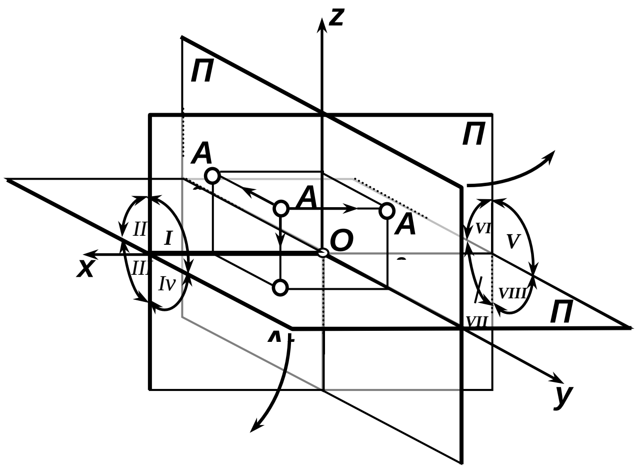
Міністерство освіти і науки України
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

Факультет культури і мистецтв
Кафедра образотворчого мистецтва
Ярослав Лелик, Іван Тарасюк

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ.

Конспект лекцій для студентів
спеціальності 023 «Образотворче мистецтво,
декоративне мистецтво, реставрація».
Без обмежень щодо форм навчання



Луцьк -   2020

УДК 514.18
ББК 22.115.2
Л-33

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки

протокол № 5 від «15» січня 2020р.

Рецензенти:

Лесик О.В. - професор, доктор архітектури, кафедра образотворчого мистецтва, Східноєвропейський національний університет ім. Лесі Українки .

Шваб'юк В.І. - професор, доктор технічних. наук , Луцький національний технічний університет.

Л-33. Лелик Я.Р. Тарасюк І.І. Нарисна геометрія. Конспект лекцій для студентів спеціальності 023 «Образотворче мистецтво, декоративне мистецтво, реставрація»
Без обмежень щодо форм навчання

Видавець – ПП ВМА «Терен» 43025 м. Луцьк, вул. Гаврилюка, 14, 2020р. – 76 с.

Анотація: В навчальному виданні стисло викладено курсу лекцій окремих розділів навчальної дисципліни "Нарисна геометрія" при підготовці бакалаврів: галузь знань 02 – культура і мистецтво, спеціальність 023 - Образотворче мистецтво, декоративне мистецтво, реставрація. Кваліфікація в дипломі: Бакалавр образотворчого мистецтва, декоративного мистецтва, реставрації .

Рекомендовано при вивчені навчальної дисципліни " Нарисна геометрія " студентам спеціалізації: художник образотворчого мистецтва.

УДК 514.18
ББК 22.115.2

Вступ

Нарисною геометрією називають розділ геометрії, в якому просторові фігури вивчають за допомогою їх зображень на площині.

Предмет нарисної геометрії – це методи зображення просторових форм на площині, способи графічного розв’язання різних геометричних задач, основні принципи геометричного формоутворення поверхонь, а також побудови ліній їх перетинів. У процесі вивчення лекційного курсу нарисної геометрії студенти ознайомляться як із методами проектування простих об’єктів (точка, пряма, площина), так і складних просторових об’єктів таких як лінійні та криволінійних поверхні.

Нарисна геометрія закладає основи креслення і навчає: - будувати кресленики просторових форм за їх словесним описом; - читати кресленики; - розв'язувати на креслнику задачі за визначенням взаємного положення геометричних елементів (позиційні задачі) та визначенням натуральних величин цих елементів (метричні задачі).

Інженеру, дизайнеру, художнику необхідно знати нарисну геометрію, тому що без основ креслення немислима творча та виробнича діяльність людей.

Нарисна геометрія є одним із найефективніших засобів розвитку просторової уяви та створення на її основі відповідних просторових уявлень. Будь-яка задача нарисної геометрії спочатку розв’язується у просторі і лише після цього може бути перенесена на кресленики. Вивчення дисципліни розвиває просторове уявлення та вміння умовно складати уяву про форму та розміри об’єкта щодо його зображення на площині. Нарисна геометрія – дисципліна із досконалими математичними описами і тому тільки при регулярному вивченні теоретичного матеріалу можливо оволодіти цим предметом.

Тема: ***Предмет і задачі нарисної геометрії. Методи проектування. Епюр Монжа. Проектування точки.***

Лекція – 1, 4год.

1. *Предмет і задачі нарисної геометрії.*

Нарисна геометрія – це наукова дисципліна, яка вивчає способи побудови зображення просторових форм на площині, розглядає графічні методи розв'язання геометричних задач і розкриває геометричні властивості просторових форм. Такі зображення прийнято називати кресленням.

За допомогою креслення можна передати свої думки, ідеї та уявлення як про існуючі просторові форми, так і про нові, які виникають у процесі творчої праці інженера.

Основні правила та методи побудови зображень вивчає нарисна геометрія.

Предметом нарисної геометрії є розробка методів побудови та читання креслень, способів розв'язування за допомогою креслень геометричних задач, методів геометричного моделювання, тобто створення проекцій предмета, який відповідав би наперед заданим геометричним та іншим вимогам, а також побудова зображень предметів та об'єктів деякої конкретної галузі інженерної діяльності.

Тому метою предмету нарисної геометрії є:

– розвиток просторової уяви;

– розвиток здібностей до аналізу та синтезу просторових форм;

– вироблення навиків, необхідних для виконання та читання технічних креслень;

2. *Методи проектування та основні їх властивості.*

В основу методу нарисної геометрії покладений метод проекцій, який дозволяє отримувати відображення просторових фігур на площині або поверхні. Згідно з цим методом кожній точці тривимірного простору ставиться у відповідність точка двовимірного простору (площини) (рис.1).

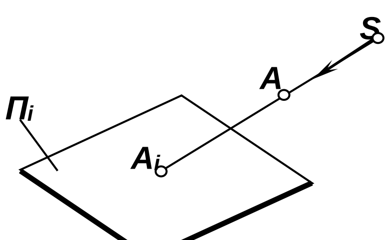


Рис.1

$$A_i = \ddot{I}_i \cap SA$$

Точка ***S*** називається центром проектування, напрямок ***SA*** – проектуючим променем, площина ***Пi*** – площиною проекцій і точка ***Ai*** – проекцією точки ***A*** на площину проекцій ***Пi.***

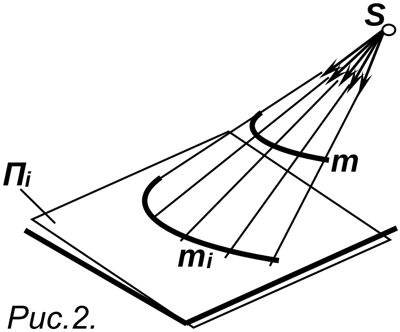


Рис.2.

Метод проекцій включає два випадки:
центральне та паралельне проектування.

При центральному проектуванні проектуючі промені (рис. 2) виходять з однієї точки – центра проектування ***S***, який знаходиться на визначеній (заданій) відстані від площини проекцій ***Пi***.

Для побудови центральної проекції ***m_i*** кривої лінії ***m*** необхідно вибрати на цій лінії деяку кількість точок, побудувати їх проекції і з'єднати відповідною лінією (рис.2). При центральному проектуванні кривої лінії проектуючі промені утворюють в просторі конічну поверхню, тому цей вид проектування і має іншу назву – конічне проектування.

Центральне проектування – найбільш загальний випадок проектування геометричних образів на площину. Основними і незмінними його властивостями (інваріантами) є наступні:

– проекцією точки є точка;

– проекцією прямої є пряма (в частковому випадку – точка);

– якщо точка належить прямій, то проекція цієї точки належить проекції прямої.

Однією з особливостей центрального проектування є його достатня наочність, оскільки воно відповідає природному зоровому сприйняттю людиною навколишніх предметів, і тому найбільш широке застосування цей вид проектування одержав при виконанні перспективних зображень в архітектурі.

Основний його недолік – складність у визначенні дійсних розмірів предмета за його зображенням.

Паралельне проектування можна розглядати як частковий випадок центрального, коли центр проектування ***S*** знаходиться в нескінченності. При цьому проектуючі промені паралельні між собою (рис.3), і тому інша назва цього виду проектування – циліндричне проектування. Апарат паралельного проектування включає в себе площину проекцій ***Пі*** та напрямок проектування **s**, який задається кутом ***φ*** нахилу проектуючого променя до площини проекцій. Залежно від значення кута ***φ*** паралельне проектування може бути косокутнім (***φ ≠ 90°***) або прямокутнім (***φ = 90°***).

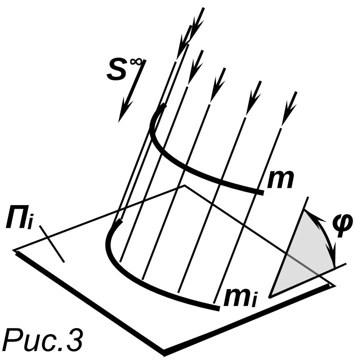


Рис.3

Основні властивості паралельного проек-тування:

1. Проекцією точки є точка.
2. Проекцією прямої є пряма (в частковому випадку - точка).
3. Якщо точка належить прямій, то і проекція точки належить проекції прямої.
4. Якщо прямі паралельні, то і їх проекції паралельні між собою.
5. Відношення відрізків прямої дорівнює відношенню проекцій цих відрізків.
6. Відношення відрізків паралельних прямих дорівнює відношенню проекцій цих відрізків.
7. Проекція геометричної фігури не змінює своєї величини і форми при паралельному переміщенні площини проекцій.
8. Точка перетину проекцій прямих, що перетинаються, є проекцією точки перетину цих прямих.

Прямокутне (або ортогональне) проектування, крім наведених вище, характеризується ще такими властивостями:

1. Проекція відрізка не може бути більше самого відрізка.

<u>Частковий випадок</u>. Якщо відрізок паралельний площині проекцій, то він проектується на неї в натуральну величину.

Розглянуті методи проектування на одну площину проекцій дають можливість розв'язувати *пряму задачу*: маючи предмет, знайти його проекцію, але не дозволяє розв'язати обернену задачу: маючи проекцію, визначити форму і розміри предмета. Наприклад, маючи проекцію A_i (рис.1), не можна визначити положення самої точки A в просторі, оскільки невідома її відстань від площини проекцій $П_i$.

Наявність лише однієї проекції створює невизначеність зображення. Такі зображення повинні містити додаткові дані, щоб по них можна було визначити оригінал.

Прямокутні проекції знайшли найбільш широке застосування при виконанні технічних креслень, тому що в цьому випадку забезпечується простота графічних побудов і висока точність вимірів. Основний недолік цього методу – недостатня наочність зображення: для того щоб "побачити" (уявити) предмет, необхідно подумки поєднати його наявні "плоскі" зображення.

Метод прямокутних проекцій ґрунтується на тому, що предмет за допомогою ортогонального (прямокутного) проектування одночасно зображають на декількох взаємно перпендикулярних площинах проекцій, приєднаних до просторової прямокутної системи координат.

Розглянемо дві взаємно-перпендикулярні площини, які ділять простір на 4 частини, що називаються чвертями або квадрантами (рис.4). Така модель називається двох- площинною. Відповідно площина $П_1$ називається горизонтальною площиною проекцій, а $П_2$ - фронтальною площиною проекцій.

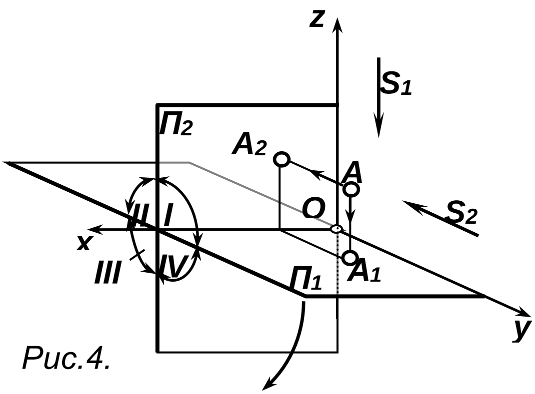


Рис.4.

При двох напрямах проектування, що прийняті в системі прямокутних проекцій, довільна точка A зображується парою точок (A_1 – горизонтальна проекція, A_2 – фронтальна проекція). Неважко помітити, що точка простору віддалена від площин проекцій $П_1$ та $П_2$ на відстань від осі відповідно до її фронтальної та горизонтальної проекцій. Креслення, що містить проекції на двох полях проекцій, позиційно повне та метрично визначене.

Однак, завдяки тривимірності просторової фігури, а також у зв'язку з тим, що по двох зображеннях не завжди просто визначити конструкцію складного об'єкта, його комплексне креслення стає зрозумілішим, коли крім двох основних проекцій дано ще проекцію на третю площину. В ролі третьої площини (поля проекцій) найчастіше вибирають профільну площину проекцій Π_3, перпендикулярну до Π_1 та Π_2 (рис.5), тому третя проекція точки A_3 називається профільною. Така модель називається трьох-площинною.

2. *Епюр Монжа.*

При побудові комплексного креслення або **епюра Монжа** з трьох прямокутних проекцій площину Π_2 приймають нерухомою, а площини Π_1 та Π_3 суміщають з нею обертанням навколо осей ***x*** та ***z.***

Площини /поля/ проекцій Π_1, Π_2 та Π_3, перетинаючись по трьох лініях, задають просторову декартову систему координат (рис.5). Точка ***O*** є початком координат, вісь ***x*** - віссю абсцис, вісь ***y*** - віссю ординат та вісь ***z*** - віссю аплікат. Неважко помітити, що проекції A_1 та A_2 лежать на одній вертикальній лінії, а проекції A_2 та A_3 – на одній горизонтальній лінії, які називаються лініями зв'язку.

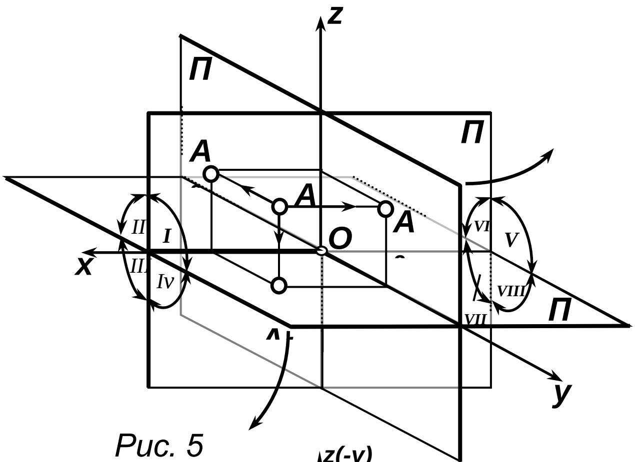


Рис. 5

Розгорнемо площини, які утворюють просторову декартову систему координат до суміщення їх з площиною Π_2 (рис.6). Побудуємо бісектрису ***k*** кута ***y(-z), O, y(-x)*** та зобразимо проекції точки ***A*** в площинах Π_1, Π_2 і Π_3. Ламана лінія зв'язку, яка з'єднує проекції A_1

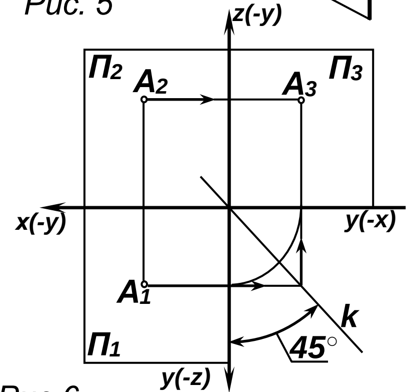


Рис.6.

та A_3 складається з двох відрізків (горизонтального та вертикального) з вершиною на бісектрисі кута ***y(-z), O, y(-x)***. Частину цієї ламаної інколи замінюють дугою кола. Таким чином, між горизонтальною та профільною проекціями існує ламана горизонтально-вертикальна лінія зв'язку. Бісектрису ***k***, що є множиною вершин цих ламаних ліній, називають постійною прямою комплексного креслення.

Площини проекцій Π_1, Π_2 та Π_3 ділять тривимірний простір на вісім частин, які називаються октантами. У тих випадках, коли точка задається координатами, можна будувати комплексне креслення, керуючись величиною та знаками координат, навіть не визначаючи октанту, в якому задана точка.

Знаки координат, які відповідають тому чи іншому октанту, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Знаки координат

Октанти	1	2	3	4	5	6	7	8
x	+	+	+	+	-	-	-	-
y	+	-	-	+	+	-	-	+

Якщо точка знаходиться в першій чверті (двох-площинна модель) або в першому (п'ятому) октанті (трьох-площинна модель) простору при закріплених площинах проекцій, то її горизонтальна проекція розміщується нижче, а фронтальна проекція – вище ***x***. По-іншому розміщуються проекції точок, що знаходяться в 2(6), 3(7) та 4(8) чвертях (октантах) простору.

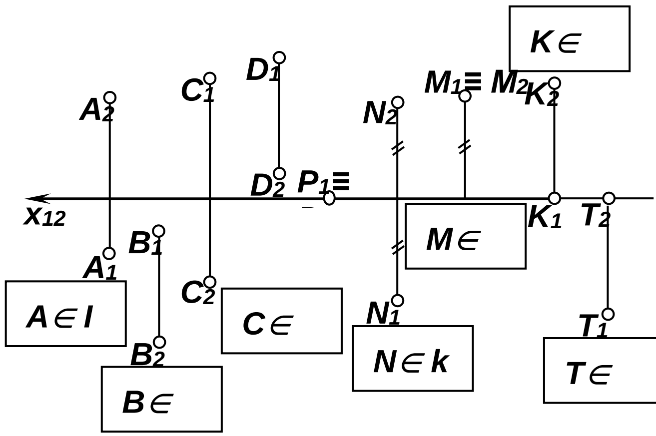


Рис.7.

На рис.7 показано розташування точок в різних чвертях простору.

Якщо одна з проекцій точки знаходиться на осі, то точка простору належить одній із площин проекцій і розташована на границі чвертей.

Якщо відстані від проекцій точок до осі рівні, то точка простору належить бісекторній площині. Бісекторна площина – це площина , яка ділить чверті навпіл. Площина, яка проходить через **1** і **3** чверті називається **1** бісекторною площиною і позначається буквою ***К***, площина, яка проходить через **2** і **4** чверті – **2** бісекторною площиною і позначається буквою ***U***.

Приклад 1. Побудувати комплексне креслення точок ***A(-30,-20,40)*** та ***B(10,30,-10)*** і визначити октанти простору, в яких вони розташовані. Комплексне креслення точок приведене на рис. 8. ***В практиці користуються І чвертю, тому подальший матеріал буде подаватися стосовно неї.***

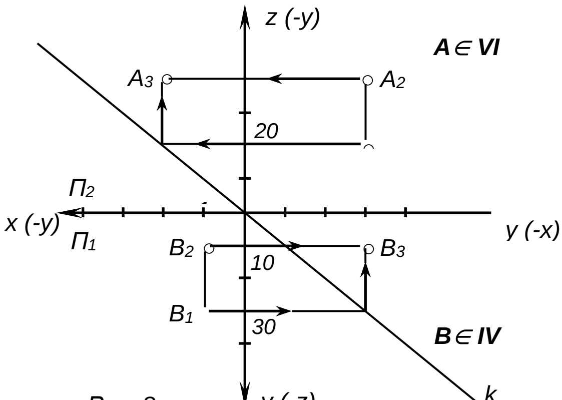


Рис. 8

Питання для самоконтролю:

1. Методи проектування та основні їх властивості.
2. Метод центрального проектування.
3. Апарат методу центрального проектування.
4. Метод паралельного проектування.
5. Апарат методу паралельного проектування.
6. Чим різняться між собою двох-площинна та трьох-площинна моделі простору?
7. Що називають чвертями або квадрантами ?
8. Що називають октантами?
9. Що називають постійною прямою комплексного креслення ?
10. Епюр Монжа.

9. Якщо точка простору належить площині $\boldsymbol{\Pi_2}$, як будуть розташовані її проекції?
10. Як зобразяться проекції точки, що належить бісекторній площині в 3 і 4 чвертях простору?
11. Які знаки координат(X,У,Z) мають точки в першому та п’ятому октанті ?

Тема: ***Проектування прямої та площини***

Лекція – 2, 2 год.

1. *Проекції прямої.*

Пряму в нарисній геометрії розглядають як множину точок; її проекції в загальному випадку також прямі. В системі площин ***П₁*** та ***П₂*** пряма загального положення зображується двома проекціями прямих. Оскільки дві точки визначають будь-яку пряму, то при рішенні практичних задач часто пряму задають відрізком.

По відношенню до площин проекцій пряма може займати як загальне, так і часткове положення.

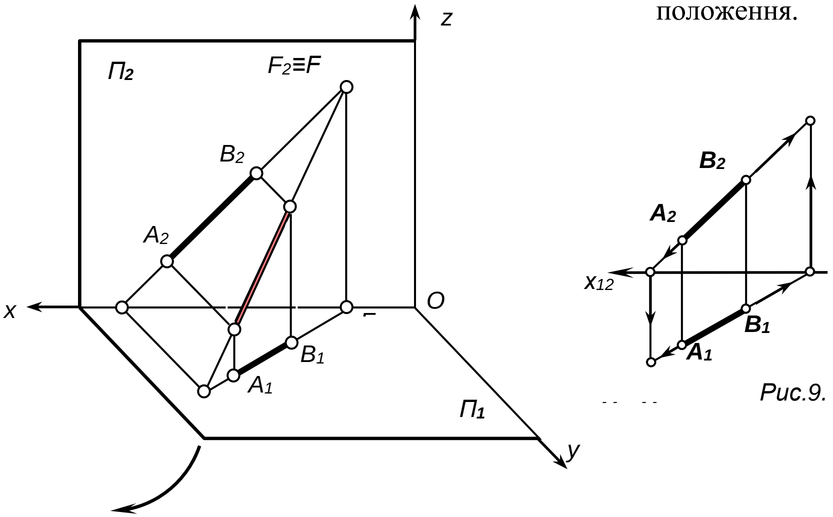


Рис.9.

Пряма, яка не паралельна жодній з площин проекцій, називається прямою загального положення.

Точки перетину прямої з площинами проекцій називають слідами прямої.. На рис. 9 показаний епюр прямої та знаходження її слідів.

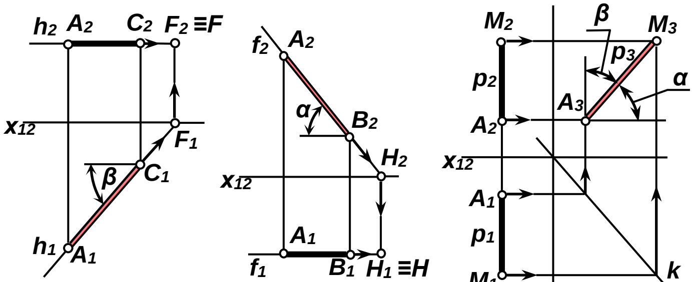


Рис.10 а) б) в)

Прямі часткового положення – це прямі, які паралельні або перпендикулярні площинам проекцій.

Прямі, паралельні площинам проекцій, належать до так званих ***прямих рівня*** і називаються ***АС*** – горизонтальною (рис.10,а), ***АВ*** – фронтальною (рис.10,б) та ***АМ*** – профільною прямими (рис.10,в). Відрізки прямих зображуються в натуральну величину на площині проекцій, якій вони

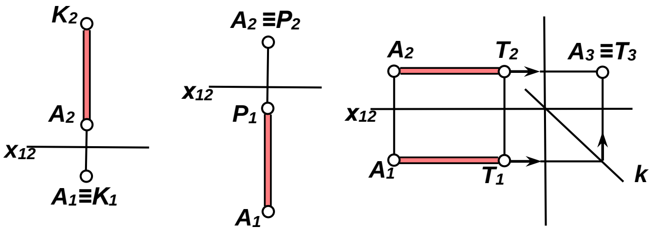


Рис.11

паралельні.

Прямі, перпендикулярні до площин проекцій, називають ***проектуючими***: ***АК*** – горизонтально-проектуюча або вертикальна (рис.11,а), ***АР*** – фронтально-проектуюча (рис.11,б), ***АТ*** – профільно-проектуюча (рис.11,в). Такі прямі зображуються точкою на площині проекцій, до якої вони перпендикулярні. При цьому вони паралельні двом іншим площинам проекцій.

При розгляді відрізка прямої часто виникає потреба у визначенні його натуральної величини та кутів нахилу до площин Π_1 та Π_2 , тобто доводиться розв'язувати першу основну метричну задачу. Дійсно, відстань між двома фігурами вимірюється відстанню між найближчими точками цих фігур.

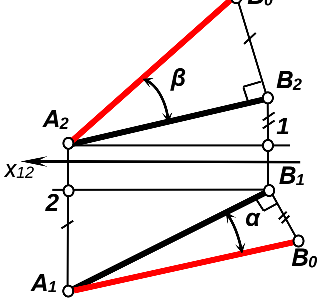


Рис.12

Для визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення (рис.12) скористаємося методом прямокутного трикутника.

Якщо з точки A_2 провести промінь, паралельний осі проекцій x_{12}, а з точки B_2 – перпендикулярний до осі x_{12}, то на перетині отримаємо точку ***1***. Побудувавши перпендикуляр B_1B_0 до проекції відрізка A_1B_1 довжиною рівною B_21, отримаємо прямокутний трикутник $A_1B_1B_0$ в якому гіпотенуза A_1B_0 буде натуральною величиною відрізка AB.

Одночасно визначається і кут α нахилу прямої до горизонтальної площини проекції Π_1. Щоб знайти кут нахилу прямої до фронтальної площини проекцій, відповідну побудову треба виконати на полі Π_2.

2. ***Проекції площини***.

Якщо точка є нульовимірною геометричною фігурою, пряма - одномірною, то площина - двовимірна геометрична фігура (рис.13).

Задавати площину можуть три точки , що не лежать на одній прямій, дві паралельні прямі, дві прямі, що перетинаються, точка і пряма (точка не належить прямій), будь-яка плоска фігура та сліди площини (рис.14).

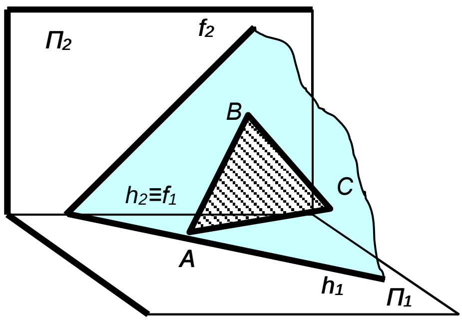


Рис. 13

Сліди площини – це лінії перетину площини з площинами проекцій. Задання площини її слідами - найпростіший спосіб задання. На рис.6,е площину задано точкою сходу слідів f_2 і h_1 на осі x.

Площини не паралельні та не перпендикулярні площинам проекцій, називаються площинами загального положення.

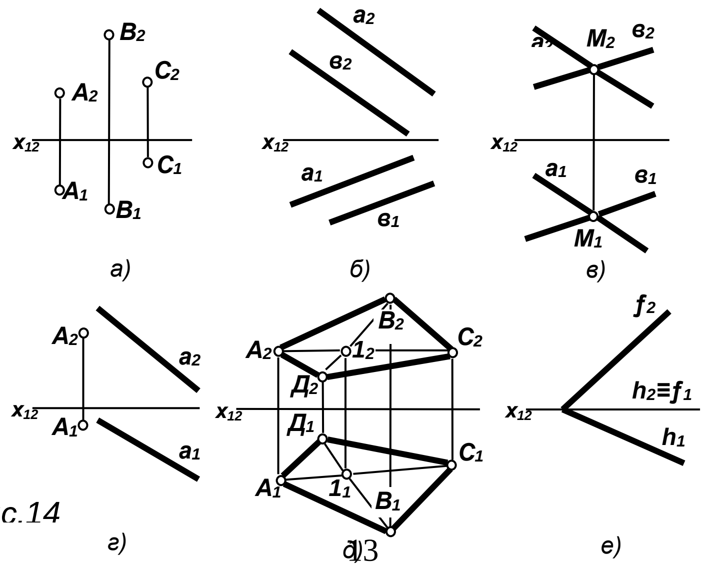


Рис.14

Площини, перпендикулярні площинам проекцій, є площинами часткового положення і називаються ***проектуючими.***

Площина, перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій, називається горизонтально проектуючою (рис.15а).

Площина, перпендикулярна до фронтальної площини проекцій, називається фронтально проектуючою (рис.15б).

Площина, перпендикулярна профільній площині проекцій, є профільно-проектуючою (рис.15в).

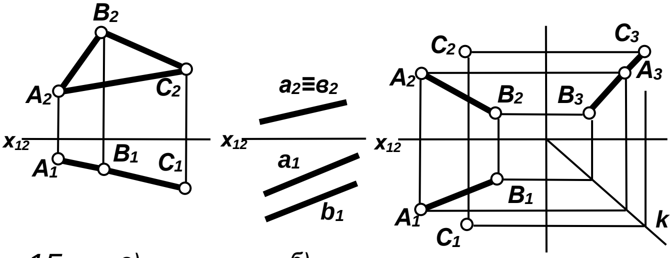


Рис.15. а) б) в)

Площини, паралельні площинам проекцій, називаються площинами рівня. Відсіки площин рівня на відповідних площинах проекцій зображуються в натуральну величину. Площина, паралельна горизонтальній площині проекцій, називається горизонтальною (рис.16а), площина, паралельна фронтальній площині проекцій, називається фронтальною (рис.16б), площина, паралельна профільній площині проекцій, – профільна площина рівня (рис. 16в).

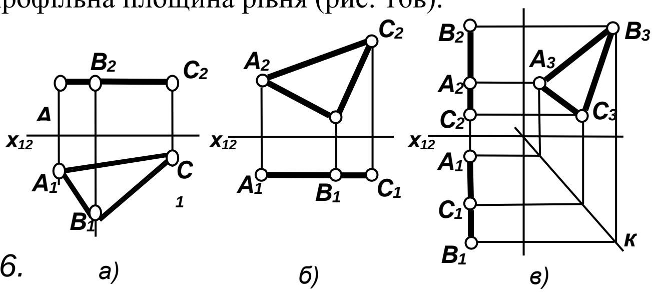


Рис.16. а) б) в)

Питання для самоконтролю:

1. Що називається слідами прямої?
2. Що називається прямими рівня та проектуючими прямими?
3. Чим можна задати проекції площини?
4. Що називається площинами загального та часткового положення

Тема: ***Позиційні властивості пар геометричних елементів. Належність, паралельність і перетин геометричних елементів***

Лекція – 3, 2год.

У нарисній геометрії розглядаються дві групи задач: ***позиційні та метричні***, в основу яких покладено позиційні та метричні властивості пар їх проекцій.

Позиційні задачі – це задачі на визначення загальних елементів різних геометричних фігур (належність, перетин, тощо).

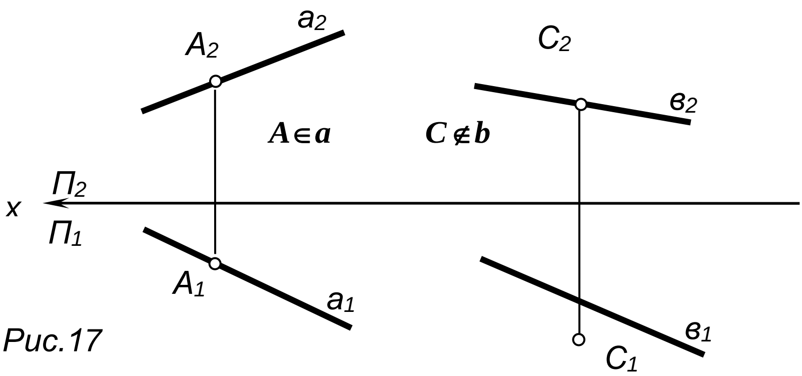


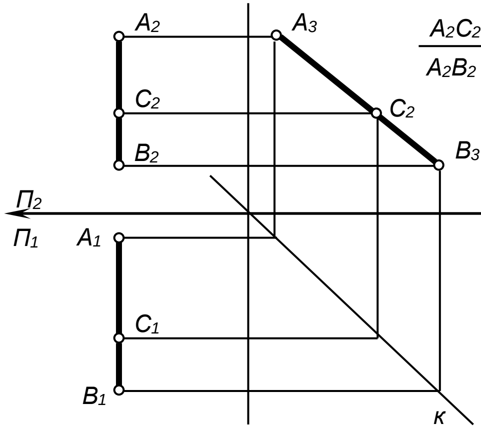
Рис.17

1 Точка і пряма

Точка може належати або не належати прямій. Для розв'язку питання про належність досить розглянути їх проекції, прийнявши до уваги таку властивість: ***точка належить прямій, якщо її проекції належать тим же проекціям прямої, і не належить прямій, коли хоча б одна з її проекцій не належить тій же проекції прямої***. На рис. 17 показано прямі ***а, в*** та точки ***А, С***.

Точка ***А***, проекції якої належать відповідним проекціям прямої ***а***, належить цій прямій. Точка ***С*** не належить прямій ***в***, бо її горизонтальна проекція не належить горизонтальній проекції прямої.

Для двох проекцій (фронтальної та горизонтальної) профільної прямої умови належності недостатні, бо якщо пряма і точка належать одній профільній площині, то проекції точки завжди належать проекціям прямих. У цьому випадку треба внести однозначність, яка полягає в тому, що профільна проекція точки повинна належати профільній проекції прямої або, що аналогічно, повинна своїми *проекціями ділити проекції довільно зафіксованого на прямій відрізка в одному й тому ж відношенні* (рис.18).



$$\frac{A_2C_2}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$$

Рис. 18

2 Дві прямі

Прямі можуть ***перетинатися***, якщо мають одну власну чи невласну спільну точку, або бути ***мимобіжними***, якщо вони не мають спільної точки.

Дві прямі в просторі в загальному положенні мимобіжні. В цьому випадку, як відомо, через них можна провести одну пару площин, паралельних площині паралелізму (це площина, паралельна двом мимобіжним прямим), яку можна задати, якщо через довільну точку простору провести дві прямі, паралельні цим мимобіжним.

Сформулюємо властивості: ***якщо точки перетину однойменних проекцій прямих належать одній вертикальній лінії зв'язку, - прямі перетинаються*** (рис.19а);

якщо однойменні проекції прямих паралельні між собою (мають невласну точку перетину), - прямі паралельні (рис. 19 б);

якщо точки перетину однойменних проекцій прямих не належать одній вертикальній чи горизонтальній лінії зв'язку, - прямі мимобіжні (рис. 20).

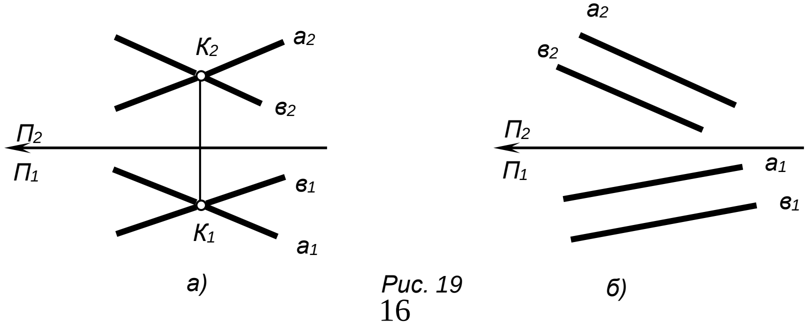


Рис. 19

Звернемося до рис. 20, де зображено дві мимобіжні прямі. Фронтальні проекції перетинаються в точці $\boldsymbol{1_2=2_2}$, а горизонтальні - в точці $\boldsymbol{3_1=4_1}$.

Ці точки називаються *конкуруючими*. Конкуруючі точки (точки, що належать одній проектуючій прямій) використовують при визначенні видимості геометричних фігур.

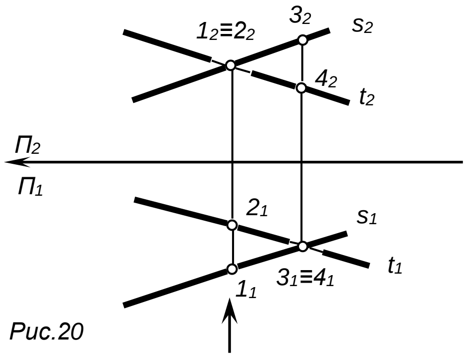


Рис.20

Для визначення "накладання" їх на проекціях візьмемо конкуруючі точки $\boldsymbol{1_2=2_2}$ відносно поля $\boldsymbol{\Pi_2}$, точки $\boldsymbol{3_1=4_1}$ відносно поля $\boldsymbol{\Pi_1}$. Завдяки тому, що точка ***3*** розміщена вище точки ***4***, на полі $\boldsymbol{\Pi_1}$ пряма ***s*** "перекриває" пряму ***t***. Точка ***1*** знаходиться ближче точки **2**, тому на полі $\boldsymbol{\Pi_2}$ пряма ***s*** "перекриває" пряму ***t***.

3 Пряма та площина

Пряма належить площині, якщо дві її точки належать площині (рис.21 а) або коли ***вона проходить через точку, що належить площині, та паралельна другій прямій, що належить площині*** (рис. 21 б). Для задання прямої, що належить площині, досить задати її горизонтальну чи фронтальну проекцію.

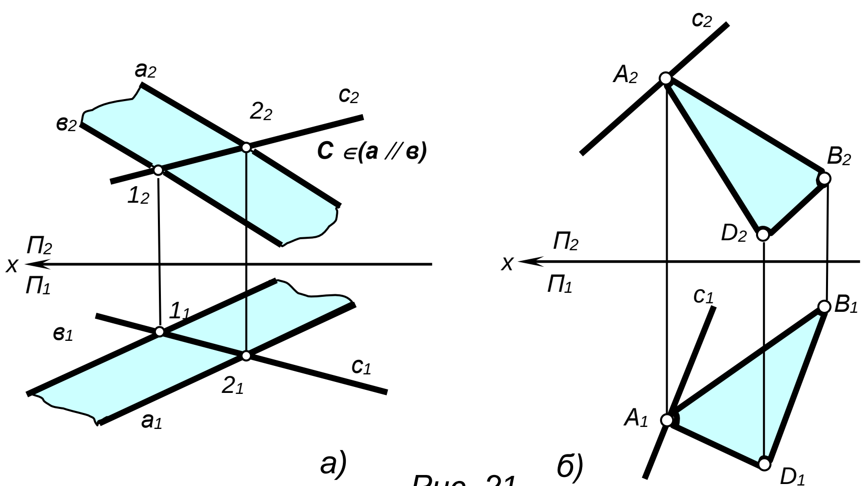
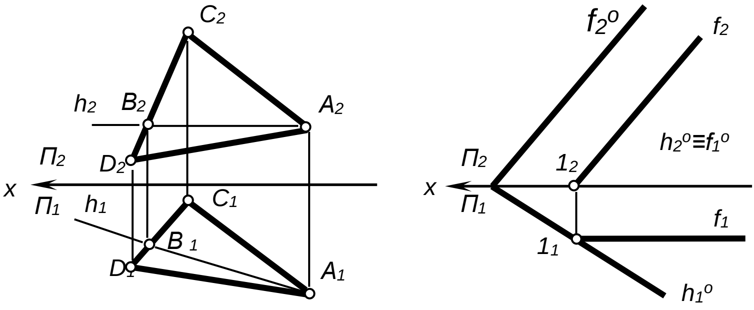


Рис. 21



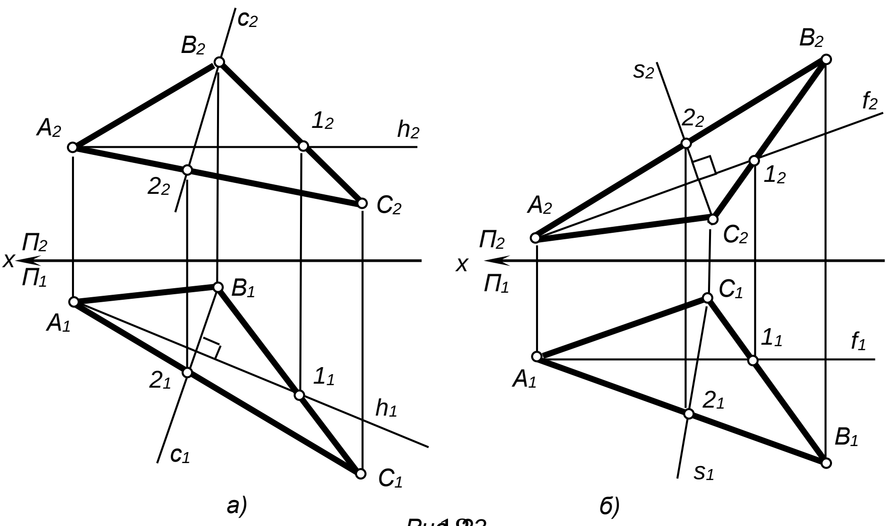
а) Рис. 22 б)

Крім того є лінії, що належать площині і займають ***часткове положення***. До таких ліній можна віднести ***лінії рівня*** та ***лінії найбільшого нахилу площини*** до площин проекцій. ***Лініями рівня площини називають лінії, що належать даній площині та паралельні одній з площин проекцій***.

Горизонталь - це лінія, що належить площині та паралельна ***Π_1***. Фронталь - це лінія, що належить площині та паралельна ***Π_2***. Профільна пряма - лінія, що належить площині та паралельна профільній площині проекцій ***Π_3***.

На рис. 22а проведено горизонталь ***AB***. Фронталь – лінія, що лежить у площині та паралельна ***Π_2***. На рис. 22 б проведено фронталь ***f***.

Горизонталь та фронталь часто використовуються при заданні площини, що дозволяє виявити її орієнтацію відносно площин проекцій. Сліди площини



а) б)

Рис. 23

є крайніми положеннями горизонталі ***h*** чи фронталі ***f;*** їх в цьому випадку називають нульовими (рис. 22б).

Лінії найбільшого нахилу площини до площин проекцій - лінії, що належать площині та утворюють найбільший кут з відповідною площиною проекцій. Зокрема, по відношенню до поля Π_1 їх ще називають *лініями найбільшого скату*. Лінія найбільшого нахилу до площини Π_1 утворює прямий кут з проекцією горизонталі (рис. 23 а), а лінія найбільшого нахилу до площини Π_2 – прямий кут з фронтальною проекцією фронталі (рис. 23 б).

Також пряма може перетинати площину або бути їй паралельною, тобто перетинати у невласній точці. Задача на перетин прямої з площиною вважається ***першою основною позиційною задачею***.

При розв'язанні цієї задачі розрізнятимемо три різних випадки розміщення двох геометричних елементів: а) обидва геометричні елементи є проектуючими відносно до однієї й тієї ж площини проекцій; б) один геометричний елемент – проектуючий , другий - загального положення; в) обидва геометричні елементи займають загальне положення. На рис. 24 а показано перший випадок, коли площина - трикутний відсік ***ABC*** та пряма ***l*** - займають горизонтально проектуюче положення. Горизонтальна проекція трикутного відсіку ніби збирає на себе проекції всіх фігур, що належать площині відсіку. Належність горизонтальних проекцій відсіку та прямої дозволяє стверджувати, що в цьому випадку пряма ***l*** належить площині відсіку.

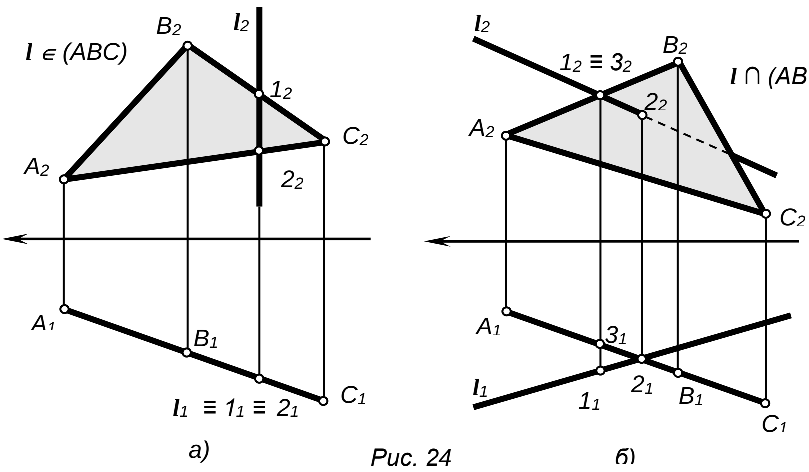


Рис. 24

На рис. 24 б показано другий випадок, коли площина у вигляді трикутного відсіку знаходиться в горизонтально-проектуючому положенні , а пряма ***l*** займає загальне положення. В цьому випадку точка ***2*** перетину прямої з площиною визначається безпосередньо на полі Π_1 як точка перетину проекції прямої та площини; фронтальна проекція точки ***2*** визначається за вертикальною відповідністю.

З метою підвищення наочності рисунка вважаємо трикутний відсік непрозорим, і тоді частина відрізка прямої буде невидимою, бо він "перекривається" на полі Π_2, площиною. Позначимо на полі Π_2 точку перетину прямої ***l*** із стороною відсіку A_2B_2, за допомогою вертикальної лінії зв'язку визначимо точку 1_1 на прямій та точку 3_1 - на площині. Оскільки точка ***1*** ближче до спостерігача, ніж точка ***3***, пряма в цій точці "перекриває" сторону A_2B_2, і тому відрізок прямої до точки перетину з площиною видимий, а далі частина його закривається площиною.

На рис. 25 зображено третій випадок, коли і площина, і пряма займають загальне положення. Для визначення точки перетину прямої з площиною в цьому випадку доцільно застосувати допоміжну площину, яка проходить через пряму і є проектуючою по відношенню до однієї з площин проекцій. Алгоритм розв'язання задачі складається з трьох операцій: І) через пряму проводять допоміжну площину; 2) знаходять лінію перетину заданої площини з допоміжною; 3) визначають точку перетину двох прямих - заданої та лінії перетину.

На рис. 25 через пряму проведено горизонтально-проектуючу площину ***Г***, знайдено лінію перетину двох площин - пряму ***1-2*** (її горизонтальна проекція 1_12_1), за горизонтальною проекцією визначено фронтальну проекцію 1_22_2. В перетині l_2 та 1_22_2 знайдено шукану точку K_2 - перетин прямої з площиною (її горизонтальна проекція визначається за вертикальною лінією зв'язку).

Видимість відрізків прямої ***l*** визначена за допомогою конкуруючих точок ***3,4***.

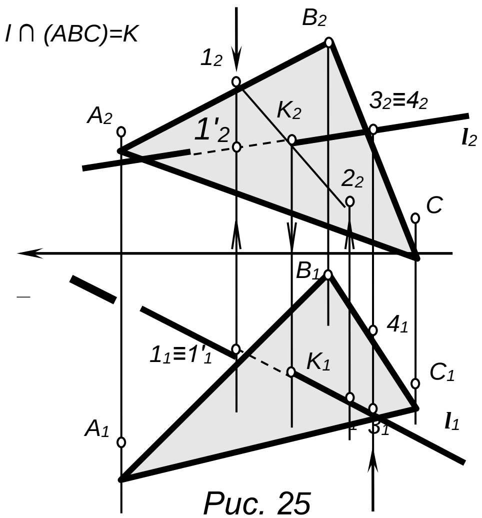


Рис. 25

Пряма паралельна площині, якщо вона паралельна будь-якій прямій, що лежить у цій площині.

4 Точка та площина

Точка може належати площині або не належати їй. Це визначається за допомогою прямої, що належить площині.

На рис. 26 показано трикутний відсік ***ABC*** і задано точки ***1*** та ***2***. Точка ***1*** належить площині, бо вона належить прямій ***BD***, що є підмножиною площини; точка ***2*** не належить площині, бо тільки фронтальна проекція її належить фронтальній проекції прямої – B_2D_2, а горизонтальна проекція не належить B_1D_1. Звідси можна сформулювати таку властивість.: ***точка належить площині, якщо обидві її проекції збігаються з тими самими проекціями прямої, що належить площині***.

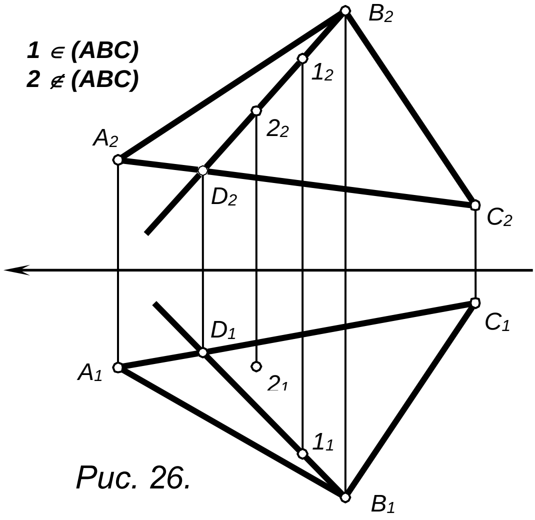


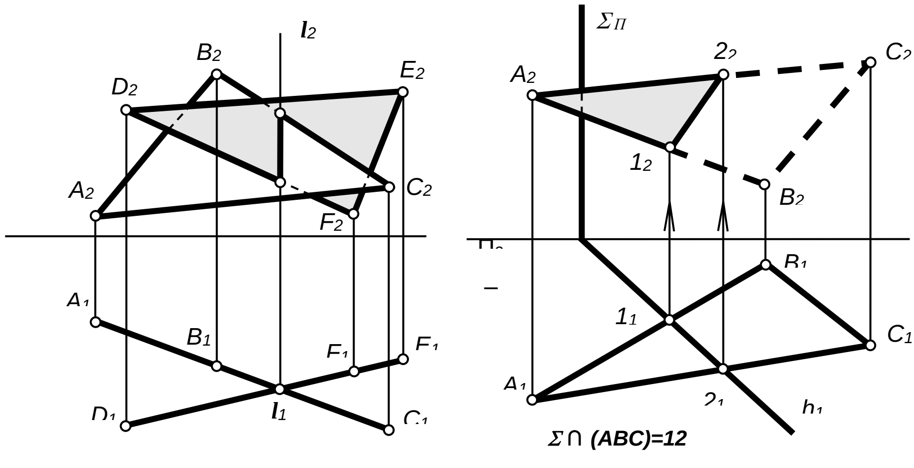
Рис. 26.

5 Дві площини

Якщо дві площини не співпадають, то вони завжди перетинаються. Якщо лінія їх перетину - невласна пряма, - площини паралельні. Тому, щоб з’ясувати взаємне положення двох площин, знаходять лінію їх перетину, що є ***другою головною позиційною задачею***.

Як і при розв’язанні першої головної позиційної задачі, тут спостерігаються ті ж самі три випадки: а) обидві площини є проектуючими відносно до однієї й тієї ж площини проекцій; б) одна з площин - проектуюча, друга - загального положення; в) обидві площини загального положення. На рис.

27а показано два вертикальні трикутні відсіки. Перетин їх горизонтальних проекцій визначає вертикальну лінію перетину двох площин, яка за відповідністю визначається на полі Π_2.



а) Рис. 27 б)

На рис. 27 б одна з площин, що перетинаються, займає загальне положення, а друга – горизонтально-проектуюча. Лінія взаємного перетину площин у даному випадку збігається на полі Π_1 з горизонтальною проекцією проектуючого відсіку - це пряма $1_1 2_1$. За вертикальною відповідністю визначається фронтальна проекція лінії перетину двох площин.

На рис. 28 показано визначення лінії перетину двох відсіків загального положення. Лінію перетину визначено за точками перетину двох сторін одного відсіку з площиною другого, що є двічі розв'язана перша позиційна задача. З цією метою через пряму C_2B_2 проведено фронтально-проектуючу площину Φ_2, а через пряму C_2A_2 - фронтально-проектуючу площину Γ_2. На цих двох прямих знайдено точки перетину їх з площиною, які й визначать лінію перетину двох площин.

Коли лінія перетину двох площин - невласна пряма, то площини паралельні між собою. ***Ознакою паралельності є паралельність двох прямих, що перетинаються, однієї площини, двом прямим, що перетинаються, другої;- найчастіше це горизонталі та фронталі площин (сліди)***. На рис. 29 показано дві паралельні площини. Одну задано слідами, а другу - трикутним відсіком ***ABC*** ; сторона відсіку ***AB*** є фронталлю, а ***AC*** - горизонталлю площини.

(ABC) ∩ (KED) = MN

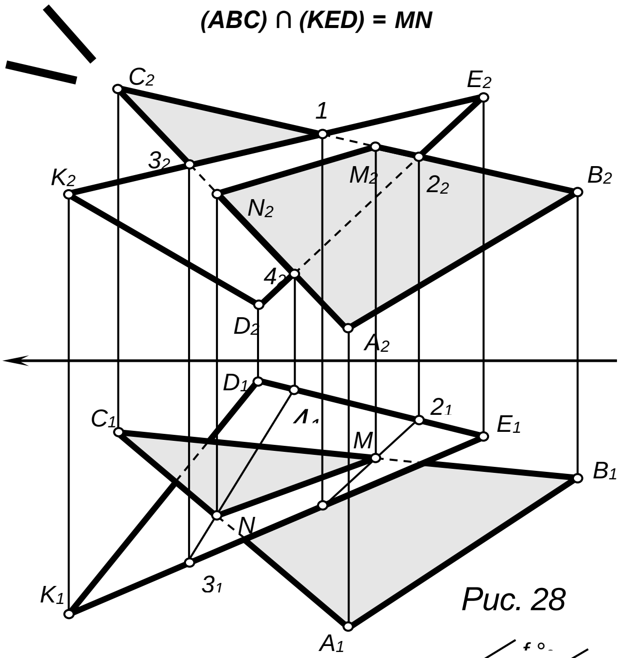


Рис. 28

(ABC) II (f 0 ∩ h0)

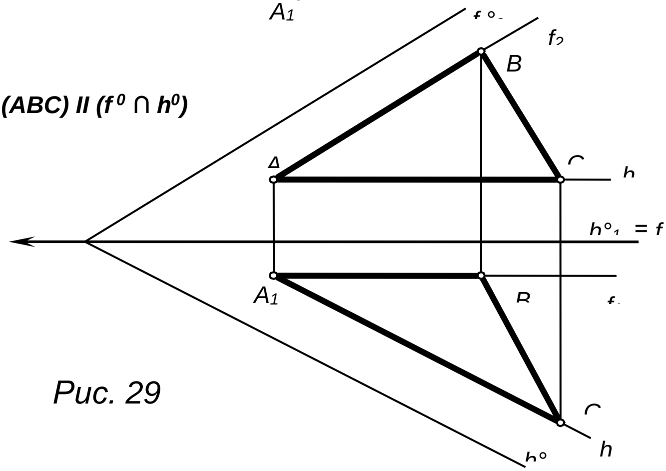


Рис. 29

Питання для самоконтролю:

1. Коли точка належить прямій?
2. Що називається мимобіжними прямими?
3. Що називається лінією найбільшого скату?
4. Коли пряма паралельна площині?
5. Коли дві площини паралельні?

Способи перетворення комплексних креслень

***Тема:* Методи перетворення креслень. Заміна площин проекцій. Обертання навколо невиявлених та виявлених осей.**

Лекція 4 4 год.

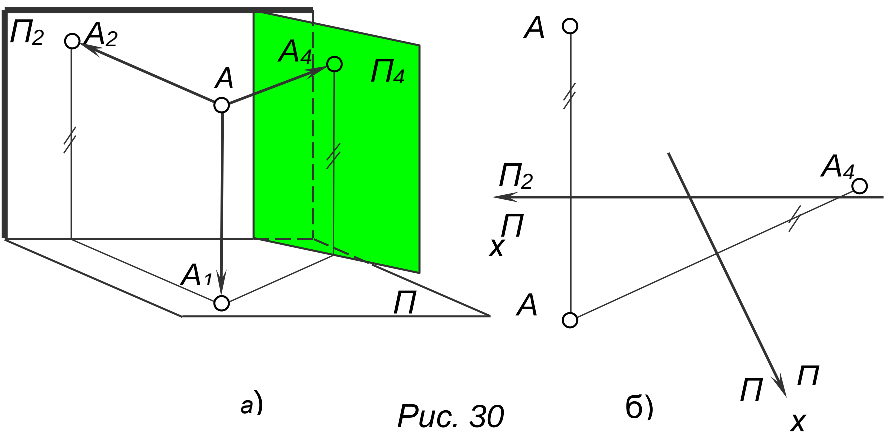
Розв’язання більшості геометричних задач зводиться до визначення *метричних та позиційних характеристик окремих фігур*.

Фігура або геометричний елемент по відношенню до площин проекцій $\boldsymbol{\Pi_1}$, $\boldsymbol{\Pi_2}$ та $\boldsymbol{\Pi_3}$ може займати ***загальне*** (незручне) і ***часткове*** (зручне) положення. При загальному положенні геометричних елементів і фігур розв’язок задач, як правило, більш складний і триваліший за часом. Але від зміни розташування фігур відносно площин проекцій її характеристики не міняються. Тобто, після перетворення комплексного креслення додаткові проекції дають можливість розв’язати задачі найпростішими графічними способами.

Основними методами перетворення креслень являються: - заміна площин проекцій;- плоско-паралельне переміщення (обертання навколо невиявлених осей);- обертання навколо проектуючих осей;- обертання навколо ліній рівня.

1. *Заміна площин проекцій.*

На рис. 30а в системі площин проекцій $\boldsymbol{\Pi_1}$ та $\boldsymbol{\Pi_2}$ показано точку $\boldsymbol{A}$. Перпендикулярно до площини $\boldsymbol{\Pi_1}$ проведено нову вертикальну площину $\boldsymbol{\Pi_4}$, на яку ортогонально спроектовано точку $\boldsymbol{A}$.



а) Рис. 30 б)

Таким чином, замість системи площин проекцій $\Pi_1\Pi_2$ з проекціями точки A_1A_2, одержано систему $\Pi_1\Pi_4$ з проекціями точки A_1A_4. При такій заміні відстань від старої проекції до старої осі дорівнює відстані від нової проекції до нової осі. На комплексному кресленні (рис. 30б) цю відстань показано подвійною рискою.

Звідси можна зробити висновок про суть цього методу: ***розташування елементів або фігур залишається незмінним, а змінюється розташування площин проекцій***. Нові площини вибираються завжди перпендикулярно до старих і так, щоб фігури проектувалися на них в частковому положенні.

Розглянемо чотири основні задачі перетворення креслень.

а) ***перетворення прямої загального положення в пряму рівня (визначення натуральної величини відрізка прямої)***. На рис.31 (перша дія) зображено відрізок прямої загального положення ***AB***

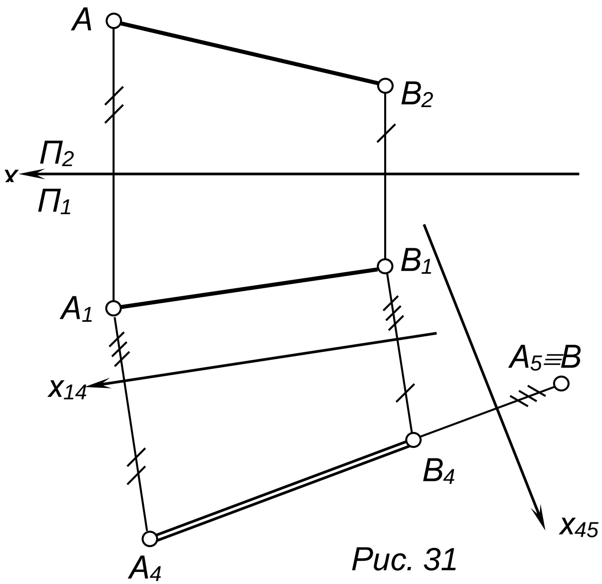


Рис. 31

Щоб одержати його натуральну величину, тобто перетворити його в пряму рівня, *досить провести нову площину паралельно одній з проекцій;* на рисунку 44 (дія перша) вісь x_{14} паралельна горизонтальній проекції прямої. Відклавши від нової осі відповідні відстані від фронтальних проекцій точок до старої осі, одержимо натуральну величину відрізка A_4B_4.

б) ***перетворення прямої загального положення в проектуючу пряму***. Для цього треба скористатись натуральною величиною відрізка, тобто виконати дії, описані в пункті а.

Якщо провести площину, перпендикулярну до натуральної величини (рис.40 дія друга), її слід - вісь x_{45}, то, відклавши відстань, позначену потрійною рискою, одержимо проекцію прямої у вигляді точки.

в) ***перетворення площини загального положення в проектуюче положення***. Для цього в площині трикутника було проведено горизонталь ***A-***

1. Перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі (рис.32) вибрано вертикальну площину (її горизонтальний слід - x_{14}). При цьому горизонталь спроектувалася у точку $A_4 \equiv 1_4$, а весь відсік - в пряму $C_4A_4B_4$.

г) ***перетворення площини загального положення в площину рівня (визначення натуральної величини відсіку площини)***. Для цього треба скористатись проектуючим положенням площини, тобто виконати дії, описані в пункті в). Паралельно прямій $C_4A_4B_4$ (рис. 32) проведено слід площини x_{45} та визначено натуральну величину трикутного відсіку, причому відстані до вершин трикутника беремо з площини проекцій $П_1$.

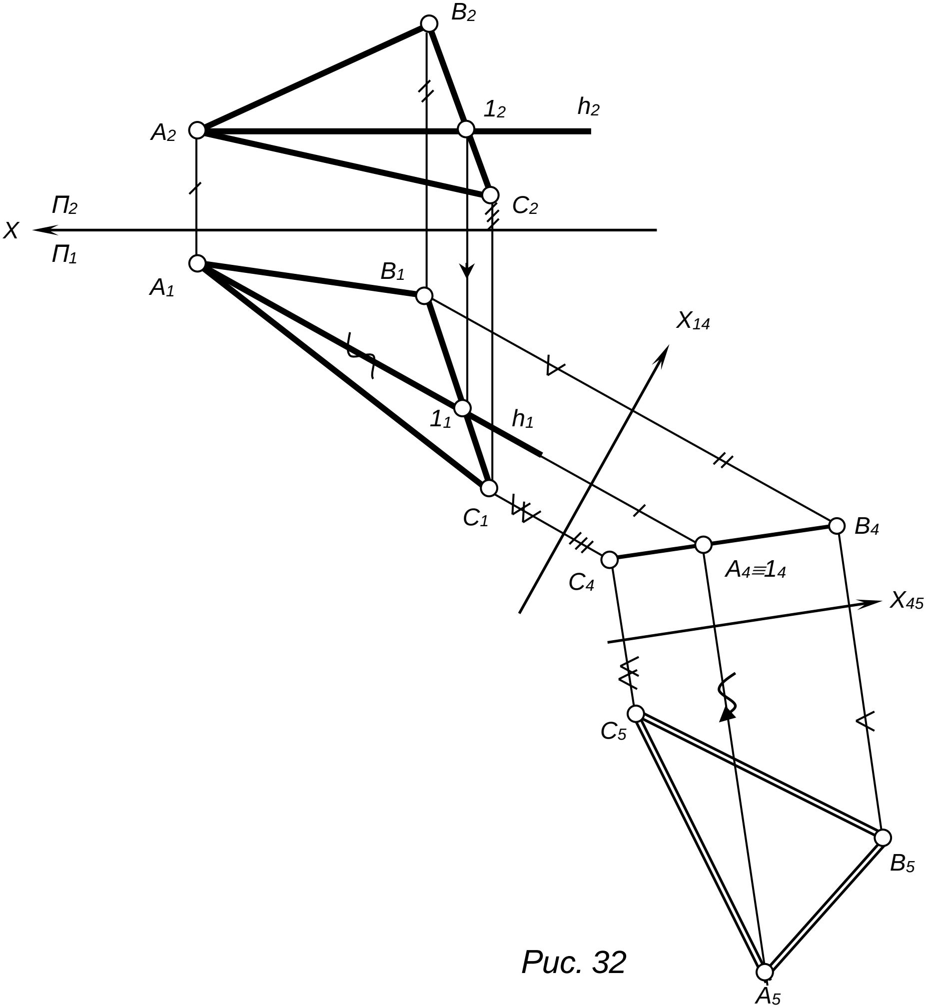


Рис. 32

2 *Плоскопаралельне переміщення (обертання навколо невиявлених осей)*

Якщо при способі заміни площин проекцій геометричні фігури залишаються на місці, а до них певним чином підбираються площини проекцій, то при способі плоскопаралельного переміщення роблять навпаки: ***площини проекцій Π_1 та Π_2 залишаються незмінними, а геометричні фігури переміщуються так, що кожна точка рухається в площині, паралельній площині проекцій.***

На рис.33 показано перетворення відрізка ***AB*** прямої в пряму рівня, а потім - в проектуюче положення. Для цього відрізок спочатку розміщено паралельно площині $\boldsymbol{\Pi_2}$, при цьому кінцеві точки відрізка переміщуються в горизонтальних площинах. Щоб поставити пряму в проектуюче положення, треба в даному випадку натуральну величину відрізка розмістити вертикально, при цьому він переміщується у фронтальній площині.

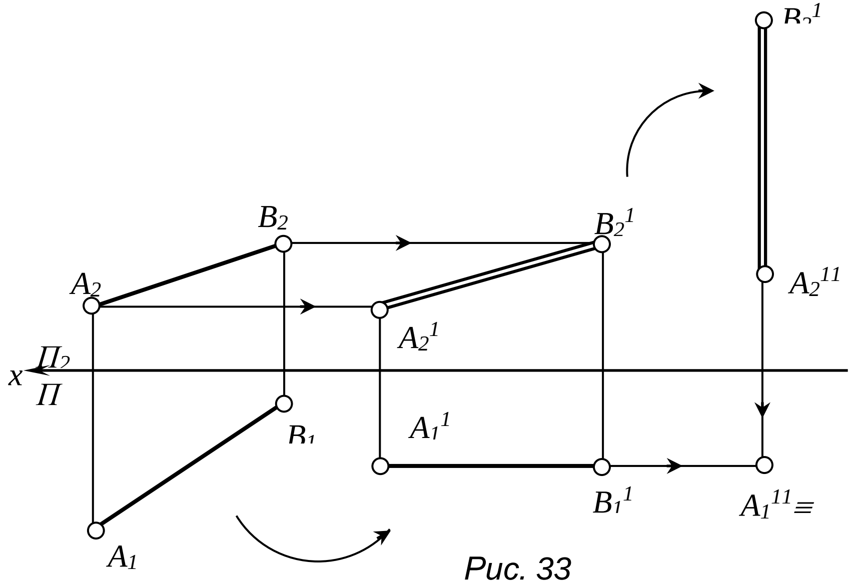


Рис. 33

На рис. 34 показано визначення натуральної величини відстані між двома паралельними прямими загального положення. Спочатку обидва відрізки без зміни їх взаємного положення розміщують паралельно площині $\boldsymbol{\Pi_2}$, при цьому відрізки зображаються в натуральну величину. Повернувши відрізки ще раз навколо невиявленої фронтально-проектуючої осі до вертикального положення, одержимо на полі $\boldsymbol{\Pi_1}$ дійсну відстань між паралельними прямими.

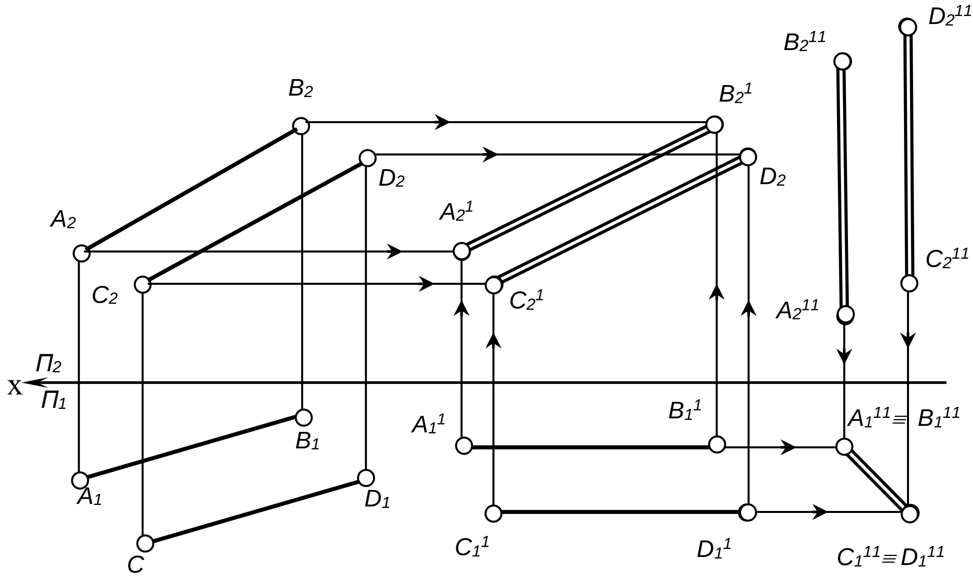


Рис. 34

3 Обертання навколо проектуючих осей

Цей метод є практично аналогом методу плоскопаралельного переміщення, з одним доповненням: ***фігурам надають нове положення, обертаючи їх навколо чітко зафіксованих осей, перпендикулярних площинам проекцій***. На рис. 35 показано відрізок прямої загального положення ***AB***. Для визначення натуральної величини відрізка через його кінцеву точку ***B*** проведено горизонтально-проектуючу вісь, навколо якої відрізок ***AB*** повертають до

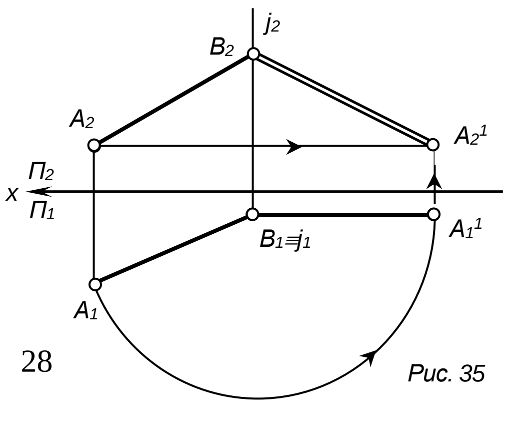


Рис. 35

фронтального положення. Точка ***B*** при цьому переміщується по дузі кола, площина якого перпендикулярна до вертикальної осі ***j***. Натуральну величину показано на $\boldsymbol{\Pi_2}$ подвійною прямою.

Визначення натуральної величини двогранного кута показано на рис. 36 . Для цього ребро двогранного кута ***AB***, що займає загальне положення, треба встановити в проектуюче положення. Спочатку двогранний кут навколо вертикальної осі ***j*** повертають так, щоб ребро його розмістилось фронтально, другим поворотом навколо фронтально-проектуючої осі ***γ*** ребро ставиться у вертикальне положення, при цьому на полі $\boldsymbol{\Pi_1}$ двогранний кут ***α*** зображається в натуральну величину.

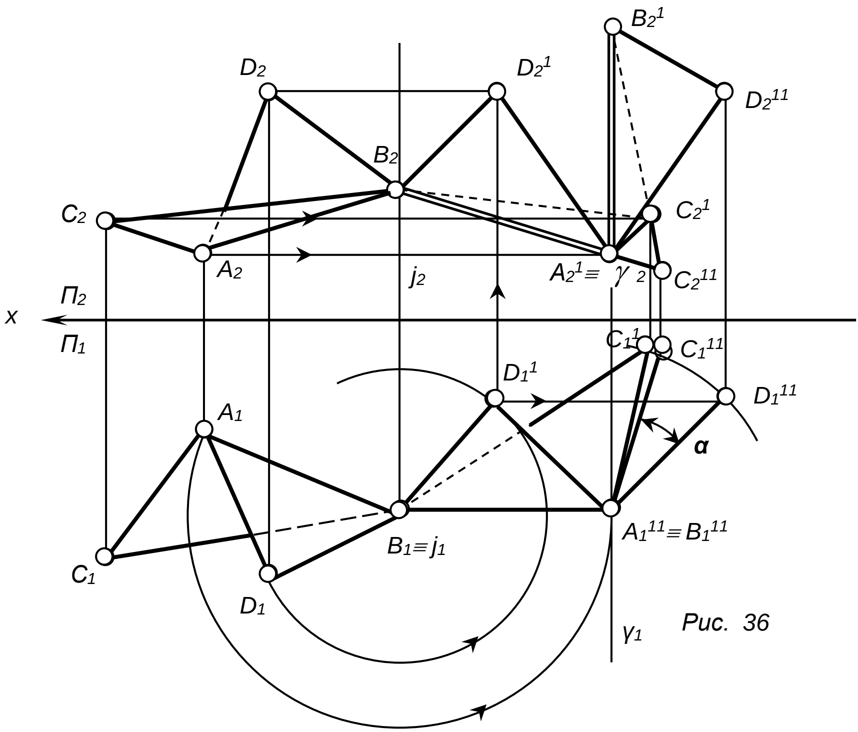


Рис. 36

4. *Обертання навколо ліній рівня*

Крім обертання навколо осей перпендикулярних до площин проекцій, при розв'язанні метричних задач користуються обертанням навколо ліній рівня площин.

На рис. 37 показано площину загального положення, задану трикутним відсіком. Для визначення натуральної величини відсіку площини побудуємо в ній проекції горизонталі, яка служитиме віссю обертання.
Точки ***A*** і ***1***, що належать осі обертання, будуть нерухомими, а точки ***B*** та ***C*** будуть обертатися навколо горизонталі , поки площина не займе горизонтального положення. Точки $\boldsymbol{O_1}$ та $\boldsymbol{O_2}$ – проекції центру обертання для точки ***B***. $\boldsymbol{B_1O_1}$ та $\boldsymbol{B_2O_2}$ – проекції радіуса обертання. Натуральна величина радіуса $\boldsymbol{B_0O_1}$ знаходиться методом прямокутного трикутника. Із точки $\boldsymbol{O_1}$ радіусом $\boldsymbol{O_1B_0}$ проводимо коло до перетину з лінією $\boldsymbol{O_1B_1}$, при цьому вершина ***B*** займе своє нове положення. Такі ж побудови можна було б використати і для вершини ***C***. Але, якщо скористатися нерухомістю точки ***1***, то, провівши лінію з точки $\boldsymbol{B_1}$ через точку $\boldsymbol{1_1}$ до перетину з перпендикуляром $\boldsymbol{C_1C_1^1}$, отримаємо нове положення точки ***C***. Натуральна величина трикутного відсіку виділена подвійними лініями.

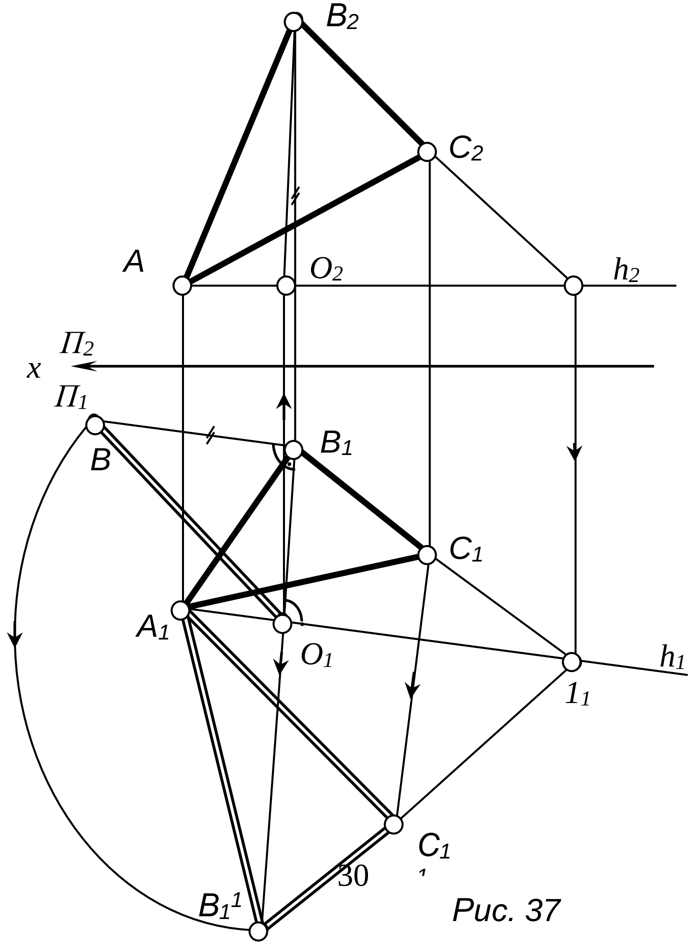


Рис. 37

Питання для самоконтролю:

1. Для чого необхідне перетворення комплексного креслення?
2. Скільки потрібно замін площин проекцій, щоб пряму загального положення зробити проектуючою?
3. Чи можна використати способи заміни площини проекцій та плоско-паралельного переміщення для розв'язання позиційних задач?
4. Чи треба при способі плоско-паралельного переміщення фіксувати на рисунку вісь проекцій?
5. У чому суть методу обертання навколо ліній рівня?

Тема: Метричні властивості пар геометричних елементів.

Лекція – 5, 2 год.

Метричні задачі – це задачі на визначення значень геометричних величин (довжин відрізків, кутів, відстаней).

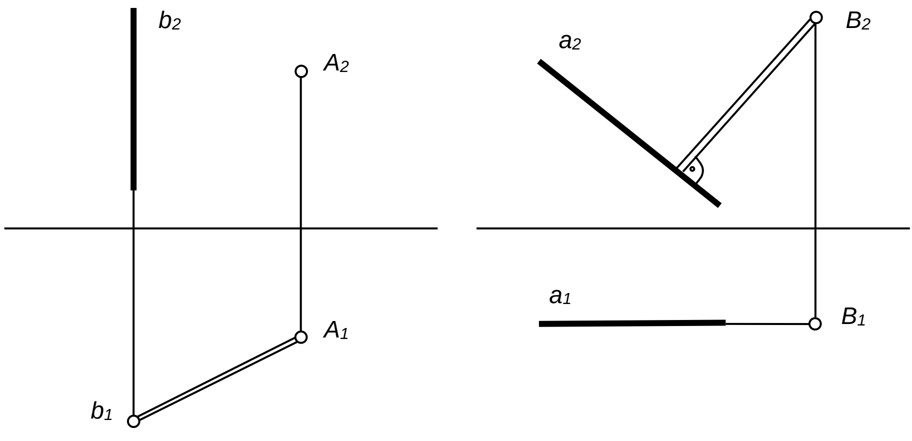
Різновидів метричних задач багато, але кожна з них включає в себе дві основні метричні задачі: **перша - на визначення відстані між двома точками - була розглянута раніше; друга полягає у проведенні перпендикуляра до площини.** На основі вказаних задач можна розв'язати будь-яку метричну задачу.

1 Точка та пряма

При частковому положенні прямої відстань від точки до прямої може проектуватися на одну із площин проекцій у натуральну величину. Це можливо при таких умовах:

а) відстань від точки до прямої проектується в натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо пряма горизонтально-проектуюча, і на фронтальній, якщо пряма фронтально- проектуюча. На рис. 38а показано вертикальну пряму ***в*** та точку ***А*** . Відстань між прямою і точкою зобразиться без спотворення на полі Π_1;

б) відстань від точки до прямої проектується в натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо площина, що задана точкою та прямою - горизонтальна, і на фронтальній проекції, якщо ця площина фронтальна.



а) *Рис.38* б)

На рис.38 б   показано пряму ***a*** та точку ***B***, що задають фронтальну площину. Відстань від точки до прямої зобразиться без спотворення на полі $\boldsymbol{\Pi_2}$.

Для визначення відстані від точки до прямої загального положення треба виконати наступні побудови. Через точку ***A*** проводять площину, перпендикулярну до прямої ***c*** (рис. 39). Знаходять точку перетину прямої ***c*** з цією площиною і з'єднують цю точку з точкою ***A***. Одержаний відрізок ***AB*** є проекціями відстані від точки до прямої. Для знаходження натуральної величини відстані можна скористатися методом прямокутного трикутника. Відрізок $\boldsymbol{A_0B_2}$ – шуканий.

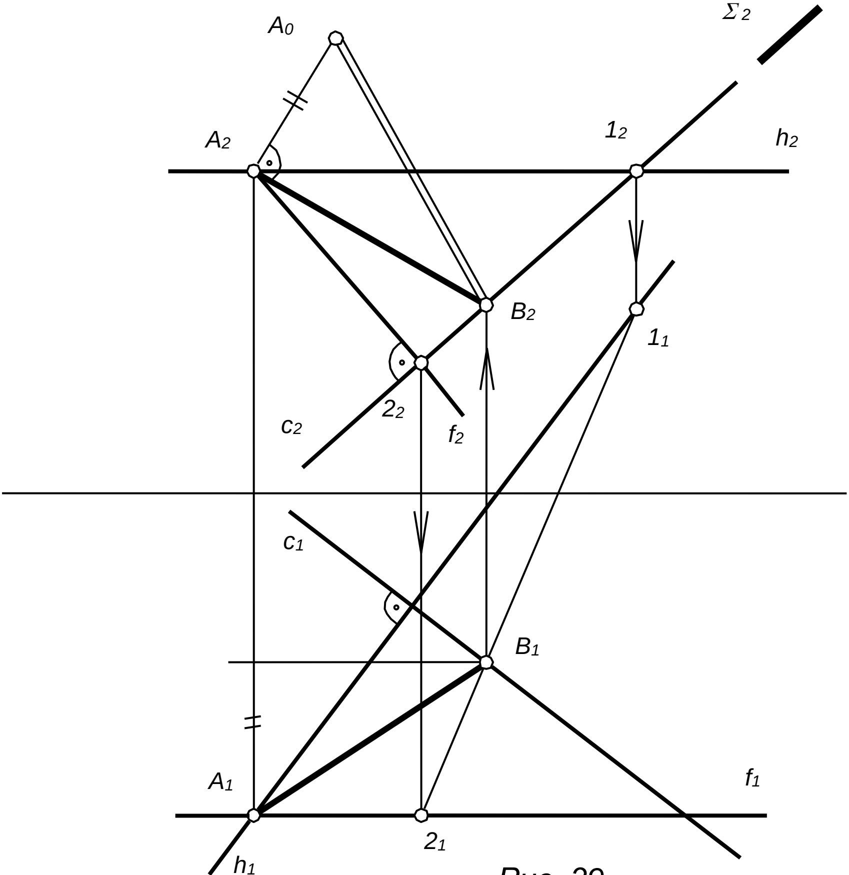


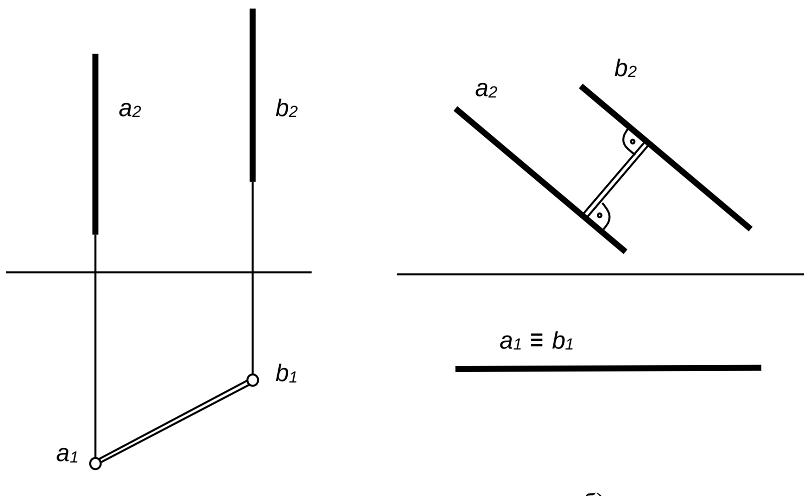
Рис. 39

2. *Дві прямі*

На підставі властивостей, що стосуються відстані між точкою та прямою, формулюються властивості, які характеризують відстань між паралельними прямими. В частковому випадку:

а) відстань між паралельними прямими проектується в натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо прямі горизонтально-проектуючі, і на фронтальній, якщо прямі фронтально-проектуючі (рис. 40а).

б) відстань між паралельними прямими зображається в натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо задана ними площина горизонтальна, і на фронтальній, якщо ця площина фронтальна (рис. 40б).



а) Рис. 40 б)

Відстань між двома паралельними прямими загального положення знаходиться за аналогією із визначенням відстані від точки до прямої, якщо на одній із прямих взяти довільну точку, наприклад ***A***.

Дві прямі, що перетинаються, або мимобіжні прямі *утворюють між собою кут*. Кут між мимобіжними чи прямими, що перетинаються, проектується в натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо прямі горизонтальні, і на фронтальній, якщо вони фронтальні (рис. 41а).Розглянемо взаємну перпендикулярність двох прямих. ***Прямий кут перетину чи мимобіжності проектується в натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо хоча б одна його сторона горизонтальна, та на фронтальній, якщо хоча б одна його сторона фронтальна***. На рис. 41б показано прямий кут перетину, одна сторона якого горизонтальна. Цей кут зображається на полі $\boldsymbol{\Pi_1}$ в натуральну величину.

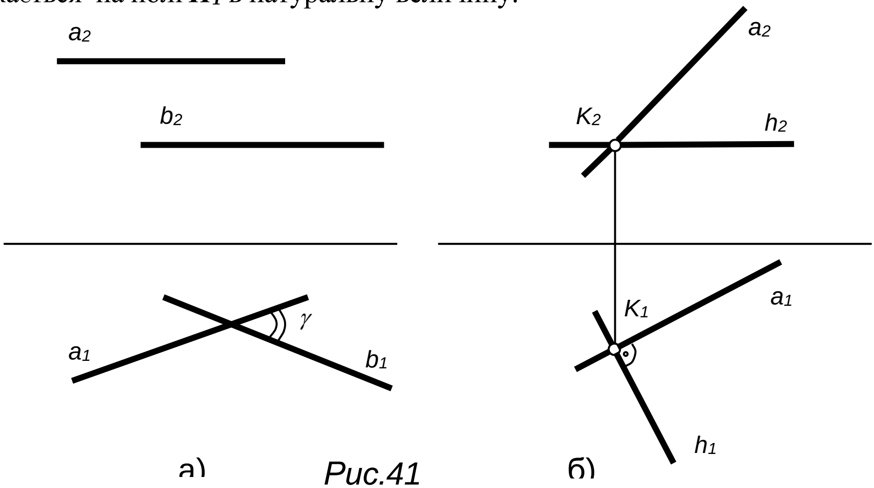


Рис.41

3 Пряма та площина

Метричні характеристики комбінації (пряма та площина) стосуються визначення відстані між прямою і паралельною їй площиною, а також кута між прямою і площиною, якщо пряма і площина непаралельні.

Відстань від прямої до паралельної їй площини проектується в натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо площина горизонтально-проектуюча, та на фронтальній, якщо вона фронтально-проектуюча. На рис. 42а показано відстань між вертикальною площиною ***K*** та прямою ***a***.

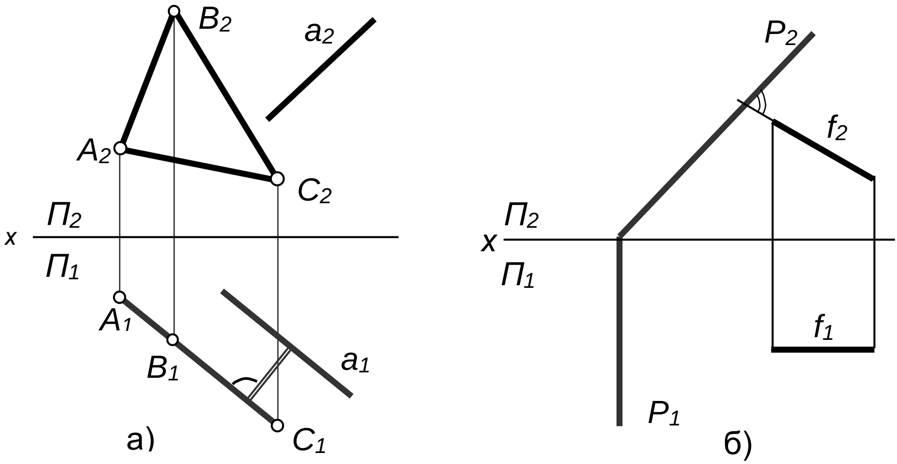


Рис. 42

Кут між прямою та площиною проектується в натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо площина горизонтально-проектуюча а пряма горизонтальна, та на фронтальній проекції, якщо площина фронтально-проектуюча а пряма фронтальна. На рис. 42б показано кут між фронтально-проектуючою площиною ***P*** та фронтальною прямою ***f***.

Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються та належать площині. Приймаючи до уваги властивості проекцій прямого кута, з усієї множини прямих площини за такі лінії доцільно вибрати лінії рівня, тобто горизонталь та фронталь.

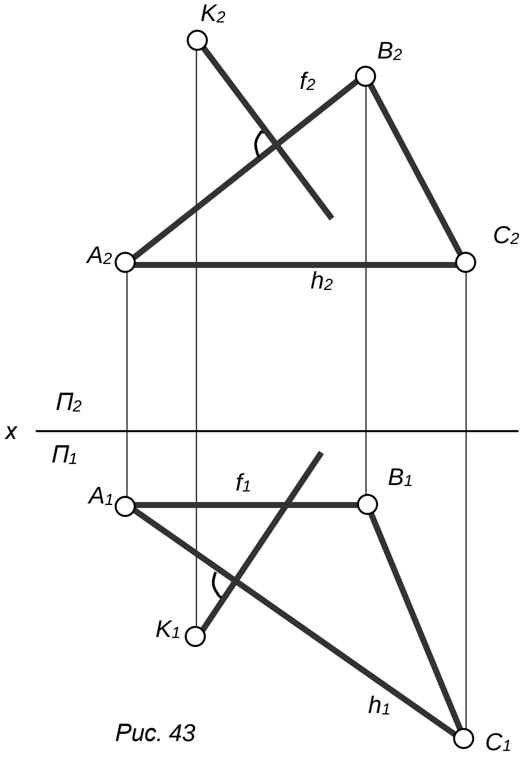


Рис. 43

На рис. 43 показано трикутний відсік, сторона якого ***AC*** є горизонталлю, а ***AB*** - фронталлю. Щоб з точки ***К*** опустити перпендикуляр на площину цього відсіку, досить провести фронтальну проекцію його перпендикулярно до фронтальної проекції фронталі $\boldsymbol{A_2B_2}$, а горизонтальну - перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі $\boldsymbol{A_1C_1}$. Звідси: ***проекція прямої, перпендикулярної до площини, на горизонтальній проекції площини перпендикулярна до проекції горизонталі, на фронтальній - перпендикулярна до проекції фронталі площини***.

4 Точка та площина

Відстань від точки до площини проектується в натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо площина горизонтально-проектуюча, та на фронтальній, якщо площина фронтально-проектуюча. На рис. 44а показано точку ***A*** та вертикальну площину ***Ф*** , відстань між якими проектується без спотворення на горизонтальній площині проекцій.

Для визначення відстані від точки до площини загального положення необхідно з точки опустити перпендикуляр до площини та знайти його основу. На рис. 44б показано трикутний відсік, сторона ***AC*** якого - горизонталь, а сторона ***AB*** - фронталь. З точки ***D*** проведено проекції перпендикуляра ***n,*** його горизонтальна проекція перпендикулярна до горизонталі на полі Π_1, а фронтальна проекція перпендикулярна до фронталі на полі Π_2. Основу перпендикуляра визначено січною горизонтально-проектуючою площиною ***Г*** , яка перетне відсік по прямій ***1-2***. Основа перпендикуляра - точка ***E***, а проекції - відстані від точки до площини D_1E_1 та D_2E_2. Натуральна величина відрізка ***DE*** знайдена за допомогою методу прямокутного трикутника.

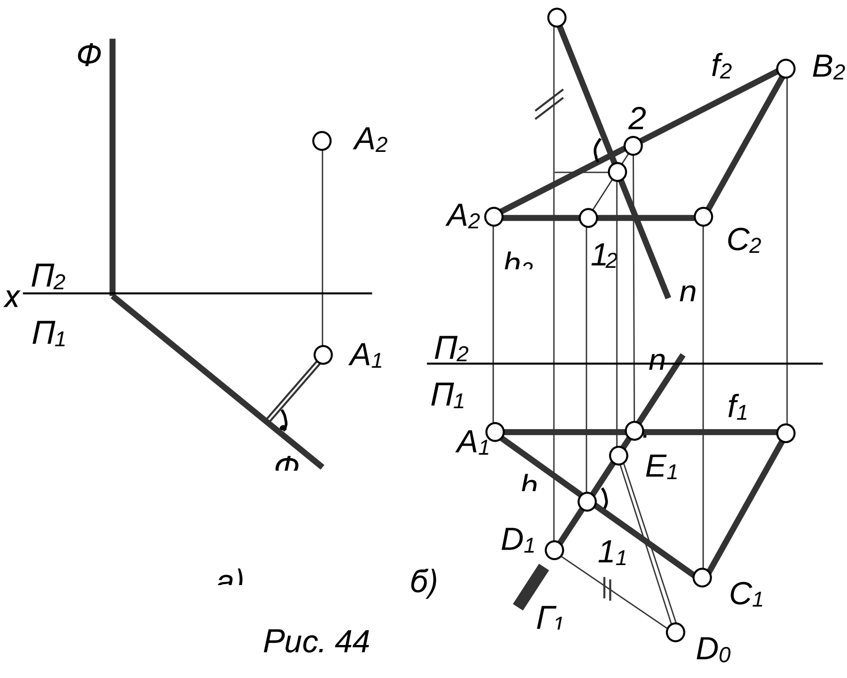


Рис. 44

5 Дві площини

Розглянемо метричні характеристики (відстані та кути) між двома площинами. Відстань між паралельними площинами проектується в натуральну величину на поле Π_1, якщо площини горизонтально-проектуючі, та на поле Π_2, якщо площини фронтально-проектуючі. На рис. 45а показано відстань між двома паралельними вертикальними площинами Φ та T, що проектується без спотворення на поле Π_1. Кут між двома площинами (двогранний кут) проектується в натуральну величину на полі Π_1, якщо площини горизонтально-проектуючі, та на Π_2 - якщо вони фронтально-проектуючі.

На рис. 45б зображено дві фронтально-проектуючі площини, кут між якими зображається без спотворення на полі Π_2.

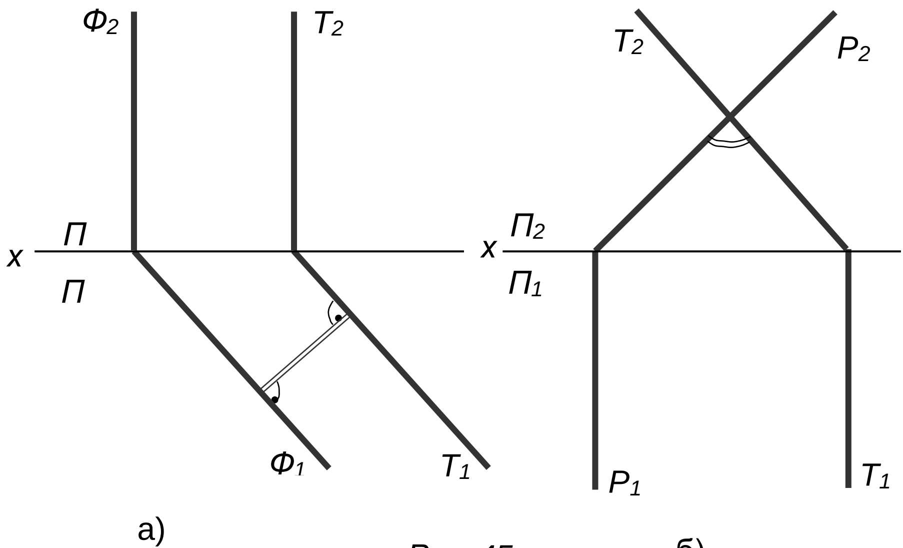


Рис. 45

Дві площини перпендикулярні, якщо одна з площин проходить через перпендикуляр до другої площини. Проведемо площину, перпендикулярно до заданої, використовуючи розглянуту властивість, відповідно проведення перпендикуляра до площини. На рис.46 площину задано горизонталлю h та фронталлю f . Через точку A до цієї площини проведемо перпендикуляр n. Якщо через будь-яку точку прямої n провести довільну пряму, то вона разом з перпендикуляром задає площину, перпендикулярну до заданої. Приймаючи до уваги, що пряму проводять довільно, їх може бути нескінченна множина.

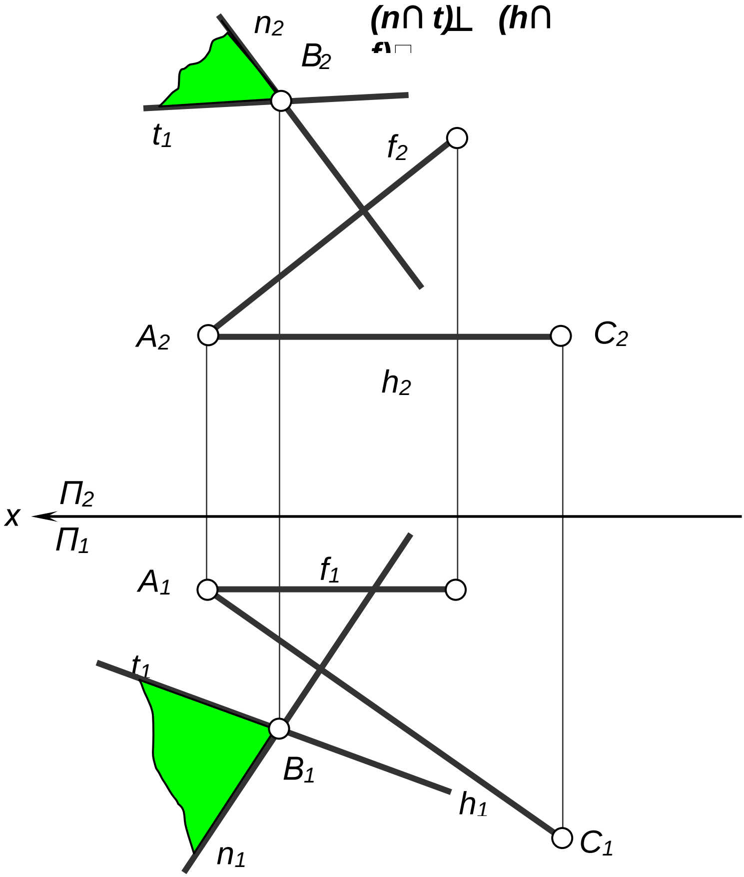


Рис. 46

Питання для самоконтролю:

1. Як повинні бути розміщені дві мимобіжні прямі загального положення, щоб відстань між ними зображалась на одній з площин проекцій?
2. Чи може непрямий кут перетину двох прямих проектуватись на одній з площин проекцій прямим кутом?
3. Скільки площин можна провести через довільну точку простору перпендикулярно до даної прямої?
4. Скільки площин можна провести через довільну точку простору перпендикулярно до даної площини?

БАГАТОГРАННІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ПОВЕРХНІ.

Тема: ***Багатогранні поверхні, їх проекції. Перетин багатогранників з площиною та прямою. Взаємний перетин багатогранників.***

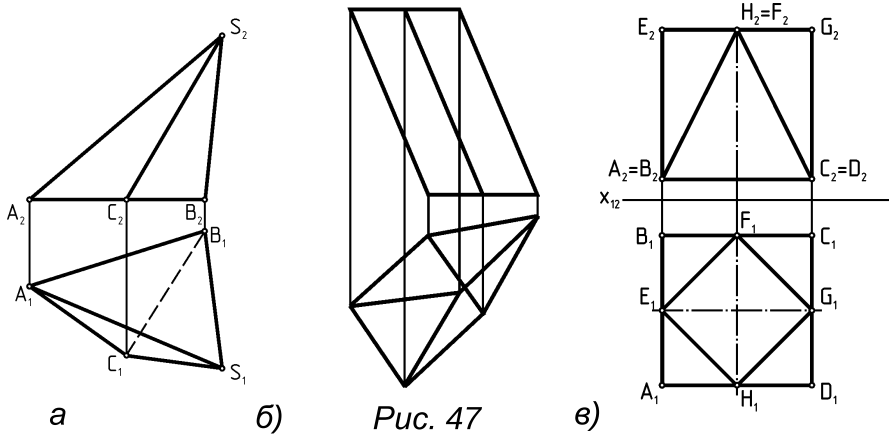
Лекція – 6,7- 4 год.

1. *Багатогранники. Задання та зображення багатогранників.*

Серед багатогранників найбільше поширення мають піраміди та призми. Пірамідою називають багатогранник, у якого всі грані, крім однієї, мають спільну вершину, яка є вершиною піраміди (рис.47а).

Призма – це багатогранник, обмежений призматичною поверхнею та двома паралельними площинами, в яких лежать основи призми, грані призматичної поверхні називаються гранями призми (рис.47б). Якщо ребра призми перпендикулярні до її основи, призму називають прямою, коли ця умова не дотримується – похилою.

Призматоїдом називають многогранник, всі бічні грані якого – трикутники або трапеції. Основи призматоїда найчастіше паралельні одна одній та є довільними многокутниками. На рис.47*в* показано призматоїд, нижньою та верхньою основою якого є квадрати.



а *б)* *Рис. 47* *в)*

2. *Перетин багатогранників прямими та площинами.*

При перетині багатогранників площиною утворюється плоский багатокутник, кожна вершина якого є точкою перетину ребра многогранника з площиною, а сторона многокутника є лінією перетину грані многогранника з заданою площиною. ***Тобто знаходження лінії перетину зводиться до розв'язання декількох перших або других позиційних задач*** (див. лекція 3,4).

На рис. 48 показано знаходження проекцій лінії перетину похилої призматичної поверхні з площиною. Задачу такого типу можна також розв'язати, виконавши перетворення площини в проектуюче положення разом із многогранником.

На рис. 50 методом заміни площин проекцій площину трикутника загального положення переводять на площину проекцій $\boldsymbol{\Pi_4}$ в проектуюче положення.

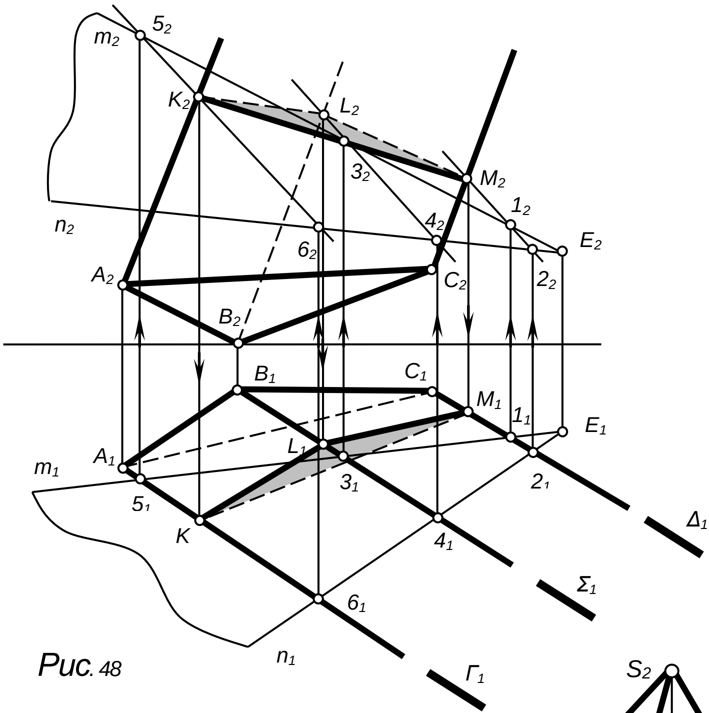


Рис. 48

На $\boldsymbol{\Pi_4}$ проектується також піраміда ***SABC***. Лінія перетину $\boldsymbol{1_4, 2_4, 3_4}$ визначається зразу. Проекції лінії перетину на $\boldsymbol{\Pi_1}$ та $\boldsymbol{\Pi_2}$ визначаються за відповідністю.

Для знаходження точок перетину прямої з многогранником використовують допоміжні проектуючі площини. На рис. 49 пряму ***AB*** заключають у фронтально-проектуючу площину ***Г***. Переріз допоміжної площини з многогранником дасть ламану лінію ***123***, в площині якої знаходиться

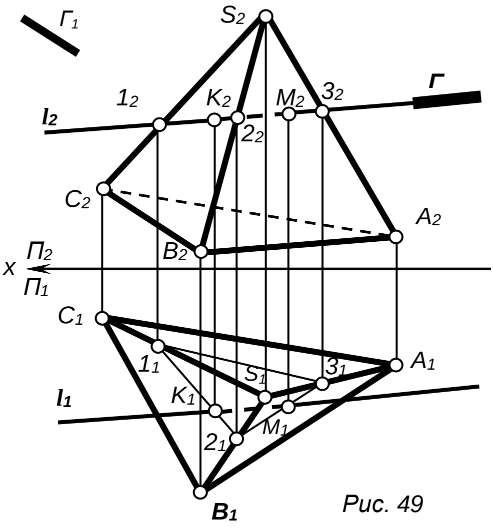


Рис. 49

пряма. Точки перетину ***К*** і ***М*** прямої з лінією ***123*** будуть шуканими. Видимою точкою перетину вважається та, яка належить видимій грані багатогранника.

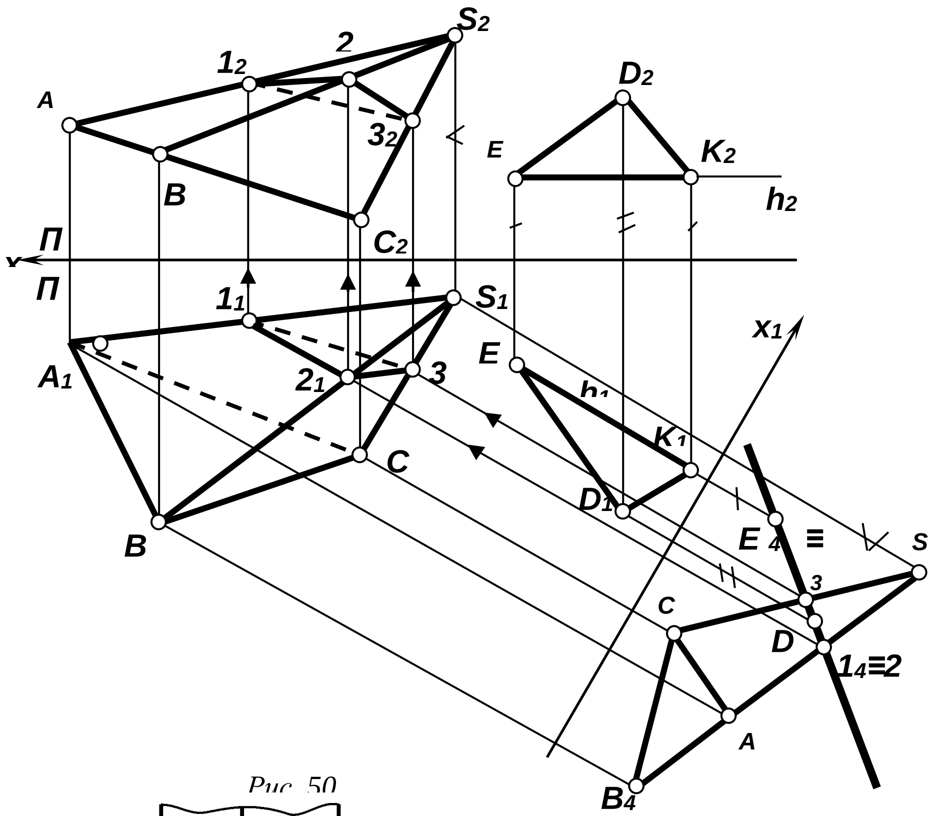


Рис. 50

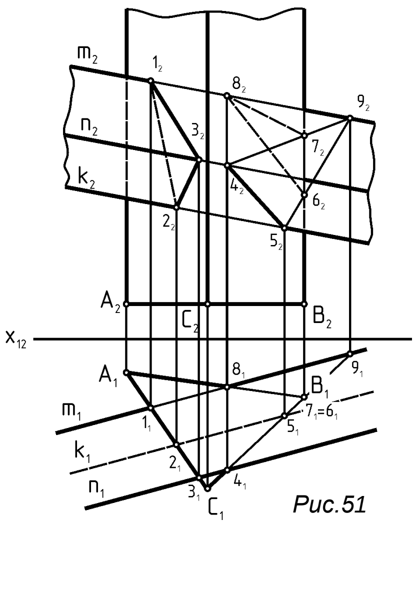


Рис.51

3. Взаємний перетин багатогранних поверхонь.

При взаємному перетині багатогранників можливі два випадки: врізання та наскрізне проникнення.

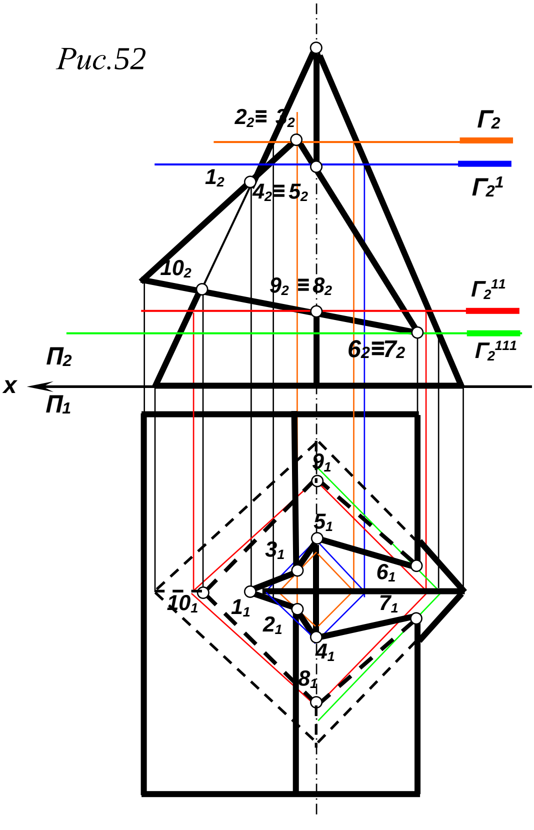
На рис.51 взаємно перетинаються дві призми: пряма і похила. З розгляду горизонтальної проекції призм видно, що має місце наскрізне проникнення. Оскільки призма ***АВС*** пряма, то лінії взаємного перетину лежатимуть у горизонтально-проектуючих гранях, тобто за горизонтальними проекціями ліній перетину треба побудувати фронтальні. Трикутник входу ***1-2-3***

визначається за допомогою вертикальних прямих відповідностей. П'ятикутник виходу визначається трьома точками на ребрах похилої призми та двома точками на вертикальному ребрі, що проходить через ***B***. Для визначення точок на цьому ребрі грань ***CB*** продовжена до перетину з ребром ***m*** у точці ***9***, яка разом з точками ***4*** та ***5*** задасть на полі Π_2 трикутник. У перетині цього трикутника з ребром, що проходить через точку ***B***, знайдуться визначені точки.

При визначені видимості береться до уваги те, що видимою буде лінія, яка утворилася в результаті перетину двох видимих граней.

На рис. 52 показано знаходження проекцій лінії перетину піраміди та призми. Ребра призми фронтально-проектуючі. Точки ***1, 10, 4≡5, 9≡8***- це точки перетину ребер піраміди з гранями призми. Точки ***2≡3, 6≡7*** - точки перетину ребер призми з гранями піраміди.

Рис.52



Розгортки граних поверхонь.

Розгорткою поверхні називається плоска фігура, що утворюється при суміщенні відсіку поверхні з площиною при його розгинанні. Деякі геометричні властивості елементів поверхонь не змінюються при розгортці. Так, лінія поверхні переходить в лінію величини плоских кутів та площин, лініями, зберігаються.

Точна розгортка може бути побудована лише для ***многогранників та відсіків розгортуваних поверхонь (циліндра, конуса, торса)***.

Поверхню многогранника завжди можна сумістити з площиною, тому що вона складається з плоских відсіків. Однак при послідовному суміщенні граней складних многогранників з площиною можливі накладання на фігурі розгортки. Побудова точної розгортки розгортуваної поверхні пов’язана з

обчислюванням довжини кривої лінії, що становить певні труднощі. Тому розгортки, як правило, будують наближено. Виключення являють собою циліндри та конуси обертання, для яких параметри розгортки визначаються легко.

1 Побудова розгортки поверхні багатогранника

При побудові розгортки граної поверхні всі його грані суміщаються з площиною проекцій або з площиною, яка паралельна площині проекцій, для

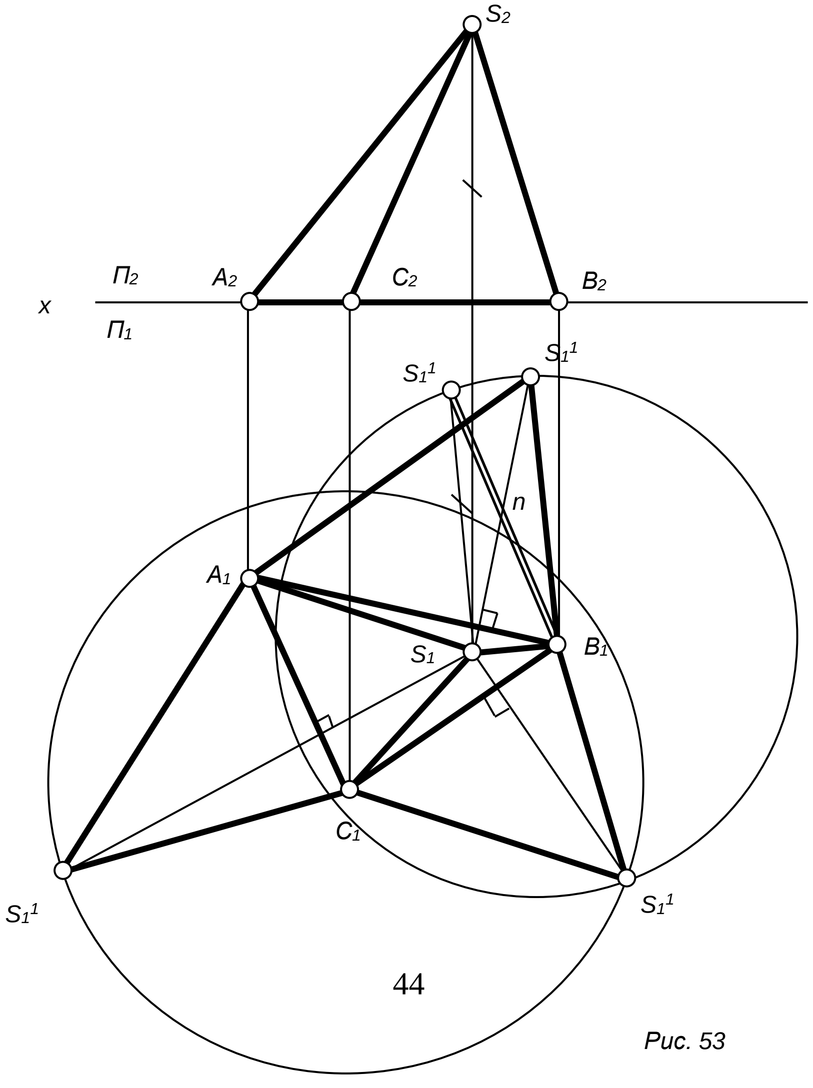


Рис. 53

того, щоб усі грані зобразились не спотворено. Можна рекомендувати два способи: обертання граней навколо спільних ребер, паралельних площині проекцій, та побудову неспотворених граней за визначеними довжинами ребер (для трикутних граней).

На рис. 53 показана розгортка тригранної піраміди ***SABC*** на горизонтальну площину її основи. Для цього кожна грань обертається навколо її горизонталі - ребра основи. Побудова розгортки починається з обертання грані ***SBA*** навколо горизонталі ***BA***. Проекції $\boldsymbol{B_1}$ та $\boldsymbol{A_1}$ при обертанні не змінюють свого положення, а вершина ***S*** переміщується у просторі по колу, площина якого перпендикулярна до осі обертання ***BA***. Горизонтальною проекцією площини є пряма ***n***, перпендикулярна до проекції $\boldsymbol{B_1A_1}$. Щоб визначити положення точки $\boldsymbol{S^1_1}$ розгортки, спочатку

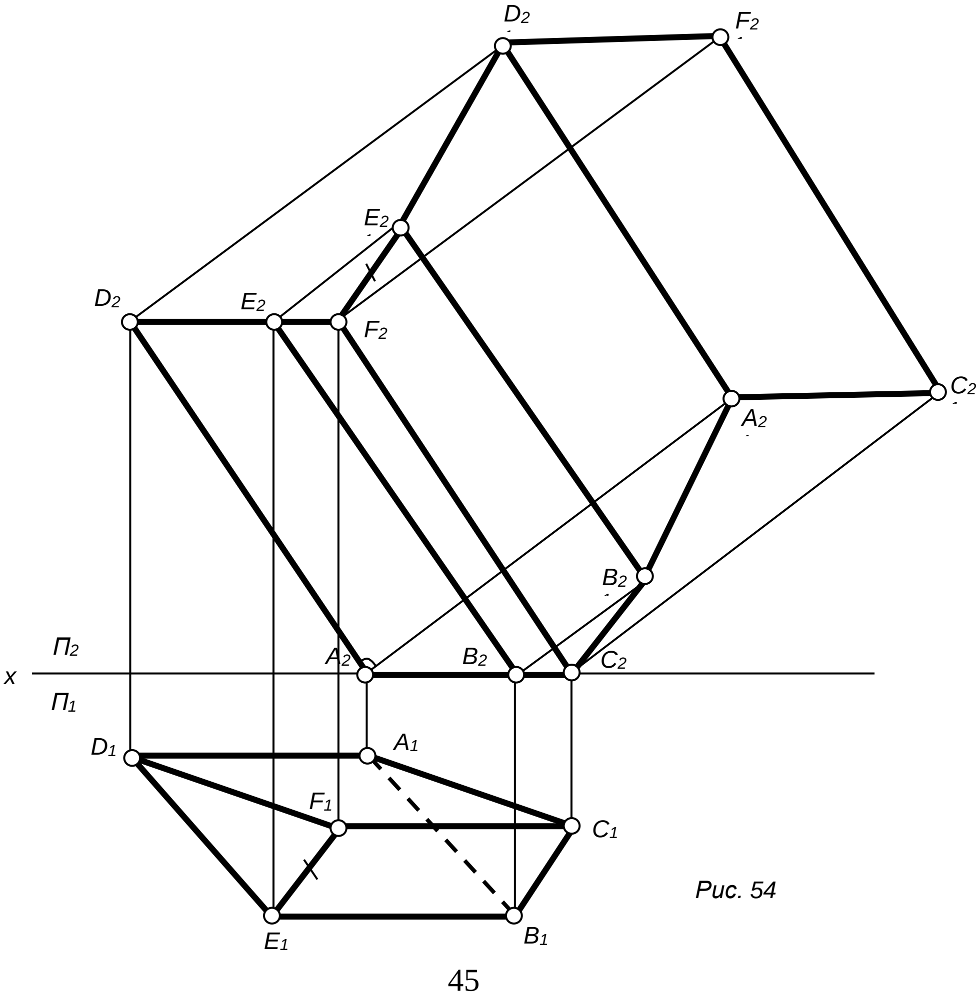
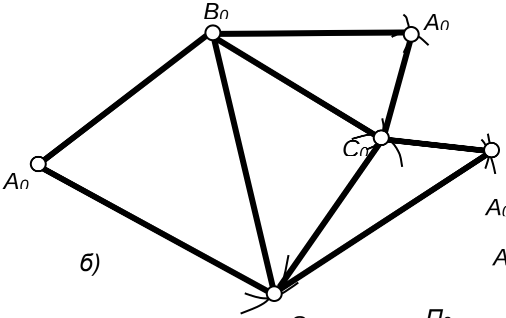


Рис. 54

знаходять натуральну величину $S^{11}{}_1B_1$ ребра ***SB*** за допомогою способу прямокутного трикутника, а потім відстань $S^{11}{}_1B_1$ відкладають від точки B_1 на перпендикулярі ***n***. Трикутник $S^{1}{}_1B_1A_1$ є натуральною величиною грані ***SBA***. Бічні грані піраміди ***SCB*** та ***SAC*** обертаються навколо ***CB*** та ***AC***. Побудована плоска фігура є розгорткою поверхні піраміди на горизонтальну площину її основи.

На рис. 54 показано побудову розгортки бічної поверхні призми з фронтальними ребрами послідовним обертанням граней навколо бічних ребер до суміщення граней з фронтальною площиною, що проходить через ребро ***CF***. Вершини многогранника переміщуються у фронтально-проектуючих площинах, перпендикулярних до ребра ***CF***. При побудові враховано, що ребра основ призми горизонтальні і зображуються на горизонтальній проекції без спотворення.

Якщо всі ребра многогранника знаходяться в загальному положенні, спочатку визначають їх натуральні довжини, а потім будують розгортку.



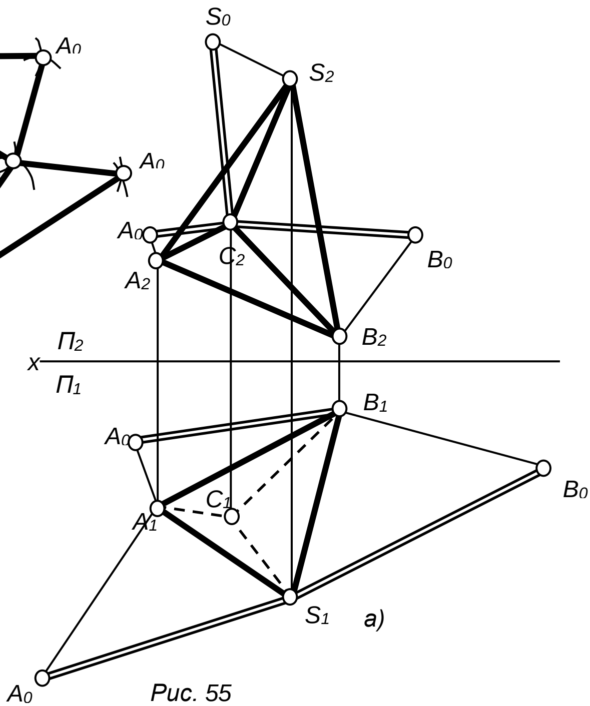


Рис. 55

На рис. 55 а зображено тригранну піраміду у загальному положенні. За допомогою способу прямокутного трикутника знайдені н./в. всіх ребер.

На рис. 55 б спочатку побудована грань $A_0B_0S_0$. Для цього на довільній прямій відкладено н./в. ребра ***AB***, і з точок A_0 та B_0 засічками, які дорівнюють натуральним величинам ребер ***AS*** та ***BS***, побудовано точку S_0. Точки C_0, A_0 розгортки побудовані за допомогою засічок із відповідних вершин.

Питання для самоконтролю:

1. При якій мінімальній кількості граней може утворюватися просторовий кут?
2. Якими плоскими многокутниками обмежуються правильні опуклі многогранники?
3. Чи можуть основи призматоїда бути конгруентними?
4. Як визначити видимість точок перетину двох многогранних поверхонь?
5. . Що називається розгорткою поверхні?
6. Які геометричні властивості елементів фігур не змінюються при розгортці?
7. Як будуються розгортки циліндрів та конусів?

Тема: Криволінійні поверхні. Їх утворення і класифікація Визначники поверхонь. Перетин поверхонь з прямою та площиною.

Лекція 8, 9 4год.

1. Визначення криволінійних поверхонь.

Поверхню можна уявити як неперервну множину послідовних положень лінії, що рухається в просторі за певним законом.

Поверхню розглядають, як неперервну множину точок.

Поверхню можна задати: а) аналітично; б) таблично; в) графічно.

Поверхні, які можна описати неперервним рухом кривої за певним законом утворюється ***кінематичним методом*** (рис.56).

а – твірна; ***б*** –направляюча;

G – площина паралелізму.

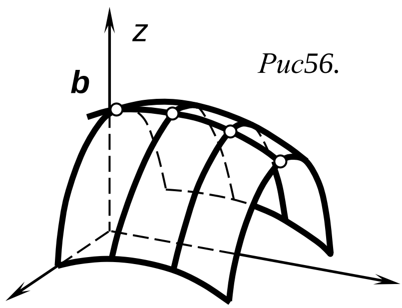


Рис56.

Поверхні, які важко описати математично, задаються **каркасом (лінійним, точковим).**

Упорядкована множина точок або ліній, що належать поверхні, називається її каркасом.

2. Головні ознаки класифікації поверхонь (рис. 57).

1. по закону руху твірної:
   - поверхні обертання;
   - гвинтові поверхні;
   - поверхні паралельного переносу.
2. по виду твірної:
   - прямолінійна твірна;
   - криволінійна твірна.
3. по закону зміни форми твірної:
   - постійна твірна;
   - змінна твірна.
4. по принципу розгортуваності:
   - розгортувані;
   - нерозгортувані.
5. по способу задання:
   - аналітично;
   - графічно;
   - таблично.
6. по диференційним характеристикам:
   - гладкі;
   - негладкі.

Класифікація криволінійних поверхонь.

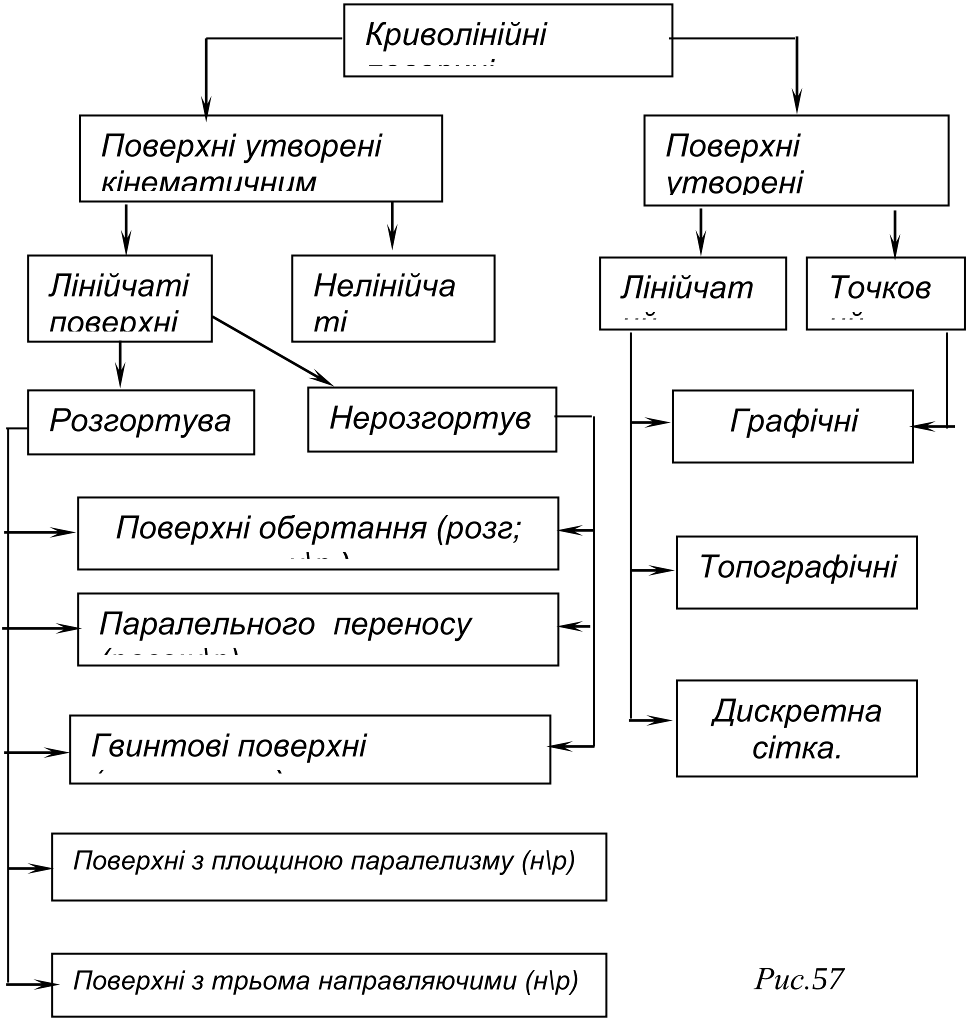


Рис.57

3. ***Визначник поверхні.***

Криволінійна поверхня називається заданою, якщо за однією проекцією точки, що лежить на поверхні, можна визначити її другу проекцію. Сукупність умов, необхідних для однозначного задання криволінійної поверхні називається ***визначником поверхні*** (D)

$D = D_Г + D_А$;

$D_Г$ – геометрична частина; $D_А$ – алгоритмічна частина

Наприклад: циліндричну поверхню обертання з кінематичної точки зору можна уявити: а) як слід, що залишає в просторі пряма, рухаючись навколо осі D(a, i)
б) як слід від обертання кривої, що належить поверхні прямого кругового циліндра, навколо осі

в) як результат поступального руху кола, центр О, якого лежить на осі, а площина в якій лежить коло перпендикулярна до цієї осі.
г) як поверхня утворена поступальним рухом сфери, центр якої лежить на осі.

Оскільки існують: обертальний, поступальний, гвинтовий рух, відповідно класифікуються поверхні: - поверхні обертання, - поверхні паралельного переносу, - гвинтові поверхні.

4. Поверхні, утворені кінематичним методом.

Поверхні, утворені обертанням твірної лінії навколо нерухомої осі, називаються поверхнями обертання. Найпростішими прикладами таких поверхонь є циліндр, конус обертання та сфера. Всі поверхні обертання можна віднести до циклічних поверхонь. Визначник поверхні обертання має вигляд:

$$D = (a, i)$$

На рис. 58 показані проекції поверхні обертання, заданої проекціями ліній визначника.

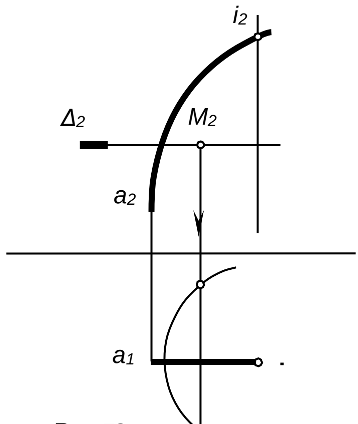


Рис. 58

Поверхні, утворені поступальним рухом твірної, називаються поверхнями паралельного переносу. Визначник такої має вигляд : $D = (m, n)$.

На рис. 59 показано проекції поверхні паралельного переносу.

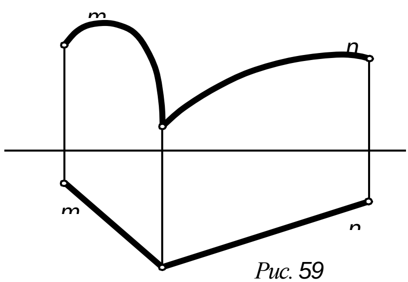


Рис. 59

Поверхні, утворені гвинтовим рухом (обертальним + поступальним) твірної навколо осі, називаються гвинтовими.

Визначник поверхні має вигляд

$$\boldsymbol{D = (b, i)}.$$

На рис. 60 показано побудову проекцій найпоширенішої в інженерній практиці поверхні прямого гелікоїда. Лінії каркаса поверхні паралельні горизонтальній площині і перетинають напрямну лінію і вісь обертання.

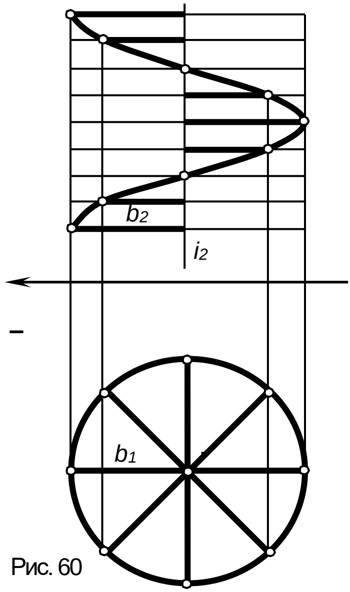


Рис. 60

5. Дискретизація та інтерполяція поверхонь.

В практиці конструювання архітектурних та технічних форм виникає потреба представлення поверхні як неперервним, так і дискретним каркасом. У зв'язку з цим виникають задачі перезадання каркаса поверхні.

Виявлення на поверхні дискретної множини ліній або точок, положення яких відповідає заданим умовам, називається дискретизацією поверхні. Прикладом дискретизації може бути розділення поверхонь збірного просторового покриття на збірні елементи або нанесення сітки кінцевих елементів на поверхню оболонки для її розрахунку на міцність та стійкість.

Задача, протилежна дискретизації, називається інтерполяцією. В практиці проектування часто як вихідну форму представлення поверхні приймають її дискретний каркас. Але таке представлення не є способом її задання, оскільки в цьому випадку неможливо визначити положення довільної точки, яка належить поверхні. Отже, виникає задача відновлення поверхні за її дискретним каркасом.

Багато задач потребують наближеної заміни складної поверхні більш простими, що мають певні властивості. Наприклад, для побудови наближеної розгортки нерозгортуваної поверхні її замінюють відсіками конусів або циліндрів, для яких і будують розгортку. Така наближена заміна однієї поверхні іншими називається ***апроксимацією*** і виконується як дві послідовні операції дискретизації та інтерполяції.

6. ***Перетин кривих поверхонь площиною та прямою лінією.***

При перерізах поверхонь площиною утворюється плоска крива лінія, кожна точка якої є точкою перетину лінії каркаса поверхні з січною площиною. Для побудови точок перерізу можуть бути застосовані способи

допоміжних січних площин або способи перетворення креслень. Допоміжні січні площини в більшості випадків обираються проектуючими, що дає змогу визначити множину точок перетину плоских ліній каркаса поверхні з заданою площиною. Спосіб перетворення проекцій дозволяє перевести площину чи поверхню, що перетинаються, в проектуюче положення і спростити розв'язання задачі. Отже, обидва способи грунтуються на ***алгоритмах побудови перерізу поверхні проектуючою площиною***.

а) Перетин поверхні проектуючою площиною

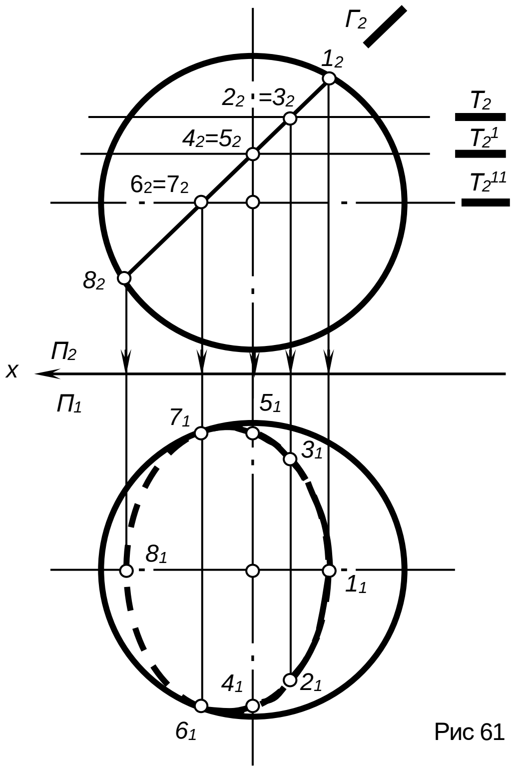


Рис 61

На рис. 61 показано побудову перерізу сфери проектуючою площиною ***Г***. Така площина на площині проекцій, до якої вона перпендикулярна, зображується прямою лінією. Ця проекція називається ***виродженою***. Одна з проекцій лінії перерізу поверхні завжди збігається з виродженою проекцією проектуючої січної площини. Отже, побудова лінії перерізу зводиться до знаходження її другої відсутньої проекції або до визначення другої проекції множини точок, що належать поверхні. Друга проекція точки, що належить будь-якій лінії, будується просто за відповідністю, тому для побудови другої проекції лінії перерізу досить задати поверхню у вигляді множини простих ліній каркаса, фронтальну проекцію яких можна накреслити інструментально без додаткових побудов. Горизонтальна проекція кожної точки лінії перерізу визначається як проекція точки, що належить відповідній лінії каркаса.

Для побудови точок ***4,5*** і ***2,3*** проведені допоміжні горизонтальні площини.

б) Конічні перерізи.

При перетині конуса обертання площинами утворюються криві другого порядку (еліпс, парабола, гіпербола, коло), які ще називають **коніками**. На рис. 62 показано переріз конуса обертання різними проектуючими площинами. Якщо січна площина паралельна двом прямолінійним прямим конуса, то вона перетинає його по **гіперболі**, якщо площина - паралельна одній твірній, то вона перетинає конус по **параболі**, якщо площина не паралельна жодній твірній - то вона перетинає конус обертання по **еліпсу**, і нарешті, якщо площина перпендикулярна осі конуса, то вона перетне його по **колу**.

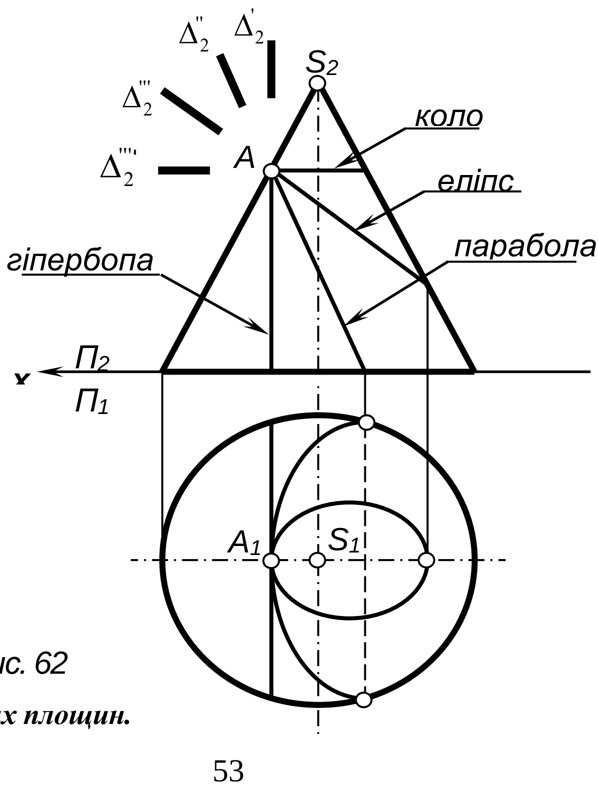


Рис. 62

в) Метод січних площин.

На рис. 63 показана побудова перерізу поверхні обертання площиною загального положення за допомогою допоміжних січних площин. Будь-яка січна площина перетинає задану січну площину по прямій лінії, а поверхню - по лінії її каркасу. Ці дві лінії, перетинаючись між собою, визначають точки, спільні для поверхні та заданої січної площини. Використання множини січних площин дає змогу побудувати множину точок лінії перерізу.

Отже, розв'язання задачі зводиться до вибору множини допоміжних площин, що перетинають поверхню по простих лініях каркаса (прямих або колах), які можна накреслити інструментально без допоміжних побудов.На

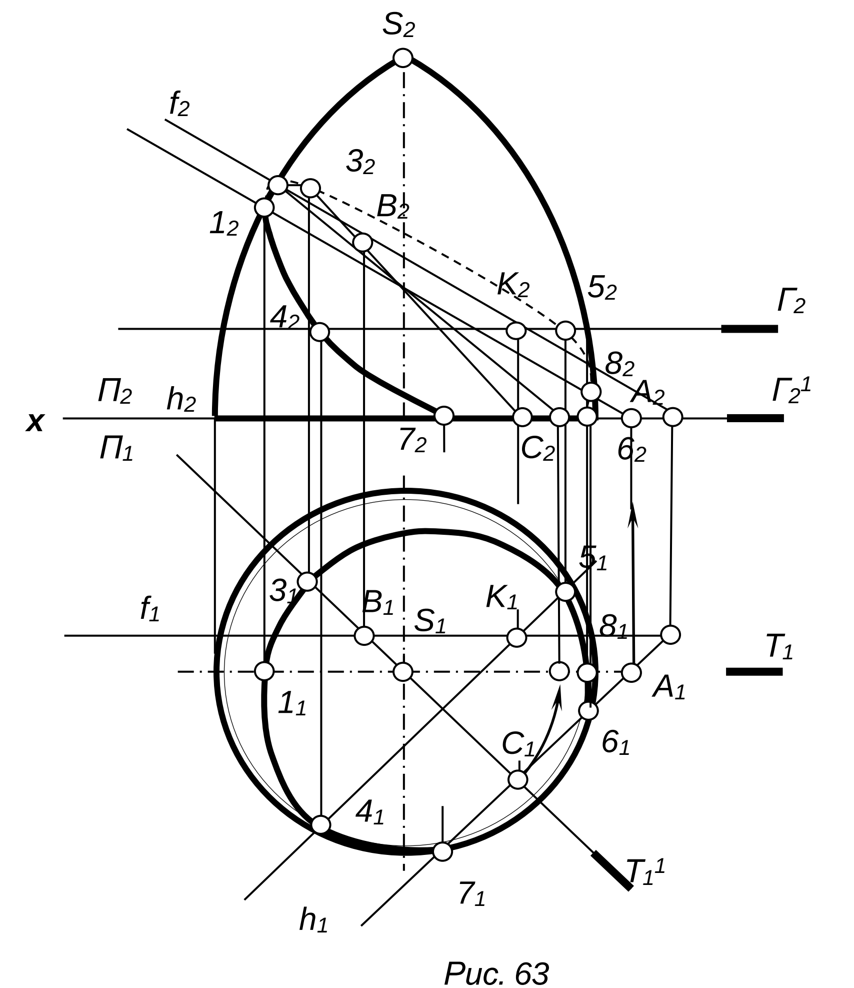


Рис. 63

рис. 63 січна площина загального положення задана фронталлю ***f*** та горизонталлю ***h***. Для розв'язання задачі використані допоміжні січні горизонтальні площини, які перетинають поверхню по колах, та горизонтально-проектуючі площини, що перетинають поверхню по меридіанах. Спочатку визначають **характерні точки** проекцій перерізу. До них належать точки на контурному меридіані, а також найвища та найнижча точки лінії перерізу.

Для визначення точок ***1*** та ***8*** перерізу, що лежать на контурному меридіані, проведено допоміжну фронтальну площину ***T***, що проходить через вісь поверхні та перетинає її по цьому меридіану. Задана січна площина перетинається допоміжною площиною ***T*** по фронталі, горизонтальна проекція якої збігається з ***T*** , а фронтальна проекція паралельна $\boldsymbol{f_2}$ та проходить через точку $\boldsymbol{A_2}$ перетину горизонталі ***h*** з ***T***. Горизонтальні проекції точок ***1*** та ***8*** знайдено за відповідністю в площині ***T***. Для визначення найвищої точки ***3*** перерізу через вісь проведено допоміжну січну горизонтально проектуючу площину $\boldsymbol{T^1}$, перпендикулярну до горизонталі ***h***. Площина $\boldsymbol{T^1}$ перетинає задану площину по лінії найбільшого нахилу ***BC***, а поверхню - по меридіану. Одержані лінії перетину повернуто у фронтальне положення обертанням навколо осі поверхні. У повернутому положенні меридіан перерізу поверхні площиною $\boldsymbol{T^1}$ збігається з фронтальною проекцією контуру поверхні. Таким чином, визначаються основні проекції точки ***3***.

Проміжні точки шуканого перерізу визначаються за допомогою горизонтальних січних площин ***Г*** і $\boldsymbol{Г^1}$, кожна з них перетинає задану площину по горизонталях, а поверхню - по колу, горизонтальна проекція якого проектується без спотворення. Коло і горизонталь в одній допоміжній площині перетинаються в двох точках, що належать шуканому перерізу.

4 Спосіб перетворення проекцій

На рис. 64 заданий прямий круговий конус і площина загального положення (слідами). Для знаходження проекцій лінії перетину площини з поверхнею площину способом заміни площин проекцій перетворюють у проектуюче положення. Для чого вводять нову площину перпендикулярно до горизонтального сліду заданої січної площини ($П_1П_4$). На $П_4$ січна площина проектується в лінію G_4. При перетині конуса з заданою площиною отримуємо зрізаний еліпс. Точки ***2, 3, 4, 5, 6, 7,*** 8 на проекціях $\boldsymbol{П_1}$ і $\boldsymbol{П_2}$ знаходяться за відповідністю (лекція №5).

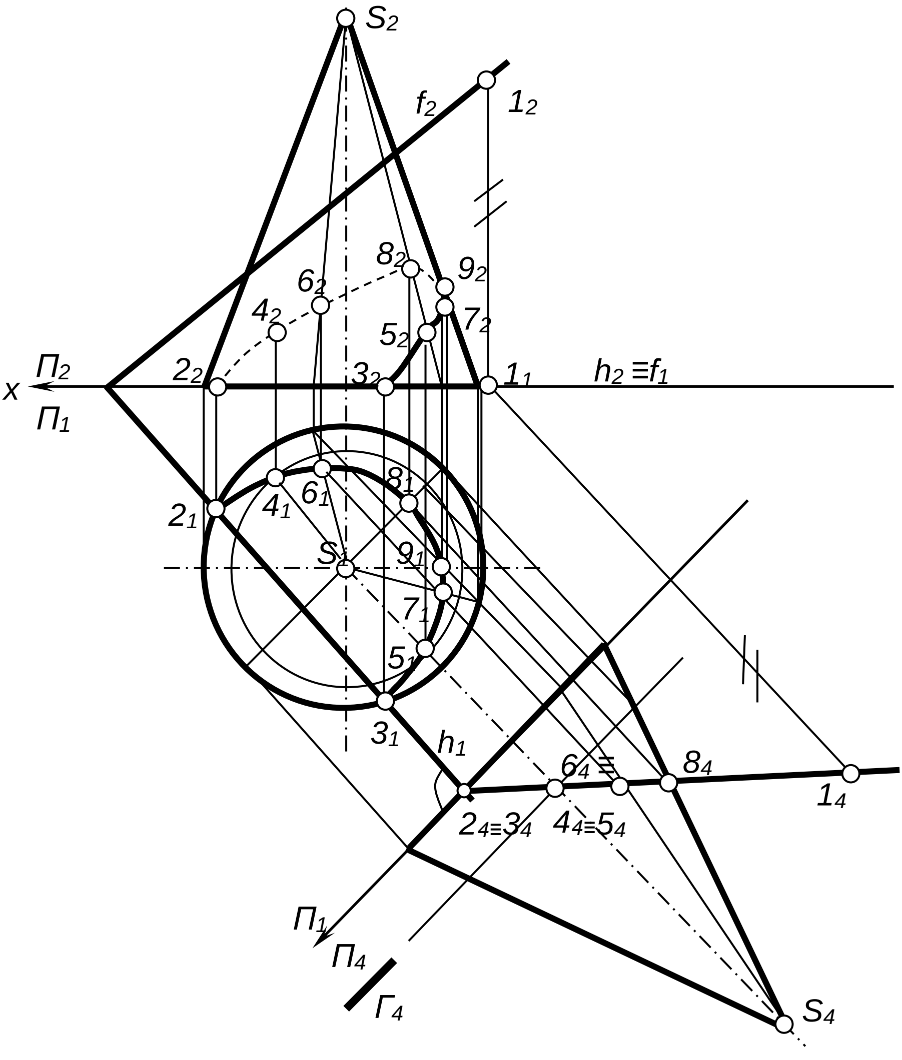

S2
f2
12
82
92
62
42
52
72
П2
x
22
32
11
h2 ≡f1
П1
81
21
41
61
S1
91
71
51
31
h1
64 ≡
84
14
24≡34
44≡54
П1
П4
Г4
S4

Рис. 64

5 Перетин поверхонь другого порядку з прямою лінією

Для побудови точок перетину прямої ***AB*** з циліндром другого порядку загального положення (рис. 65) можна через пряму побудувати допоміжну січну площину, яка перетне циліндр по прямолінійних твірних. Точки перетину проекцій прямої ***K*** і ***M*** та знайдених твірних циліндра і будуть шуканими, Видимість точок перетину та участків прямої визначаються за наступним правилом. *Точка перетину на проекціях вважається видимою, якщо вона належить видимій твірній циліндра, і, навпаки, – невидимою, якщо вона належить невидимій твірній.*

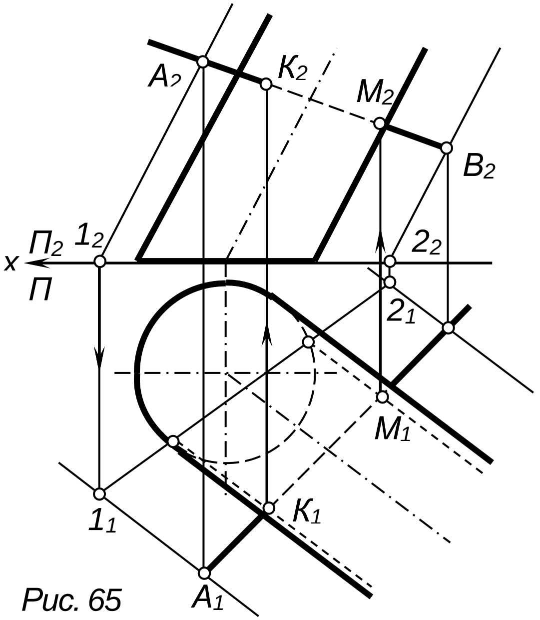


Рис. 65

Побудова точок перетину прямої з конічною поверхнею може бути виконана аналогічним чином (рис. 66). Але треба мати на увазі, що тільки та площина перетне конус по прямолінійних твірних, яка проходить через вершину конічної поверхні. Для цього через вершину конуса та точки прямої ***A*** і ***B*** проведемо допоміжну січну площину. Остання перетне конус по прямолінійних твірних ***S₁3₁*** та ***S₁4₁***. Точки перетину проекцій прямої та знайдених твірних будуть шуканими. Видимість точок перетину ***K*** і ***M*** визначається за правилом, приведеним вище.

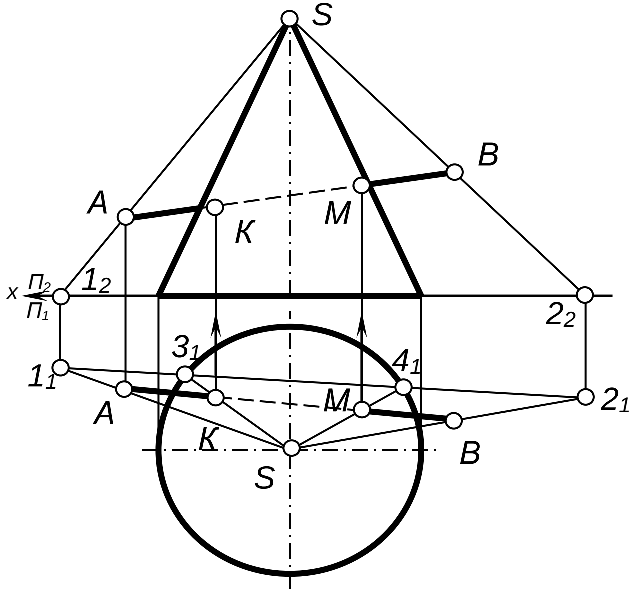


Рис. 66

Питання для самоконтролю:

I. Яка лінія є перерізом сфери площиною загального положення? Які лінії можуть бути проекціями цього перерізу?
2. Які лінії є перерізом конуса площиною, що проходить через його вершину?
3. Які лінії утворюються в результаті перерізу поверхні прямого кругового конуса проектуючими площинами?
4. Які січні площини доцільно обрати при побудові перерізу поверхні обертання площиною загального положення?
5. Яким способом можна розв'язати задачу побудови точок перетину прямої загального положення з поверхнями циліндра та конуса?

Тема: Взаємний перетин криволінійних поверхонь.

Лекція 10, 2 год.

Під час проектування будівель та споруд складної форми виникає необхідність у побудові ліній перетину простих елементів, які утворюють ці складні форми. ***Лінія, яка утворюється як множина спільних точок двох поверхонь, що перетинаються, називається лінією перетину.*** Лінію перетину поверхонь будують по точках зустрічі ліній однієї поверхні з іншою або по точках перетину ліній каркасів двох поверхонь.

Для побудови точок лінії взаємного перетину двох поверхонь застосовуються два способи: ***перетворення проекцій та допоміжних перерізів.***

1. Побудова лінії взаємного перетину двох поверхонь, одна з яких проектуюча.

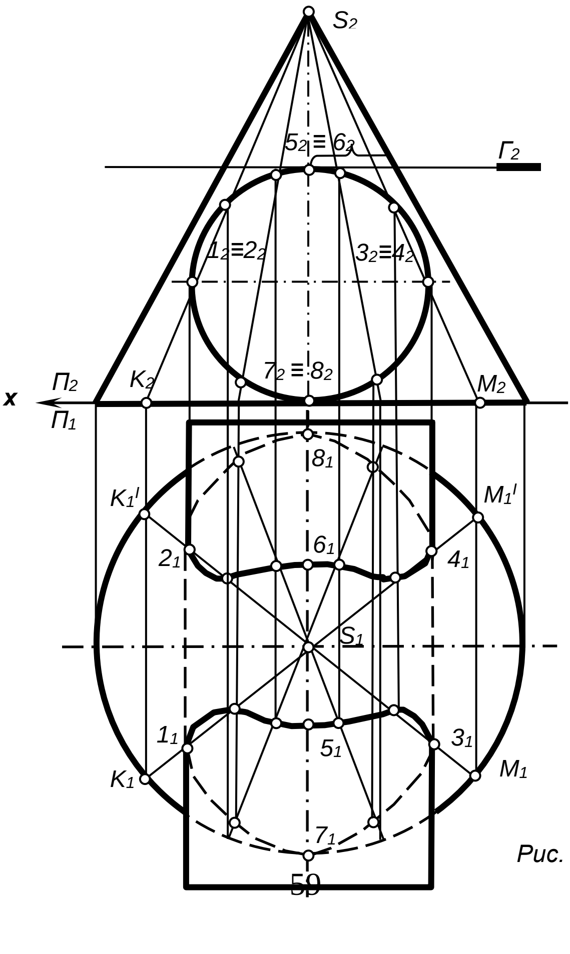


Рис. 67

Найпростіший випадок взаємного перетину двох кривих поверхонь - ***коли одна з поверхонь займає проектуюче положення.*** Проектуючою може бути тільки циліндрична поверхня. Відповідно до властивостей проектуючих фігур одна проекція перетину двох поверхонь збігається з виродженою проекцією проектуючої поверхні і задача зводиться до побудови другої проекції лінії перетину за принципом належності геометричній фігурі.

На рис. 67 показано побудову лінії взаємного перетину фронтально проектуючого циліндра обертання з прямим конусом. Фронтальна проекція лінії перетину збігається з виродженою проекцією циліндра. Тому безпосередньо на фронтальній проекції можна визначити точки перетину твірних конуса з поверхнею циліндра. Горизонтальні проекції цих точок визначають за відповідністю на горизонтальних проекціях твірних конуса.

Характерними точками лінії перетину є точки ***1≡2*** та ***3≡4*** на контурних твірних циліндра. Вони відділяють видиму частину лінії перетину від невидимої. Тому для побудови горизонтальних проекцій цих точок через їх відомі фронтальні проекції проведені твірні ***SK*** та ***SM*** конуса. Невидима частина шуканої лінії належить невидимій частині поверхні циліндра.

2. Спосіб допоміжних перерізів.

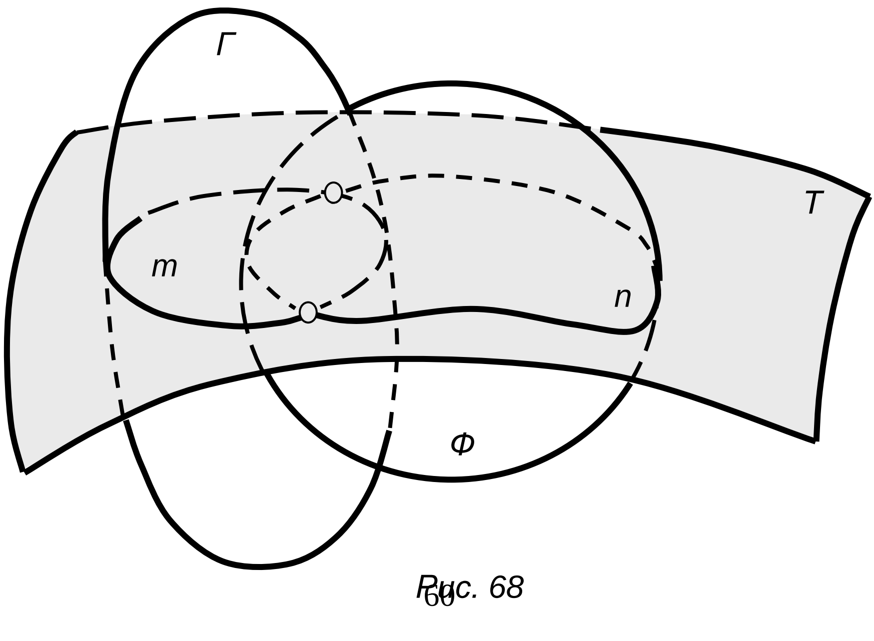


Рис. 68

Для визначення лінії взаємного перетину двох поверхонь способом допоміжних перерізів їх перетинають третьою поверхнею ***T*** - посередником (рис. 68). Лінії ***m*** та ***n*** перетину допоміжної поверхні ***T*** двома даними поверхнями, перетинаючись між собою, дають точки шуканої лінії перетину. Виконуючи таку операцію кілька разів, можна одержати необхідну кількість точок для проведення кривої взаємного перетину.

Допоміжні січні поверхні слід вибирати так, щоб лінії m та n були прямими або колами і не потребували додаткових побудов. Найчастіше за січні поверхні приймають ***площини та сфери***.

В цих випадках спосіб допоміжних перерізів називають відповідно ***способом допоміжних січних площин або способом допоміжних січних сфер***. Допоміжні січні площини можуть займати загальне положення , або часткове відносно площин проекцій. Частіше в практиці використовують площини часткового положення.

3. Спосіб допоміжних січних площин часткового положення

Спосіб січних площин часткового положення доцільний тоді, коли в результаті перерізу кривих поверхонь площинами утворюються на проекціях прямі лінії або кола.

На рис. 69 показано визначення лінії взаємного перетину двох прямих кругових конусів. Для визначення точок, які належать лінії взаємного перетину двох поверхонь, доцільно скористатись множиною ***горизонтальних допоміжних січних площин***, кожна з яких перетинає конуси по колах певних радіусів. На початку визначимо проекції вищої точки ***1*** лінії перетину. Для цього поворотом конуса з вершиною ***T*** поставимо конуси на одну вісь симетрії. Точка ***M*** буде задавати на фронтальній проекції рівень найвищої точки лінії перетину, а точка ***1*** буде шуканою.

Виберемо тепер декілька горизонтальних січних площин ***Г*** і ***К*** нижче точки ***1***. Вони будуть перетинати конуси по колах з радіусами $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{R^1}$ та $\boldsymbol{R^{11}}$ і $\boldsymbol{R^{111}}$. Пари кіл, що належать одній січній площині, перетинаючись між собою, дають точки шуканої лінії. Видимими точками лінії перетину вважаються ті, які одночасно належать двом видимим твірним конусів, що перетинаються.

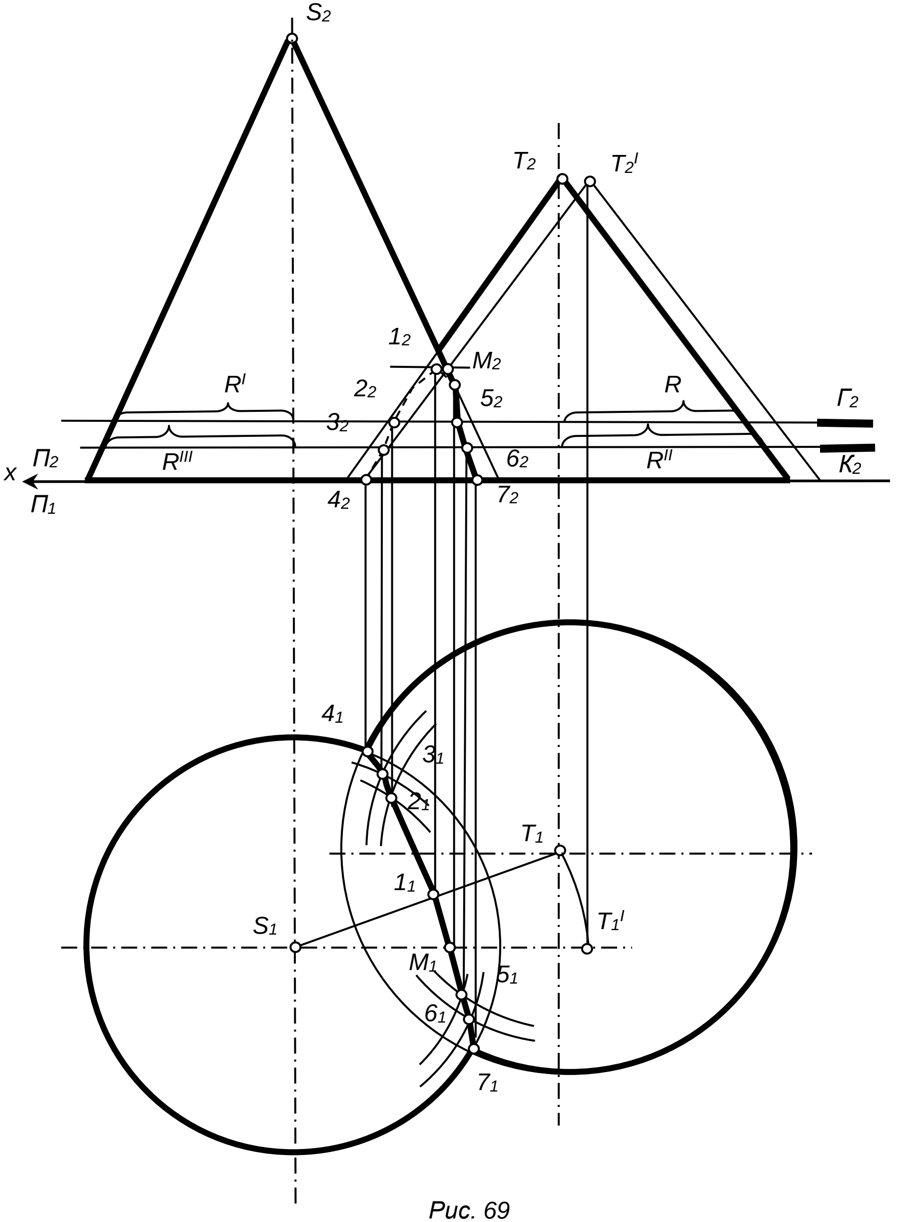

S2
T2
T2I
12
M2
22
52
RI
R
Г2
32
П2
x
RIII
62
RII
K2
П1
42
72
41
31
21
T1
11
S1
T1I
M1
51
61
71

Рис. 69

4. Спосіб січних сфер.

Спосіб січних сфер поділяється на ***метод концентричних січних сфер***, коли осі сфер мають спільний центр, та ***ексцентричних січних сфер*** (їх центри не суміщаються).

Концентричні січні сфери застосовуються в особливому випадку, коли:

- перетинаються дві поверхні обертання;
- осі поверхонь перетинаються;
- осі поверхонь, що перетинаються, паралельні одній з площин проекцій.

Цей спосіб ґрунтується на тому, що поверхня обертання, вісь якої проходить через центр сфери, перетинається із сферою по колах. Якщо вісь поверхні обертання розміщена паралельно одній з площин проекцій, то ці кола зображуються прямими лініями. На рис. 70 показано побудову лінії перетину циліндра обертання з фронтальною віссю та поверхні обертання з горизонтально проектуючою віссю.

Чотири точки ***A,B,C,D*** знаходяться безпосередньо в результаті перетину контурних твірних обох поверхонь. Для визначення проекцій будь-яких проміжних точок проведено допоміжну січну сферу а центром в точці ***O*** перетину осей. Сфера перетинається з поверхнями по колах. Точки перетину кіл належать шуканій лінії. Для визначення горизонтальних проекцій точок лінії перетину спочатку будують горизонтальні проекції кіл, по яких сфери перетинають тор, а потім за відповідністю визначають проекції точок.

Ексцентричні січні сфери застосовуються тоді, коли:

- одна з поверхонь є поверхнею обертання, а друга має кругові перерізи;
- обидві поверхні мають загальну площину симетрії;
- їх площина симетрії паралельна одній із площин проекцій.

На рис. 71 наведено приклад застосування способу січних ексцентричних сфер. Перетинаються відсік тору та конус обертання. Вісь тора перетинається з віссю обертання конуса, обидві осі належать одній фронтальній площині.

Точки ***A*** та ***B*** знаходяться безпосередньо в результаті перетину контурних твірних поверхонь.

Для знаходження інших точок через прямолінійну вісь тора у зоні орієнтованого перетину поверхонь проводять січні площини ***Г***, які перетинають тор по колах з центрами ***T***. На осі конуса визначають положення центрів ***O*** січних сфер. Ці сфери перетинають конус по горизонтальних колах. Перше коло перетинається з перерізом тора в точках ***1≡2***, а друге - у точках ***3≡4***. Горизонтальні проекції точок шукаються як такі, що належать круговим перерізам конічної поверхні.

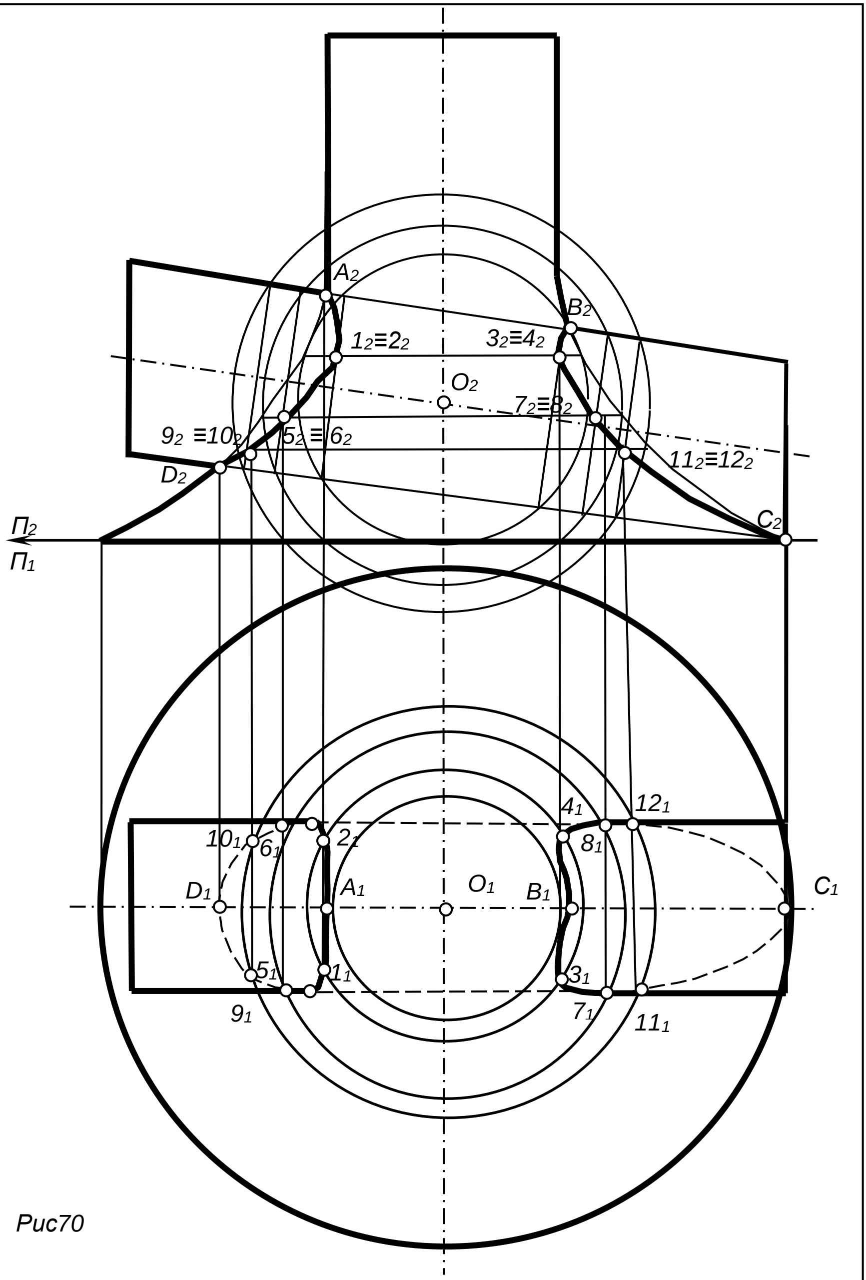

A2
B2
1₂≡2₂
3₂≡4₂
O2
7₂≡8₂
9₂ ≡10₂
5₂ ≡ 6₂
11₂≡12₂
D2
C2
П2
П1
4₁
12₁
10₁
6₁
2₁
8₁
D1
A1
O1
B1
C1
5₁
1₁
3₁
9₁
7₁
11₁

Рис70

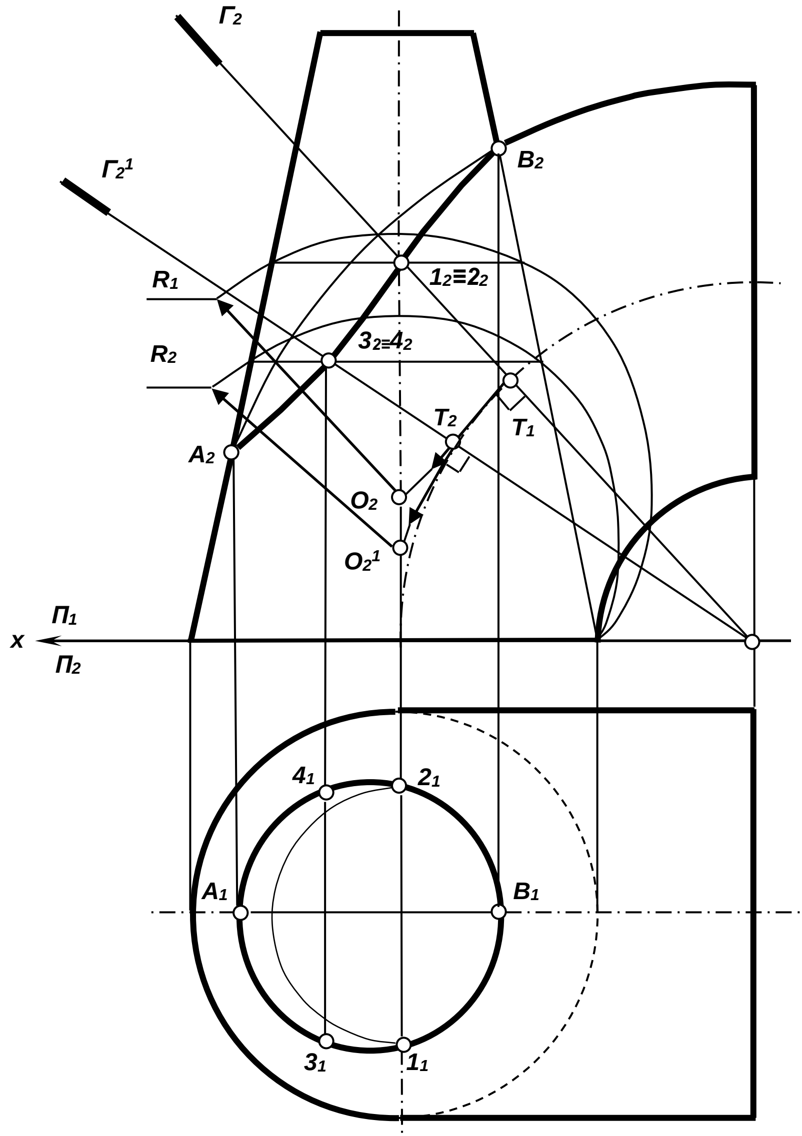


Рис71

5. Особливі випадки перетину поверхонь другого порядку

Порядок лінії перетину двох алгебраїчних поверхонь визначається як добуток порядків цих поверхонь. При перетині поверхонь другого порядку утворюється крива четвертого порядку, яка в деяких випадках розкладається на декілька ліній нижчого порядку.

1. Повне проникнення - це випадок перетину, коли просторова крива має дві замкнені вітки Якщо дві поверхні другого порядку в перетині мають плоску криву, вони обов'язково перетнуться іще по одній кривій (сума порядків – 4) (рис72) .

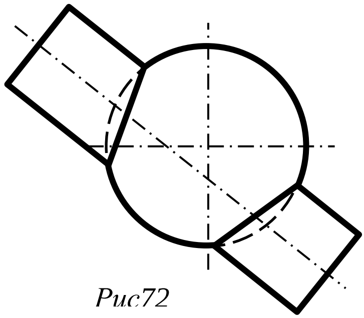


Рис72

2. Якщо дві поверхні другого порядку вписати або описати навколо третьої поверхні другого порядку, то перші дві перетинаються по двох плоских кривих другого порядку, площини яких проходять через пряму що з'єднує точки дотику (рис. 73).

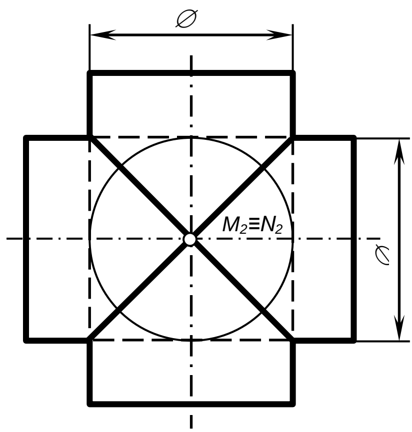


Рис.73

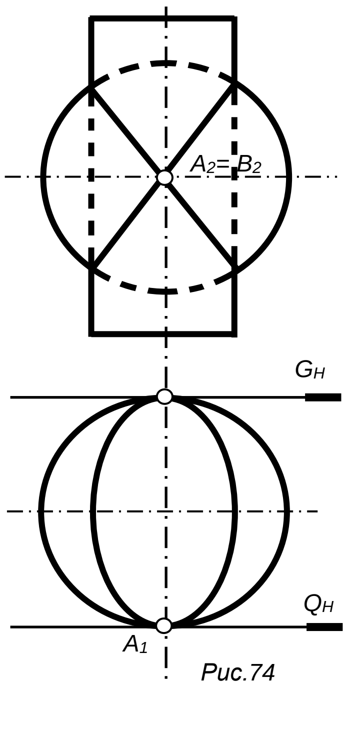


Рис.74

3. Подвійне стикання - це особливий випадок перетину поверхонь, які мають дві спільні дотичні площини; В цьому випадку просторова крива четвертого порядку розпадається на дві плоскі криві другого порядку, які перетинаються в точках дотику ***A*** та ***B*** (рис. 74).

Питання для самоконтролю:

1. З чим збігається одна з проекцій лінії перетину двох поверхонь, одна з яких проектуюча?
2. Лінію перетину яких поверхонь доцільно будувати за допомогою способу перетворення проекцій?
3. В чому полягає суть способу допоміжних перерізів?
4. В яких випадках застосовується спосіб допоміжних січних сфер?
5. Коли просторова лінія перетину двох поверхонь другого порядку розпадається на дві плоскі криві? Який алгебраїчний порядок мають ці криві?

ТІНІ В ОРГТГОНАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЯХ ТА ПЕРСПЕКТИВІ.

Тема: Тіні від точки, прямо, плоскої фігури та поверхні в ортогональних проекціях. Правила побудови тіней в перспективі.

Лекція 11, 2год.

1. *Тіні в ортогональних проекціях.*

Тінь точки. Для побудови падаючої тіні від точки на площину чи поверхню через точку проводять промінь паралельно прийнятому напрямку світлових променів та визначити точку перетину його з площиною чи поверхнею. Так тінь від точки на площину є точка перетину променя з ***найближчою*** на її шляху площиною.

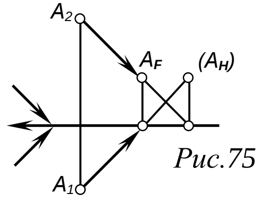


Рис.75

На епюрі (рис. 75) через проекції точок проведені відповідні проекції променів та побудовані сліди на площини проекцій. В першому випадку – це фронтальний слід, а другим слідом буде горизонтальний. Перший слід – це реальна тінь точки А, а другий – уявна тінь.

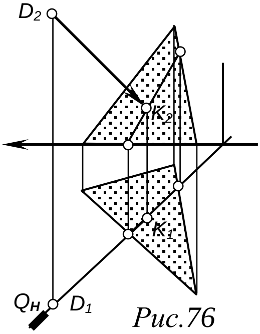


Рис.76

Для побудови падаючої тіні від точки на площину загального положення (рис.76) треба через точку провести світловий промінь та знайти перетин його з площиною трикутника. Оскільки світловий промінь – пряма лінія, рішаємо I позиційну задачу.

Тінь прямої лінії.

Для побудови падаючої тіні прямої лінії на площину досить побудувати тіні двох її точок(рис.77). Тінь прямої є пряма , що з`єднує тіні точок(рис.77а). На рисунку 77 б реальні тіні опинилися на різних площинах проекцій. Це означає, що тінь прямої розміщена на двох площинах проекцій і буде мати *точку зламу*. Ці точки не з`єднуються прямою. Необхідно побудувати уявну тінь точки D. На рис. 77в побудовано тінь від прямої на довільну площину.

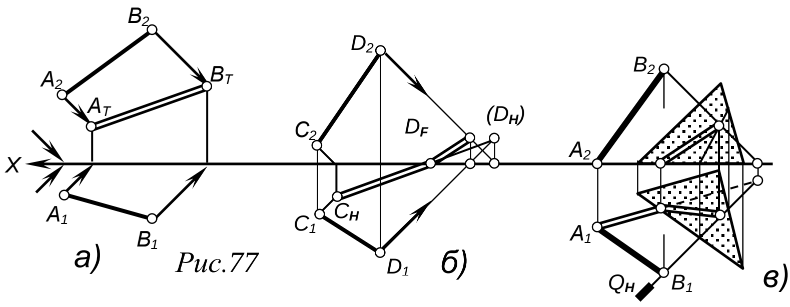


Рис.77

Тіні прямих часткового положення.

1. Тінь відрізка прямої, перпендикулярної до площини проекцій, співпадає з проекцією променя на цю площину (рис.78 а).
2. Тінь відрізка прямої, паралельної до площини проекцій, рівна й паралельна самому відрізку (рис78 б).
3. Тінь відрізка горизонтальної прямої, розміщеної під кутом 45^0 до фронтальної площини, розміщена на цій площині з уклоном 1:2 (рис.78в)
4. Тінь відрізка горизонтальної прямої, паралельної променевій площині, в залежності від положення, чи співпадає з проектуючим слідом площини, чи розміщена перпендикулярно до осі проекцій, як в даному прикладі (рис. 128г).

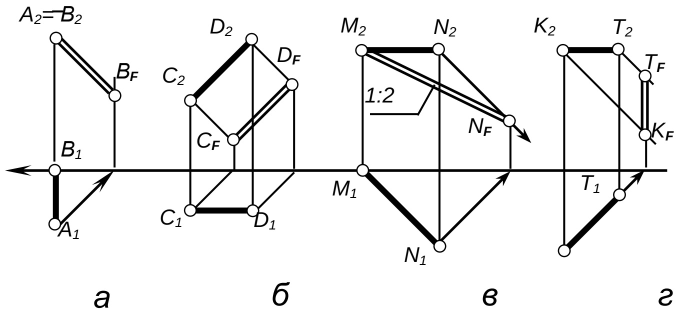


Рис.78

Тіні плоских фігур.

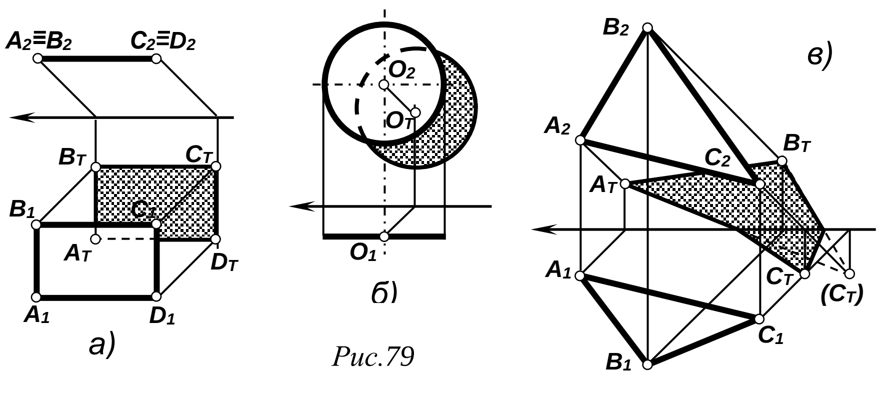


Рис.79

Вид тіні від плоскої фігури залежить як від її форми та положення в просторі, так і від форми поверхні, на яку падає тінь.Тінь від плоскої фігури на паралельну їй площину, подібна самій фігурі (рис.79а,б). Для побудови тіні від плоского багатокутника достатньо побудувати тіні від його вершин та з'єднати їх, враховуючи уявні та реальні тіні від точок (рис.79в)

Тіні геометричних тіл.

При побудові тіней від геометричних тіл використовуються правила, представлені вище. Основні архітектурні форми будівель та споруд уявляють собою поєднання простих поверхонь: призм (рис.80а,б), пірамід (рис.80в), циліндрів (рис.80г) та конусів (рис.80д). Розглянемо побудову тіней від цих поверхонь (рис.80).

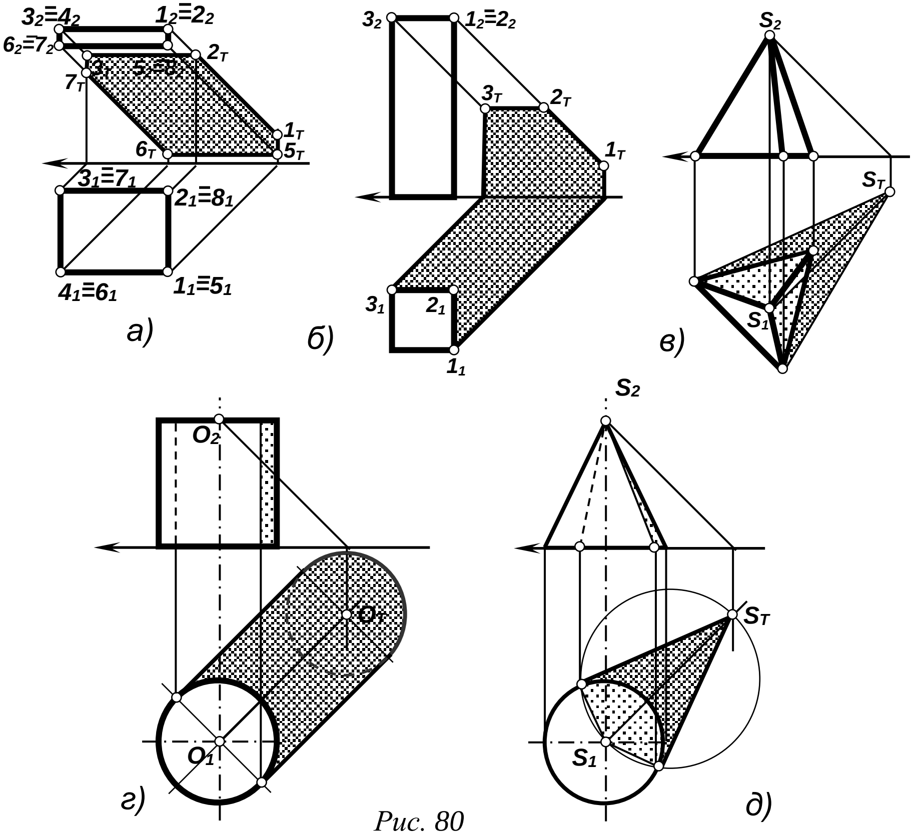


Рис. 80

Метод променевих перерізів: Метод заснований на головних позиційних задачах нарисної геометрії - це задачі на точку перетину прямої з площиною чи поверхнею і на перетин поверхні площиною.

Побудова падаючої тіні від плоскої фігури на поверхню обертання.

Світлові промені, проходячи через контур фігури , утворюють призматичну променеву площину, яка при перетині поверхні обертання виявляє контур падаючої тіні.

2. Побудова тіней в перспективі.

Закономірності побудови тіней в ортогональних проекціях в основному зберігаються при побудові тіней в перспективі.

В основі перспективи лежить центральне проектування, тому променеві прямі та їх проекції, паралельні між собою в просторі, в перспективі мають свої точки сходу. При цьому вторинні проекції променів (які лежать на предметній площині) знаходяться на лінії горизонту так як джерело світла (сонце) рахується віддаленим в нескінченність.

В залежності від напрямку променів та положенню джерела світла відносно спостерігача і картинної площини можливі три основні схеми тіней:

1. ***Тіні, що віддаляються*** – сонце знаходиться позаду людини, зліва. Точка сходу вторинних проекцій променів знаходиться на горизонті, а точка сходу самих променів (S перспектив променів сонця) - нижче лінії горизонту (рис.81 а). На рисунку 81 б,в сонце знаходиться позаду людини, праворуч.

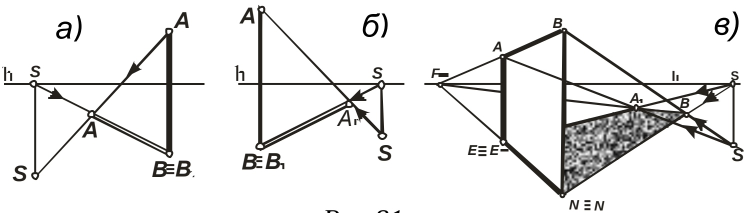


Рис.81

2. ***Тіні, що наближаються*** – сонце розміщено перед людиною, справа. Точка сходу вторинних проекцій променів знаходяться на горизонті, а точка сходу S перспектив променів – вище горизонту (рис.82б,в). На рисунку 82 а сонце розміщено перед людиною, зліва.

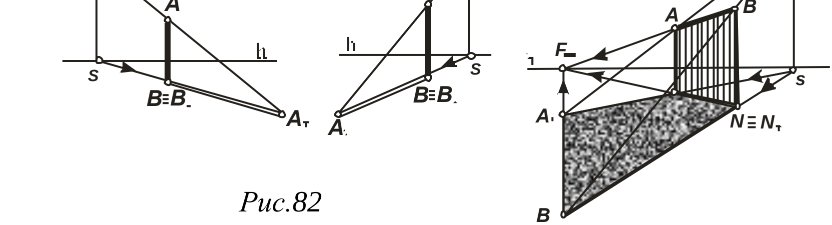


Рис.82

3. ***Тіні нейтральні*** – промені світла паралельні картинній площині. Промені зображаються на перспективі паралельними, а вторинні їх проекції – паралельні основі картини. На рисунку 83 а,в сонце знаходиться праворуч від людини, на рисунку 83 б – ліворуч.

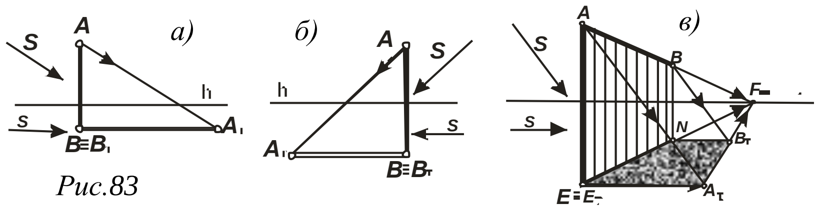


Рис.83

Побудова тіней деталей та споруд.

1. Побудова тіні за першою та другою схемами.

Напрямок променів задано точками сходу перспектив променів ***S*** і вторинних проекцій ***s***. Грані споруди, що знаходяться у власній тіні виявляють за допомогою вторинних проекцій променів, проведених на предметній площині. Другий признак – якщо точка сходу ***s*** вторинних проекцій променів знаходиться за точкою F_2 справа, то грані призм, лінія сходу яких проходить через точку F_2 , будуть у власній тіні. Тіні від вертикальних ребер направлені в точку сходу ***s*** вторинних проекцій променів. Тіні від горизонтальних ребер будуть паралельні цим ребрам і тому мають спільну точку сходу.

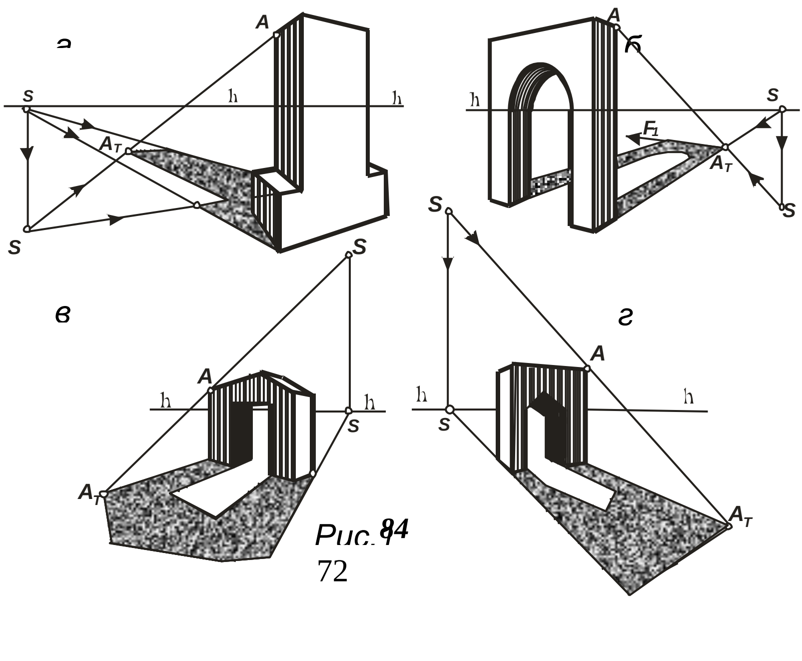


Рис. 84

На малюнку 84 побудовані власні та падаючі тіні за першою та другою схемою розміщення сонця. Рис 84 а,б – тіні, що віддаляються (сонце знаходиться за спиною людини). Рис 84 в.г – тіні, що наближаються (сонце знаходиться перед людиною).

2. Побудова тіні за третьою схемою (нейтральні тіні). На рисунку 85а побудовані власні та падаючі тіні арки, якщо сонце розміщено з праворуч від людини, рисунок 85 б, сонце – ліворуч.

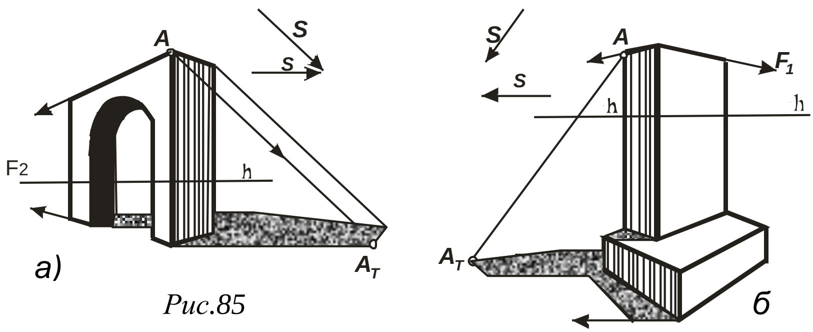


Рис.85

Питання для самоконтролю

1. Яку тінь називають власною, падаючою?
2. Що являють собою тіні від точки, прямої, відсіку площини? Які геометричні задачі розв'язуються при побудові тіней?
3. Побудувати точок зламу тіні від прямої. У яких випадках тінь від лінії матиме точку зламу?
4. Як виглядають падаючі тіні від прямих рівня, проектуючих прямих ?
5. У чому полягає загальний порядок побудови падаючої тіні в перспективі? Як задають елементи такої схеми для природного освітлення?
6. Які окремі випадки положення сонця відносно глядача використовують, будуючи тіні в перспективі?
7. До яких основних операцій зводиться побудова падаючої тіні від точки, прямої?

Зміст

Список використаних джерел

1. Михайленко В.Є. Нарисна геометрія: підручник / В.Є. Михайленко, М.Ф. Євстіфеєв, С.М. Ковальов, О.В. Кащенко; За ред. В.Є. Михайленка. – 2-ге вид., переробл. – К.: Вища шк., 2004. – 303 с.: іл. ISBN 966-642-156-9.

2. Михайленко В.Є. Інженерна та комп’ютерна графіка: підручник / В.Є. Михайленко, В.В. Ванін, С.М. Ковальов; за ред. В.Є. Михайленка. – К.: Каравела, 2012. – 360 с.

3. Лелик Я.Р. Методичні вказівки до виконання самостійних робіт з дисципліни “Нарисна геометрія” для студентів, що навчаються за напрямом “ Образотворче мистецтво ” денної та заочної форми навчання.: – Луцьк. :Вид-во Луцьк. нац. тех. ун-т, 2017. - 61с.

4. Загородній П.П. Інженерна та комп'ютерна графіка [Електронний ресурс]: конспект лекцій для студентів напрямів підготовки 6.050502 "Інженерна механіка" та 6.050503 "Машинобудування" денної та заочної форм навчання. /П.П. Загородній, В.М. Криворотько, В.Г. Серпученко, С.В. Волевач, Н.І. Ковальова. - К.: НУХТ, 2014. - 137 с.

5. Лелик Я.Р. Нарисна геометрія. Креслення: навчальний посібник для студентів, що навчаються за напрямом - *6.020205* «Образотворче мистецтво»– Луцьк : Вид-во ПрАТ ”Волинська обласна друкарня”, 2016. – 120 с.

6. Нікуліна В.В. Інженерна графіка. Курс лекцій для студентів спеціальності 5.05070103 Електропостачання» денної форми навчання/ укладач В.В. Нікуліна – Луцьк: ТК Луцького НТУ, 2014. – 128 с.

Навчально - методичне видання

Автори: **Лелик** Ярослав Романович, **Тарасюк** Іван Іванович

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ.

Конспект лекцій з дисципліни " Нарисна геометрія " для студентів, що навчаються за спеціальністю 023 - "Образотворче мистецтво, декоративне мистецтво, реставрація" денної та заочної форми навчання.

Я.Р.Лелик, І. І. Тарасюк Луцьк: СНУ, 2020. - 76с.

Друкується в авторській редакції

Підп. до друку ______ 2019р. Формат _________.

Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк._____

Тираж ______ прим. Зам ______

Видавець – ПП ВМА «Терен» 43025 м. Луцьк, вул. Гаврилюка, 14