{1,m})$, то загальна вартість ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці j-го виду продукції, обчислюється у такий спосіб:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + \ldots + a_{mj}y_m.$$

Продавати ресурси доцільно лише за умови, що виручка, отримана від продажу ресурсів, перевищує суму, яку можна було б отримати від реалізації продукції, виготовленої з тих самих обсягів ресурсів, тобто:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + \ldots + a_{mj}y_m \geq c_j,\ j = 1,2,\ldots,n.$$

Зрозуміло, що покупці ресурсів прагнуть здійснити операцію якнайдешевше, отже, необхідно визначити мінімальні ціни одиниць кожного виду ресурсів, за яких їх продаж є доцільнішим, ніж виготовлення продукції. Загальну вартість ресурсів можна виразити формулою:

$$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.$$

Отже, в результаті маємо ***двоїсту задачу***:

$$\min Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \qquad (5.4)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + a_{3n}y_3 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n; \end{cases} \qquad (5.5)$$

$$y_i \geq 0\ (i = 1,2,..m). \qquad (5.6)$$

Тобто необхідно визначити, які мінімальні ціни можна встановити для одиниці кожного i-го виду ресурсу y_i, $i = \overline{1,m}$, щоб продаж ресурсів був доцільнішим, ніж виробництво продукції.

Зауважимо, що справжній зміст величин y_i, $i = \overline{1,m}$ – умовні ціни, що виражають рівень «цінності» відповідного ресурсу для даного виробництва. Англійський термін «shadow prices» у літературі перекладають як «оцінка» або «тіньова, неявна ціна». Академік Л.В.Канторович назвав їх ***об'єктивно обумовленими оцінками*** відповідного ресурсу.

Задача (5.4) – (5.6) є двоїстою або спряженою до задачі (5.1)-(5.3), яку називають прямою (основною, початковою). Поняття двоїстості є взаємним. По суті мова йде про одну і ту ж задачу, але з різних поглядів. Дійсно, не важко переконатися, що двоїста задача до (5.4) – (5.6) збігається з початковою. Тому кожну з них можна вважати прямою, а іншу – двоїстою. *Симетричність* двох таких задач очевидна. Як у прямій, так і у двоїстій задачі використовують один набір початкових даних: $b_i, i=(\overline{1,m})$, $a_{ij},(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$; $c_j,(j=\overline{1,n})$. Крім того, вектор обмежень початкової задачі стає вектором коефіцієнтів цільової функції двоїстої задачі і навпаки, а рядки матриці A (матриці коефіцієнтів при змінних з обмежень прямої задачі) стають стовпцями матриці коефіцієнтів при змінних в обмеженнях двоїстої задачі. Кожному обмеженню початкової задачі відповідає змінна двоїстої і навпаки.

Початкова постановка задачі та математична модель може мати вигляд як (5.1) – (5.3), так і (5.4) – (5.6). Отже, як правило, кажуть про пару ***спряжених*** задач лінійного програмування.

5.2. Правила побудови двоїстих задач

Для побудови двоїстої задачі необхідно звести пряму задачу до стандартного виду. Вважають, що задача лінійного програмування подана у стандартному вигляді, якщо для відшукання максимального значення цільової функції всі нерівності її системи обмежень приведені до виду «$\le$», а для задачі на відшукання мінімального значення – до виду «$\ge$».

Якщо пряма задача лінійного програмування подана в стандартному вигляді, то двоїста задача ***утворюється за такими правилами***:

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.
2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості невідомих прямої задачі.
3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі – на визначення найменшого значення (min), і навпаки.
4. Коефіцієнтами при змінних у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.
5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних у цільовій функції прямої задачі.
6. Матриця

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів у системі обмежень двоїстої задачі

$$
A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків – рядками.

Процес побудови двоїстої задачі зручно зобразити схематично:

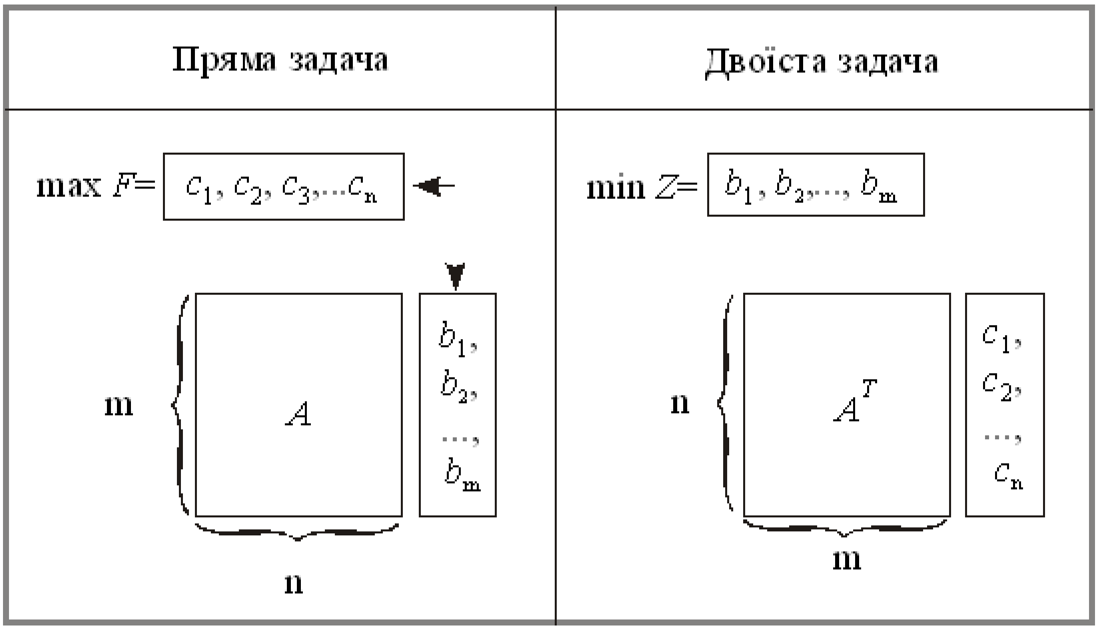

Рис. 5.1 – Схема побудови двоїстої задачі до прямої

Пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У ***симетричних задачах*** обмеження прямої та двоїстої задач є лише нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід’ємних значень.

У ***несиметричних задачах*** деякі обмеження прямої задачі можуть бути рівняннями, а двоїстої – лише нерівностями. У цьому разі відповідні рівнянням змінні двоїстої задачі можуть набувати будь-яких значень, не обмежених знаком.

Всі можливі форми прямих задач лінійного програмування та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач у матричній формі наведено нижче.

Пряма задача	**Двоїста задача**
Симетричні задачі	
$\max F = CX$	$\min Z = BY$
$AX \le B$	$A^T Y \ge C$
$X \ge 0$	$Y \ge 0$
$\min F = CX$	$\max Z = BY$
$AX \ge B$	$A^T Y \le C$
$X \ge 0$	$Y \ge 0$
Несиметричні задачі	
$\max F = CX$	$\min Z = BY$
$AX = B$	$A^T Y \ge C$
$X \ge 0$	$Y \in \left]-\infty; \infty\right[$
$\min F = CX$	$\max Z = BY$
$AX = B$	$A^T Y \le C$
$X \ge 0$	$Y \in \left]-\infty; \infty\right[$

5.3. Основні теореми двоїстості та їх економічний зміст

Зв’язок між оптимальними розв’язками прямої та двоїстої задач встановлюють леми та теореми двоїстості. Розглянемо задачі (5.1)-(5.3) та (5.4)-(5.6) з економічною інтерпретацією, наведеною в п.5.1.

Лема 5.1 (основна нерівність теорії двоїстості). Якщо $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ та $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ – допустимі розв’язки відповідно прямої та двоїстої задач, то виконується нерівність

$$F(X) \le Z(Y) \text{ або } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,. \tag{5.7}$$

Лема 5.2 (достатня умова оптимальності). Якщо $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ та $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ – допустимі розв’язки відповідно прямої та двоїстої задач, для яких виконується рівність

$$F(X^*) = Z(Y^*), \tag{5.8}$$

то X^*, Y^* – оптимальні розв’язки відповідних задач.

Теорема (*перша теорема двоїстості*). Якщо одна з пари спряжених задач має оптимальний план, то й друга задача також має розв’язок, причому для оптимальних розв'язків значення цільових функцій обох задач збігаються, тобто

$\max F = \min Z$.

Якщо цільова функція однієї із задач необмежена, то спряжена задача також не має розв'язку.

Перша теорема двоъстості дає змогу в процесі розв'язування однієї задачі водночас знаходити план другої.

Економічний зміст першої теореми двоїстості. Максимальний прибуток (F_{max}) підприємство отримує за умови виробництва продукції згідно з оптимальним планом $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, однак таку саму суму грошей ($Z_{\min} = F_{\max}$) воно може мати, реалізувавши ресурси за оптимальними цінами $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$. За умов використання інших планів $X \neq X_{opt}$, $Y \neq Y_{opt}$ на підставі основної нерівності теорії двоїстості можна стверджувати, що прибутки від реалізації продукції завжди менші, ніж витрати на її виробництво.

Між розв'язками спряжених задач крім рівності значень цільових функцій існує тісніший взаємозв'язок. Для його дослідження розглянемо дві симетричні задачі лінійного програмування.

Пряма задача:

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \tag{5.9}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, n}.$$

Двоїста задача:

$$\min Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n. \end{cases} \tag{5.10}$$
$$y_i \geq 0, \ \ i = \overline{1, m}.$$

Для розв'язування задач симплексним методом необхідно звести їх до канонічної форми, для чого в системи обмежень задач (5.9) і (5.10) необхідно ввести відповідно m та n невід'ємних змінних. Поставимо обмеженням кожної задачі у відповідність змінні її двоїстої задачі.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{array} \right.$$

Аналогічно:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m - y_{m+1} = c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m - y_{m+2} = c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m - y_{m+n} = c_n. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{array} \right.$$

Отримали таку відповідність між змінними спряжених задач:

Основні змінні прямої задачі							Додаткові змінні прямої задачі						
x_1	x_2	…	x_k	…	x_n		x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+l}	…	x_{n+m}	
$\updownarrow$	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$	
y_{m+1}	y_{m+2}		y_{m+k}		y_{m+n}		y_1	y_2		y_l		y_m	
Додаткові змінні двоїстої задачі							Основні змінні двоїстої задачі						

Наступна теорема в літературі, як правило, має назву теореми про доповнюючу нежорсткість.

Теорема ***(друга теорема двоїстості для симетричних задач)***. Для того, щоб плани X^* та Y^* відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \; j = \overline{1,n} \tag{5.11}$$

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \; i = \overline{1,m}. \tag{5.12}$$

Очевидніший взаємозв'язок між оптимальними планами прямої та двоїстої задач встановлює наслідок другої теореми двоїстості.

Наслідок. Якщо в результаті підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) в систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідна i-та компонента оптимального плану спряженої задачі дорівнює нулю.

Якщо i-та компонента оптимального плану однієї із задач додатна, то відповідне i-те обмеження спряженої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Економічний зміст другої теореми двоїстості *стосовно оптимального плану X^* прямої задачі*. Якщо для виготовлення всієї продукції в обсязі, що визначається оптимальним планом X^*, витрати одного i-го ресурсу строго менші, ніж його загальний обсяг b_i, то відповідна оцінка такого ресурсу y_i^* (компонента оптимального плану двоїстої задачі) буде дорівнювати нулю, тобто такий ресурс за даних умов для виробництва не є «цінним».

Якщо ж витрати ресурсу дорівнюють його наявному обсягові b_i, тобто його використано повністю, то він є «цінним» для виробництва, і його оцінка y_i^* буде строго більшою від нуля.

Економічне тлумачення другої теореми двоїстості *щодо оптимального плану Y^* двоїстої задачі*: у разі, коли деяке j-те обмеження виконується як нерівність, тобто всі витрати на виробництво одиниці j-го виду продукції перевищують її ціну c_j, виробництво такого виду продукції є недоцільним, і в оптимальному плані прямої задачі обсяг такої продукції x_j^* дорівнює нулю.

Якщо витрати на виробництво j-го виду продукції дорівнюють ціні одиниці продукції c_j, то її необхідно виготовляти в обсязі, який визначає оптимальний план прямої задачі $x_j^* > 0$.

Як було з'ясовано в попередньому параграфі, існування двоїстих змінних уможливлює зіставлення витрат на виробництво і цін на продукцію, на підставі чого обґрунтовується висновок про доцільність чи недоцільність виробництва кожного виду продукції. Крім цього, значення двоїстої оцінки характеризує зміну значення цільової функції, що зумовлена малими змінами вільного члена відповідного обмеження. Дане твердження формулюється у вигляді такої теореми.

Теорема ***(третя теорема двоїстості)***. Компоненти оптимального плану двоїстої задачі y_i^* $(i = \overline{1,m})$ дорівнюють значенням частинних похідних від цільової функції $F(b_1, b_2, ..., b_m)$ за відповідними аргументами $b_i, (i = \overline{1,m})$, або

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = y_i^*, \ i = 1, 2, ..., m. \tag{5.13}$$

Економічний зміст третьої теореми двоїстості. Двоїсті оцінки є унікальним інструментом, який дає змогу зіставляти непорівнянні речі. Очевидно, що неможливим є просте зіставлення величин, які мають різні одиниці вимірювання. Якщо взяти як приклад виробничу задачу, то цікавим є питання: як змінюватиметься значення цільової функції (може вимірюватися в грошових одиницях) за зміни обсягів різних ресурсів (можуть вимірюватися в тоннах, м^2, люд./год, га тощо).

Використовуючи третю теорему двоїстості, можна легко визначити вплив на зміну значення цільової функції збільшення чи зменшення обсягів окремих ресурсів: числові значення двоїстих оцінок показують, на яку величину змінюється цільова функція за зміни обсягу відповідного даній оцінці ресурсу $y_i^* = \dfrac{\Delta F}{\Delta b_i}$.

Отже, за умови незначних змін b_i замість задачі лінійного програмування, поданій в канонічній формі

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{5.14}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{5.15}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{5.16}$$

маємо нову задачу, де b_i замінено на $b_i' = b_i + \Delta b_i$. Позначимо через X' оптимальний план нової задачі. Для визначення $F(X')$ не потрібно розв'язувати нову задачу лінійного програмування, а достатньо скористатися формулою $F(X') - F(X^*) = y_i^* \Delta b_i$, де X^* – оптимальний план задачі (5.14 – 5.16).

ТЕМА 6
АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

6.1. Приклад економічної інтерпретації пари спряжених задач
6.2. Аналіз розв'язків спряжених економіко-математичних задач
6.3. Оцінка рентабельності продукції, яка виробляється, і нової продукції
6.4. Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів

Теорія двоїстості є потужним математичним апаратом обґрунтування структури виробництва. Вона дає змогу насамперед визначати статус ресурсів та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів. За умов ринкової економіки ціни на ресурси можуть змінюватися в доволі широких межах. Крім цього, постачальники через об'єктивні обставини можуть не виконати попередніх домовленостей. Тому аналіз ринку ресурсів у передплановому періоді має чимале значення. Важливою є проблема заміни одного дефіцитного ресурсу іншим.

Використання двоїстих оцінок уможливлює визначення рентабельності кожного виду продукції, яка виробляється підприємством. Водночас можна оцінити інтервали можливої зміни цін одиниці кожного виду продукції, що дуже важливо за ринкових умов.

Отже, аналіз лінійної економіко-математичної моделі на чутливість дає широкий спектр динамічної інформації про визначений оптимальний план і змогу дослідити вплив можливих змін на результати господарської діяльності.

Побудована економіко-математична модель може бути використана для імітації процесу виробництва. Це дає змогу перевірити:

1) за яких умов оптимальний план є стійким;

2) чи є вигідним додаткове залучення ресурсів;

3) як зміниться ефективність виробництва в разі загострення конкуренції на ринку збуту (оцінити виправданість у цій ситуації зниження цін на продукцію);

4) доцільність виробництва нової продукції;

5) як вплине на ефективність діяльності підприємства порушення споживачами продукції попередніх угод, наприклад, їх відмова від частини або всієї продукції. Як має виробник за цих обставин змінити план виробництвом продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції.

Зауважимо, що дослідження планів, отриманих за економіко-математичними моделями, на стійкість, а також оцінювання ситуацій мають виконуватися в передплановому періоді.

6.1. Приклад економічної інтерпретації пари спряжених задач

Економічну інтерпретацію прямої та двоїстої задач і проведення післяоптимізаційного аналізу розглянемо на прикладі задачі оптимального використання обмежених ресурсів.

Для виробництва n видів продукції використовується m видів ресурсів, запаси яких обмежені значеннями $b_i\left(i=\overline{1,\ m}\right)$. Норми витрат кожного ресурсу на виробництво одиниці продукції становлять $a_{ij}\left(i=\overline{1,\ m};\ j=\overline{1,\ n}\right)$. Ціна реалізації одиниці продукції j-го виду дорівнює $c_j\left(j=\overline{1,\ n}\right)$. Математична модель цієї задачі має такий вигляд:

$$\max F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j ; \tag{6.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i ,\quad i=\overline{1,\ m}\ ; \tag{6.2}$$

$$x_j \ge 0,\quad j=\overline{1,\ n}. \tag{6.3}$$

Сутність прямої задачі полягає у визначенні такого оптимального плану виробництва різних видів продукції $X^*=\left(x_1^*,\ x_2^*,\ ...,\ x_n^*\right)$, який дав би змогу одержати найбільшу виручку від її реалізації.

Двоїста задача до сформульованої у такий спосіб прямої буде такою:

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i ; \tag{6.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j ,\quad j=\overline{1,\ n} ; \tag{6.5}$$

$$y_i \ge 0 ,\ \ i=\overline{1,\ m} . \tag{6.6}$$

Економічний зміст двоїстої задачі полягає у визначенні такої оптимальної системи оцінок ресурсів y_i, що використовуються для виробництва продукції, за якої загальна вартість усіх ресурсів була б найменшою. Змінні двоїстої задачі означають цінність одиниці i-го ресурсу.

Розглянемо використання двоїстих оцінок на прикладі аналізу економіко-математичних моделей виду (6.1) – (6.3) та (6.4) – (6.6).

Приклад 6.1. Деяке підприємство виробляє чотири види продукції *A*, *B*, *C*, і *D*, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2 і 3. Норми витрат ресурсів на виробництво одиниці кожного виду продукції (в умовних одиницях) наведено в табл.6.1.

Таблиця 6.1

НОРМИ ВИТРАТ РЕСУРСІВ НА ВИРОБНИЦТВО ПРОДУКЦІЇ, ум. од.

Ресурс	Норма витрат ресурсу на одиницю продукції виду				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	5	2	4	250
2	1	6	2	4	280
3	3	2	1	1	80

Відомі також ціни реалізації одиниці продукції кожного виду: для продукції *A*– 2 ум. од., для продукції *B* і *D* – по 4 ум. од., для продукції *C* – 3 ум. од.

Необхідно визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду за умов обмеженості запасів ресурсів, який дав би змогу підприємству отримати найбільшу виручку від реалізації продукції.

Розв'язування. Математичні моделі прямої (6.7) та двоїстої (6.8) задач мають такий вигляд:

$$\max Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 250; \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 280; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 80, \end{cases} \tag{6.7}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4},$$

де x_j – обсяг виробництва продукції j-го виду $\left(j = \overline{1,\ 4}\right)$;

$$\min F = 250y_1 + 280y_2 + 80y_3;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 2; \\ 5y_1 + 6y_2 + 2y_3 \ge 4; \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 3; \\ 4y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 4, \end{cases} \tag{6.8}$$

$$y_i \ge 0, \quad j = \overline{1,3},$$

де y_i – оцінка одиниці i-го виду ресурсу $\left(i = \overline{1,\ 3}\right)$.

Симплексна таблиця, що відповідає оптимальному плану сформульованої вище задачі має вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	4	45	–2	1/2	0	1	1/2	0	–1
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	35	5	3/2	1	0	–1/2	0	2
$Z_j - c_j \geq 0$		285	5	5/2	0	0	1/2	0	2

6.2. Аналіз розв'язків спряжених економіко-математичних задач

Наведена симплекс-таблиця містить оптимальні плани прямої та двоїстої задач. Оптимальний план прямої задачі позначимо через X^*, а оптимальний план двоїстої – Y^*.

$$X^* = (0;\ 0;\ 35;\ 45;\ 0;\ 30;\ 0),\ \max Z = 285;$$

$$Y^* = (4;\ 0;\ 3) \times \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (1/2;\ 0;\ 2);$$

$$\min F = 250/2 + 160 = 285 = \max Z.$$

Основні змінні прямої задачі	Додаткові змінні прямої задачі
$x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 35$; $x_4 = 45$	$x_5 = 0$; $x_6 = 30$; $x_7 = 0$

Основні змінні оптимального плану ***прямої задачі*** означають обсяги виробництва відповідних видів продукції. Отже, випуск продукції видів A та B не передбачається ($x_1 = x_2 = 0$), а C і D – планується у кількості відповідно 35 та 45 од.

Додаткові змінні оптимального плану ***прямої задачі*** x_5, x_6, x_7 характеризують залишки (невикористані обсяги) ресурсів відповідно 1, 2 та 3. Оскільки x_6=30, то це означає, що другий ресурс використовується у процесі виробництва продукції не повністю. Перший та третій ресурси за оптимального плану виробництва будуть використані повністю, бо $x_5 = x_7 = 0$.

За такого плану виробництва продукції підприємство отримало б найбільшу виручку обсягом 285 ум.од.

Відомо, що між змінними прямої та двоїстої задач існує відповідність виду:

Основні змінні прямої задачі				Додаткові змінні прямої задачі		
$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 35$	$x_4 = 45$	$x_5 = 0$	$x_6 = 30$	$x_7 = 0$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$y_4 = 5$	$y_5 = 5/2$	$y_6 = 0$	$y_7 = 0$	$y_1 = 1/2$	$y_2 = 0$	$y_3 = 2$
Додаткові змінні двоїстої задачі				Основні змінні двоїстої задачі		

Оптимальний план двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовуються у виробництві.

Основні змінні двоїстої задачі за наведеною схемою відповідають додатковим змінним прямої, що характеризують обсяги невикористаних ресурсів. Отже, отримані значення змінних y_1, y_2 та y_3 можна використати для відносної кількісної оцінки важливості відповідних видів ресурсів. Так, $y_1 = 1/2$ та $y_3 = 2$ відмінні від нуля, а ресурси 1 та 2 (за значеннями додаткових змінних прямої задачі) використовуються повністю. Двоїста оцінка $y_2 = 0$ і відповідний вид ресурсу не повністю використовується за оптимального плану виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі. Крім того, за третьою теоремою двоїстості відомо: якщо деяка основна змінна оптимального плану двоїстої задачі $y_i \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягу відповідного i-го ресурсу приводить до зміни значення цільової функції на величину y_i. Якщо $y_i = 0$, то значення цільової функції залишається незмінним.

Отже, $y_1 = 1/2$ означає, що коли запас першого ресурсу збільшити на одну умовну одиницю ($b_1 = 250 + 1 = 251$), то значення цільової функції $\max Z$ збільшиться за інших однакових обставин на $y_1 = 1/2$ ум. од. і становитиме $\max Z = 285 + 1/2 = 285{,}5$ ум.од. Аналогічно збільшення на одну умовну одиницю третього ресурсу ($b_3 = 80 + 1 = 81$) приведе за інших однакових умов до збільшення цільової функції на $y_3 = 2$ ум.од., що становитиме $\max Z = 285 + 2 = 287$ ум. од. Лише незначні зміни обсягу другого ресурсу ніяк не впливатимуть на значення цільової функції, оскільки $y_2 = 0$.

Додаткові змінні оптимального плану ***двоїстої задачі*** відповідають основним змінним прямої задачі і, оскільки останні означають обсяги виробництва кожного виду продукції, відповідні їм y_4, y_5, y_6 та y_7 також у певний спосіб мають характеризувати виробництво відповідних видів продукції. За правилами побудови двоїстої задачі очевидно, що додаткові змінні оптимального плану двоїстої задачі показують, наскільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Отже, вони відносно характеризують збитковість виробництва відповідних видів продукції.

Додаткові змінні двоїстої задачі розміщуються в оцінковому рядку останньої симплекс-таблиці у стовпчиках «x_1» – «x_4». Їх оптимальні значення: $y_4 = 5$; $y_5 = 5/2$; $y_6 = 0$; $y_7 = 0$. Тому витрати на виробництво продукції видів A і B перевищують їх ціну відповідно на 5 та 5/2 ум.од., а для продукції C і D такого перевищення немає. Це підтверджується також попереднім аналізом основних змінних оптимального плану прямої задачі, оскільки за оптимальним планом доцільно виготовляти саме продукцію видів *C* і *D*.

Розрахована оптимальна система оцінок забезпечує найменшу загальну вартість усіх ресурсів, що використовуються на підприємстві: $\min F = 285$ ум. од.

6.3. Оцінка рентабельності продукції, яка виробляється, і нової продукції

Оцінку рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві, можна здійснювати за допомогою двоїстих оцінок та обмежень двоїстої задачі, які характеризують кожний вид продукції.

Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю відповідних ресурсів, які використовують для виробництва одиниці j-ї продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції (c_j), то виготовляти таку продукцію невигідно, вона ***нерентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна їй змінна $x_j = 0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона ***рентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j > 0$.

Підставимо значення оптимального плану двоїстої задачі Y^* у її систему обмежень. Якщо вартість ресурсів на виробництво одиниці продукції (ліва частина обмеження) перевищує ціну цієї продукції (права частина обмеження), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як рівняння, то продукція рентабельна.

$$\begin{cases} 2\cdot 1/2+1\cdot 0+3\cdot 2=7>2 \quad (\text{продукція A нерентабельна}); \\ 5\cdot 1/2+6\cdot 0+2\cdot 2=13/2>4 \quad (\text{продукція B нерентабельна}); \\ 2\cdot 1/2+2\cdot 0+1\cdot 2=3=3 \quad (\text{продукція C рентабельна}); \\ 4\cdot 1/2+4\cdot 0+1\cdot 2=4=4 \quad (\text{продукція D рентабельна}). \end{cases}$$

Аналогічні результати можна дістати, проаналізувавши додаткові змінні оптимального плану двоїстої задачі (п.6.2). Як з'ясовано вище, значення додаткових змінних показують, наскільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Тому, якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо $y_i > 0$, то відповідна продукція нерентабельна.

Оптимальні значення $y_4 = 5 > 0$; $y_5 = 5/2 > 0$, тому продукція *A* і *B* нерентабельна, а $y_6 = 0$; $y_7 = 0$, тобто продукція *C* і *D* – рентабельна.

Дослідимо питання про доцільність введення нового (n+1)-го виду продукції, якщо відомі витрати кожного ресурсу на виготовлення одиниці такої продукції – $a_{i,n+1}$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ і ціна її реалізації – c_{n+1}. За умови введення у виробництво нового виду продукції в економіко-математичну модель (6.7) необхідно ввести відповідну змінну (x_{n+1}). Отже, модель прямої задачі набуде вигляду:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1}x_{n+1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1} \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_{2,n+1}x_{n+1} \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + a_{m,n+1}x_{n+1} \le b_m. \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1; n+1}$$

Відповідна математична модель двоїстої задачі міститиме не n, а $(n+1)$ нерівність і відрізнятиметься від (6.8) наявністю обмеження, що описує витрати на виробництво нового виду продукції:

$$a_{1,n+1}y_1 + a_{2,n+1}y_2 + \ldots + a_{m,n+1}y_m \ge c_{n+1} \tag{6.9}$$

Оскільки значення $a_{i,n+1}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ і c_{n+1} за умовою задачі відомі, розраховані також значення y_i $i = \overline{1,m}$, то можна перевірити виконання нерівності (6.9). Як зазначено вище, рентабельною є продукція, для якої відповідне обмеження виконується як рівняння, а нерентабельною, якщо ліва частина нерівності (витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції) перевищує праву (ціну реалізації одиниці продукції).

Допустимо, що за умов прикладу 6.1 запропоновано включити у виробництво один з двох видів нової продукції: *E* чи *G*. Відомі витрати кожного ресурсу на виготовлення одиниці цих видів продукції, що становлять для продукції виду *E* відповідно 4, 7, 2 ум. од. та для продукції виду *G* – 4, 8, 1 ум. од. Ціна реалізації одиниці продукції обох нових видів однакова і дорівнює 4,5 ум.од.

Складемо відповідне обмеження двоїстої задачі. Наступний вид продукції буде позначатися через x_5, тому маємо:

$$a_{15}y_1 + a_{25}y_2 + a_{35}y_3 \ge c_5$$
$$Y^* = (y_1 = 1/2; y_2 = 0; y_3 = 2).$$

Перевіримо виконання обмеження спочатку для продукції виду *E*:

$$4 \cdot 1/2 + 7 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \ge 4{,}5;$$
$$6 > 4{,}5.$$

Обмеження виконується як строга нерівність, отже, за умов даного підприємства виробництво продукції *E* є недоцільним.

Зауважимо, що остання нерівність визначає мінімальне значення ціни реалізації одиниці продукції, за якої її випуск є рентабельним. Отже, ціна одиниці продукції *E* за даних умов має становити не менше 6 ум. од.

Визначимо співвідношення між витратами на виробництво та ціною для продукції G:

$$4 \cdot 1/2 + 8 \cdot 0 + 1 \cdot 2 < 4{,}5$$
$$4 < 4{,}5.$$

З останньої нерівності маємо, що витрати на виробництво одиниці продукції G менші, ніж ціна реалізації. Така продукція є рентабельною за умов виробництва, на даному підприємстві і її доцільно включити в план випуску.

Для визначення оптимального плану виробництва із введеним додатково видом продукції обов'язково необхідно розв'язати нову задачу лінійного програмування. Двоїсті оцінки лише показують, доцільне чи ні розв'язання такої задачі.

6.4. Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів

За допомогою двоїстих оцінок можна також визначити статус кожного ресурсу. Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно поділити на ***дефіцитні*** та ***недефіцитні*** залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо деяке значення двоїстої оцінки y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний i-й ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є ***недефіцитним***. Якщо ж двоїста оцінка $y_i > 0$, то i-й ресурс використовується для оптимального плану виробництва продукції повністю і називається ***дефіцитним***. Відомо (третя теорема двоїстості), що величина двоїстої оцінки показує, наскільки збільшиться значення цільової функції Z, якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю.

Статус ресурсів можна визначати трьома способами. Перший – підстановкою значень вектора X^* (оптимального плану виробництва) у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як рівняння, то відповідний ресурс дефіцитний, у іншому разі – недефіцитний:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 35 + 4 \cdot 45 = 250 & (\text{ресурс } 1 \text{ дефіцитний}); \\ 1 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 35 + 4 \cdot 45 = 250 < 280 & (\text{ресурс } 2 \text{ недефіцитний}); \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 35 + 1 \cdot 45 = 80 & (\text{ресурс } 3 \text{ дефіцитний}). \end{cases}$$

Другий спосіб – через додаткові змінні прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс дефіцитний, а якщо більша від нуля – недефіцитний.

Третій спосіб – за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $y_i > 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів i-го ресурсу приводить до відповідної зміни доходу підприємства, і тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо ж $y_i = 0$, то i-й ресурс недефіцитний. Так, у нашому прикладі:

$y_1 = 1/2 > 0$ (ресурс 1 дефіцитний);
$y_2 = 0$ (ресурс 2 недефіцитний);
$y_3 = 2 > 0$ (ресурс 3 дефіцитний).

Отже, якщо запас першого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю ($b_1 = 250 + 1 = 251$), то цільова функція max Z збільшиться за інших однакових умов на $y_1 = 1/2$ ум. од. і становитиме max $Z = 285{,}5$ ум. од.

Цікавим є запитання: «За рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться дохід підприємства?» Інформацію про це дають елементи стовпчика «x_5» останньої симплекс-таблиці, який відповідає двоїстій оцінці даного ресурсу – $y_1 = 1/2$.

Допустимо, що деяке k-те обмеження $(k=\overline{1,m})$ має в правій частині початкове значення – b_k. Нехай початкова величина змінилась на величину Δb_k. Якщо в початковій задачі значення першого ресурсу зросте на одиницю (Δb_k=1), то згідно з останньою симплексною таблицею

i	Базис	$C_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_{n+k}	…	c_{n+m}
				x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_{n+k}	…	x_{n+m}
1	x_1	c_1	$x_1^* + \Delta b_k a_{1,n+k}$	1	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	$a_{1,n+k}$	…	$a_{1,n+m}$
2	x_2	c_2	$x_2^* + \Delta b_k a_{2,n+k}$	0	1	…	0	$a_{2,m+1}$	…	$a_{2,n+k}$	…	$a_{2,n+m}$
m	x_m	c_m	$x_m^* + \Delta b_k a_{m,n+k}$	0	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	$a_{m,n+k}$	…	a_{mn+m}
$m+1$	$F_j - c_{j\geq 0}$		F'	0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_{n+k}	…	Δ_{n+m}

отримаємо:

Базис	$C_{баз}$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	250 + 1	2	5	2	4	1	0	0
x_6	0	280 + 0	1	6	2	4	0	1	0
x_7	0	80 + 0	3	2	1	1	0	0	1
$Z_j - c_j \geq 0$		0	–2	–4	–3	–4	0	0	0
x_4	4	$62{,}5 + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_6	0	30 – 1	–1	1	0	0	–1	1	0
x_7	0	$17{,}5 - \frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1
$Z_j - c_j \geq 0$		69	0	6	–1	0	1	0	0
x_4	4	$45 + \frac{1}{2}$	–2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	–1
x_6	0	30 – 1	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	$35 - \frac{1}{2}$	5	3/2	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
$Z_j - c_j \geq 0$		$285 + \frac{1}{2}$	5	5/2	0	0	1/2	0	2

У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_4^* збільшиться на 1/2, а змінних x_6^* та x_3^* – зменшиться відповідно на одиницю та 1/2. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення будуть такими:

$$X^* = (0;\ 0;\ 34{,}5;\ 45{,}5;\ 0;\ 29;\ 0).$$

Отже, збільшення запасу першого дефіцитного ресурсу за інших однакових умов уможливлює зростання випуску продукції *D* за рахунок зменшення виробництва продукції *C*. За таких умов обсяг використання недефіцитного другого ресурсу також збільшується. За такого плану виробництва максимальний дохід підприємства

$$\max Z = 2{\cdot}0 + 4{\cdot}0 + 3{\cdot}34{,}5 + 4{\cdot}45{,}5 = 285{,}5,$$

тобто зросте на $y_1 = 1/2$.

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного ресурсу 3 за інших однакових умов збільшити на одну умовну одиницю ($b_3 = 80 + 1 = 81$). Аналогічно попереднім міркуванням, скориставшись елементами стовпчика «x_7» останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці y_3=2, можна записати новий оптимальний план:

$$X^* = (0; 0; 37; 44; 0; 30; 0).$$

$$\max Z = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 37 + 4 \cdot 44 = 287.$$

Отже, виручка підприємства збільшиться на дві умовні одиниці за рахунок збільшення виробництва продукції *C* на дві одиниці та зменшення випуску продукції *D* на одну одиницю. За таких обставин обсяг використання ресурсу 2 не змінюється.

Але після проведеного аналізу постає логічне запитання: Оскільки збільшення третього ресурсу на одиницю приводить до найбільшого підвищення значення функціонала, то чи можна збільшити третій дефіцитний ресурс на 50, 100 і т.д. ум. од., тим самим значно збільшуючи виручку підприємства?

Відомо, що для однозначної відповіді на це запитання, необхідно розрахувати **інтервали** можливої ***зміни обсягів дефіцитних ресурсів***, у межах яких двоїсті оцінки y_i залишаються на рівні оптимальних значень, тобто розв’язати систему нерівностей

$$x_i^* + a_{i,n+k} \Delta b_k \geq 0 \; i = \overline{1, m}.$$

Якщо приріст (зміну) запасу першого ресурсу позначимо через Δb_1, тоді симплексні таблиці даної задачі набудуть вигляду:

Ба-зис	$C_б$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	$250 + 1\,\Delta b_1$	2	5	2	4	1	0	0
x_6	0	$280 + 0\,\Delta b_1$	1	6	2	4	0	1	0
x_7	0	$80 + 0\,\Delta b_1$	3	2	1	1	0	0	1
$Z_j - c_j \geq 0$		0	–2	–4	–3	–4	0	0	0
x_4	4	$62{,}5 + \frac{1}{4}\Delta b_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_6	0	$30 - 1\,\Delta b_1$	–1	1	0	0	–1	1	0
x_7	0	$17{,}5 - \frac{1}{4}\Delta b_1$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1
$Z_j - c_j \geq 0$		69	0	6	–1	0	1	0	0
x_4	4	$45 + \frac{1}{2}\Delta b_1$	–2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	–1
x_6	0	$30 - 1\,\Delta b_1$	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	$35 - \frac{1}{2}\Delta b_1$	5	3/2	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
$Z_j - c_j \geq 0$		$285 + \frac{1}{2}\Delta b_1$	5	5/2	0	0	1/2	0	2

Новий оптимальний план можна записати у такий спосіб:

$X^* = (0; 0; 35–1/2\Delta b_1;\; 45 + 1/2\Delta b_1;\; 0;\; 30 – \Delta b_1; 0).$

Єдина вимога, яку можна поставити до можливих нових оптимальних значень, – це умова невід'ємності змінних, тобто:

$$\begin{cases} 35 - 1/2\Delta b_1 \geq 0; \\ 45 + 1/2\Delta b_1 \geq 0; \\ 30 - \Delta b_1 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \leq 70; \\ \Delta b_1 \geq -90; \\ \Delta b_1 \leq 30. \end{cases}$$

Отже,

$$-90 \leq \Delta b_1 \leq 30.$$

Це означає, що коли запас ресурсу 1 збільшиться на 30 ум.од. або зменшиться на 90 ум. од., то на цьому інтервалі його оптимальна двоїста оцінка залишиться такою ж: y_1=1/2. Отже, запас ресурсу 1 може змінюватись у межах:

$$250 - 90 \leq b_1 \leq 250 + 30,$$

$$160 \leq b_1 \leq 280.$$

Згідно з цим максимально можливі зміни обсягів виручки підприємства залежно від змін у постачанні ресурсу 1 на такому інтервалі будуть у межах:

$$285 - 90 \cdot 1/2 \leq Z_{\max} \leq 285 + 30 \cdot 1/2,$$

$$240 \leq Z_{\max} \leq 300,$$

а відповідні критичним значенням діапазону виручки оптимальні плани виробництва продукції будуть такими:

(0; 0; 80; 0; 0; 120; 0) = X^* = (0; 0; 20; 60; 0; 0; 0).

Аналогічно розраховується інтервал стійкості двоїстої оцінки $y_3 = 2$ для дефіцитного ресурсу 3:

$$\begin{cases} 35 + 2b_3 \geq 0; \\ 45 - \Delta b_3 \geq 0; \\ 30 + 0\Delta b_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_3 \geq -17{,}5; \\ \Delta b_3 \leq 45; \end{cases}$$

$$-17{,}5 \leq \Delta b_3 \leq 45,$$

$$62{,}5 \leq b_3 \leq 125.$$

Отже, якщо запас ресурсу 3 збільшиться на 45 ум.од. або зменшиться на 17,5 ум.од., то двоїста оцінка y_3=2 цього ресурсу залишиться такою ж. Згідно із цим можлива виручка підприємства та оптимальний план виробництва продукції будуть знаходитися у межах:

$$250 \leq \max Z \leq 375;$$

(0; 0; 0; 62,5; 0; 30; 0) = X^* = (0; 0; 125; 0; 0; 30; 0).

Для розрахунку інтервалу зміни недефіцитного ресурсу досить розв'язати одну нерівність

$$-x_{n+k}^* \leq \Delta b_k \leq \infty.$$

У нашому прикладі недефіцитним є другий ресурс. Відомо, що за оптимального плану виробництва буде залишок цього ресурсу в обсязі $x_6 = 30$ ум. од. Отже, зменшення даного ресурсу в обсязі до 30 ум. од. не змінить структуру оптимального плану. Якщо зміну загального запасу другого ресурсу позначити через Δb_2, то інтервал можливої зміни його обсягів можна записати так:

$-30 \le \Delta b_2 < \infty$.

Отже, інтервалом зміни запасів недефіцитного ресурсу, в межах якого структура оптимального плану залишиться постійною, буде:

$250 \le b_2 \le \infty$.

Зауважимо, що визначені інтервали стосуються лише тих випадків, коли змінюється обсяг тільки одного ресурсу, а запаси всіх інших фіксовані, тобто за інших однакових умов. У разі одночасної зміни обсягів усіх або кількох ресурсів для визначення інтервалів допустимих змін необхідно розв'язати систему нерівностей

$$x_i^* + \sum_{k=1}^{m} a_{i,n+k} \Delta b_k \ge 0, \; i = \overline{1,m}.$$

Простішою для дослідження є ситуація, коли зміни ресурсів відомі і необхідно визначити лише новий оптимальний план. Нехай додатковою умовою прикладу 6.1 є зміна обсягів усіх трьох ресурсів, що змінюються відповідно так: $\Delta b_1 = +10$, $\Delta b_2 = -10$, $\Delta b_3 = +20$. Для визначення компонент нового оптимального плану скористаємось одним із головних співвідношень обчислювальної процедури симплекс-методу. З першої теореми двоїстості відомо, що:

$$X^* = D^{-1} \cdot \vec{B}.$$

З останньої симплекс-таблиці отримуємо обернену матрицю:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Змінені запаси ресурсів утворюють вектор

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ b_3 + \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250+10 \\ 280-10 \\ 80+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Тоді новий оптимальний план виробництва продукції за відповідної одночасної зміни запасів усіх трьох ресурсів

$$X^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 70 \end{pmatrix},$$

тобто $X^* = (0; 0; 70; 30; 0; 10; 0)$.

Усі $x_j \ge 0$, і тому оптимальним планом двоїстої задачі залишається $Y^* = (1/2; 0;2)$. Загальна максимальна виручка підприємства зміниться на

$\Delta F_{\max} = \Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y_2 + \Delta b_3 y_3 = 10 \cdot 1/2 - 10 \cdot 0 + 20 \cdot 2 = +45$ ум. од.

і становитиме:

$\max F = 285 + 45 = 330$ ум. од.

Використовуючи $\Delta b_r = \dfrac{y_s^*}{y_r^*} \Delta b_s$, проведемо дослідження можливого ***взаємозамінювання ресурсів***.

Якщо у виробничій системі існує два чи більше дефіцитних ресурсів, то певний обсяг одного з них може бути замінений деяким обсягом іншого, причому значення цільової функції залишиться незмінним.

Для умов прикладу 6.1 попередній аналіз двоїстих оцінок показав, що дефіцитними є перший та третій ресурси. Припустимо, що забезпечення виробництва необхідним обсягом третього ресурсу можливе не завжди. У такому разі доцільним є визначення того, яким обсягом першого ресурсу можна замінити третій, щоб водночас не зменшилась оптимальна сума виручки.

Оскільки $\Delta b_r = \frac{y_s^*}{y_r^*}\Delta b_s$, де $\Delta b_r\ \Delta b_s$ – величини змін дефіцитних ресурсів, а y_s^*, y_r^* – двоїсті оцінки відповідних ресурсів, то зміна обсягу третього ресурсу на одиницю $(\Delta b_3 = 1)$ потребує додаткового використання $\Delta b_1 = \frac{y_3^*}{y_1^*}\Delta b_3 = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot 1 = 4$ ум. од. першого ресурсу.

Отже, якщо перший ресурс збільшити на 4ум.од. і використовувати в обсязі 284ум.од., а третій зменшити на 1ум.од. і залишити у виробництві 79ум.од., то обсяг виручки від реалізації продукції залишиться незмінним у порівнянні з початковими умовами прикладу 6.1 – 285 ум.од.

ТЕМА 7
ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА. ПОСТАНОВКА, МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТА АНАЛІЗУ

7.1. Економічна та математична постановка транспортної задачі. Умови існування розв'язку транспортної задачі

Транспортна задача – це специфічна задача лінійного програмування, застосовувана для визначення найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів.

Економіко-математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min; \tag{7.1}$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{7.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{7.3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right), \tag{7.4}$$

де x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться від *i*-го постачальника до *j*-го споживача; c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції від *i*-го постачальника до *j*-го споживача; a_i – запаси продукції *i*-го постачальника; b_j – попит на продукцію *j*-го споживача.

Умови транспортної задачі можна записати у вигляду табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_i
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_i
...	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{7.5}$$

то таку транспорту задачу називають ***збалансованою,*** або ***закритою***. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають ***незбалансованою,*** або ***відкритою***.

Тут може бути два випадки:

а) сумарні запаси перевищують сумарні потреби, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$;

б) сумарні запаси менше, ніж сумарних потреб, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Відкриту модель завжди можна звести до моделі закритого типу. Для цього у випадку а) вводиться фіктивний споживач B_{n+1}, потреби якого дорівнюють $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а у випадку б) вводиться фіктивний постачальник A_{m+1}, запаси якого дорівнюють $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Вартість перевезення одиниці вантажу до фіктивного споживача і вартість перевезення одиниці вантажу від фіктивного постачальника дорівнюють нулю, оскільки вантаж в обох випадках не перевозиться.

Транспортну задачу застосовують також під час виконання економічних завдань, які за своїм характером не мають нічого спільного з транспортуванням вантажу, тому величини можуть мати різний зміст залежно від конкретного завдання. Наприклад, величини c_{ij} можуть означати вартість, відстань, час, продуктивність тощо.

Як і для інших задач лінійного програмування, процес пошуку оптимального розв'язку транспортної задачі розпочинається із знаходження початкового опорного плану. Розглянемо системи обмежень (7.2) та (7.3) транспортної задачі. Вона містить *mn* невідомих та *m+n* рівнянь, пов'язаних між собою співвідношенням (7.5). Якщо додати почленно рівняння окремо підсистеми (7.2) і окремо підсистеми (7.3), то отримаємо два однакові рівняння. У табл. 7.1 таке додавання рівнозначне почленному додаванню стовпців і рядків.

Така ситуація свідчить про лінійну залежність системи обмежено. Якщо одне з рівнянь цієї системи відкинути, то система обмежень міститиме не більше $m + n - 1$ лінійно незалежних рівнянь або стільки само базисних змінних, відповідно ***невироджений опорний розв'язок транспортної задачі*** містить $m + n - 1$ додатних компонент або перевезень.

Якщо умови транспортної задачі та її опорний розв'язок записані у вигляді табл. 7.1, то клітини, в яких знаходяться відмінні від нуля перевезення називаються ***заповненими*** клітинами, решта – ***вільними*** клітинами. Зайняті клітини відповідають базисним змінним і для не виродженого опорного розв'язку їхня кількість дорівнює $m + n - 1$.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (7.2) – (7.4) транспортної задачі, який позначають матрицею $x = (x_{ij}) \qquad (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = \left(\vec{x}^*_{ij}\right) \qquad (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$, яка задовольняє умови задачі і для якої цільова функція (7.1) набуває найменшого значення.

Теорема (умова існування розв'язку транспортної задачі). Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ **.**

7.2. Знаходження початкового опорного плану транспортної задачі

7.2.1. Метод північно-західного кута

Для знаходження початкового опорного розв'язку транспортної задачі зручно користуватися методом північно-західного кута, суть якого полягає у такому.

Нехай умови транспортної задачі задані у табл. 7.2.

Заповнюватимемо цю таблицю, починаючи від лівого верхнього кута, який умовно назвемо «північно-західним кутом». Не враховуючи вартості перевезення одиниці вантажу, починаємо задовольняти потреби першого споживача B_1 за рахунок запасів першого постачальника A_1. Для цього записуємо у лівий нижній кут клітинки A_1B_1 менше з чисел a_1 і $в_1$, тобто $x_{11} = \min(a_1, b_1)$.

На першому кроці можуть бути два випадки. Якщо $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ і перший стовпець «закритий», тобто потреба першого споживача задоволена повністю. Це означає, що для решти клітин першого стовпця $x_{i1}=0\ (i=2,...,m)$. Рухаючись далі по першому рядку таблиці, переходимо до задоволення потреб другого споживача B_j за рахунок запасу, що залишився у постачальника A_1. Тут у клітинку A_1B_2 записуємо менше з чисел a_1-b_1 і b_2, тобто $x_{12}=\min(a_1-b_1,b_2)$.

Таблиця 7.2

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_i
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_i
...	…	…	…	…	…
A_3	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$

Якщо $(a_1-b_1)\geq b_2$, то $x_{12}=b_2$, другий стовпчик «закритий», тобто $x_{i2}=0\ (i=2,...,m)$, і тепер переходимо до задоволення потреб споживача B_3. Якщо $(a_1-b_1),<b_2$, то $x_{12}=\min(a_1-b_1,b_2)$ і перший рядок «закритий», тобто запаси першого постачальника повністю вивезенні. Це означає, що для решти клітин першого рядка $x_{1i}=0\ (j=3,...,n)$. У цьому випадку задоволення потреб споживача B_j розпочинаємо тепер за рахунок запасів постачальника A_2. Процес в аналогічний спосіб продовжуємо далі.

Якщо ж на першому кроці $(a_1<b_1)$, то $x_{11}=a_1$ і перший рядок «закритий», тобто $x_{1j}=0\ (j=2,...,n)$, і тепер, рухаючись далі по першому стовпцю таблиці, переходимо до задоволення потреб споживача B_1 за рахунок запасів постачальника A_2. Тут у клітинку A_2B_1 записуємо менше з чисел a_2 і b_1-a_1, а саме: $x_{21}=\min(a_2,b_1-a_1)$.

Цей процес продовжується до вичерпання усіх запасів $a_i(i=1,2,....,m)$ та задоволення усіх потреб $b_j(j=1,2,....,n)$. Остання заповнена клітинка буде у *n*-му стовпчику та в *m*-му рядку. Починаючи рух із клітинки A_1B_1 тільки по зайнятих клітинках, неможливо повернутись не лише до неї, але і в будь-яку іншу заняту клітинку. Тобто розв'язок, знайдений за методом північно-західного кута, є опорним планом розв'язку транспортної задачі.

7.2.2. Метод мінімального елемента

Суть методу мінімального елемента полягає в тому, що на кожному кроці здійснюється максимально можливе «переміщення» вантажу у клітинку з мінімальною вартістю перевезення одиниці вантажу c_{ij}.

Нехай умови транспортної задачі задані у табл. 7.3.

Таблиця 7.3

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Потреби	200	200	100	100	250	850

Заповнення таблиці починаємо з клітинки, в якій найменша величина витрат c_{ij}. Запишемо у цю клітинку менше з чисел a_i і b_j. Потім або рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого повністю задоволені, або стовпець, що відповідає споживачеві, попит якого повністю задоволений, або і рядок, і стовпець, якщо вивезені запаси постачальника і задоволені потреби споживача, «викреслюють», тобто вони більше не беруть участі у процесі побудови початкового опорного плану. Далі з решти клітин таблиці знову вибирають клітинку з найменшою величиною витрат, і процес розподілу запасів продовжується доти, доки вони усі не будуть вивезені, а потреби задоволені.

7.2.3. Евристичний метод Фойгеля

Метод Фойгеля доволі простий і дає змогу отримати опорний план, більш наближений до оптимального розв’язку, ніж у випадку застосування інших методів.

Цей метод полягає у такому:

– на кожній ітерації знаходять різниці між двома найменшими тарифами в усіх рядках і стовпцях, записуючи їх у додаткові стовпець і рядок таблиці;

– знаходять максимальну різницю і заповнюють клітину з мінімальною вартістю в рядку (стовпці), якій відповідає ця різниця.

7.3. Метод потенціалів для знаходження оптимального розв’язку транспортної задачі

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв’язати симплекс-методом. Але специфічна структура транспортної задачі дає змогу використовувати для її розв’язування ефективніший метод, який повторює, по суті, кроки симплекс-алгоритму. Таким є ***метод потенціалів***.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів.

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита).
2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі.
3. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.
4. Якщо умова оптимальності виконується, то маємо оптимальний розв’язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, необхідно перейти до наступного опорного плану.

5. Новий план знову перевіряють на оптимальність, тобто повторюють дії п. 3, і т. д.

Розглянемо докладно кожний етап цього алгоритму.

1. Якщо під час перевірки збалансованості (7.5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Як було зазначено вище, це виконується введенням фіктивного умовного постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$. Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$ до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного умовного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника A_{m+1} , або фіктивного споживача B_{n+1} . вважається такою, що дорівнює нулю.

2. Для побудови початкового опорного плану транспортної задачі існує кілька методів: північно-західного кута; мінімальної вартості; подвійної переваги; метод Фойгеля. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції є рядками, а споживачі – стовпчиками.

Після побудови першого опорного плану одним із розглянутих методів у таблиці має бути заповнено *(m + n –* 1) клітинок, де *m* – кількість постачальників; *n* – кількість споживачів у задачі, у тому числі фіктивних. Такий план називають ***невиродженим***. Якщо кількість заповнених клітинок перевищує (*m* + *n* – 1), то початковий план побудовано неправильно і він є не опорним. ***Ознакою опорності*** плану транспортної задачі є його ациклічність, тобто неможливість побудови циклу. ***Циклом*** у транспортній задачі називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці.

Якщо заповнених клітинок у таблиці менш як *(m + n –* 1), то опорний план називають ***виродженим***. У такому разі необхідно заповнити відповідну кількість порожніх клітинок, записуючи в них «нульове перевезення», але так, щоб при цьому не порушилася ациклічність плану.

3. Опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j відповідно постачальників та споживачів.

Теорема (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі). Якщо для деякого опорного плану $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$ ***існують числа*** u_i ***та*** v_j***, для яких виконується умова***

$$\begin{aligned} u_i + v_j &= c_{ij}, \quad & x_{ij} &> 0, \\ u_i + v_j &\le c_{ij}, \quad & x_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

для всіх $i = \overline{1, m}$ ***, та*** $j = \overline{1, n}$ ***, то він є оптимальним планом транспортної задачі.***

На основі вищенаведеної теореми для того, щоб опорний розв’язок транспортної задачі був оптимальним, необхідно виконати такі умови:

а) для кожної зайнятої клітинки сума потенціалів повинна дорівнювати вартості перевезення одиниці вантажу, що стоїть у цій клітинці:

$$u_i + v_j = c_{ij}\,; \tag{7.6}$$

б) для кожної вільної клітинки сума потенціалів повинна бути меншою або дорівнювати вартості перевезення одиниці вантажу, що стоїть у цій клітинці:

$$u_i + v_j \le c_{ij} \tag{7.7}$$

Якщо хоча б одна вільна клітинка не задовольняє умову (7.7), то знайдений опорний план не є оптимальним і його можна покращити.

4. Для перевірки оптимального плану на оптимальність необхідно спочатку побудувати систему потенціалів.

Систему потенціалів можна побудувати тільки для не виродженого опорного плану. Такий план містить $m + n - 1$ зайнятих клітин, тому для нього можна скласти систему із $m + n - 1$ лінійно незалежних рівнянь вигляду (7.6) з $m + n$ невдомими. У цій системі рівнянь на одне менше, ніж невідомих, тому припустивши, що один із потенціалів дорівнює нулю, можна однозначно визначити решту. Потім необхідно перевірити правильність побудови системи потенціалів, для цього потрібно перевірити виконання умов (7.6) для всіх заповнених клітин.

Якщо опорний план є виродженим, тобто містить менше $m + n - 1$ заповнених клітин, то перед побудовою системи потенціалів вводимо додаткову кількість клітин з нульовим перевезенням, щоб отримати $m + n - 1$ заповнених. Клітинки, в як уведені нульові перевезення, називають ***фіктивно заповненими клітинками***. Оскільки у транспортній задачі потрібно знайти мінімальне значення цільової функції, то доцільно зробити фіктивно заповненими ті клітинки, в яких найменша вартість перевезення.

Після того, як визначені числові значення усіх потенціалів, для усіх вільних клітин обчислюють величини

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \tag{7.8}$$

Якщо для усіх i та j ($i = 1,2,\ldots m$; $j = 1,2,\ldots,n$) виконується $\Delta_{ij} \le 0$, то знайдений опорний план буде оптимальним. Якщо, хоча б для однієї пари i та j виконується $\Delta_{ij} > 0$, то знайдений опорний план не буде оптимальним, і його заміняють на новий опорний план. Для цього необхідно «завантажити» вільну клітинку A_kB_l (ввести у базис змінну x_{kl}), що задовольняє умову

$$\Delta_{kl} = \max_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} \tag{7.9}$$

З цією метою будуємо цикл у вигляді ламаної ліній, починаючи від вільної клітинки A_kB_l і проводячи ланки ламаної рядків і стовпчиків до заповнених клітин. У клітину A_kB_l ставимо знак «+», а решту вершин циклу – почергово знаки «–» та «+» (при цьому точки само перетину ламаної не враховуємо – вони не є вершинами циклу).

Вибираємо найменше перевезення з вершин циклу, відзначених «–» (у клітинці A_rB_s), позначаємо його через θ і цю величину «переміщаємо» клітинками циклу, тобто віднімаємо її від об’ємів перевезення у клітинках, відзначних «–», і додаємо до об’єму перевезень у клітинках, відзначених «+». Тоді об’єм перевезень у клітинці A_kB_l дорівнює θ а в клітинці A_rB_s – нулю.

У результаті клітинка клітинці A_rB_s стає вільною (якщо після переміщення перевезень у деяких зайнятих клітинках з’являються нульові перевезення, то із цих клітин тільки одна перетворюється на вільну), а клітинки A_kB_l – зайнятою, і отримаємо новий опорний план. Баланс перевезень не змінився, оскільки у кожному рядку та стовпчику ми додали і відняли одне і те саме значення.

Для отримання нового опорного плану знову визначаємо числові значення потенціалів і для вільних клітин обчислюємо величини вигляду (7.8). Цей процес продовжуємо, поки серед Δ_{ij} не залишиться жодного додатного.

5. Новий опорний план перевіряють на оптимальність згідно з п. 3 розглянутого алгоритму.

ТЕМА 8
ЦІЛОЧИСЛОВЕ ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

8.1. Економічна і математична постановка цілочислової задачі лінійного програмування

8.2. Геометрична інтерпретація розв'язків цілочислових задач лінійного програмування на площині

8.3. Загальна характеристика методів розв'язування цілочислових задач лінійного програмування

8.4. Методи відтинання. Метод Гоморі

8.5. Комбінаторні методи. Метод гілок та меж

8.1. Економічна і математична постановка цілочислової задачі лінійного програмування

Існує доволі широке коло задач математичного програмування, в економіко-математичних моделях яких одна або кілька змінних мають набувати цілих значень. Наприклад, коли йдеться про кількість верстатів у цеху, тварин у сільськогосподарських підприємствах тощо.

Зустрічаються також задачі, які з першого погляду не мають нічого спільного з цілочисловими моделями, проте формулюються як задачі цілочислового програмування. Вимоги дискретності змінних в явній чи неявній формах притаманні таким практичним задачам, як вибір послідовності виробничих процесів; календарне планування роботи підприємства; планування та забезпечення матеріально-технічного постачання, розміщення підприємств, розподіл капіталовкладень, планування використання обладнання тощо.

Задача математичного програмування, змінні якої мають набувати цілих значень, називається задачею ***цілочислового програмування***. У тому разі, коли цілочислових значень мають набувати не всі, а одна чи кілька змінних, задача називається ***частково цілочисловою***.

До цілочислового програмування належать також ті задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень: 0 або 1 (бульові, або бінарні змінні).

Умова цілочисловості є по суті нелінійною і може зустрічатися в задачах, що містять як лінійні, так і нелінійні функції. Розглянемо задачі математичного програмування, в яких крім умови цілочисловості всі обмеження та цільова функція є лінійними, що мають назву ***цілочислових задач лінійного програмування***.

Загальна цілочислова задача лінійного програмування записується так:

$$\max(\min) F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{8.1}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{8.2}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right); \tag{8.3}$$

$$x_j \text{ – цілі числа } \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{8.4}$$

8.2. Геометрична інтерпретація розв'язків цілочислових задач лінійного програмування на площині

Для знаходження оптимального розв'язку цілочислових задач застосовують спеціальні методи. Найпростішим з них є знаходження оптимального розв'язку задачі як такої, що має лише неперервні змінні, з дальшим їх округленням. Такий підхід є виправданим тоді, коли змінні в оптимальному плані набувають досить великих значень у зіставленні їх з одиницями вимірювання. Нехай, наприклад, у результаті розв'язування задачі про поєднання галузей у сільськогосподарському підприємстві отримали оптимальне поголів'я корів – 1235,6. Округливши це значення до 1236, не припустимося значної похибки. Проте за деяких умов такі спрощення призводять до істотних неточностей. Скажімо, множина допустимих розв'язків деякої нецілочислової задачі лінійного програмування має вигляд, зображений на рис.8.1.

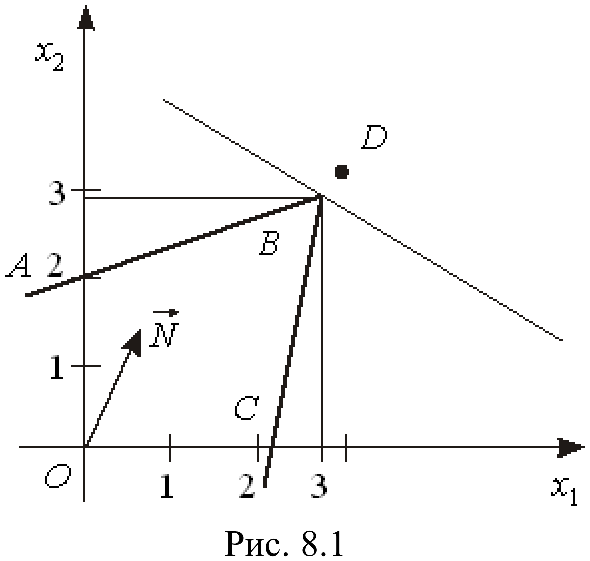

Рис. 8.1

Максимальне значення функціонала для даної задачі знаходиться в точці ***B***. Округлення дасть таке значення оптимального плану $x_1 = 3$; $x_2 = 3$ (точка ***D*** на рис.8.1). Очевидно, що точка ***D*** не може бути розв'язком задачі, оскільки вона навіть не належить множині допустимих розв'язків (чотирикутник ***OABC***), тобто відповідні значення змінних не задовольнятимуть систему обмежень задачі.

Зауважимо, що геометрично множина допустимих планів будь-якої лінійної цілочислової задачі являє собою систему точок з цілочисловими координатами, що знаходяться всередині опуклого багатокутника допустимих розв'язків відповідної нецілочислової задачі. Отже, для розглянутого на рис.8.1 випадку множина допустимих планів складається з дев'яти точок (рис.8.2), які утворені перетинами сім'ї прямих, що паралельні осям Ox_1 та Ox_2 і проходять через точки з цілими координатами 0, 1, 2.

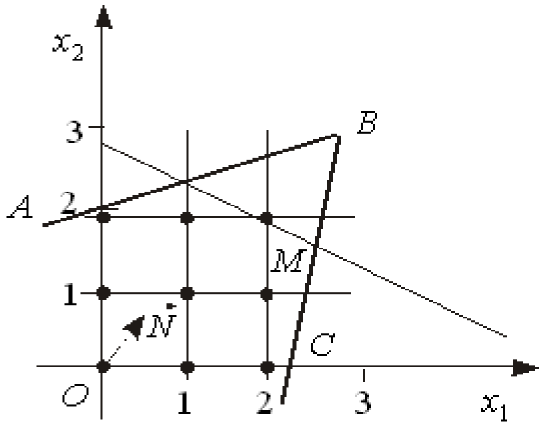

Рис. 8.2

Для знаходження цілочислового оптимального розв'язку пряму, що відповідає цільовій функції, пересуваємо у напрямку вектора нормалі $\vec{N}$ до перетину з кутовою точкою утвореної цілочислової сітки. Координати цієї точки і є оптимальним цілочисловим розв'язком задачі. У нашому прикладі оптимальний цілочисловий розв'язок відповідає точці $\boldsymbol{M}$ ($x_1 = 2;\ x_2 = 2$).

Очевидно, особливість геометричної інтерпретації цілочислової задачі у зіставленні зі звичайною задачею лінійного програмування полягає лише у визначенні множини допустимих розв'язків. Областю допустимих розв'язків загальної задачі лінійного програмування є опуклий багатогранник, а вимога цілочисловості розв'язку приводить до такої множини допустимих розв'язків, яка є дискретною і утворюється тільки з окремих точок. Якщо у разі двох змінних розв'язок задачі можна відшукати графічним методом, тобто, використовуючи цілочислову сітку, можна досить просто знайти оптимальний план, то в іншому разі необхідно застосовувати спеціальні методи.

8.3. Загальна характеристика методів розв'язування цілочислових задач лінійного програмування

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують такі групи методів:

1) точні методи:

- методи відтинання;
- комбінаторні методи;

2) наближені методи.

Основою *методів відтинання* є ідея поступового «звуження» області допустимих розв'язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв'язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, багатогранник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшують доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень.

До цієї групи належать:

а) методи розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);

б) методи розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на ідеї перебору всіх допустимих цілочислових розв'язків, однак, згідно з їх процедурою здійснюється цілеспрямований перебір лише досить невеликої частини розв'язків.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод гілок і меж.

Починаючи з розв'язування послабленої задачі, він передбачає поділ початкової задачі на дві підзадачі через виключення областей, що не мають цілочислових розв'язків, і дослідження кожної окремої частини багатогранника допустимих розв'язків.

Для розв'язування задач із бульовими змінними застосовують комбінаторні методи, причому, оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

Досить поширеними є також *наближені методи* розв'язування цілочислових задач лінійного програмування. Оскільки для практичних задач великої розмірності за допомогою точних методів не завжди можна знайти строго оптимальний розв'язок за прийнятний час або для розв'язування задачі використовуються наближено визначені, неточні початкові дані, то часто в реальних задачах досить обмежитися наближеним розв'язком, пошук якого є спрощеним.

Значна частина наближених алгоритмів базується на використанні обчислювальних схем відомих точних методів, таких, наприклад, як метод гілок і меж.

До наближених методів належать: метод локальної оптимізації (метод вектора спаду); модифікації точних методів; методи випадкового пошуку та ін.

Головними показниками для зіставлення ефективності застосування конкретних наближених алгоритмів на практиці є такі: абсолютна Δ_1 та відносна Δ_2 похибки отриманих наближених розв'язків.

$$\Delta_1 = F(X^*) - F(X_1), \ \ \Delta_2 = \frac{\left|F(X^*) - F(X_1)\right|}{\left|F(X^*)\right|},$$

де F – цільова функція (в даному разі для визначеності допускаємо вимогу відшукання максимального її значення); X_1 –наближений розв'язок, знайдений деяким наближеним методом; X^* – оптимальний план задачі.

8.4. Методи відтинання. Метод Гоморі

В основу методів цілочислового програмування покладено ідею Данціга. Допустимо, що необхідно розв'язувати задачу лінійного програмування, всі або частина змінних якої мають бути цілочисловими. Можливо, якщо розв'язувати задачу, не враховуючи умову цілочисловості, випадково одразу буде отримано потрібний розв'язок. Однак така ситуація малоймовірна. Переважно розв'язок не задовольнятиме умову цілочисловості. Тоді накладають додаткове обмеження, яке не виконується для отриманого плану задачі, проте задовольняє будь-який цілочисловий розв'язок. Таке додаткове обмеження називають ***правильним відтинанням***. Система лінійних обмежень задачі доповнюється новою умовою і далі розв'язується отримана задача лінійного програмування. Якщо її розв'язок знову не задовольняє умови цілочисловості, то будується нове лінійне обмеження, що відтинає отриманий розв'язок, не зачіпаючи цілочислових планів. Процес приєднання додаткових обмежень повторюють доти, доки не буде знайдено цілочислового оптимального плану, або доведено, що його не існує.

Геометрично введення додаткового лінійного обмеження означає проведення гіперплощини (прямої), що відтинає від багатогранника (багатокутника) допустимих розв'язків задачі ту його частину, яка містить точки з нецілочисловими координатами, однак не торкається жодної цілочислової точки даної множини. Отриманий новий багатогранник розв'язків містить всі цілі точки, які були в початковому, і розв'язок, що буде отримано на ньому, буде цілочисловим (рис.8.3).

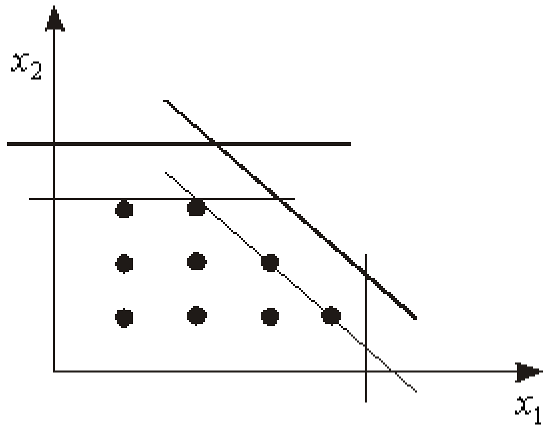

Рис. 8.3

Слід відмітити, що визначення правила для реалізації ідеї Данціга стосовно формування додаткового обмеження виявилось досить складним завданням і першим, кому вдалось успішно реалізувати цю ідею, був Гоморі.

Розглянемо алгоритм, запропонований Гоморі, для розв'язування повністю цілочислової задачі лінійного програмування, що ґрунтується на використанні симплексного методу і передбачає застосування досить простого способу побудови правильного відтинання.

Нехай маємо задачу цілочислового програмування:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{8.5}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = \overline{1,m}; \tag{8.6}$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,n}; \tag{8.7}$$

$$x_j \text{ – цілі числа } \left(j = \overline{1,n} \right). \tag{8.8}$$

Допустимо, що параметри a_{ij}, b_i, c_j $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ – цілі числа.

Не враховуючи умови цілочисловості, знаходимо розв'язок задачі (8.5)-(8.7) симплексним методом. Нехай розв'язок існує і міститься в такій симплексній таблиці:

Таблиця 8.1

Базис	$C_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n
			x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n
x_1	c_1	β_1	**1**	0	…	0	α_{1m+1}	…	α_{1n}
x_2	c_2	β_2	0	**1**	…	0	α_{2m+1}	…	α_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	c_m	β_m	0	0	…	**1**	α_{mm+1}	…	α_{mn}

Змінні $x_1, x_2, ..., x_m$ – базисні, а $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ — вільні. Оптимальний план задачі: $X^* = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m, 0, 0, ..., 0)$. Якщо $\beta_j \, (j = \overline{1,n})$ – цілі числа, то отриманий розв'язок є цілочисловим оптимальним планом задачі (8.5)-(8.8). Інакше існує хоча б одне з чисел, наприклад, β_i – дробове. Отже, необхідно побудувати правильне обмеження, що відтинає нецілу частину значення β_i.

Розглянемо довільний оптимальний план X^* задачі (8.5)-(8.7). Виразимо в цьому плані базисну змінну x_i через вільні змінні:

$$x_i = \beta_i - \alpha_{im+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{in} x_n = \beta_i - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j \,. \tag{8.9}$$

Виразимо коефіцієнти при змінних даного рівняння у вигляді суми їх цілої та дробової частин. Введемо позначення: $[\beta]$ – ціла частина числа β, $\{\beta\}$ – дробова частина числа β.

Цілою частиною числа a називається найбільше ціле число $[a]$, що не перевищує a. Дробовою частиною є число $\{a\}$, яке дорівнює різниці між самим числом a та його цілою частиною, тобто $\{a\} = a - [a]$.

Наприклад, для $a = 2\frac{1}{3}$ $[a] = 2$, $\{a\} = 2\frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{3}$;

для $a = -2\frac{1}{3}$ $[a] = -3$, $\{a\} = -2\frac{1}{3} - (-3) = \frac{2}{3}$.

Отримаємо:

$$x_i = [\beta_i] + \{\beta_i\} - \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j \,, \tag{8.10}$$

або

$$x_i - [\beta_i] + \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j = \{\beta_i\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j \,. \tag{8.11}$$

Отже, рівняння (8.11) виконується для будь-якого допустимого плану задачі (8.5)-(8.7). Допустимо тепер, що розглянутий план X^* є цілочисловим оптимальним планом задачі. Тоді ліва частина рівняння (8.11) складається лише з цілих чисел і є цілочисловим виразом. Отже, права його частина також є цілим числом і справджується рівність:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j = \{\beta_i\} + N, \tag{8.12}$$

де N – деяке ціле число.

Величина N не може бути від'ємною. Якщо б $N \le -1$, то з рівняння (8.12) приходимо до нерівності:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j = \{\beta_i\} + N \le \{\beta_i\} - 1.$$

Звідки $\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j + 1 \le \{\beta_i\}$. Тобто це означало б, що дробова частина $\{\beta_i\}$ перевищує одиницю, що неможливо. У такий спосіб доведено, що число N є невід'ємним.

Якщо від лівої частини рівняння (8.12) відняти деяке невід'ємне число, то приходимо до нерівності:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j \ge \{\beta_i\}, \tag{8.13}$$

яка виконується за допущенням для будь-якого цілочислового плану задачі (8.5)-(8.7). У такий спосіб виявилося, що нерівність (8.13) є шуканим правильним відтинанням.

Отже, для розв'язування цілочислових задач лінійного програмування (8.1)-(8.4) методом Гоморі застосовують такий алгоритм:

1. Симплексним методом розв'язується задача без вимог цілочисловості змінних – (8.1)-(8.3).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є розв'язком задачі цілочислового програмування (8.1)-(8.4).

Якщо задача (8.1) – (8.3) не має розв’язку (цільова функція необмежена, або система обмежень несумісна), то задача (8.1) – (8.4) також не має розв’язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На базі цієї змінної (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона міститься) будується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=m+1}^{n}\left\{\alpha_{ij}\right\}\cdot x_j \geq \left\{\beta_i\right\}.$$

3. Додаткове обмеження після зведення його до канонічного вигляду і введення базисного елемента приєднується до останньої симплексної таблиці, яка містить умовно-оптимальний план. Отриману розширену задачу розв’язують і перевіряють її розв’язок на цілочисловість. Якщо він не цілочисловий, то процедуру повторюють, повертаючись до п.2. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв’язку або доведено, що задача не має допустимих розв’язків на множині цілих чисел.

Доведено, що за певних умов алгоритм Гоморі є скінченним, але процес розв’язування задач великої розмірності методом Гоморі повільно збіжний. Слід також мати на увазі, що і кількість ітерацій суттєво залежить від сформованого правильного відтинання. Наведене правило (8.13) щодо формування правильного відтинання не єдине. Існують ефективніші відтинання, які використовуються у другому та третьому алгоритмах Гоморі, однак наявний практичний досвід ще не дає змоги виділити з них найкращий.

Загалом, алгоритм Гоморі в обчислювальному аспекті є мало вивченим. Якщо в лінійному програмуванні спостерігається відносно жорстка залежність між кількістю обмежень задачі та кількістю ітерацій, що необхідна для її розв’язування, то для цілочислових задач такої залежності не існує. Кількість змінних також мало впливає на трудомісткість обчислень. Очевидно, процес розв’язання цілочислової задачі визначається не лише її розмірністю, а також особливостями багатогранника допустимих розв’язків, що являє собою набір ізольованих точок.

Як правило, розв’язування задач цілочислового програмування потребує великого обсягу обчислень. Тому при створенні програм для ЕОМ особливу увагу слід приділяти засобам, що дають змогу зменшити помилки округлення, які можуть призвести до того, що отриманий цілочисловий план не буде оптимальним.

8.5. Комбінаторні методи. Метод гілок та меж

В основі комбінаторних методів є перебір можливих варіантів розв’язків поставленої задачі. Кожен з них характеризується певною послідовністю перебору варіантів та правилами виключення, що дають змогу ще в процесі розв’язування задачі виявити неоптимальні варіанти без попередньої їх перевірки. Відносна ефективність різних методів залежить від того, наскільки кожен з них уможливлює скорочення необхідного процесу перебору варіантів у результаті застосування правила виключення.

Розглянемо один із комбінаторних методів. Для розв'язування задач цілочислового програмування ефективнішим за метод Гоморі є метод гілок і меж. Спочатку, як і в разі методу Гоморі, симплексним методом розв'язується послаблена (без умов цілочисловості) задача. Потім вводиться правило перебору.

Нехай потрібно знайти x_j – цілочислову змінну, значення якої $x_j = x'_j$ в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Очевидно, що в деякому околі даної точки також не існує цілочислових значень, тому відповідний проміжок можна виключити з множини допустимих планів задачі в подальшому розгляді. Таким проміжком є інтервал між найближчими до x'_j цілочисловими значеннями. Можна стверджувати, що на інтервалі $\left]\lfloor x'_j \rfloor; \lfloor x'_j \rfloor + 1\right[$ цілих значень немає.

Наприклад, якщо x'_j=2,7 дістаємо інтервал $]2;3[$, де, очевидно, немає x_j, яке набуває цілого значення і оптимальний розв'язок буде знаходитися або в інтервалі $x_j \le 2$, або $x_j \ge 3$. Виключення проміжку $]2;3[$ з множини допустимих планів здійснюється введенням до системи обмежень початкової задачі додаткових нерівностей. Тобто допустиме ціле значення x_j має задовольняти одну з нерівностей виду:

$x_j \le \lfloor x'_j \rfloor$ або $x_j \ge \lfloor x'_j \rfloor + 1$.

Дописавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві, не пов'язані між собою, задачі. Тобто, початкову задачу цілочислового програмування (7.1)-(7.4) поділимо на дві задачі з урахуванням умов цілочисловості змінних, значення яких в оптимальному плані послабленої задачі є дробовими. Це означає, що симплекс-методом розв'язуватимемо дві такі задачі:

перша задача:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{8.14}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{8.15}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{8.16}$$

$$x_j \text{ – цілі числа, } j = \overline{1,n}; \tag{8.17}$$

$x_j \le \lfloor x'_j \rfloor$,(8.18)

друга задача

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{8.19}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, \ \left(i = \overline{1, m}\right); \tag{8.20}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right); \tag{8.21}$$

$$x_j \text{ — цілі числа } \left(j = \overline{1, n}\right); \tag{8.22}$$

$$x_j \ge \left[x'_j\right] + 1, \tag{8.23}$$

де x'_j – дробова компонента розв’язку задачі (8.1) – (8.4).

Наведені задачі (8.14) – (8.18) і (8.19) – (8.23) спочатку послаблюємо, тобто розв’язуємо з відкиданням обмежень (8.17) і (8.22). Якщо знайдені оптимальні плани задовольняють умови цілочисловості, то ці плани є розв’язками задачі (8.1)-(8.4). Інакше пошук розв’язку задачі триває. Для дальшого розгалуження вибираємо розв’язок задачі з більшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію, і навпаки – з меншим значенням цільової функції в разі її мінімізації. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв’язку. Здобутий останній план – оптимальний.

Розв’язування цілочислових задач методом гілок і меж можна значно прискорити. Очевидно, що кожна наступна задача, яку отримують в процесі розв’язування відрізняється від попередньої лише одним обмеженням. Тому за послідовного розв’язування задач немає сенсу розв’язувати їх симплексним методом спочатку. Досить буде почергово приєднати нові обмеження виду (8.18) і (8.23) до останньої симплекс-таблиці попередньої задачі та вилучити (в разі необхідності) непотрібні «старі» обмеження.

Геометрично введення додаткових лінійних обмежень виду (8.18) та (8.23) в систему обмежень початкової задачі означає проведення гіперплощин (прямих), що розтинають багатогранник (багатокутник) допустимих планів відповідної задачі лінійного програмування у такий спосіб, що уможливлюється включення в план найближчої цілої точки цього багатокутника (рис.8.4). Допустимо, що *A* – точка максимуму, тоді за методом гілок та меж багатокутник допустимих планів задачі *ABCOD* поділяється на дві частини прямими $x_1 = \left[x'_1\right]$ та $x_1 = \left[x'_1\right] + 1$, що виключає з розгляду точку А, координата якої x'_1 є не цілим числом.

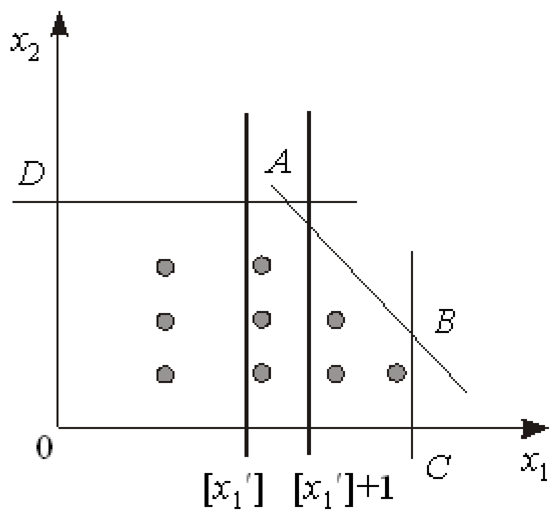

Рис 8.4

Опишемо алгоритм методу гілок та меж:

1. Симплексним методом розв'язують задачу (8.1) – (8.3) (без вимог цілочисловості змінних).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей розв'язок є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (8.1) – (8.4).

Якщо задача (8.1)-(8.3) не має розв'язку (цільова функція необмежена, або система обмежень несумісна), то задача (8.1)-(8.4) також не має розв'язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирають одну з нецілочислових змінних x_i і визначають її цілу частину $[x_i']$.

3. Записують два обмеження, що відтинають нецілочислові розв'язки:

$$x_i \le [x_i'],$$

$$x_i \ge [x_i'] + 1.$$

4. Кожну з одержаних нерівностей приєднують до обмежень початкової задачі. В результаті отримують дві нові цілочислові задачі лінійного програмування.

5. У будь-якій послідовності розв'язують обидві задачі. У разі, коли отримано цілочисловий розв'язок хоча б однієї із задач, значення цільової функції цієї задачі зіставляють з початковим значенням. Якщо різниця не більша від заданого числа ε, то процес розв'язування може бути закінчено. У разі, коли цілочисловий розв'язок одержано в обох задачах, то з розв'язком початкової зіставляється той, який дає краще значення цільової функції. Якщо ж в обох задачах одержано нецілочислові розв'язки, то для дальшого гілкування вибирають ту задачу, для якої здобуто краще значення цільової функції і здійснюють перехід до кроку 2.

ТЕМА 9
НЕЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

Раніше було розглянуто методи розв'язування задач лінійного програмування. Ці методи найкраще розроблені, легко реалізуються на ПЕОМ, а тому набули широкого застосування в багатьох галузях науки, техніки та економіки. Проте лінійні моделі відображають лише певну й вельми обмежену сукупність властивостей навколишнього світу. Адже, скажімо, соціально-економічні процеси переважно не є лінійними. Галузі, об'єднання та окремі підприємства народного господарства функціонують і розвиваються за умов невизначеності, а тому адекватно їх можна описати нелінійними, стохастичними, динамічними моделями. Отже, для ефективного управління народним господарством в цілому, його галузями і окремими об'єктами господарювання потрібне застосування нелінійних економіко-математичних моделей та методів.

Зауважимо, що сучасний рівень розвитку комп'ютерної техніки і методів математичного моделювання створює передумови для застосування нелінійних методів, а це може суттєво підвищити якість розроблюваних планів, надійність та ефективність рішень, які приймаються.

9.1. Економічна і математична постановка задачі нелінійного програмування

Досить детально розглянута в лекціях, присвячених лінійному програмуванню, задача пошуку оптимальних обсягів виробництва ґрунтується на допущеннях про лінійність зв'язку між витратами ресурсів і обсягами виготовленої продукції; між ціною, рекламою та попитом тощо. Але такі зв'язки насправді є нелінійними, тому точніші математичні моделі доцільно формулювати в термінах нелінійного програмування.

Нехай для деякої виробничої системи необхідно визначити план випуску продукції за умови найкращого способу використання її ресурсів. Відомі загальні запаси кожного ресурсу, норми витрат кожного ресурсу на одиницю продукції та ціни реалізації одиниці виготовленої продукції. Критерії оптимальності можуть бути різними, наприклад, максимізація виручки від реалізації продукції. Така умова подається лінійною залежністю загальної виручки від обсягів проданого товару та цін на одиницю продукції.

Однак, загальновідомим є факт, що за умов ринкової конкуренції питання реалізації продукції є досить складним. Обсяг збуту продукції визначається передусім її ціною, отже, як цільову функцію доцільно брати максимізацію не всієї виготовленої, а лише реалізованої продукції. Необхідно визначати також і оптимальний рівень ціни на одиницю продукції, за якої обсяг збуту був би максимальним. Для цього її потрібно ввести в задачу як невідому величину, а обмеження задачі мають враховувати зв'язки між ціною, рекламою та обсягами збуту продукції. Цільова функція в такому разі буде виражена добутком двох невідомих величин: оптимальної ціни одиниці продукції на оптимальний обсяг відповідного виду продукції, тобто буде нелінійною. Отже, маємо задачу нелінійного програмування.

Також добре відома транспортна задача стає нелінійною, якщо вартість перевезення одиниці товару залежить від загального обсягу перевезеного за маршрутом товару. Тобто коефіцієнти при невідомих у цільовій функції, що в лінійній моделі були сталими величинами, залежатимуть від значень невідомих (отже, самі стають невідомими), що знову приводить до нелінійності у функціоналі.

І нарешті, будь-яка задача стає нелінійною, якщо в математичній моделі необхідно враховувати умови невизначеності та ризик. Як показник ризику часто використовують дисперсію, тому для врахування обмеженості ризику потрібно вводити нелінійну функцію в систему обмежень, а мінімізація ризику певного процесу досягається дослідженням математичної моделі з нелінійною цільовою функцією.

Загальна задача математичного програмування формулюється так: знайти такі значення змінних x_j $(j=\overline{1,n})$, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення:

$$\max(\min) F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{9.1}$$

за умов:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\leq, =, \geq\} b_i \quad (i=\overline{1,m}); \tag{9.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}). \tag{9.3}$$

Якщо всі функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i=\overline{1,m}$ є лінійними, то це задача лінійного програмування, інакше (якщо хоча б одна з функцій є нелінійною) маємо ***задачу нелінійного програмування***.

9.2. Геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування

Геометрично цільова функція (9.1) визначає деяку поверхню, а обмеження (9.2) – (9.3) – допустиму підмножину *n*-вимірного евклідового простору. Знаходження оптимального розв'язку задачі нелінійного програмування зводиться до відшукання точки з допустимої підмножини, в якій досягається поверхня найвищого (найнижчого) рівня.

Якщо цільова функція неперервна, а допустима множина розв'язків замкнена, непуста і обмежена, то глобальний максимум (мінімум) задачі існує.

Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, що містять систему лінійних обмежень та нелінійну цільову функцію. В цьому разі область допустимих розв'язків є опуклою, непустою, замкненою, тобто обмеженою.

Розглянемо приклад геометричного способу розв'язування задачі нелінійного програмування.

Приклад 9.1. Знайти мінімальне і максимальне значення функції:

$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1; \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Розв'язання. Область допустимих розв'язків утворює чотирикутник $ABCD$ (рис. 9.1).

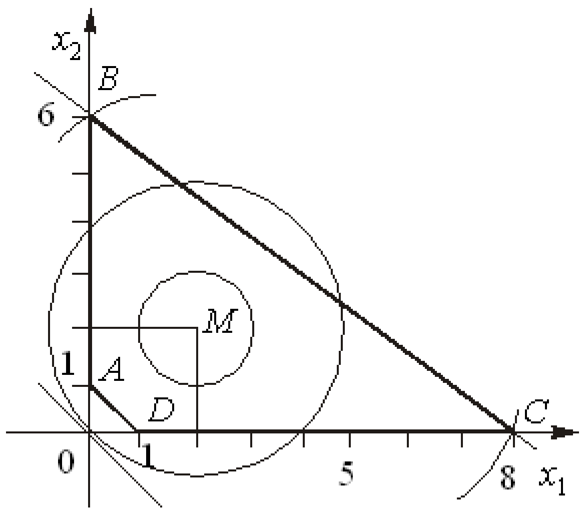

Рис. 9.1

Геометрично цільова функція являє собою коло з центром у точці $M(2;2)$, квадрат радіуса якого $R^2 = Z$. Це означає, що її значення буде збільшуватися (зменшуватися) зі збільшенням (зменшенням) радіуса кола. Проведемо з точки M кола різних радіусів. Функція Z має два локальних максимуми: точки $B(0;6)$ і $C(8;0)$. Обчислимо значення функціонала в цих точках:

$$Z(B) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = (0-2)^2 + (6-2)^2 = 4 + 16 = 20,$$

$$Z(C) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = (8-2)^2 + (0-2)^2 = 36 + 4 = 40.$$

Оскільки $Z(C) > Z(B)$, то точка $C(8;0)$ є точкою глобального максимуму.

Очевидно, що найменший радіус $R = 0$, тоді:

$$R^2 = 0 = Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 2.$$

Тобто точка M є точкою мінімуму, оскільки їй відповідає найменше можливе значення цільової функції.

Зазначимо, що в даному разі точка, яка відповідає оптимальному плану задачі (мінімальному значенню функціонала), знаходиться всередині багатокутника допустимих розв'язків, що в задачах лінійного програмування неможливо.

Приклад 9.2. Знайти мінімальне значення функції:

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 8; \\ x_1 + x_2 \ge 12. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язування. У даному прикладі множина допустимих розв'язків складається з двох окремих частин, необмежених зверху (рис. 9.2).

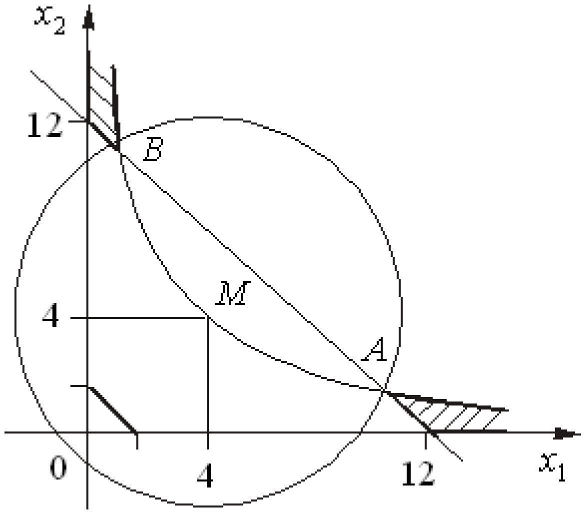

Рис. 10.2

Цільова функція аналогічно попередньому випадку є колом з центром у точці $M(4;4)$. Функція Z має два локальних мінімуми: в точці $A(x_1 \approx 11{,}29; x_2 \approx 0{,}71)$, і в точці $B(x_1 \approx 0{,}71; x_2 \approx 11{,}29)$.

Значення функціонала в цих точках однакове і дорівнює:

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 = 64.$$

Отже, маємо два альтернативні оптимальні плани.

Даний приклад ілюструє ще одну особливість задач нелінійного програмування: на відміну від задач лінійного програмування багатогранник допустимих розв'язків задачі нелінійного програмування не обов'язково буде опуклою множиною.

Наведемо основні особливості задач нелінійного програмування, що зумовлюють необхідність застосування відповідних методів їх розв'язання.

9.3. Основні труднощі розв'язування задач нелінійного програмування

Часто задачу нелінійного програмування намагаються звести до лінійного вигляду, що призводить до значних похибок. Наприклад, як правило, собівартість продукції y визначають за формулою: $y = a + \frac{b}{x}$, де x – обсяг виробництва. Ввівши заміну: $z = \frac{1}{x}$, маємо: $y = a + bz$, тобто приходимо до лінійної функції. За такої заміни похибок не допускають. Однак, якщо функцією собівартості буде $y = -ax^2 + bx + c$, то використання замість неї деякої лінійної функції $y = d + kx$ невиправдане, що видно з рис. 10.3.

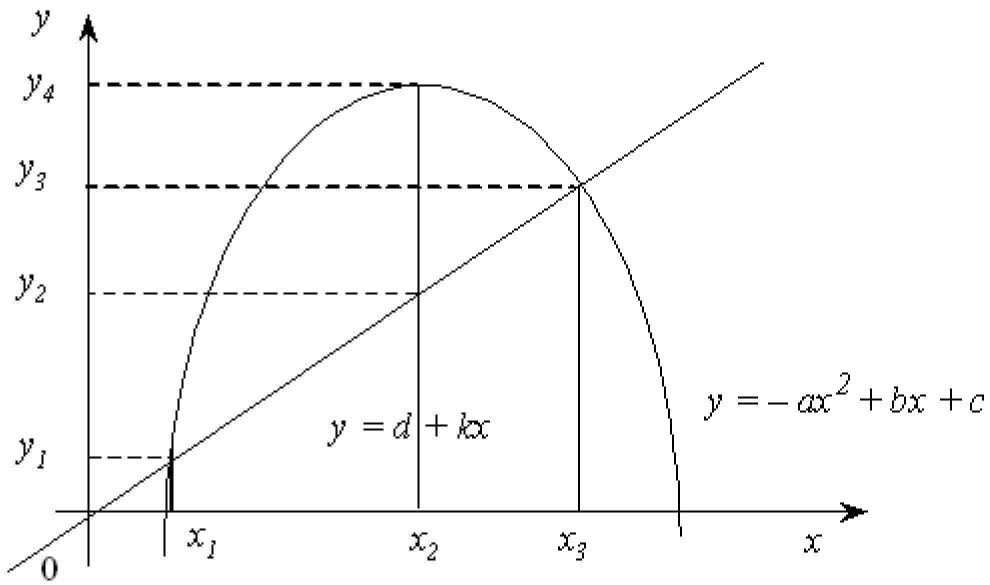

Рис. 9.3

У точках x_1 і x_3 величина собівартості для двох цих функцій однакова. Однак у всіх інших точках ці значення відрізняються, причому у точці x_2 у значній мірі, тобто на величину:

$$y_4 - y_2 = -ax_2^2 + bx_2 + c - d - kx_2 = -ax_2^2 + (b - k)x_2 + (c - d).$$

Отже, лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею. Зведення нелінійної задачі до лінійної дає змогу отримати симплексним методом розв'язок, близький до розв'язку початкової нелінійної задачі. Однак з вище розглянутого прикладу бачимо, що при побудові наближених лінійних задач можна отримати надто неточний розв'язок, який непридатний для використання.

Навіть питання щодо існування розв'язку задачі нелінійного програмування потребує окремого дослідження.

Розглянемо основні труднощі розв'язування нелінійних задач.

1. Для лінійних задач можна завжди знайти оптимальний розв'язок універсальним методом – симплексним. При цьому не існує проблеми стосовно доведення існування такого розв'язку, тобто в результаті застосування

алгоритму симплексного методу завжди отримують один з таких варіантів відповіді:

а) отримали оптимальний розв'язок;

б) умови задачі суперечливі, тобто розв'язку не існує;

в) цільова функція необмежена, тобто розв'язку також не існує.

Для задач нелінійного програмування ***не існує універсального методу*** розв'язання, що зумовило розроблення значної кількості різних методів розв'язування окремих типів задач нелінійного програмування. Для кожного специфічного методу необхідно доводити існування розв'язку задачі та його єдиність, що також є досить складною математичною задачею.

Відомі точні методи розв'язування нелінійних задач, але в такому разі існують труднощі обчислювального характеру, тобто навіть для сучасних ЕОМ такі алгоритми є досить трудомісткими, тому здебільшого для розв'язування нелінійних задач виправданим є застосування наближених методів.

2. Для задач лінійного програмування доведено наявність єдиного екстремуму, що досягається в одній (або кількох одночасно) з вершин багатогранника допустимих розв'язків задачі. Однак у задачах нелінійного програмування існують ***кілька локальних оптимумів***, що потребує пошуку серед них глобального.

На рис.9.4 маємо на відрізку, що зображений, локальні оптимуми у точках $x_0, x_1, x_2,\ x_3, x_4, x_5,\ x_6, x_7, x_8, x_9$, глобальний – у точках x_3 та x_6.

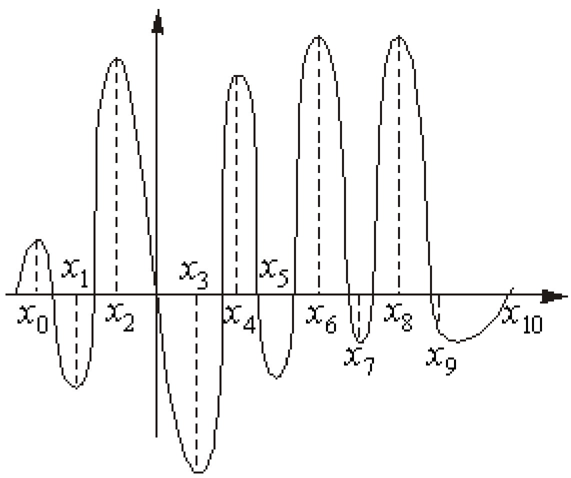

Рис. 9.4

Більшість наближених методів уможливлюють, як правило, знаходження локального оптимуму. Можна, звичайно, користуючись простим способом, визначити всі локальні оптимуми, а потім їх зіставленням знайти глобальний. Однак для практичних розрахунків такий метод є неефективним. Часто глобальний оптимум наближені методи «не уловлюють». Наприклад, у разі, коли глобальний оптимум знаходиться досить близько біля локального. Якщо відрізок $[x_0, x_{10}]$ поділити на десять підвідрізків і глобальний оптимум попаде у відрізок $[x_i, x_{i+1}]$ (рис. 9.4), а зліва від x_i та справа від x_{i+1} крива $y = f(x)$ буде зростати, то глобальний оптимум буде пропущеним.

3. У задачах лінійного програмування точка оптимуму завжди була граничною точкою багатогранника допустимих планів. Для нелінійних задач точка, яка визначає ***оптимальний план***, може бути як граничною, так і знаходитися ***всередині допустимої області розв'язків*** (планів), що було проілюстровано в прикладі 10.1.

4. Доведено, що множина допустимих планів задачі лінійного програмування завжди є опуклою. У разі, коли система обмежень задачі є нелінійною, вона може визначати ***множину допустимих розв'язків як неопуклу***, або навіть складатися з довільних, не зв'язаних між собою частин (приклад 9.2).

Одним з найпоширеніших прикладів зазначеної особливості є задачі цілочислового програмування. Нагадаємо, що вимога цілочисловості змінних задачі приводить до множини допустимих розв'язків, утвореної окремими точками, що зумовлює розглянуті вище ускладнення відшукання розв'язків такого типу задач.

Кожна із зазначених особливостей задач вимагає застосування специфічних методів пошуку розв'язку, тому безперечно найскладнішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, в яких поєднується кілька або всі згадані особливості.

9.4. Класичний метод оптимізації. Метод множників Лагранжа

Як уже згадувалось, для розв'язування задач нелінійного програмування не існує універсального методу, тобто до них необхідно застосовувати широке коло різних методів і обчислювальних алгоритмів. Вони в основному базуються на застосуванні диференційного числення і залежать від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Методи розв'язування задач нелінійного програмування бувають прямі та непрямі. За допомогою прямих методів знаходження оптимальних планів здійснюють у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) значення цільової функції. Типовим представником цієї групи методів є градієнтні. Методика застосування непрямих методів передбачає зведення задачі до такої, оптимум якої слід знаходити простішими методами. Серед непрямих найкраще розробленими є методи розв'язування задач квадратичного та сепарабельного програмування.

Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, в яких система обмежень складається лише з рівнянь.

9.4.1. Умовний та безумовний екстремуми функції

У теорії дослідження функцій задача на відшукання екстремальних значень не містить ніяких додаткових умов щодо змінних і такі задачі належать до задач відшукання ***безумовного екстремуму*** функції. Локальний та глобальний екстремуми тоді визначаються з необхідних та достатніх умов існування екстремуму функції.

Нагадаємо, що необхідна умова існування локального екстремуму функції двох змінних формулюється так: для того, щоб точка (x_1^0, x_2^0) була точкою локального екстремуму, необхідно, щоб функція $f(x_1, x_2)$ була неперервною і диференційовною в околі цієї точки і перші частинні похідні за змінними x_1 та x_2 у цій точці дорівнювали нулю:

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = 0.$$

Точка (x_1^0, x_2^0) називається критичною.

Достатня умова існування локального екстремуму функції двох змінних формулюється так: для того, щоб критична точка (x_1^0, x_2^0) була точкою локального екстремуму, достатньо, щоб функція $f(x_1, x_2)$ була визначена в околі критичної точки (x_1^0, x_2^0) та мала в цій точці неперервні частинні похідні другого порядку.

Тоді, якщо

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 > 0,$$

то в точці (x_1^0, x_2^0) функція $f(x_1, x_2)$ має екстремум, причому, якщо

$$\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2} < 0,$$

тоді (x_1^0, x_2^0) – точка локального максимуму функції $f(x_1, x_2)$, а якщо

$$\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2} > 0,$$

тоді (x_1^0, x_2^0) – точка локального мінімуму функції $f(x_1, x_2)$.

У разі, якщо

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 < 0,$$

то в точці (x_1^0, x_2^0) функція $f(x_1, x_2)$ екстремуму не має.

Якщо

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 = 0,$$

то питання про існування екстремуму залишається відкритим.

Якщо задача полягає у відшуканні локального чи глобального екстремуму деякої функції за умови, що на змінні такої функції накладаються додаткові обмеження, то маємо задачу пошуку ***умовного екстремуму*** функції. Термін «умовний» означає, що змінні задачі мають задовольняти деякі умови.

Розглянемо таку задачу для випадку двох змінних:

знайти

$$\max(\min)\, f(x_1, x_2) \tag{9.4}$$

за умови, що

$$q(x_1, x_2) = b\,. \tag{9.5}$$

Найпростіший спосіб розв'язання задачі такого виду полягає в тому, що спочатку з обмеження (9.5) знаходять вираз однієї змінної через іншу. Приміром, визначають x_2 через x_1. Отриманий вираз виду $x_2 = g(x_1)$ підставляють у функцію (10.4), що після цього стає функцією однієї змінної $f(x_1, g(x_1))$, і далі знаходять її безумовний екстремум.

Якщо деяка точка x_1^* є точкою екстремуму функції $f(x_1, g(x_1))$, то точка $X^*(x_1^*, x_2^* = g(x_1^*))$ є точкою умовного екстремуму функції (9.4) за умови (9.5).

Однак не завжди вдається відшукати аналітичний вираз однієї змінної через іншу в умові (9.5). Часто це досить важко здійснити або неможливо. Також іноді складно узагальнити даний спосіб для функції n змінних, на які накладено m обмежень. Тому описана досить проста ідея зведення задачі відшукання умовного екстремуму функції кількох змінних до задачі на безумовний екстремум функції однієї змінної не може бути використана як основа універсального методу розв'язування задач на умовний екстремум. Цікавий метод розв'язування задач типу (9.4) – (9.5) запропонував Лагранж.

9.4.2. Метод множників Лагранжа

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні початкової задачі простішою. Для цього цільову функцію замінюють іншою, з більшою кількістю змінних, тобто такою, яка включає в себе умови, що подані як обмеження. Після такого перетворення подальше розв'язування задачі полягає в знаходженні екстремуму нової функції, на змінні якої не накладено ніяких обмежень. Тобто від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі відшукання безумовного екстремального значення іншої функції. Отже, завдяки такому перетворенню можливе застосування методів класичного знаходження екстремуму функції кількох змінних.

У попередньому пункті наведена необхідна умова існування локального екстремуму неперервної та диференційовної функції двох змінних.

Узагальнення необхідної умови існування локального екстремуму функції n змінних має аналогічний вигляд. Отже, для розв'язування задачі необхідно знайти вирази частинних похідних нової цільової функції за кожною змінною і прирівняти їх до нуля. В результаті отримаємо систему рівнянь. Її розв'язок визначає так звані стаціонарні точки, серед яких є і шукані екстремальні значення функції.

Розглянемо метод множників Лагранжа для розв'язування задачі нелінійного програмування, що має вигляд:

$$\max(\min)Z = f(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n) \tag{9.6}$$

за умов:

$$q_i(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n) = b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{9.7}$$

де функції $f(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n)$ і $q_i(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n)$ мають бути диференційовними.

Задача (9.6) – (9.7) полягає в знаходженні екстремуму функції $f(x)$ за умов виконання обмежень q_i, $(i = \overline{1,m})$.

Переходимо до задачі пошуку безумовного екстремуму. Теоретично доведено, що постановки та розв'язання таких задач еквівалентні.

Замінюємо цільову функцію (9.6) на складнішу. Ця функція називається ***функцією Лагранжа*** і має такий вигляд:

$$L(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n; \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad ..., \quad \lambda_m) =$$
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \tag{9.8}$$

де λ_i – деякі невідомі величини, що називаються ***множниками Лагранжа.***

Знайдемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, & \left(j = \overline{1,n}\right); \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, & \left(i = \overline{1,m}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial q_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} = 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \\ b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \qquad \left(i = \overline{1,m}\right). \end{cases} \tag{9.9}$$

Друга група рівнянь системи (9.9) забезпечує виконання умов (9.7) початкової задачі нелінійного програмування.

Система (9.9), як правило, нелінійна.

Розв'язками її є $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ – стаціонарні точки. Оскільки, ці розв'язки отримані з необхідної умови екстремуму, то вони визначають максимум, мінімум задачі (9.6) – (9.7) або можуть бути точками перегину (сідловими точками).

Для діагностування стаціонарних точок і визначення типу екстремуму необхідно перевірити виконання достатніх умов екстремуму, тобто дослідити в околі стаціонарних точок диференціали другого порядку (якщо для функцій $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n), q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ існують другі частинні похідні і вони неперервні).

Узагальнення достатньої умови існування локального екстремуму для функції n змінних приводить до такого правила: за функцією Лагранжа виду (9.8) будується матриця Гессе, що має блочну структуру розмірністю $(m+n)\times(m+n)$:

$$H=\begin{pmatrix} O & \vdots & P \\ \cdots & & \cdots \\ P' & \vdots & Q \end{pmatrix},$$

де O – матриця розмірністю $(m \times m)$, що складається з нульових елементів,

P – матриця розмірністю $(m \times n)$, елементи якої визначаються так:

$$P=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

P' – транспонована матриця до P розмірністю $(n \times m)$,

Q – матриця розмірністю $(n \times n)$ виду:

$$Q=\left\| \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, \text{ де } i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}.$$

Розглянемо ознаки виду екстремуму розв'язку системи (9.9). Нехай стаціонарна точка має координати $X^*=(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і $\lambda^*=(\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$.

1. Точка X^* є точкою максимуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку (m+1), наступні (n–m) головних мінорів матриці H утворюють знакозмінний числовий ряд, знак першого члена якого визначається множником $(-1)^{m+1}$.

2. Точка X^* є точкою мінімуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку (m+1), знак наступних (n–m) головних мінорів матриці H визначається множником $(-1)^m$.

Розглянемо задачу, розв'язок якої знайдемо методом множників Лагранжа.

Приклад 9.3. Акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю виділило 1200 га ріллі під основні сільськогосподарські культури – озиму пшеницю і цукрові буряки. У табл.8.1 маємо техніко-економічні показники вирощування цих культур:

Таблиця 9.1

Показник	Озима пшениця x_1, сотні га	Цукрові буряки x_2, сотні га
Урожайність, т/га	4	35
Ціна, грн/т	800	300
Собівартість, грн/т	$y_1 = 12{,}5x_1^2 - 200x_1 + 1200$	$y_2 = 12{,}5x_2^2 - 150x_2 + 650$

Необхідно знайти оптимальні площі посіву озимої пшениці та цукрових буряків.

Нехай: x_1 – площа ріллі під озимою пшеницею, сотні га;

x_2 – площа ріллі під цукровими буряками, сотні га.

Звернемо увагу на те, що собівартість тонни пшениці та цукрових буряків залежить від відповідної площі посіву.

Запишемо економіко-математичну модель цієї задачі. Критерієм оптимальності візьмемо максимізацію чистого доходу:

$$\max f = 4(800 - 12{,}5x_1^2 + 200x_1 - 1200)x_1 100 +$$
$$+ 35(300 - 12{,}5x_2^2 + 150x_2 - 650)x_2 100 =$$
$$= 400(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1) + 3500(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2)$$

за умов:

$x_1 + x_2 = 12.$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1) =$$
$$= 400(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1) + 3500(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2) +$$
$$+ \lambda_1(12 - x_1 - x_2).$$

Візьмемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 400\left(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) - \lambda_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 3500\left(-37{,}5x_2^2 + 300x_1 - 350\right) - \lambda_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 12 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь визначаємо координати сідлових точок. З першого та другого рівняння знаходимо λ_1 і, прирівнюючи вирази, маємо:

$$400(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400) = 3500(-37{,}5x_2^2 + 300x_2 - 350) \qquad (9.10)$$

або, скоротивши на 100 обидві частини і розкривши дужки, отримаємо:

$$150x_1^2 + 1600x_1 - 1600 = 1312{,}5x_2^2 + 10\,500x_2 - 12\,250. \qquad (9.11)$$

Із останнього рівняння системи маємо: $x_1 = 12 - x_2$.

Підставимо вираз для x_1 у рівність (9.11). Отримаємо:

$$-150(12 - x_2)^2 + 1600(12 - x_2) - 1600 = -1312{,}5x_2^2 + 10\,500x_2 - 12\,250$$

або

$$-150\left(144 - 24x_2 + x_2^2\right) + 19\,200 - 1600x_2 - 1600 =$$
$$= -1312{,}5x_2^2 + 10\,500x_2 - 12\,250\ ;$$

$$21\,600 + 3600x_2 - 150x_2^2 + 19\,200 - 1600x_2 - 1600 +$$
$$+ 1312{,}5x_2^2 - 10\,500x_2 + 12\,250 = 0.$$

Отже, $1162x_2^2 - 8500x_2 + 11\,450 = 0$;

$D = 72\,250\,000 - 53\,219\,600 = 19\,030\,400$

$\sqrt{D} \approx 4362$.

$$x_2^{(1)} = \frac{8500 + 4362}{2324} \approx 5{,}53 \text{ (553 га)};$$

$$x_2^{(2)} = \frac{8500 - 4362}{2324} \approx 1{,}78 \text{ (178 га)}.$$

Відповідно дістаємо:

$x_1^{(1)} \approx 6{,}47$ (647 га);

$x_1^{(2)} \approx 10{,}22$ (1022 га).

Тобто отримали дві сідлові точки:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 6{,}47; \\ x_2^{(1)} = 5{,}53. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = 10{,}22; \\ x_2^{(2)} = 1{,}78. \end{cases}$$

Перевіримо за допомогою достатньої умови існування екстремуму спочатку сідлову точку $X_1^*(x_1^{(1)}; x_2^{(1)})$.

Матриця Гессе має такий вигляд:

$$H = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -34100 & 0 \\ 1 & 0 & -401\,625 \end{array}\right).$$

За вищезазначеним правилом визначаємо головні мінори, починаючи з 2-го порядку ($m + 1 = 1 + 1 = 2$):

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -34100 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -34100 & 0 \\ 1 & 0 & -401625 \end{vmatrix} = 435725.$$

Отже, головні мінори утворюють знакозмінний ряд та, починаючи з головного мінору 2-го порядку, наступний мінор визначається знаком $(-1)^{m+1} = (-1)^2$, тобто $X_1^*(x_1^{(1)}; x_2^{(1)})$ є точкою максимуму.

Обчислимо значення цільової функції в цій точці:

$$f(x_1 = 6{,}47;\ x_2 = 5{,}53) = 4(800 - 532{,}26 + 1294 - 1200)647 +$$
$$+ 35(300 - 382{,}26 + 829{,}5 - 650)553 = 4625863.$$

Аналогічні обчислення для точки $X_1^*(x_1^{(2)} = 10{,}22;\ x_2^{(2)} = 1{,}78)$ показують, що вона не є екстремальною.

Отже, цільова функція набуде максимального значення, якщо озима пшениця вирощуватиметься на площі 647 га, а цукрові буряки – на площі 553 га.

Метод множників Лагранжа може застосовуватися також у разі наявності обмежень на знаки змінних і обмежень-нерівностей.

Розглянемо таку задачу в загальному вигляді:

$$\max(\min)\ F = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\begin{cases} q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \ \ (i = 1,2,...,k); \\ q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \ \ (i = k+1,...,l); \\ q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge b_i \ \ (i = l+1,2,...,m), \end{cases}$$

причому всі функції, що входять у задачу, мають бути диференційовними хоча б один раз.

Очевидно, що введення в ліві частини нерівностей системи обмежень задачі додаткових невід'ємних змінних $x_{n+i} \ge 0 \ (i = k+1,...,m)$ перетворює початкову задачу в таку, що містить лише обмеження-рівності, тобто яка за формою та методом розв'язування збігатиметься з задачею (9.6) – (9.7).

9.5. Необхідні умови існування сідлової точки

Для розроблення методів розв'язування окремих типів задач нелінійного програмування важливе значення має поняття сідлової точки, а також визначення необхідних і достатніх умов існування сідлових точок функції Лагранжа $L(X, \Lambda)$ у (n+m)-вимірному просторі змінних $(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ за довільних умов, які можуть накладатися на їх знаки (необхідні і достатні умови існування сідлової точки функції Лагранжа за відсутності обмежень на знаки змінних розглянуто в п. 9.4).

Розглянемо нелінійну задачу:

$$\max F = f(x_1, x_1, ..., x_n),$$

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \ \ (i = \overline{1, m}).$$

Причому на компоненти векторів X, Λ накладено обмеження на знаки. Позначимо множину точок, що задовольняють такі обмеження, через Ω.

Функція Лагранжа для цієї задачі має вигляд:

$$L(X, \Lambda) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)). \qquad (9.12)$$

Точка $(X^*, \Lambda^*) = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ називається ***сідловою точкою*** функції Лагранжа (9.12), якщо для всіх $X \in \Omega, \Lambda \in \Omega$ виконується співвідношення:

$$L(X, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda). \qquad (9.13)$$

Для диференційовних функцій $f(X)$ та $q_i(X)$ знайдемо необхідні умови існування сідлової точки.

Сідлова точка $(X^*, \Lambda^*) = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ функції $L(X, \Lambda)$ виду (9.12) за означенням задовольняє умову:

$L(X, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda^*)$.

Нерівність виконується для всіх точок *X*, тобто також і для тих, у яких лише одна координата відрізняється від X^*. Допустимо, що це x_k, а всі інші збігаються з координатами сідлової точки $x_j = x_j^*$ $(j = 1, 2, ..., k-1, k+1, ..., n)$.

Оскільки права частина нерівності є фіксованою, а в лівій частині змінюється лише одна координата x_k, то приходимо до функції однієї змінної $L(X, \Lambda^*) = L(x_k)$, яку можна зобразити графічно на координатній площині.

Розглянемо спочатку випадок, коли $x_k \ge 0$, тобто лише частину координатної площини, для якої $x_k \ge 0$.

Можливі такі випадки:

1) коли всі $x_j^* > 0$, то максимальне значення функції $L(x_k)$ досягатиметься в точці, для якої $\dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} = 0$ (рис. 9.5).

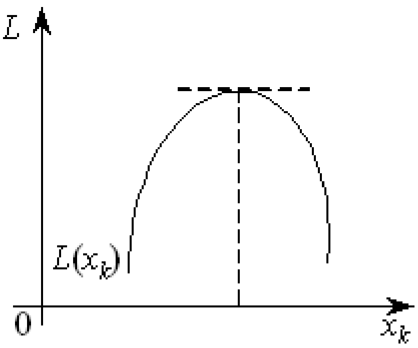

Рис. 9.5

2) коли максимум функції $L(x_k)$ досягатиметься в точці $x_k = 0$ і розглядувана частинна похідна також дорівнюватиме нулю: $\dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} = 0$ (рис. 9.6).

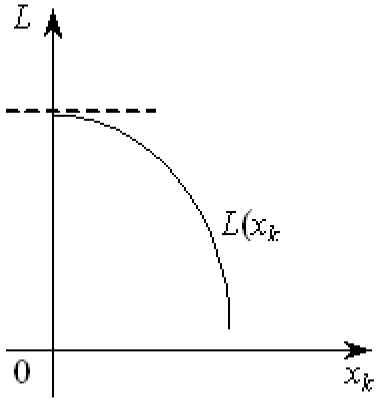

Рис. 9.6

3) коли точка максимуму функції $L(x_k)$ досягатиметься також у точці $x_k = 0$, а частинна похідна $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} \le 0$ (рис. 9.7).

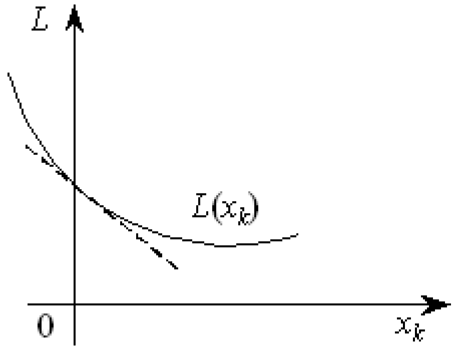

Рис. 9.7

Узагальнюючи всі три ситуації, маємо:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \le 0 \text{ для } x_j \ge 0$$

та

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j}(x_j^*) = 0.$$

Розглядаючи другу частину нерівності (9.13):

$$L(X^*, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda)$$

аналогічними міркуваннями, що проілюстровані рис. 9.8 – 9.9, встановлюються необхідні умови для похідних по λ_l функції Лагранжа в сідловій точці.

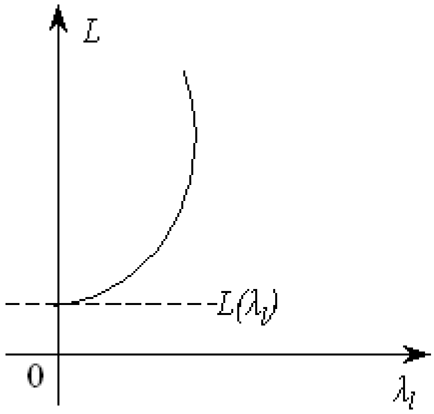

Рис. 9.8

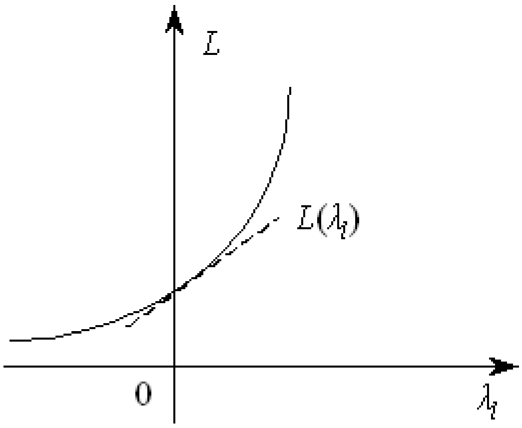

Рис. 9.9

Об'єднуючи всі три випадки для невід'ємних координат, маємо необхідні умови сідлової точки:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \le 0 \text{ для тих індексів } j \text{, де } x_j \ge 0. \qquad (9.14)$$

Зауважимо, що для $x_k \le 0$ маємо ті самі випадки, які зображено на рис. 9.5 – 9.9, причому графіки будуть симетрично відображені відносно осі *Oy*, тобто для недодатних координат необхідна умова має вигляд:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \ge 0 \text{ для тих індексів } j\text{, де } x_j \le 0. \tag{9.15}$$

І нарешті, як відомо з попереднього параграфа, якщо на знак x_j умови не накладаються, то необхідною умовою є:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = 0,\ x_j \text{ – довільного знака.} \tag{9.16}$$

Узагальнення всіх випадків приводить до рівняння:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = 0. \tag{9.17}$$

Розглядаючи другу частину нерівності (9.13), за допомогою аналогічних міркувань встановлюємо необхідні умови для похідних по λ_i функції Лагранжа в сідловій точці:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \ge 0 \text{ для тих індексів } i\text{, де } \lambda_i \ge 0, \tag{9.18}$$

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \le 0 \text{ для тих індексів } i\text{, де } \lambda_i \le 0, \tag{9.19}$$

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0 \text{ для тих індексів і, де } \lambda_i \text{ має довільний знак.} \tag{9.20}$$

Отже, справджується рівняння:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0. \tag{9.21}$$

Сукупність співвідношень (9.14)- – (9.21) становить необхідні умови, які має задовольняти сідлова точка (X^*, Λ^*) функції Лагранжа для точок, що належать множині Ω. При цьому $L(X^*, \Lambda^*)$ повинна мати частинні похідні по всіх компонентах векторів X, Λ.

9.6. Теорема Куна-Таккера

Розглянутий метод множників Лагранжа уможливлює знаходження лише локальних сідлових точок функції Лагранжа.

Теорема Куна-Таккера дає змогу встановити типи задач, для яких на множині допустимих розв'язків існує лише один глобальний екстремум зумовленого типу. Вона тісно пов'язана з необхідними та достатніми умовами існування сідлової точки.

Розглянемо задачу нелінійного програмування, яку, не зменшуючи загальності, подамо у вигляді:

$$\max F = f(X), \tag{9.22}$$

$$q_i(X) \le b_i \ (i = \overline{1, m}), \qquad (9.23)$$
$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}). \qquad (9.24)$$

(Очевидно, що знак нерівності можна змінити на протилежний множенням лівої і правої частин обмеження на (– 1)).

Теорема 9.1. (Теорема Куна-Таккера). Вектор X^* є оптимальним розв’язком задачі (9.22)-(9.24) тоді і тільки тоді, коли існує такий вектор Λ^*, що при $X^* \ge 0,\ \Lambda^* \ge 0$ для всіх $X \ge 0,\ \Lambda \ge 0$ точка (X^*, Λ^*) є сідловою точкою функції Лагранжа

$$L(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X)),$$

і функція мети $f(X)$ для всіх $X \ge 0$ угнута, а функції $q_i(X)$ $(i = \overline{1, m})$ – опуклі.

Умови теореми Куна — Таккера виконуються лише для задач, що містять опуклі функції.

9.6.1. Опуклі й угнуті функції

Наведемо основні означення та теореми. Нехай задано *n*-вимірний лінійний простір R^n. Функція $f(X)$, що задана на опуклій множині $X \subset R^n$, називається ***опуклою***, якщо для будь-яких двох точок X_1 та X_2 з множини X і будь-яких значень $0 \le \lambda \le 1$ виконується співвідношення:

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda) X_1) \le \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1). \qquad (9.25)$$

Якщо нерівність строга і виконується для $0 < \lambda < 1$, то функція $f(X)$ називається строго опуклою.

Функція $f(X)$, яка задана на опуклій множині $X \subset R^n$, називається ***угнутою***, якщо для будь-яких двох точок X_1 та X_2 з множини X і будь-якого $0 \le \lambda \le 1$ справджується співвідношення:

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda) X_1) \ge \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1). \qquad (9.26)$$

Якщо нерівність строга і виконується для $0 < \lambda < 1$, то функція $f(X)$ називається строго угнутою.

Слід зазначити, що опуклість та угнутість функції визначаються лише відносно опуклих множин у R^n, оскільки за наведеними означеннями разом з двома будь-якими точками X_1 та X_2 множині X належать також точки їх лінійної комбінації: $\lambda X_2 + (1-\lambda) X_1$ для всіх значень $0 \le \lambda \le 1$, що можливо лише у разі, коли множина X є опуклою.

Теорема 9.2. Нехай $f(X)$ – опукла функція, що задана на замкненій опуклій множині *X*, тоді будь-який локальний мінімум $f(X)$ на цій множині є і глобальним.

Теорема 9.3. Нехай $f(X)$ – опукла функція, що визначена на опуклій множині *X*, і крім того, вона неперервна разом з частинними похідними першого порядку в усіх внутрішніх точках *X*. Нехай X^* – точка, в якій $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^*) = 0, (i = \overline{1,n})$. Тоді в точці X^* досягається локальний мінімум, що збігається з глобальним.

Як наслідок теореми можна показати, що коли *X* замкнена, обмежена знизу, опукла множина, то глобального максимуму опукла функція *f*(*X*) досягає на ній у одній чи кількох точках (при цьому допускається, що в точці *X* значення функції скінченне). Застосовуючи за розв'язування таких задач процедуру перебору крайніх точок, можна отримати точку локального максимуму, однак не можна встановити, чи є вона точкою глобального максимуму.

Для угнутих функцій отримані результати формулюють так. Нехай *f*(*X*) – угнута функція, що задана на замкненій опуклій множині $X \subset R^n$. Тоді будь-який локальний максимум *f*(*X*) на множині *X* є глобальним. Якщо глобальний максимум досягається в двох різних точках множини, то він досягається і на нескінченній множині точок, що лежать на відрізку, який сполучає ці точки. Для строго угнутої функції існує єдина точка, в якій вона досягає глобального максимуму.

Градієнт угнутої функції *f*(*X*) у точках максимуму дорівнює нулю, якщо *f*(*X*) – диференційовна функція. Глобальний мінімум угнутої функції, якщо він скінченний на замкненій обмеженій зверху множині, має досягатися в одній чи кількох її крайніх точках за умови скінченності функції *f*(*X*) у кожній точці цієї множини.

9.7. Опукле програмування

Опукле програмування розглядає методи розв'язування задач нелінійного програмування, математичні моделі яких містять опуклі або угнуті функції.

Загальний вигляд задачі опуклого програмування такий:

$$\max F = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{9.27}$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \tag{9.28}$$

$$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,n}), \tag{9.29}$$

де $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ – угнуті функції.

Аналогічний вигляд має задача для опуклих функцій.

Позначимо: $F'(X) = -F(X)$; $g_i'(X) = -g_i(X)$, тоді $\max F(X) \approx \min F'(X)$, і маємо:

$$\min F' = f'(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{9.30}$$

$$g_i'(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0 \ \ (i = \overline{1, m}); \tag{9.31}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}), \tag{9.32}$$

де $F' = f'(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_i'(x_1, x_2, ..., x_n)$ – опуклі функції.

Оскільки ці задачі еквівалентні, то нижче розглянемо задачу (9.27) – (9.29).

Множина допустимих планів задачі, що визначається системою (9.28), є опуклою.

Як наслідок теорем 9.2 та 9.3 справджується таке твердження: точка локального максимуму (мінімуму) задачі опуклого програмування (9.27) – (9.29) є одночасно її глобальним максимумом (мінімумом).

Отже, якщо визначено точку локального екстремуму задачі опуклого програмування, то це означає, що знайдено точку глобального максимуму (мінімуму).

У разі обмежень-нерівностей задачу опуклого програмування розв’язують, застосовуючи метод множників Лагранжа.

Функція Лагранжа для задачі (9.27) – (9.29) має вид:

$$\begin{aligned} L(X, \Lambda) = L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \end{aligned} \tag{9.33}$$

де $\lambda_i \, (i = \overline{1, m})$ – множники Лагранжа.

Використовуючи теорему Куна-Таккера, маємо необхідні та достатні умови існування оптимального плану задачі опуклого програмування.

Теорема 9.4. Якщо задано задачу нелінійного програмування виду (10.27) – (10.29), де функції $f(X)$, $g_i(X)$ $(i = \overline{1, m})$ диференційовні і вгнуті по X, то для того, щоб вектор $X^* \ge 0$ був розв’язком цієї задачі, необхідно і достатньо, щоб існував такий вектор $\Lambda^* \ge 0$, що пара (X^*, Λ^*) була б сідловою точкою функції Лагранжа, тобто щоб виконувалися умови:

(I) $$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \le 0, \left(j = \overline{1, n}\right); \tag{9.34}$$

(II) $$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = 0, \ \left(j = \overline{1, n}\right); \tag{9.35}$$

(III) $$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \ge 0, \ \left(i = \overline{1, m}\right); \tag{9.36}$$

(IV) $$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0, \ \left(i = \overline{1,m}\right). \qquad (9.37)$$

Для задачі мінімізації (9.30) – (9.32), де всі функції $f(X)$, $g_i(X)$ $(i = \overline{1,m})$ диференційовні і опуклі по *X,* маємо умови, аналогічні вищенаведеним, але зі знаком «≥» в нерівностях (9.35) та (9.37).

ТЕМА 10
КВАДРАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

10.1. Квадратичне програмування
10.2. Квадратична форма та її властивості
10.3. Метод розв'язування задач квадратичного програмування
10.4. Градієнтний метод

10.1. Квадратичне програмування

Окремою частиною задач опуклого програмування є задачі квадратичного програмування. До них належать задачі, які мають лінійні обмеження, а функціонал являє собою суму лінійної і квадратичної функцій:

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + c_{11} x_1^2 + c_{22} x_2^2 + \ldots + c_{nn} x_n^2 + \\ + 2c_{12} x_1 x_2 + 2c_{13} x_1 x_3 + \ldots + 2c_{n-1,n} x_{n-1} x_n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \; (i = \overline{1,m});$$

$$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,n}).$$

10.2. Квадратична форма та її властивості

Квадратична функція n змінних називається ***квадратичною формою*** і може бути подана у вигляді:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = X^T C X,$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$,

причому матриця C завжди симетрична, тобто $c_{ij} = c_{ji}$ для всіх $i, j = \overline{1,n}$.

Квадратична форма $Z(X)$ називається ***від'ємно означеною***, якщо для всіх X, крім X=0, значення $Z(X)<0$ (якщо $Z(X) \leq 0$, то маємо від'ємно напівозначену квадратичну форму), у протилежному разі $Z(X)$ є ***додатно означеною*** (якщо $Z(X) \geq 0$, то маємо додатно напівозначену квадратичну форму).

Квадратична форма $Z(X)$ називається ***неозначеною***, якщо вона додатна для одних значень X і від'ємна для інших.

Вид квадратичної форми можна визначити, використовуючи

$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ – вектор характеристичних коренів (власних значень) матриці C.

Вектор характеристичних коренів матриці C є вектором, кожна компонента якого задовольняє систему рівнянь виду $\left(C - E\lambda_i\right) X = 0 \ (i = \overline{1, n})$. Система має ненульовий розв'язок, якщо $|C - E\lambda| = 0$. Таке рівняння називається характеристичним рівнянням матриці C і має $\lambda_i \ (i = \overline{1, n})$ коренів, які утворюють вектор Λ:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \cdots & c_{2n} \\ . \ . & . \ . & . & . \ . \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 10.1. Для того, щоб довільна квадратична форма була додатно (від'ємно) означеною, необхідно і достатньо, щоб усі компоненти вектора характеристичних коренів $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ були додатними (від'ємними) значеннями.

Якщо хоча б один із характеристичних коренів дорівнює нулю, то квадратична форма є напівдодатною (напіввід'ємною). Якщо корені мають різні знаки, то квадратична форма є неозначеною.

10.3. Метод розв'язування задач квадратичного програмування

Зазначимо, що відомим з теорії аналізу функцій є таке твердження: від'ємно означена квадратична форма є угнутою, а додатно означена – опуклою.

Розглянемо випадок від'ємно означеної квадратичної форми, що входить у цільову функцію задачі квадратичного програмування.

$$\max \ F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \ , \tag{10.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ (i = \overline{1, m}); \tag{10.2}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1, n}). \tag{10.3}$$

Оскільки цільова функція задачі є опуклою, а обмеження — лінійні, тобто визначають опуклу множину допустимих розв'язків, то ця задача належить до задач опуклого програмування, для яких справджується твердження, що будь-який локальний максимум є і глобальним. Отже, використовуючи умови теореми Куна-Таккера для задачі (10.1)-(10.3), отримаємо необхідні та достатні умови оптимальності плану у вигляді такої теореми.

Теорема 10.1. Вектор X^* є оптимальним розв'язком задачі квадратичного програмування тоді, і тільки тоді, коли існують такі *m*-вимірні вектори $\Lambda^* \geq 0, W \geq 0$ і *n*-вимірний вектор $V \geq 0$, що виконуються умови:

(I) $$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j = 0, \ \left(j = \overline{1, n}\right); \quad (10.4)$$

(II) $$v_j \cdot x_j^* = 0, \ \left(j = \overline{1, n}\right); \quad (10.5)$$

(III) $$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - w_i = 0, \ \left(i = \overline{1, m}\right); \quad (10.6)$$

(IV) $$w_i \lambda_i^* = 0, \ \left(i = \overline{1, m}\right). \quad (10.7)$$

Наведену теорему можна використати для побудови ефективного методу розв'язування задач квадратичного програмування на основі алгоритму симплексного методу.

Умови (10.4)- – (10.7) утворюють стосовно змінних X^*, Λ^*, V, W систему (*n*+*m*) рівнянь з 2·(*n*+*m*) невідомими.

Умови (10.4) та (10.5) означають, що змінні x_j^*, v_j не можуть одночасно мати додатні значення, тобто входити в базис разом. Якщо деякі *k* компонент вектора X^* додатні, то відповідні їм компоненти вектора *V* дорівнюють нулю і лише (*n*–*k*) компонент відмінні від нуля (додатні). Отже, разом x_j^*, v_j будуть мати не більш ніж *n* додатних компонент. З аналогічних міркувань щодо рівності (10.7) випливає, що разом з λ_i^*, w_i буде *n*+*m* відмінних від нуля компонент, тобто це може бути базисний розв'язок системи, що утворена умовами (10.4) та (10.6). Для знаходження такого розв'язку можна застосувати симплексний метод.

Якщо зазначена система рівнянь має допустимий план (він буде єдиним), то оптимальний план відповідної задачі квадратичного програмування також існує.

Розв'язуємо систему рівнянь (10.4) і (10.6) симплексним методом. Як відомо, спочатку необхідно привести систему обмежень до канонічного виду введенням потрібної кількості додаткових та штучних змінних. Для зведення системи до канонічної форми та визначення початкового опорного плану вводимо штучні змінні $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ у рівняння виду (10.4), які будуть базисними для першого опорного плану, а змінні $\beta(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$ – у групу рівнянь (10.6), які також дають базисні змінні для початкового плану. Потім для знаходження базисного розв'язку системи (10.4), (10.7) розв'язуємо симплексним методом таку задачу лінійного програмування:

$$\max\ F' = -M\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j + \sum_{i=1}^{m}\beta_i\right) \tag{10.8}$$

за умов:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j + \alpha_j = 0,\ \ (j=\overline{1,n}); \\ \dfrac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i^*} - w_i + \beta_i = 0\ \ (i=\overline{1,m}); \end{cases} \tag{10.9}$$

$$X^* \geq 0, \Lambda^* \geq 0, V \geq 0, W \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0. \tag{10.10}$$

Якщо в процесі розв'язування задачі (10.8)—(10.10) всі штучні змінні будуть виведені з базису $(\alpha = 0,\ \beta = 0)$ і разом з цим для знайдених значень змінних X^*, Λ^*, V, W виконуються умови (10.5), (10.7), то знайдений розв'язок є оптимальним планом задачі квадратичного програмування (10.1) – (10.3).

10.4. Градієнтний метод

Градієнтні методи належать до наближених методів розв'язування задач нелінійного програмування і дають лише певне наближення до екстремуму, причому за збільшення обсягу обчислень можна досягти результату з наперед заданою точністю, але в цьому разі є можливість знаходити лише локальні екстремуми цільової функції. Зауважимо, що такі методи можуть бути застосовані лише до тих типів задач нелінійного програмування, де цільова функція і обмеження є диференційовними хоча б один раз. Зрозуміло, що градієнтні методи дають змогу знаходити точки глобального екстремуму тільки для задач опуклого програмування, де локальний і глобальний екстремуми збігаються.

В основі градієнтних методів лежить основна властивість градієнта диференційовної функції – визначати напрям найшвидшого зростання цієї функції. Ідея методу полягає у переході від однієї точки до іншої в напрямку градієнта з деяким наперед заданим кроком.

Розглянемо метод Франка-Вульфа, процедура якого передбачає визначення оптимального плану задачі шляхом перебору розв'язків, які є допустимими планами задачі.

Нехай необхідно відшукати

$$\max F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

за лінійних обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i\ \ (i=\overline{1,m});$$

$$x_j \geq 0\ (j=\overline{1,n}).$$

Допустимо, що X_0 – початкова точка, що належить множині допустимих планів даної задачі. В деякому околі цієї точки нелінійну цільову функцію замінюють лінійною і потім розв'язують задачу лінійного програмування. Нехай розв'язок лінійної задачі дав значення цільової функції F_0, тоді з точки X_0 в напрямку F_0 необхідно рухатись доти, поки не припиниться зростання цільової функції. Тобто у зазначеному напрямку вибирають наступну точку X_1, цільова функція знову замінюється на лінійну, і знову розв'язується задача лінійного програмування.

Розглянемо детальніше перехід від k-ої ітерації методу до (k + 1)-ої ітерації.

Припустимо, що відома точка X_k, яка належить області допустимих розв'язків. У даній точці обчислюємо градієнт цільової функції:

$$\nabla f(X_k) = \left(\frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2}; \ldots, \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \right).$$

Значення градієнта функції задає в даній точці напрям найшвидшого її зростання.

Замінюємо цільову функцію задачі лінійною функцією виду:

$$F = \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2} \cdot x_2 + \ldots + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \cdot x_n .$$

Потім розв'язуємо задачу лінійного програмування з обмеженнями початкової задачі і новою цільовою функцією:

$$\max F = \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2} \cdot x_2 + \ldots + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \cdot x_n$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = \overline{1,m});$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}).$$

Нехай розв'язком такої задачі є точка $\widetilde{X}_k$.

З початкової точки X_k в напрямку $\widetilde{X}_k$ рухаємося з деяким довільним кроком $0 \le \lambda \le 1$, визначаючи координати нової точки X_{k+1} у такий спосіб:

$$X_{k+1} = X_k + \lambda(\widetilde{X}_k - X_k).$$

Зауважимо, що значення параметра $0 \le \lambda \le 1$ доцільно вибирати таким, що дає найбільше значення цільової функції початкової задачі $F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для точки X_{k+1} повторюємо розглянутий процес, для чого знову розраховуємо значення градієнта і т. д.

У такий спосіб знаходимо послідовність точок $X_0, X_1, \ldots$, які поступово наближаються до оптимального плану початкової задачі. Ітераційний процес повторюється до того моменту, поки значення градієнта цільової функції не стане рівним нулю або виконуватиметься умова $\left| f(X_{k+1}) - f(X_k) \right| < \varepsilon$, де ε – досить мале число, яке означає потрібну точність обчислень.

ТЕМА 11
ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

11.1. Економічна сутність динамічного програмування. Основні типи задач та моделі динамічного програмування

11.2. Задачі про заміну основного капіталу обладнання підприємства. Багатокроковий процес

11.3. Метод рекурентних співвідношень. Використання принципу Беллмана і алгоритму Джонсона

11.1. Економічна сутність динамічного програмування. Основні типи задач та моделі динамічного програмування

Усі економічні процеси та явища є динамічними, оскільки функціонують і розвиваються не лише у просторі, а й у часі.

Народне господарство, його галузі, регіони чи окремі підприємства мають розробляти стратегічні і тактичні плани. Перші визначаються з допомогою динамічних моделей, розв'язки яких знаходять методами динамічного програмування. Зауважимо, що сума оптимальних планів на окремих відрізках планового періоду Т не завжди являє собою план, оптимальний на всьому такому періоді.

Розглянемо задачу оптимального розподілу капітальних вкладень, які можуть бути використані двома способами: з метою розвитку рослинництва або тваринництва. Відомо, що за першого способу отримаємо прибуток $g(x)$, а за другого – $h(y)$.

У такому разі однокрокову задачу можна подати у вигляді:

$$Z = g(x) + h(y) \to \max \tag{11.1}$$

за умов

$$\begin{gathered} x + y = b, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{gathered} \tag{11.2}$$

Нехай

$$Z = Z_1, b = b_1, \ x = x_1, \ y = b_1 - x_1.$$

Тоді дану задачу можна записати так:

$$Z = g(x) + h(b_1 - x_1) \to \max$$

Розглянемо її як задачу оптимального використання капітальних вкладень за окремими інтервалами планового періоду *T*, маючи на меті розподілити залишок капітальних вкладень на кінець *j*-го інтервалу $(j = 1, 2, \ldots n)$ двома зазначеними способами. При цьому критерій оптимізації не змінюється: максимізуємо обсяг прибутку за весь плановий період *T*.

Якщо на першому інтервалі використано b_1 капітальних вкладень, то на його кінець залишилося їх:

$$b_2 = cx_1 + d\left(b_1 - x_1\right),$$

де c, d – коефіцієнти пропорційності, що характеризують використання капітальних вкладень першим і другим способами:

$$\frac{x}{b_1 - x_1} = \frac{c}{d}.$$

Задачу для другого інтервалу подамо так:

$$Z_2 = \left[g\left(x_2\right) + h\left(b_2 - x_2\right)\right] \to \max$$

за умов

$$0 \le x_2 \le b_2.$$

Звідси для будь-якого j–го інтервалу маємо:

$$Z_j = \left[g\left(x_j\right) + h\left(b_j - x_j\right)\right] \to \max$$

за умов

$$0 \le x_j \le b_j.$$

Загальна задача набирає вигляду:

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum_{j=1}^{n}\left[g\left(x_j\right) + h\left(b_j - x_j\right)\right] \to \max \tag{11.3}$$

за умов

$$0 \le x_j \le b_j \qquad \left(j = \overline{1,n}\right),$$
$$b_j = cx_{j-1} + d\left(b_{j-1} - x_{j-1}\right), \qquad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

11.2. Задачі про заміну основного капіталу обладнання підприємства. Багатокроковий процес

Динамічний процес розбивається на сукупність послідовних етапів, або кроків. Кожний крок оптимізується окремо, а рішення (розв’язок), згідно з яким система переходить із поточного стану до нового, вибирається з урахуванням його майбутніх наслідків і не завжди дає найбільший ефект на даному етапі. На останньому кроці приймається рішення (відшукується розв’язок), яке забезпечує максимальний ефект. З огляду на сказане, оптимізація методом динамічного програмування починається з кінця: насамперед планується останній крок. Спираючись на відому інформацію про закінчення передостаннього кроку, на підставі різних гіпотез щодо його закінчення, вибирають управління на останньому кроці. Таке управління називають умовно оптимальним, оскільки знаходять його за припущення, що попередній крок було здійснено згідно з однією з можливих гіпотез.

Нехай аналізується деякий керований процес, перебіг якого можна розбити на послідовні етапи (кроки), що задаються. Ефективність всього процесу Z є сумою ефективностей Z_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ окремих кроків:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} Z_j \text{ (адитивний критерій)}$$

або

$$Z=\prod_{j=1}^{n} Z_j \text{ (мультиплікативний критерій).}$$

З кожним кроком задачі пов'язане прийняття певного рішення, так званого ***крокового управління*** $X_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, що визначає як ефективність даного етапу, так і всієї операції в цілому.

У задачі динамічного програмування знаходять таке управління $X=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ всією операцією, яке максимізує загальну її ефективність:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} Z_j \to \max.$$

Оптимальним розв'язком цієї задачі є управління X^*, що складається із сукупності оптимальних покрокових управлінь

$$X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$$

і забезпечує максимальну ефективність Z^*

$$Z^*=\max_{\chi\in X}\left\{Z\left(x\right)\right\}.$$

Усі класи задач динамічного програмування розв'язують, керуючись основним принципом: яким би не був стан системи *S* перед черговим кроком, управління на цьому кроці слід вибрати так, щоб ефективність розглядуваного кроку плюс оптимальна ефективність на всіх наступних кроках була максимальною.

Отже, маємо алгоритм розв'язування задач динамічного програмування.

1. Специфікуємо стан заданої керованої системи та множину параметрів, що описують цей стан. Стан системи обираємо, маючи на меті забезпечити зв'язок між послідовними етапами перебігу процесу і знайти допустимий розв'язок задачі в цілому як результат оптимізації на кожному кроці окремо. При цьому оптимальні рішення на наступних етапах приймаємо, нехтуючи впливом подальших рішень на прийняті раніше.

2. Розбиваємо динамічний процес (операцію) на кроки, що відповідають, як правило, часовим періодам планування або окремим об'єктам (підприємствам, видам продукції, устаткування і т. ін.), стосовно яких розробляються управлінські рішення.

3. Подаємо перелік управлінських рішень $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ для кожного кроку і відповідні обмеження щодо них.

4. Визначаємо ефект, що його забезпечує управлінське рішення x_j, на $j-$ му кроці, якщо перед тим система була у стані *S*, як функцію ефективності:

$$Z=\left\{g\left(x\right)+h\left(b_1-x_1\right)\right\}\to\max.$$

5. Досліджуємо, як змінюється стан *S* системи під впливом управлінського x_j на $j-$ му кроці, переходячи до нового стану:

$$S'=\varphi_j\left(s,x_j\right).$$

5. Будуємо для розглядуваної задачі рекурентну залежність, що визначає умовний оптимальний ефект $Z_j\left(s\right)$, починаючи з $j-$ го кроку і до останнього, через вже відому функцію $Z_{j+1}\left(s'\right)$:

6.

$$Z_j\left(s\right)=\max_{X_j}\left\{f_j\left(s,x_j\right)+Z_{j+1}\left(s,x_j\right)\right\}$$

Цьому ефекту відповідає умовне оптимальне управління на $j-$ му кроці $\left(x_j\left(s\right)\right)$. Зауважимо, що за аргумент функції $Z_{j+1}\left(s\right)$ беремо не s, а змінений стан системи, тобто $s'=\varphi_j\left(s,x_j\right)$.

7. Здійснюємо умовну оптимізацію останнього *n*-го кроку, розглядаючи множину станів *s*, що на один крок віддалені від кінцевого стану, і визначаємо умовний оптимальний ефект на *n*-му кроці:

$$Z_n\left(s\right)=\max_{X_n}\left\{f_n\left(s,x_n\right)\right\}$$

Далі знаходимо умовне оптимальне управлінське рішення $x_n\left(s\right)$, завдяки якому цей максимум досягається.

8. Виконуємо умовну оптимізацію $\left(n-1\right)-$ го, $\left(n-2\right)-$ го і т. д., тобто всіх попередніх кроків за рекурентними залежностями п.6, і для кожного кроку знаходимо умовне оптимальне управління:

9.

$$Z^*=Z_1\left(s_0\right)$$

9. Здійснюємо безумовну оптимізацію управління у «зворотному» напрямі – від початкового стану s_0 до кінцевого. Для цього з урахуванням визначеного оптимального управління на першому кроці $x_1^*=x_1\left(s\right)$ змінюємо стан системи згідно з п. 5. Далі для цього нового стану знаходимо оптимальне управління на

другому кроці x_2^* і діємо так до останнього кроку.

11.3. Метод рекурентних співвідношень. Використання принципу Беллмана і алгоритму Джонсона

Фірма планує нарощувати виробничі потужності на чотирьох підприємствах, маючи для цього 4 млн грн. Для кожного з підприємств розроблено інвестиційні проекти, які відбивають прогнозовані сумарні витрати ***C*** та доходи ***D***, пов’язані з реалізацією кожного проекту. Зміст цих проектів ілюструє табл. 11.1

Таблиця 11.1

Проект	Підприємство							
	1		2		3		4	
	C_1	D_1	C_2	D_2	C_3	D_3	C_4	D_4
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	3	1	4	2	4	1	2
3	2	5	2	6	3	9	2	8
4	3	7	3	8	4	12	3	5

Перший проект передбачає відмовитися від розширення підприємства, а тому має нульові витрати і доходи. Розробити план І інвестування виділених коштів у зазначені підприємства так, щоб одержати максимальний прибуток.

Розв'язування. Спрощеним і найменш ефективним способом розв’язування таких задач є перебір усіх можливих варіантів. Проте на практиці їх так багато, що проаналізувати всі і вибрати серед них найефективніший неможливо. Головними недоліками такого способу розв’язування є великий обсяг обчислень, відсутність апріорної інформації про неприпустимі розв’язки, а також немо жливість скористатися проміжними результатами аналізу для відкидання неоптимальних комбінацій проектів.

Розв’яжемо цю задачу за алгоритмом (методом) ***зворотного прогону***. Кроками задачі вважатимемо кожне з чотирьох підпри ємств, оскільки для кожного з них маємо вибрати оптимальний інвестиційний проект за обмежених грошових ресурсів.

Зауважимо, що в цьому разі нединамічний процес розглядаємо як динамічний, аби скористатися методами динамічного програмування для знаходження оптимального розв’язку. Зв’язок між зазначеними кроками забезпечується обмеженнями на загальний обсяг виділених коштів – 4 млн грн.

Змінні задачі візьмемо так, щоб послідовно керувати процесом розподілу коштів:

x_1 – обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 1–4;

x_2 – те саме на кроках 2–4;

x_3 – те саме на кроках 3 і 4;

x_4 – те саме на кроці 4.

$k_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ – обсяги інвестицій на г'-му підприємстві $\left(k_i=0,1,2,3,4\right)$.

$k_i^*\left(i=\overline{1,n}\right)$ – оптимальні обсяги інвестицій на $i-$ му підприємстві.

Рекурентне співвідношення для зворотного прогону від кроку 4-го до 1-го (від четвертого підприємства до першого) подається у вигляді:

$$f_i^*\left(x_5\right)=0,$$

$$f_i^*\left(x_j k_i\right)=\max_{k_i}\left\{D_i\left(k_i\right)+f_{i+1}^*\left(x_i-C_i\left(k_i\right)\right)\right\} \quad \left(i=\overline{1,4}\right), \qquad C_j\left(k_i\right)\le X_i,$$

де $f_i^*\left(x_j;k_i\right)$ – сумарна ефективність інвестицій з $i-$ го кроку до останнього.

Тут $f^*\left(x_5\right)=0$, оскільки п'ятого підприємства не існує. Виконаємо поетапні розрахунки за цією моделлю.

Етап 4.

$$f_4^*\left(x_j k_i\right)=\max_{k_i}\left\{D_i\left(k_i\right)+f_{i+1}^*\left(x_i-C_i\left(k_i\right)\right)\right\}$$

Результати розрахунків подамо у табл. 11.2:

Таблиця 11.2

x_4	Дохід $f_4\left(x_4;k_4\right)=D_4\left(k_4\right)+f_5^*\left(x_5\right)$					Оптимальний розв'язок	
	$k_4=0$	$k_4=1$	$k_4=2$	$k_4=3$	$k_4=4$	$f_4^*\left(x_4\right)$	k_4^*
0	0	0				0	0
1	0	2				2	1
2	0	2	8			8	2
3	0	2	8	5		8	2
4	0	2	8	5		8	2

Етап 3.

$$f_3^*\left(x_3\right)=\max_{k_3}\left\{D_3\left(k_3\right)+f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right)\right\}$$

за умов

$C_3\left(k_3\right)\le X_3, \quad k_3=0,1,2,3,4.$

Результати розрахунків відбиває табл.11.3.

Таблиця 11.3

x_3	Дохід $f_3\left(x_3;k_3\right)=D_3\left(k_3\right)+f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right)$				Оптимальний розв'язок	
	$k_3=1$	$k_3=2$	$k_3=3$	$k_3=4$	$f_3^*\left(x_3\right)$	k_3^*
0	$0+f_4^*\left(0-0\right)=$ $=0+0=0$				0	0
1	$0+f_4^*\left(1-0\right)=$ $=0+2=2$				2	0

2	$0+f_4^*\left(2-0\right)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*\left(2-2\right)=$ $=4+0=4$			8	0
3	$0+f_4^*\left(3-0\right)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*\left(3-2\right)=$ $=4+2=6$	$9+f_4^*\left(3-3\right)=$ $=9+0=9$		9	3
4	$0+f_4^*\left(4-0\right)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*\left(4-2\right)=$ $=4+8=12$	$9+f_4^*\left(4-3\right)=$ $=9+2=11$	$12+f_4^*\left(4-4\right)=$ $=12+0=12$	12	2 або 4

Розрахунки виконуються так. Нехай потрібно знайти $f_3^*\left(x_3=3\right)$.

Обчислюємо

$$f_3\left(x_3;k_3\right)=D_3\left(k_3\right)+f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right).$$

Отже,

$$f_3\left(x_3=3;k_3=1\right)=0+f_4^*\left(3-0\right)=0+f_4^*\left(3\right)=0+8=0,$$

$$f_3\left(x_3=3;k_3=2\right)=4+f_4^*\left(3-2\right)=4+2=6,$$

$$f_3\left(x_3=3;k_3=3\right)=9+f_4^*\left(3-3\right)=9+0=9.$$

Запишемо, що $C_3\left(k_3=1\right)=0$, оскільки для третього підприємства не існує проекту з інвестиціями в 1 млн грн. Значення $f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right)$ беремо з попередньої таблиці. Далі маємо:

$$f_3^*\left(x_3\right)=\max_{K_3=1,2,3}\left\{D_3\left(k_3\right)+f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right)\right\}=\max\left\{0,6,9\right\}=9.$$

Етап 2.

$$f_2^*\left(x_2\right)=\max_{k_2}\left\{D_2\left(k_2\right)+f_3^*\left(x_2-C_2\left(k_2\right)\right)\right\}$$

за умов

$$C_2\left(k_2\right)\le x_2,\quad k_2=0,1,2,3,4.$$

Результати розрахунків подаємо в табл. 11.4.

Таблиця 11.4

x_2	Дохід $\left\{f_2\left(x_2;k_2\right)=D_2\left(k_2\right)+f_3^*\left(x_3-C_2(k_2)\right)\right\}$				Оптимальний розв'язок	
	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$	$f_2^*\left(x_2\right)$	k_2^*
0	0					0	0
1	4	4				4	1
2	8	6	6			8	0
3	9	12	8	8		12	1
4	12	13	14	10		14	2

Етап 1.

$$f_1^*\left(x_1\right)=\max_{k_1}\left\{D_1\left(k_1\right)+f_2^*\left(x_1-C_1\left(k_1\right)\right)\right\}$$

за умов

$$C_1\left(k_1\right)\le x_1,\quad k_1=0,1,2,3,4.$$

Виконуємо розрахунки лише для $x_1 = 4$, подаючи їх у вигляді табл. 11.5.

Таблиця 11.5

x_1	Дохід $f_1(x_1;k_1) = D_1(k_1) + f_2^*(x_1 - C_1(k_1))$				Оптимальний розв'язок	
	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	$k_1 = 4$	$f_1^*(x_1)$	k_1^*
4	$3 + f_2^*(4-1) =$ $= 3 + 12 = 15$	$5 + f_2^*(4-2) =$ $= 5 + 6 = 11$	$7 + f_2^*(4-3) =$ $= 7 + 4 = 11$		15	1

Знайдемо оптимальний план. Із таблиці першого кроку випливає, що $k_1^* = 1$, тобто для першого підприємства реалізується другий проект, який використовує 1 млн грн. інвестицій з ефективністю 3 млн грн. Отже, $x_3 = 3 - 1 = 2$ для другого, третього і четвертого підприємств залишається 4–1=3 млн грн. інвестицій. Із таблиці другого кроку маємо, що за умов $x_2 = 3$ максимальний ефект настає в разі реалізації для другого підприємства першого проекту $(k_2 = 1)$ ефективність становить 4 млн грн. Отже, $x_3 = 3 - 1 = 2$, тобто для третього і чет вертого підприємств слід використати 2 млн грн. інвестицій. Із таблиці третього кроку за умов $x_3 = 2$ маємо, що $k_3 = 0$. Отже, $x_4 = 2$, а йому відповідають капітальні вкладення $k_4 = 2$, ефективність яких 8 млн грн. Остаточно маємо: ефективність 4 млн грн. інвестицій становить 3+4 + 8=15 (млн грн.).

ТЕМА 12
ТЕОРІЯ ІГОР І ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

12.1. Основні поняття теорії ігор. Класифікація ігор
12.2. Матричні ігри двох осіб
12.3. Гра зі змішаними стратегіями
12.4. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

12.1. Основні поняття теорії ігор. Класифікація ігор

За умов ринкової економіки все частіше мають місце ***конфліктні ситуації***, коли два або більше колективів (індивідуумів) мають протилежні цілі та інтереси, причому результат дії кожної із сторін залежить і від дії супротивника. Класичним прикладом конфліктної ситуації в економіці є відношення продавець – покупець. Складніші ситуації виникають, коли в суперечці інтересів беруть участь об'єднання чи коаліції.

Зазначимо, що не завжди учасники ігрової ситуації мають протилежні цілі. Наприклад, два підприємства, які надають однакові послуги, можуть об'єднуватися з метою спільного протистояння більшому супернику.

Часто однією із сторін конфлікту є природні процеси чи явища, наприклад, погода, тобто маємо гру людини з природою. Погодними умовами людина практично не може керувати, але вона має змогу пристосовуватися до її постійних змін. Безліч подібних ситуацій можна зустріти і в інших сферах людської діяльності: біології, психології, політології тощо.

Теорія ігор – це математичний апарат, що розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників. Завдання теорії ігор полягає у розробленні рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників гри.

Реальні конфліктні ситуації досить складні і обтяжені великою кількістю несуттєвих чинників, що ускладнює їх аналіз, тому на практиці будують спрощені моделі конфліктних ситуацій, які називають ***іграми***.

Характерними рисами математичної моделі ігрової ситуації є наявність, по-перше, кількох учасників, яких називають ***гравцями***, по-друге, опису можливих дій кожної із сторін, що називаються ***стратегіями***, по-третє, визначених результатів дій для кожного гравця, що подаються ***функціями виграшу***. Задачею кожного гравця є знаходження ***оптимальної стратегії***, яка за умови багатократного повторення гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш.

Існує дуже багато різних ігор. Прикладом «гри» в буквальному розумінні цього слова, передусім, є спортивна, карточна гра, шахи тощо. Від реальної конфліктної ситуації гра відрізняється не лише спрощеною формою, а також наявністю певних правил, за якими мають діяти її учасники. Дослідження таких формалізованих ігор звичайно не може дати чітких рекомендацій для реальних умов, проте є найзручнішим об'єктом для вивчення конфліктних ситуацій і оцінки можливих рішень з різних поглядів. Розраховані на основі ігрових моделей оптимальні плани не визначають єдино правильне рішення за складних реальних умов, проте слугують математично обґрунтованою підставою для прийняття таких рішень.

Класифікація ігор проводиться відповідно до вибраного критерію. Ігри можуть розрізнятися залежно від кількості гравців, кількості стратегій, властивостей функцій виграшу, можливостей взаємодії між гравцями.

Якщо в грі беруть участь два гравці, то така гра називається ***парною*** (грою двох осіб). Часто у грі беруть участь багато сторін, тоді гра є ***множинною***.

Залежно від кількості стратегій розрізняють скінченні та нескінченні ігри. Якщо кожен гравець має скінченну кількість стратегій, то гра – ***скінченна***, в іншому разі – ***нескінченна***.

Якщо виграш одного гравця дорівнює програшу іншого, то маємо ***гру з нульовою сумою***. Такі ігри характеризуються протилежними інтересами сторін, тобто ситуацією конфлікту. Інші ігри – з ненульовою сумою, виникають як за умов конфліктної поведінки гравців, так і за їх узгоджених дій.

За можливості поєднання інтересів гравців та домовленості між ними про вибір стратегій можна казати про кооперативну гру, коли ж гравці не мають можливості чи не бажають координувати свої дії, то гра називається некооперативною.

12.2. Матричні ігри двох осіб

Найчастіше розглядається гра з двома гравцями, в якій виграш однієї сторони дорівнює програшу іншої, а сума виграшів обох сторін дорівнює нулю, що в теорії ігор називають ***грою двох осіб з нульовою сумою***. Подібна ситуація є типовою у практичній діяльності менеджерів, маркетологів, спеціалістів рекламних служб, які щоденно приймають рішення за умов гострої конкуренції, неповноти інформації тощо. Основною метою розв’язування задач цього класу є розроблення рекомендацій щодо вибору оптимальних стратегій конфліктуючих сторін на основі застосування методичних підходів теорії ігор.

Отже, маємо два гравці А і В (гра двох осіб з нульовою сумою). Кожний гравець вибирає одну із можливих стратегій: позначимо стратегії гравця А – A_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$, стратегії гравця В – B_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Результати (плата) за всіма можливими варіантами гри задаються спеціальними функціями, які залежать від стратегій гравців, як правило, у вигляді платіжної матриці.

Нехай $\varphi_1\left(A_i;B_j\right)$ $\left(i=\overline{i,m};\ j=\overline{i,n}\right)$ – виграш гравця А;

$\varphi_2\left(A_i;B_j\right)$ $\left(i=\overline{i,m};\ j=\overline{i,n}\right)$ – виграш гравця В.

Оскільки гра з нульовою сумою, то $\varphi_1\left(A_i;B_j\right)+\varphi_2\left(A_i;B_j\right)\equiv 0.$

Тоді в разі, якщо $\varphi_1\left(A_i;B_j\right)=\varphi\left(A_i;B_j\right)$, то $\varphi_2\left(A_i;B_j\right)=-\varphi\left(A_i;B_j\right)$.

Отже, мета гравця А – максимізувати величину $\varphi\left(A_i;B_j\right)$, а гравця В – мінімізувати її. Нехай $\varphi\left(A_i;B_j\right)=a_{ij}$, тобто маємо матрицю А:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де рядки відповідають стратегіям A_i, а стовпці – стратегіям B_j.

Матриця А називається ***платіжною***, а також ***матрицею гри***. Елемент цієї матриці a_{ij} – це виграш гравця А, якщо він вибрав стратегію A_i, а гравець В – стратегію B_j.

Із багатьох критеріїв, які пропонуються теорією ігор для вибирання раціональних варіантів рішень, найпоширенішим є песимістичний критерій мінімаксу-максиміну. Суть цього критерію у наступному.

Нехай гравець *A* вибрав стратегію A_i, тоді у найгіршому разі він отримає виграш, що дорівнює min a_{ij}, тобто навіть тоді, якщо гравець В і знав би стратегію гравця А. Передбачаючи таку можливість, гравець А має вибрати таку стратегію, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто

$$a=\max_i \min_j a_{ij}.$$

Така стратегія гравця А позначається A_{i_0} і має назву ***максимінної***, а величина гарантованого виграшу цього гравця називається ***нижньою ціною гри***.

Гравець *B*, який програє суми у розмірі елементів платіжної матриці, навпаки має вибрати стратегію, що мінімізує його максимально можливий програш за всіма варіантами дій гравця *A*. Стратегія гравця *B* позначається через B_{j_0} і називається ***мінімаксною***, а величина його програшу – ***верхньою ціною гри***, тобто

$$\beta=\min_j \max_i a_{ij}.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі досягається тоді, коли жодній стороні невигідно змінювати вибрану стратегію, оскільки її супротивник може у відповідь вибрати іншу стратегію, яка забезпечить йому кращий результат.

Якщо

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=\upsilon,$$

тобто, якщо $a=\beta=\upsilon$, то гра називається ***цілком визначеною***. В такому разі виграш гравця *A* (програш гравця *B*) називається ***значенням гри*** і дорівнює елементу матриці $a_{i_0 j_0}$. Цілком визначені ігри називаються ***іграми з сідловою точкою***, а елемент платіжної матриці, значення якого дорівнює виграшу гравця *A* (програшу гравця *B*) і є сідловою точкою. В цій ситуації оптимальним рішенням гри для обох сторін є вибір лише однієї з можливих, так званих чистих стратегій – максимінної для гравця *A* та мінімаксної для гравця *B*, тобто якщо один із гравців притримується оптимальної стратегії, то для другого відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним.

12.3. Гра зі змішаними стратегіями

Скінченні ігри, як правило, не мають сідлової точки. Якщо гра не має сідлової точки, тобто $\alpha \neq \beta$ і $\alpha \leq \upsilon \leq \beta$, то максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними, тобто кожна із сторін може покращити свій результат, вибираючи інший підхід. Оптимальний розв'язок такої гри знаходять шляхом застосування ***змішаних стратегій***, які є певними комбінаціями початкових «чистих» стратегій. Тобто змішана стратегія передбачає використання кількох «чистих» стратегій з різною частотою.

Ймовірності (або частоти) вибору кожної стратегії задаються відповідними векторами:

для гравця A – вектор $X = (x_1, x_2, .. x_m)$, де $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$;

для гравця В – вектор $Y = (y_1, y_2, .. y_n)$, де $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Очевидно, що $x_i \geq 0$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$; $y_j \geq 0$ $\left(j = \overline{1, n}\right)$.

Виявляється, що коли використовуються змішані стратегії, то для кожної скінченної гри можна знайти пару стійких оптимальних стратегій. Існування такого розв'язку визначає теорема, яку наведемо без доведення.

Теорема (*основна теорема теорії ігор*). Кожна скінченна гра має, принаймні, один розв'язок, можливий в області змішаних стратегій.

Нехай маємо скінченну матричну гру з платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Оптимальні змішані стратегії гравців A і B за теоремою визначають вектори $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, .. x_m^*\right)$ і $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, ... y_n^*\right)$, що дають змогу отримати виграш:

$$\alpha \leq \upsilon \leq \beta .$$

Використання оптимальної змішаної стратегії гравцем A має забезпечувати виграш на рівні, не меншому, ніж ціна гри за умови вибору гравцем B будь-яких стратегій. Математично ця умова записується так:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \geq \upsilon \quad \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{12.1}$$

З другого боку, використання оптимальної змішаної стратегії гравцем *B* має забезпечувати за будь-яких стратегій гравця *A* програш, що не перевищує ціну гри υ, тобто:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq \upsilon \quad \left(i = \overline{1, m}\right). \tag{12.2}$$

Ці співвідношення використовуються для знаходження розв’язку гри.

Зауважимо, що в даному разі розраховані оптимальні стратегії завжди є стійкими, тобто якщо один з гравців притримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним і дорівнює ціні гри υ незалежно від того, яку із можливих змішаних стратегій вибрав інший гравець.

12.4. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Якщо гра 2 × *n* або *m* × 2 може бути розв’язана геометрично, то у випадку гри 3 × *n* (*m* × 3) геометрична інтерпретація переходить у простір, що ускладнює як її побудову, так і сприйняття. У випадку ж, коли *n* > 3, *m* > 3, геометрична інтерпретація взагалі неможлива. Для розв’язування гри *m* × *n* використовують прийом зведення її до задачі лінійного програмування.

Нехай розглядається парна гра зі стратегіями $A_1, A_2, ..., A_m$ для гравця *A* та стратегіями $B_1, B_2, ..., B_m$ для гравця *B* і платіжною матрицею (a_{ij}) $\left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$. Необхідно знайти оптимальні змішані стратегії $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ та $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$, де $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1$, $\sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1$.

Знайдемо спочатку оптимальну стратегію гравця *A*. За основною теоремою теорії ігор така стратегія має забезпечити гравцеві виграш, не менший за ціну гри (поки що невідому величину) υ, за будь-якої поведінки гравця *B*.

Допустимо, що гравець *A* застосовує свою оптимальну стратегію, а гравець *B* – свою «чисту» *j*-ту стратегію B_j, тоді середній виграш гравця *A* дорівнюватиме:

$$a_{1j} x_1^* + a_{2j} x_2^* + ... + a_{mj} x_m^*. \tag{12.3}$$

За цих обставин виграш має бути не меншим, ніж ціна гри. Отже, для будь-якого значення *j* $\left(j = \overline{1, n}\right)$ величина виду (12.3) має бути не меншою, ніж υ:

$$\begin{cases} a_{11} x_1^* + a_{21} x_2^* + ... + a_{m1} x_m^* \geq \upsilon; \\ a_{12} x_1^* + a_{22} x_2^* + ... + a_{m2} x_m^* \geq \upsilon; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} x_1^* + a_{2n} x_2^* + ... + a_{mn} x_m^* \geq \upsilon. \end{cases}$$

Розділивши всі обмеження на υ, отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{x_1^*}{\upsilon} + a_{21}\dfrac{x_2^*}{\upsilon} + \ldots + a_{m1}\dfrac{x_m^*}{\upsilon} \ge 1; \\ a_{12}\dfrac{x_1^*}{\upsilon} + a_{22}\dfrac{x_2^*}{\upsilon} + \ldots + a_{m2}\dfrac{x_m^*}{\upsilon} \ge 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\dfrac{x_1^*}{\upsilon} + a_{2n}\dfrac{x_2^*}{\upsilon} + \ldots + a_{mn}\dfrac{x_m^*}{\upsilon} \ge 1. \end{cases}$$

Позначивши $\dfrac{x_i^*}{\upsilon} = t_i$, маємо:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \ge 1; \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \ge 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \ge 1. \end{cases}$$

$$t_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Враховуючи умову, що $x_1^* + x_2^* + \ldots + x_m^* = 1$, отримуємо $t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \dfrac{1}{\upsilon}$.

Необхідно зробити виграш максимальним. Цього можна досягти, коли вираз $t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \dfrac{1}{\upsilon}$ набуватиме мінімального значення. Отже, врешті маємо звичайну задачу лінійного програмування.

Цільова функція:

$$\max \upsilon = \min \frac{1}{\upsilon} = \min \sum_{i=1}^{m} t_i$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \ge 1; \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \ge 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \ge 1. \end{cases}$$

$$t_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Розв’язуючи цю задачу симплексним методом, знаходимо значення $t_i \left(i = \overline{1,m}\right)$, а також величину $\dfrac{1}{\upsilon}$ і значення $x_i^* = \upsilon t_i$, що є оптимальним розв’язком початкової задачі. Отже, визначено змішану оптимальну стратегію $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ для гравця *A*.

За аналогією можна записати задачу лінійного програмування для визначення оптимальної стратегії гравця *B*. З цією метою позначимо:

$$u_j = \frac{y_j^*}{\upsilon} \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Маємо таку лінійну модель задачі:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} u_j$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \le 1; \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \le 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \le 1. \end{cases}$$

$$u_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Очевидно, що задача лінійного програмування для гравця *B* є двоїстою до задачі гравця *A*, а тому оптимальний розв'язок однієї з них визначає також оптимальний розв'язок спряженої.

Список літератури

1. Антонів В. Б. Оптимізаційні методи і моделі : практикум / В. Б. Антонів, М. В. Дацко. – Львів : ВЦ ЛНУ імені Івана Франка, 2012. – 116 с.
2. Вітлінський В. В. Математичне програмування : навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко. – К. : КНЕУ, 2001. – 248 с.
3. Вітлінський В. В. Моделювання економіки : навч. посіб. / В. В. Вітлінський. – [2-е вид., без змін]. – К. : КНЕУ, 2007. – 408 с.
4. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / [Клебанова Т С , Раєвнєва О. В., Прокопович С. В. та ін.]. – Х. : ВД «ІНЖЕК», 2010. – 352 с.
5. Єгоршин О. О. Математичне програмування : підруч. / О. О. Єгоршин, Л. М. Малярець. – Х. : ВД «ІНЖЕК», 2006. – 384 с.
6. Лугінін О. Є. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. для ВНЗ / О. Є. Лугінін, В. М. Фомішена. – К. : Знання, 2011. – 342 с.
7. Казарєзов А. Я. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. для самост. вивч. / А. Я. Казарєва, О. О. Циплінська. – Миколаїв : Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2009. – 248 с.
8. Козьменко О. В. Економіко-математичні методи і моделі (економетрика) : навч. посіб./ О. В. Козьменко, О. В. Кузьменко. – Суми : Університетська книга, 2017. – 284 с.
9. Кузьмичов А. І. Оптимізаційні методи і моделі: практикум в Excel : навч. посіб./ А. І. Кузьмичов. – К. : ВПЦ АМУ, 2013. – 438 с
10. Мур Дж. Экономическое моделирование в Microsoft Excel / Дж. Мур, Л. Р. Уэдфорд ; пер. с англ. – [6-е изд.]. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2004. – 1024 с.
11. Наконечний С. І. Математичне програмування : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2003. – 452 с.

Короткий термінологічний словник

Економіко-математична модель	– концентроване вираження найсуттєвіших економічних взаємозв'язків досліджуваних об'єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей і рівнянь
Задача лінійного програмування	– задача знаходження мінімуму (максимуму) лінійної функції від n змінних на множині розв'язків системи лінійних нерівностей або лінійних рівнянь
Задача цілочислового програмування	– задача математичного програмування, змінні якої мають набувати цілих значень, називається задачею
Математична модель	– це абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь і/чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється
Математичне програмування (mathematical programming)	– розроблення за допомогою математичних розрахунків програми дій для досягнення певної мети; вибір найкращого (найефективнішого), з усіх можливих, варіанту розвитку деякого економічного процесу
Модель від лат. («modulus» — зразок, норма, міра.)	– це об'єкт, що заміщує оригінал і відбиває його найважливіші риси й властивості для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез
Симплекс-метод	– це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування
Теорія ігор	– це математичний апарат, що розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників. Завдання теорії ігор полягає у розробленні рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників гри
Транспортна задача	– це специфічна задача лінійного програмування, застосовувана для визначення найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів
Цикл у транспортній задачі	– замкнена ламана лінія, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці

Навчальне видання

Укладачі
Данилюк Тетяна Іллівна
Скорук Олена Володимирівна

Оптимізаційні методи та моделі

Конспект лекцій

Друкується в авторській редакції