Вступ

Історична довідка

Геометрія – розділ математики, що вивчає просторові відношення і форми, а також інші відношення і форми, які подібні до просторових, за своєю структурою.

В розвитку геометрії можна вказати чотири основні періоди.

I. Період **зародження геометрії** тривав до VI-V ст. до н.е.. Спочатку геометрія відносилася до фізики, що вивчає найбільш загальні взаємозв'язки та відношення, які існують в природі. Перші геометричні роботи, що дійшли до нас, були написані в Стародавньому Єгипті. Геометричні відомості того часу були мало вагомими та зводилися до обчислення площ і об'ємів, викладалися у вигляді правил, що не мали свого обґрунтування, логічні доведення були дуже примітивні. Основним засобом досліджень була інтуїція, підтверджена деякими спостереженнями. У зв'язку із занепадом економіки Єгипту центр математичної культури перейшов у Грецію, де спостерігався розвиток будівництва, мореплавства, зароджувались астрономія і фізика. В той час виявляються і встановляються зв'язки між різними геометричними факторами, формуються поняття про фігуру і геометричні твердження, з'являються деякі логічні доведення. Нові відомості вступають у суперечність з існуючими фактами. Появляється систематичний виклад геометрії, де її твердження поступово доводяться. Застосовується дедуктивний метод, тобто логічне доведення закономірностей з невеликої кількості основних положень.

З цього часу починається **другий період** – період **елементарної геометрії** (V ст. до н. е. – XVI ст. н. е.). Це вже наука про найпростіші просторові форми і відношення, яка розвивається в логічній послідовності, виходячи із основних положень-аксіом. Геометрія, крім відомих прямої і кола, вивчає більш складні лінії, нові методи визначення площ та об'ємів, вчення про конічні перерізи, початки тригонометрії. Протягом наступних півтори тисячі років не спостерігалося визначних відкриттів. Та з розвитком техніки з’явилася величезна кількість задач, які неможливо було розв’язати. Математики зіткнулися із змінними величинами, що, як виявилося, тісно пов’язані з вивченням різноманітних кривих.

Третій – період математики змінних величин (початок XVII – середина XIX ст.). Існуюча геометрична система вже не могла задовольнити потреби нової практики. Тоді французькими математиками Пьєром Ферма і Рене Декартом був винайдений загальний метод досліджень – метод координат. Сформувалась нова вітка геометрії - ***аналітична геометрія***. Цей метод дозволив зв’язати геометрію з алгеброю.

З появою координатного методу виникають нові геометричні теорії: аналітична, диференціальна, проективна, нарисна геометрії.

Четвертий – період сучасної геометрії (з середини XIX ст.).

Предметом аналітичної геометрії є вивчення фігур і перетворень, що задаються алгебраїчними рівняннями відносно системи координат, використовуючи методи алгебри.

Два способи вивчення аналітичної геометрії

П е р ш и й с п о с і б (що склався історично): вводиться система координат і координати, що визначають положення точки на площині; розгортається теорія на основі координат точки.

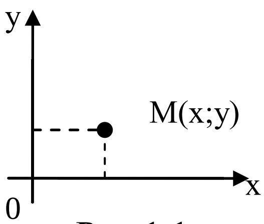


Рис.1.1

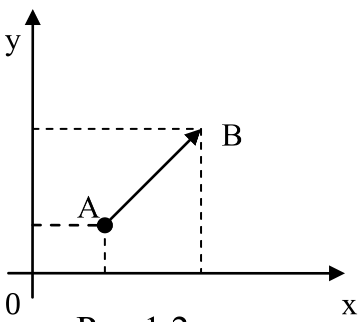


Рис.1.2

Д р у г и й с п о с і б.

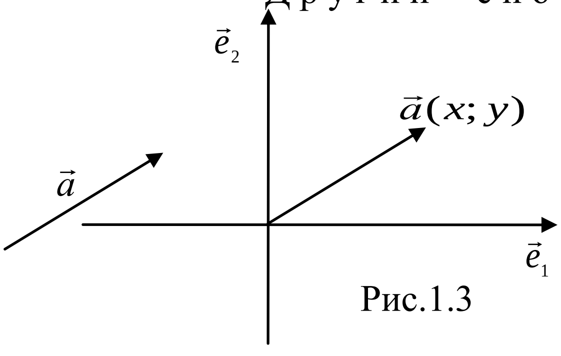


Рис.1.3

Вводиться поняття вектора. Визначаються координати вектора відносно векторного базису (рис.1.3). Розгортається векторна теорія, а потім викладається аналітична геометрія на основі векторної теорії. Ми підемо другим шляхом.

Розділ І. Елементи векторної алгебри в просторі

§1. **Векторні і скалярні величини**

В природі існують величини двоякого роду.

Скалярні – величини, які характеризуються тільки числом (площа, об’єм, маса тощо).

Векторні – величини, які крім числа характеризуються ще й напрямком (швидкість, сила, прискорення та ін.).

В математиці вектор – це математична абстракція конкретних векторних величин природи.

Нас не цікавить зміст, а цікавлять тільки величина і напрям.

§2. **Напрямлений відрізок**

Означення. Напрямленим відрізком називається відрізок, для якого суттєвим є порядок, в якому задані його кінці.

$\overline{AB}$, A – початок , B – кінець. Наприклад відрізки $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ різні (рис.1.4).

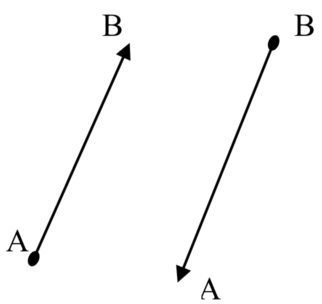


Рис.1.4

Властивості напрямлених відрізків:

1. ***Довжиною*** напрямленого відрізка $\overline{AB}$ називається відстань між точками або довжина відрізка AB.

$$\left|\overline{AB}\right| = AB = \rho(A, B)$$

2. ***Нульовим*** напрямленим відрізком називається відрізок, у якого початок співпадає з його кінцем, тобто це точка

$$\bar{0} = \overline{AA} = \overline{BB} = \overline{CC} \ \ldots$$

3. Кожен напрямлений відрізок в просторі (на площині, на прямій) визначає напрям, крім нульового напрямленого відрізка, який напряму не визначає. Проте, зручно для теорії вважати, що він визначає такий напрям, який нам потрібно.

4. Напрямлені відрізки $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ називаються **співнапрямленими**, якщо: по-перше, вони:

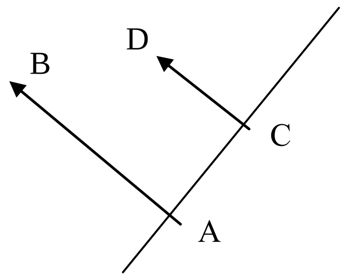


Рис.1.5

паралельні і, по-друге, їх кінці лежать в одній півплощині відносно прямої, що сполучає їх початки,

Наприклад, $\overline{AB}\uparrow\uparrow\overline{CD}$ (рис.1.5).

і **протилежно напрямлені,** якщо вони паралельні і їх кінці лежать в різних півплощинах відносно прямої, що сполучає їх початки.

Наприклад, $\overline{AB}\uparrow\downarrow\overline{CD}$ (рис.1.6),

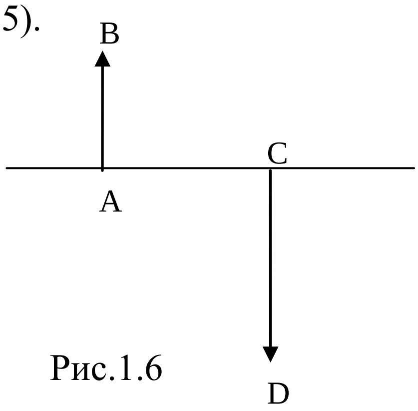


Рис.1.6

5. Рівні напрямлені відрізки.

Два напрямлені відрізки називаються ***рівними***

$$\overline{AB} = \overline{CD},$$

якщо вони співнапрямлені і мають однакову довжину.

§3. **Поняття вектора**

Історично спочатку вектор означався, як напрямлений відрізок. Але, в природі існують різні типи векторів (наприклад, прикладені до точки, твердого тіла, моменти сили, що можна переміщати), тобто, вектор - це не тільки напрямлений відрізок. З другого, боку математиків не задовольняє означення вектора, як напрямленого відрізка з двох причин. По-перше, в системі координат рівні вектори мають рівні координати і немає взаємно-однозначної відповідності. По-друге, рівні множини складаються з одних і тих же елементів, а рівні вектори це різні геометричні об’єкти.

Позначимо W множину всіх напрямлених відрізків простору (площини). У цій множині введемо відношення рівні напрямлені відрізки. Легко бачити, що це відношення має три властивості еквівалентності:

- рефлексивність:

$$\overline{AB} = \overline{AB};$$

- симетричність:

$$\text{якщо } \overline{AB} = \overline{CD}, \text{ то } \overline{CD} = \overline{AB};$$

- транзитивність:

$$\text{якщо } \overline{AB} = \overline{CD} \text{ і } \overline{CD} = \overline{EF}, \text{ то } \overline{AB} = \overline{EF}.$$

З алгебри відомо, що таку множину W можна розбити на класи еквівалентності, які не перетинаються, об’єднавши в один клас всі рівні напрямлені відрізки. На кожен клас будемо дивитися як на один елемент, отримаємо нову множину таких елементів – V. Ця множина називається ***фактор-множиною*** множини W за відношенням поняття «рівні», і позначається

$$V = {}^{W}\!\!/_{=}$$

Означення. Вільним вектором або просто вектором називається елемент фактор-множини множини всіх напрямлених відрізків за відношенням «рівні».

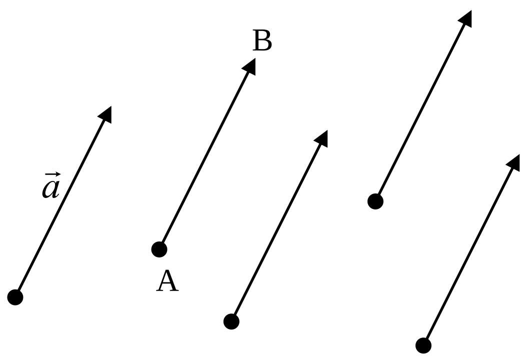


Рис.1.7

Іншими словами вектор – це нескінченна множина рівних між собою напрямлених відрізків.

Теорема 1. Будь-який напрямлений відрізок $\overline{AB}$, представник вектора $\vec{a}$,

$$\overline{AB} \in \vec{a}$$

повністю і однозначно визначає вектор $\vec{a}$.

Доведення. З довільної точки А простору побудуємо напрямлений відрізок $\overline{AB}$. Щоб довести теорему досить довести, що з *довільної* точки простору можна побудувати напрямлений відрізок, рівний напрямленому відрізку АВ,

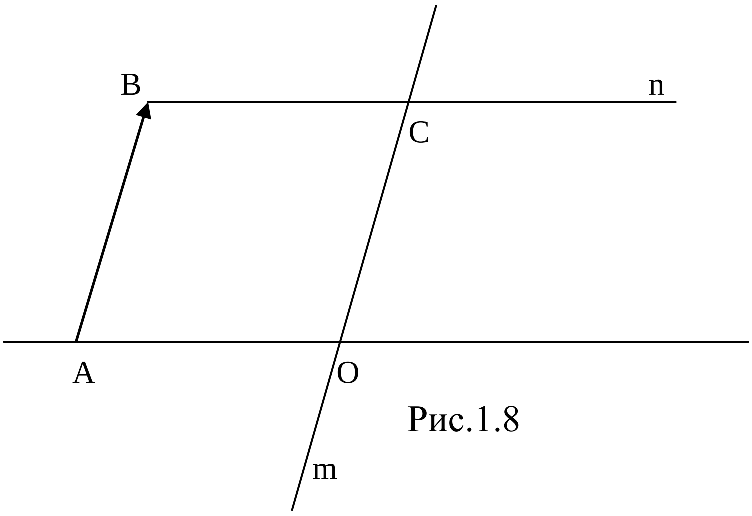


Рис.1.8

представнику вектора $\vec{a}$, і до того ж єдиний.

І нехай точка О довільна точка простору. Побудуємо напрямлений відрізок $\overline{OC} = \overline{AB}$ і покажемо, що це робиться однозначно.

Дійсно, АО – єдиний відрізок, що визначається двома точками.
Через точку О проведемо пряму m паралельно АВ, вона єдина.
Через точку
В проведемо пряму ВС ‖ АО – єдина,
точка перетину С=m∩n – єдина.
Отже, однозначно визначається напрямлений відрізок

$$\overline{OC} = \overline{AB}$$

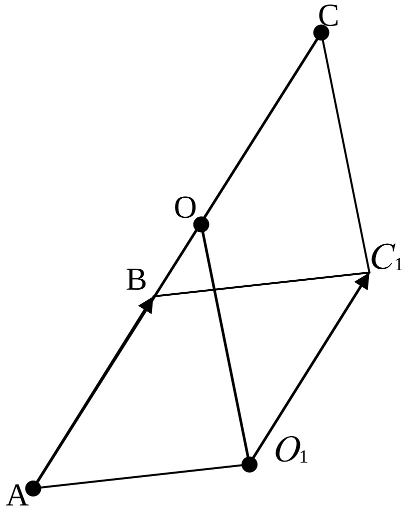


Рис.1.9

У випадку, коли точка О належить АВ, візьмемо допоміжну довільну точку простору O_1 і побудуємо напрямлений відрізок $\overline{O_1C_1}$ рівний відрізку $\overline{AB}$ (рис.1.9). За попереднім пунктом існує єдиний такий напрямлений відрізок

$$\overline{O_1C_1} = \overline{AB}.$$

Розглянемо тепер напрямлений відрізок $\overline{O_1C_1}$ і точку О. За попереднім пунктом існує єдиний напрямлений відрізок

$$\overline{OC} = \overline{O_1C_1} = \overline{AB}.$$

Наслідки.

1. Доведена теорема дає право, працюючи з векторами, працювати тільки з їх представником – напрямленим відрізком, так як кожен напрямлений відрізок повністю визначає вектор.

2. Якщо

$$\overline{AB} \in \vec{a},$$

то цілком природно писати $\overrightarrow{AB}$, так як $\overline{AB}$ повністю визначає вектор $\vec{a}$, отже,

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}.$$

Лінійні операції над векторами

§4. **Додавання векторів**

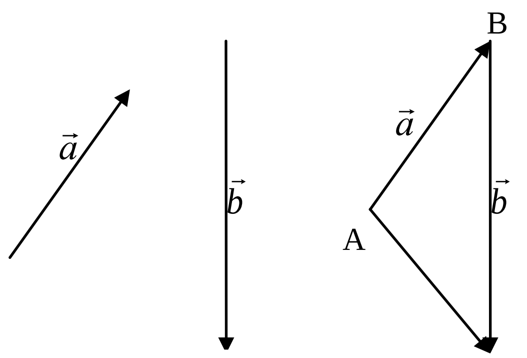


Рис.1.10

Означення. Нехай дано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. З довільної точки A простору будуємо вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. З його кінця - точки B- будуємо вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, який сполучає початок першого вектора – точку A з кінцем другого – точкою C, і буде сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Записують $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Таке правило додавання векторів називається правилом трикутника.

Із означення випливає дуже важлива фундаментальна рівність:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (1).$$

Зміст рівності (1) полягає в тому,що при будь-якому взаємному розміщенні трьох точок простору A,B,C мають місце різні векторні суми. *Наприклад,*

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.$$

Властивості операції додавання векторів:

1. Вектор $-\vec{a}$ називається протилежним до вектора $\vec{a}$, якщо він має протилежний напрям і однакову з ним довжину.

Сумою протилежно напрямлених векторів є нуль-вектор :

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

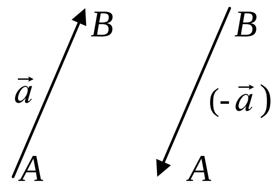


Рис.1.11

Дійсно, нехай $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, тоді $(-\vec{a}) = \overrightarrow{BA}$. За правилом трикутника та за рівністю (1) матимемо $\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

2. Нуль-вектор є нейтральним елементом операції додавання векторів: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

Дійсно, нехай $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{0} = \overrightarrow{BB}$ тоді

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

3. Комутативна операція додавання векторів, тобто

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Доведення:

Тут суттєво розглянути два випадки.

1) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - не колінеарні;

2) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - колінеарні, тобто паралельні або лежать на одній прямій.

У **першому** випадку:

з довільної точки А простору на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуємо паралелограм (рис.1.12).

Тоді $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

і $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

Так як праві частини рівностей рівні, то рівні і ліві.

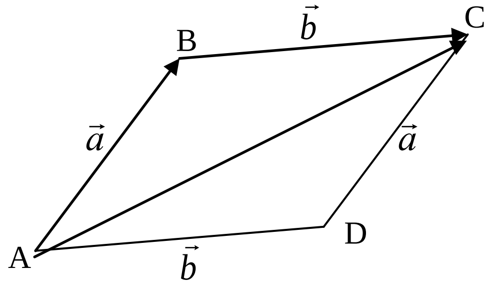


Рис.1.12

Отже, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Для **другого** випадку: з довільної точки А простору (рис.1.13) будуємо вектор:

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, з його кінця будуємо вектор

$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, тоді

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

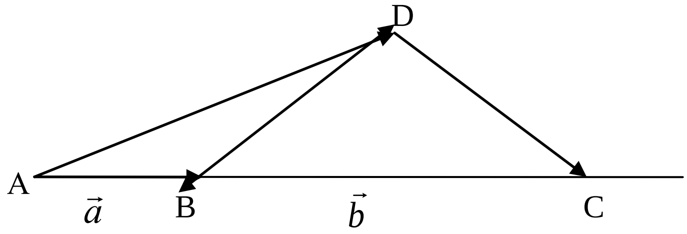


Рис.1.13

Візьмемо довільну точку D простору, яка не належить прямій АС.

Тоді $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} =$

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \vec{b} + \overrightarrow{DD} + \vec{a} = \vec{b} + \vec{0} + \vec{a} = \vec{b} + \vec{a} \ ,$$

що й треба було довести: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Наслідок: З доведеної властивості випливає ще одне правило додавання векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: з довільної точки простору будуємо вектори, рівні даним і на них будуємо паралелограм. Вектор-діагональ, що має початок в точці відкладання векторів є їх сумою (рис.1.12):

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

4. Асоціативна операція додавання векторів, тобто

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Доведення: Нехай дано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис.1.14)

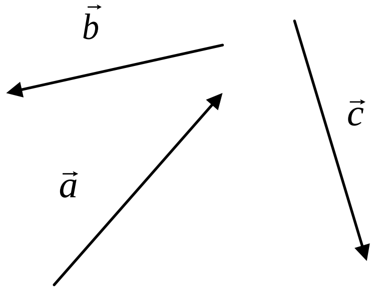


Рис.1.14

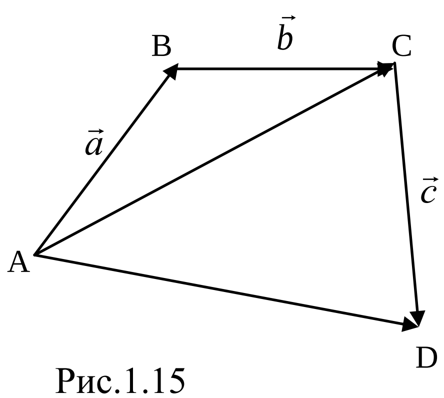


Рис.1.15

З довільної точки А простору (рис.1.15) побудуємо вектори

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$; $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$.

Тоді $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

і $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.

З отриманих двох рівностей, у яких праві частини рівні ($\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}$), отримаємо рівність лівих частин, тобто властивість доведена.

Додавання m-векторів

Доведені властивості (3) і (4) дають право відразу будувати суму m- числа векторів,

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+...+\vec{a}_m$$

Отримаємо таке правило.

Сума m-числа векторів будується наступним способом.

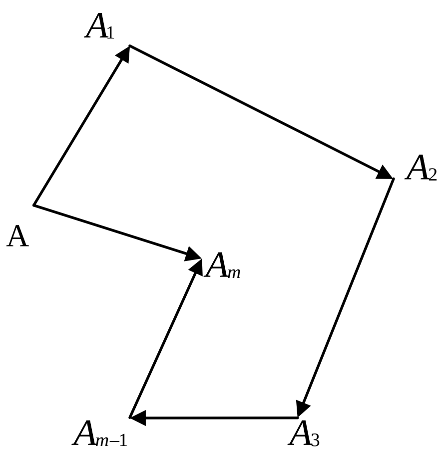


Рис.1.16

З довільної точки А простору будуємо вектор $\vec{a}_1=\overrightarrow{AA_1}$, з його кінця $\vec{a}_2=\overrightarrow{A_1A_2}$, з його кінця $\vec{a}_3=\overrightarrow{A_2A_3}$ і т.д., з кінця $\vec{a}_{m-1}$ вектор $\vec{a}_m=\overrightarrow{A_{m-1}A_m}$. Тоді вектор, що сполучає початок першого вектора $\vec{a}_1$ і кінець останнього вектора $\vec{a}_m$ є сумою цих всіх m векторів.

Дійсно, за рівністю (1):

$$\overrightarrow{A\ A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+...+\overrightarrow{A_{m-1}A_m}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+...+\vec{a}_m$$

Додавання колінеарних векторів

Тут можливі два випадки:

1) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ - співнапрямлені (рис.1.17)

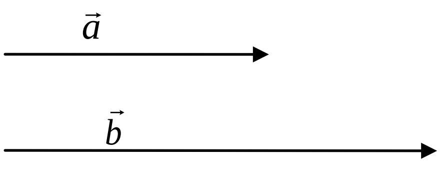


Рис.1.17

Будуємо суму векторів (рис.1.18) . За правилом додавання векторів та за рівністю (1):

Рис.1.18

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Отже, сума співнаправлених векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\overrightarrow{AC}$ - співнаправлений з векторами-доданками

$$\overrightarrow{AC}\uparrow\uparrow\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$$

і довжина його дорівнює сумі довжин даних векторів: $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$.

2) Якщо $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ - протилежно напрямлені (рис.1.19),

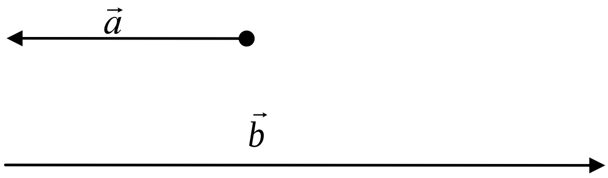


Рис.1.19

то знайдемо їх суму (рис.1.20) за правилом додавання векторів:

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.$

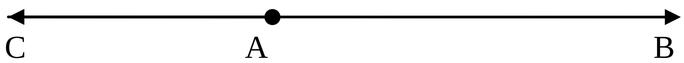


Рис.1.20

Очевидно, сумою протилежно напрямлених векторів є вектор співнапрямлений з довшим вектором і довжина його рівна різниці довжин векторів-доданків (від довжини більшого відняти довжину меншого).

§5. **Віднімання векторів**

Як і при відніманні чисел, операція віднімання векторів протилежна до операції додавання векторів.

Означення. Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{x}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$, тобто

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{x} \text{ такий, що } \vec{x}+\vec{b}=\vec{a} \qquad (2)$$

Виникає питання, чи існує такий вектор. На це питання відповідає наступне твердження.

Теорема 2. Для будь-яких двох векторів простору існує їх вектор–різниця і притому єдиний.

Доведення. Нехай дано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Рис.1.21

1) З довільної точки А простору побудуємо вектор $\overrightarrow{AB}$, що дорівнює $\vec{a}$ і $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ (рис.1.21).

За рівністю (1) для довільних трьох точок простору виконується векторна рівність, тоді

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB},$$

$$\text{тобто } \vec{b}+\overrightarrow{CB}=\vec{a}.$$

За рівністю (2),

$$\overrightarrow{CB}=\vec{x}$$

Отже, для довільних векторів існує їх різниця.

2) Доведемо єдність методом від супротивного.

Нехай, крім різниці $\vec{x}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, існує ще одна різниця $\vec{x}_1$, тобто

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{x} \text{ і } \vec{a}-\vec{b}=\vec{x}_1 \text{ або}$$

$$\vec{x}+\vec{b}=\vec{a} \text{ і } \vec{x}_1+\vec{b}=\vec{a}.$$

До обох частин кожної рівності додамо вектор, протилежний вектору $\vec{b}$. Отримаємо:

$\vec{x}+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{a}+(-\vec{b})$; $\vec{x}+\vec{0}=\vec{a}+(-\vec{b})$; $\vec{x}=\vec{a}+(-\vec{b})$

і $\vec{x}_1+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{a}+(-\vec{b})$; $\vec{x}_1+\vec{0}=\vec{a}+(-\vec{b})$; $\vec{x}_1=\vec{a}+(-\vec{b})$

з отриманих двох співвідношень робимо висновок, що $\vec{x} = \vec{x}_1$.

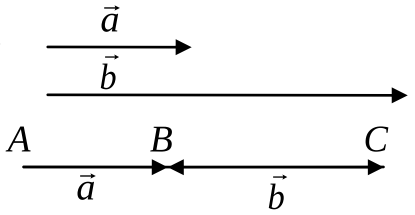
Отже, вектор-різниця єдиний.

Наслідки . 1. *Побудова різниці двох векторів*

З довільної точки простору, як з початку, будуємо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, сполучаємо їх кінці і направляємо вектор в бік того вектора, від якого віднімаємо.

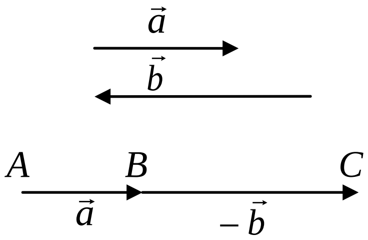
Якщо вектори колінеарні: 1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CB}.$$



2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}, \vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{CB};$

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$



2. Операцію віднімання двох векторів можна замінити операцією додавання протилежних векторів.

При доведені теореми ми отримали, що $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$ і за рівністю (2)

$$\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}\ .$$

З цих двох рівностей маємо $: \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Цей факт дуже зручно використати при побудові алгебраїчної суми векторів.

Приклад. Дано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Побудувати вектор $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$.

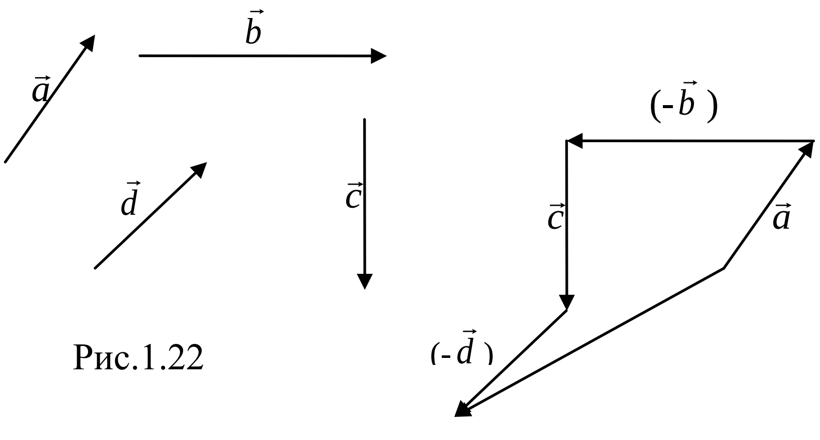


Рис.1.22

Розв’язання. Запишемо шуканий вектор у вигляді суми

векторів: $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} + (-\vec{d})$ і будуємо за правилом відшукання суми m векторів (§4) (рис.1.22)

§6. **Множення вектора на скаляр**

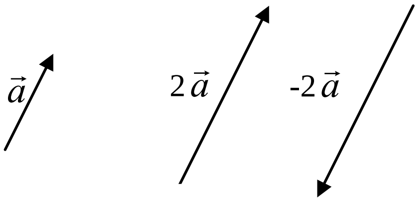


Рис.1.23

Означення. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор, довжина якого дорівнює добутку абсолютної величини числа λ на довжину вектора $\vec{a}$. Цей вектор співнаправлений з даним вектором $\vec{a}$, якщо λ - число додатне і протилежно направлений, якщо число від'ємне (рис.1.23). Добуток нуля на будь-який вектор і добуток числа на нуль-вектор є нуль-вектор. Це означення можна записати так:

$$\lambda\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|, \\ \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}, \textit{якщо}\, \lambda > 0, \\ \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}, \textit{якщо}\, \lambda < 0, \\ 0 \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}. \end{array}$$

Ця операція має такі три властивості.

1. *Асоціативна*

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

2. *Дистрибутивна* відносно векторного множника

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

3. *Дистрибутивна* відносно числового множника

$$(\vec{a} + \vec{b})\lambda = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

Перш ніж, перейти до доведення цих властивостей, розглянемо деякі допоміжні поняття.

Лема 1. Для того, щоб два вектори були колінеарні, необхідно і достатньо, щоб один вектор можна було подати, як добуток скаляра на другий вектор, тобто

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists\lambda : \vec{a} = \lambda\vec{b}$$

Доведення.

Необхідність. Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$, покажемо, що $\exists \lambda : \vec{a} = \lambda \vec{b}$. Доведення існування числа λ полягає в тому, що безпосередньо це число знаходимо для двох випадків:

а) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ та б) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

Розглянемо *другий випадок*. За означенням добутку вектора на число маємо $|\vec{a}| = |\lambda||\vec{b}|$. Звідси $\lambda = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$, враховуючи що $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, покладемо $\lambda = -\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$. Покажемо, що $\lambda \vec{b} = \vec{a}$. За означенням рівності двох векторів: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \end{cases}$. Потрібно показати, що довжина вектора $\lambda \vec{b}$ рівна довжині вектора $\vec{a}$ і $\lambda \vec{b}$ співнапрямлений з $\vec{a}$.

Дійсно, маємо:

1) $\lambda \vec{b} = -\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}$, тоді

$\left|\lambda \vec{b}\right| = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}|$, тобто $\left|\lambda \vec{b}\right| = |\vec{a}|$.

2) $\lambda \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, бо $\lambda<0$

$\lambda \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$

$\lambda \vec{b} = \vec{a}$

Достатність доведена: $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

Випадок а) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ доводиться аналогічно.

Лема доведена.

Означення. Ортом називається вектор одиничної довжини.

Здебільшого орт позначають $\vec{e}$.

$$|\vec{e}| = 1.$$

Означення. Ортом вектора $\vec{a}$ називається вектор, співнапрямлений з вектором $\vec{a}$ і одиничної довжини (рис.1.24).

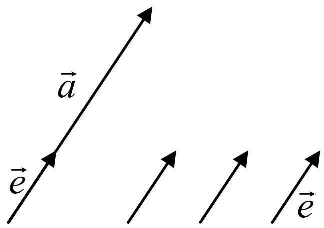


Рис.1.24

Вираження вектора через його орт

Нехай $\vec{e}$ орт вектора $\vec{a}$. Тоді $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{e}$

За лемою, існує таке λ , що $\vec{a}=\lambda\vec{e}=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|}\vec{e}=|\vec{a}|\vec{e}$.

Отже, вектор $\vec{a}$ виражається через його орт за формулою :

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{e}$$

Доведення властивостей операції множення вектора на число

1. Асоціативна

$\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$

Введемо позначення $\alpha(\beta\vec{a})=\vec{p},(\alpha\beta)\vec{a}=q.$

Потрібно довести, що $\vec{p}=\vec{q}$, для цього, за означенням рівності векторів потрібно показати, що виконуються дві умови:

1) $|\vec{p}|=|\vec{q}|$

2) $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{q}$

Дійсно,

1) $|\vec{p}|=|\alpha(\beta\vec{a})|=|\alpha||\beta\vec{a}|=|\alpha||\beta||\vec{a}|$,

$|\vec{q}|=|(\alpha\beta)\vec{a}|=|\alpha\beta||\vec{a}|=|\alpha||\beta||\vec{a}|$.

Отже, $|\vec{p}|=|\vec{q}|$

2) Можливі такі 4 випадки відносно знаків чисел.

1) $\alpha>0$¸ $\beta>0$;

2) $\alpha>0$¸ $\beta<0$;

3) $\alpha<0$, $\beta>0$;

4) α<0, β <0.

Доведемо третій випадок: α<0, β>0, останні – аналогічно.

Розглянемо $\vec{p} = \alpha(\beta\vec{a})$.

Оскільки α<0, то $\vec{p} \uparrow\downarrow \beta\vec{a}, \vec{a} \uparrow\uparrow \beta\vec{a}, бо \beta > 0$. Отже, $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{a}$

Тепер розглянемо вектор $\vec{q} = (\alpha\beta)\vec{a}$.

Оскільки $\alpha \cdot \beta$<0, то $\vec{q} \uparrow\downarrow \vec{a}$

Так як $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{a}$ і $\vec{q} \uparrow\downarrow \vec{a}$, то $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$.

Отже, виконуються обидві умови рівності векторів, тобто $\vec{p} = \vec{q}$.

Властивість доведена.

2. Дистрибутивна відносно векторного множника

$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

Аналогічно до попередньої властивості введемо позначення

$(\alpha + \beta)\vec{a} = \vec{p}, \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} = \vec{q}$ і доведемо рівність цих векторів: $\vec{p} = \vec{q}$.

Тут можливі такі 6 випадків, щодо знаків чисел α та β:

1) α>0¸ β>0, α+ β>0;

2) α>0¸ β<0, α+ β>0;

3) α>0¸ β<0, α+ β<0;

4) α<0, β>0, α+ β>0;

5) α<0, β>0, α+ β<0;

6) α<0, β <0, α+ β<0.

Розглянемо один із випадків, наприклад, третій.

1. $|\vec{p}| = |(\alpha + \beta)\vec{a}|$. За означенням добутку вектора на число:

$$|(\alpha + \beta)\vec{a}| = |\alpha + \beta| \cdot |\vec{a}| = (|\beta| - |\alpha|) \cdot |\vec{a}| = |\beta||\vec{a}| - |\alpha||\vec{a}|,$$

$|\vec{q}| = |\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}|$. Довжина цього вектора дорівнює різниці довжин колінеарних векторів. Так як α>0¸ то $\alpha \cdot \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, а $\beta < 0, то \beta\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, тоді модуль суми протилежно направлених векторів дорівнює різниці модулів, тобто

$$|\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}| = |\beta \cdot \vec{a}| - |\alpha \cdot \vec{a}|$$

За означенням добутку вектора на число

$$|\beta\cdot\vec{a}|-|\alpha\cdot\vec{a}|=|\beta||\vec{a}|-|\alpha||\vec{a}|$$

Отже, $|\vec{p}|=|\vec{q}|$.

3. Покажемо, що вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ - співнапрямлені.

Дійсно, $\vec{p}=(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, оскільки $\alpha+\beta<0$.

$\vec{q}=(\alpha\vec{a}+\beta\vec{a})\uparrow\uparrow\beta\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, оскільки $\alpha\vec{a}\uparrow\downarrow\beta\vec{a}$, їх сумою є вектор співнапрямлений з довшим, тобто $\beta\vec{a}$ і так як $\beta<0$, то він протилежно напрямлений з вектором $\vec{a}$: $\vec{q}\uparrow\downarrow\vec{a}$

Отже, обидва вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ протилежно напрямлені з вектором $\vec{a}$, тобто $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{q}$.

Зауваження: Доведена властивість дає право, *з одного боку,* розкривати дужки, коли в дужках сума чисел; *з другого боку* , виносити за дужки спільний векторний множник. Інші випадки доводяться аналогічно.

3. Дистрибутивна властивість відносно числового множника

$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}.$

Тут принципово важливі два випадки:

1) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - колінеарні; 2) $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - не колінеарні.

Розглянемо кожен з них.

1) Нехай $\vec{a}\parallel\vec{b}$

За лемою 1 існує λ таке, що $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

Враховуючи властивість 2:

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha(\lambda\vec{b}+\vec{b})\ =\alpha(\lambda+1)\vec{b}=(\alpha\lambda+\alpha)\vec{b}=(\alpha\lambda)\vec{b}+\alpha\vec{b}=\alpha(\lambda\vec{b})+\alpha\vec{b}=$$

$=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$, тобто виконується властивість.

2) Нехай тепер $\vec{a}$ і $\vec{b}$ - не колінеарні вектори.

З довільної точки А простору будуємо вектори

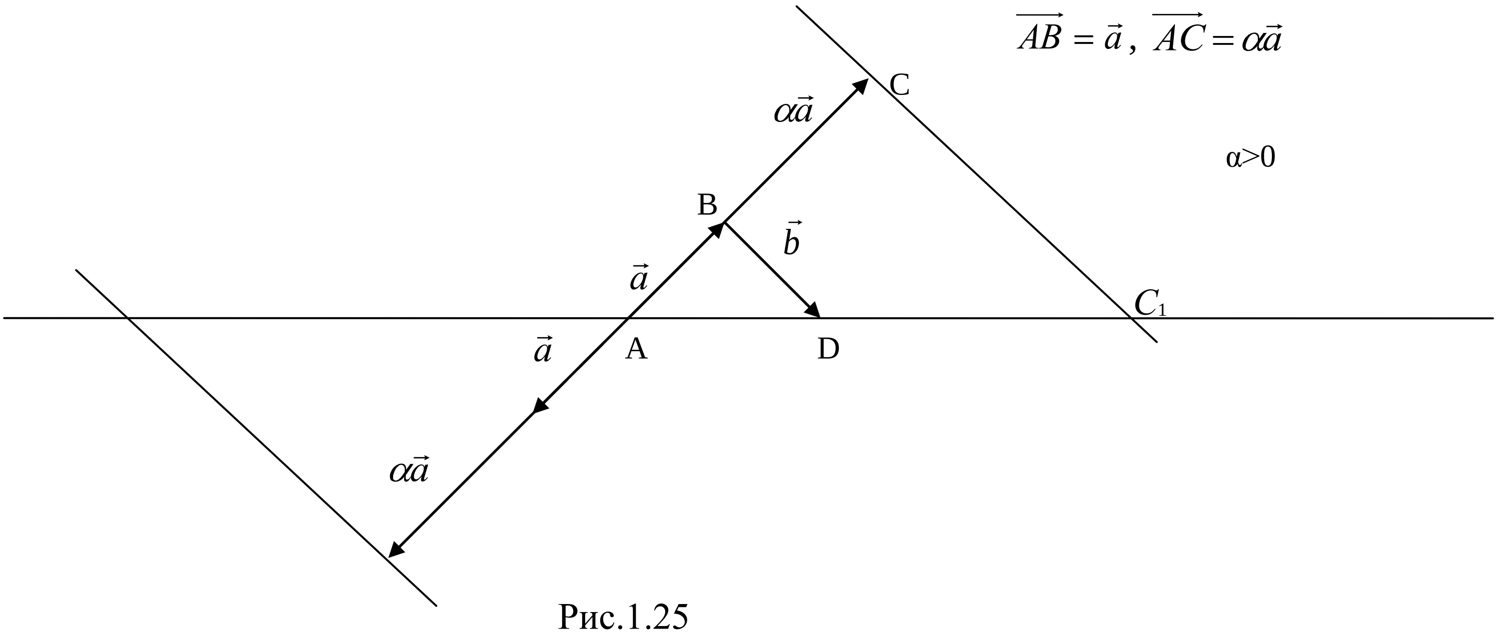


Рис.1.25

Тут можливі два випадки: α>0, α<0 (рис.1.25). Побудуємо вектор $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. З точки С проведемо пряму паралельну вектору $\overrightarrow{BD}$ до перетину з прямою AD. Отримаємо точку C_1.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD},$$

тобто $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AD}$/

З подібності трикутників: $\Delta ABD \sim \Delta AC C_1$ запишемо відношення

$$\frac{CC_1}{BD} = \frac{AC}{AB} = \alpha.$$

Звідси $\overrightarrow{CC_1} = \alpha\overrightarrow{BD} = \lambda\vec{b}$.

Оскільки $\dfrac{AC_1}{AD} = \dfrac{CC_1}{BD} = \alpha,$

то $\overrightarrow{AC_1} = \alpha\overrightarrow{AD} = \alpha(\vec{a} + \vec{b}).$

З другого боку, $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1}$, тобто $\overrightarrow{AC_1} = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$

Отже, $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$

Зауваження:Доведена властивість дає право, з одного боку, розкривати дужки, коли в дужках сума векторів, і, навпаки, виносити за дужки спільний числовий множник.

Задача. В трикутнику ABC проведено медіани AM_1, BM_2, CM_3. Знайти і побудувати суму

$$\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{CM_3}$$

Розв'язання.

Введемо вектори

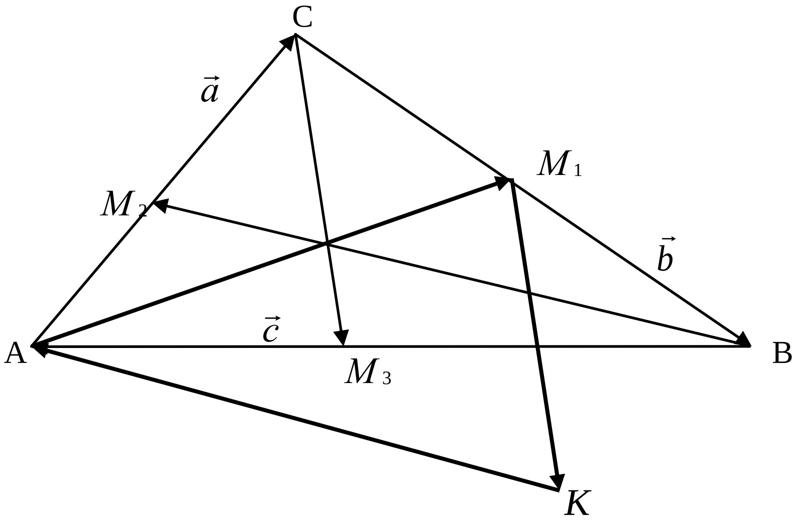


Рис.1.26

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{CB} = \vec{b} \quad \text{(рис.1.26)}$$

$$\overrightarrow{BA} = \vec{c}$$

Виразимо медіани через вектори

$$\overrightarrow{AM_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{BM_2} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{CM_3} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Знайдемо їх суму: $\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{CM_3} = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{3}{2}\vec{0} = \vec{0}$.

Отже, вектори-медіани, при побудові їх суми, утворюють замкнену лінію, тобто трикутник. На рисунку – це ΔAM_1K.

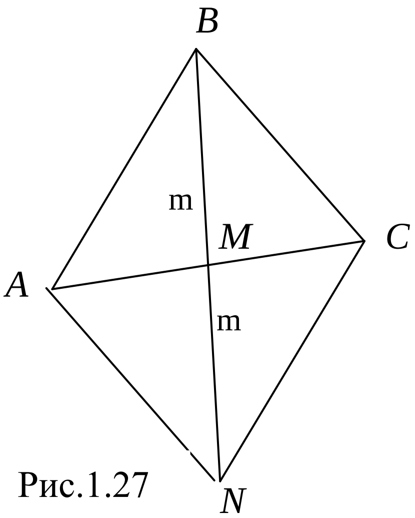


Рис.1.27

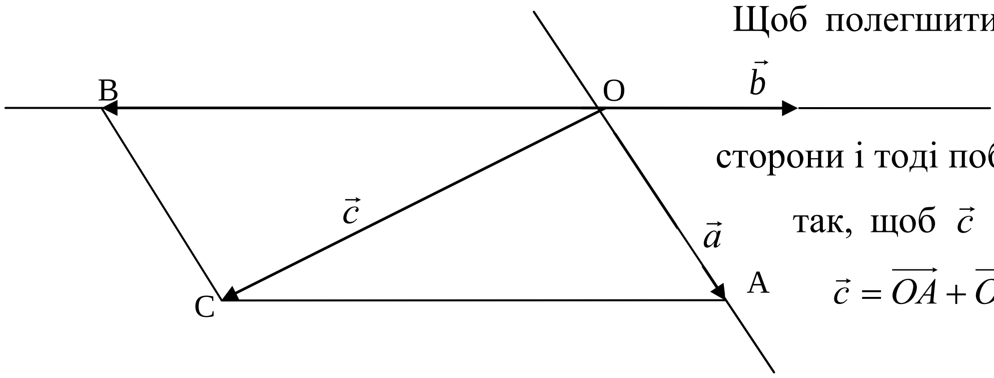
Зауваження. Якщо в умові задачі дано медіану трикутника,то,в багатьох випадках, корисно цю медіану продовжити і відкласти відрізок за довжиною рівний їй.

Отримаємо паралелограм (рис.1.27). Тоді скористуватися властивістю, що сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін, тобто $AC^2 + (2BM)^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.

Задача на розклад вектора за базисними векторами

Розв'язання. Розглянемо випадок площини.

Потрібно вектор $\vec{c}$ розкласти за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Щоб полегшити задачу, продовжимо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ в усі сторони і тоді побудуємо паралелограм так, щоб $\vec{c}$ був діагоналлю. Тоді $\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

За лемою, $\exists \alpha : \overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}, \exists \beta : \overrightarrow{OB} = \beta\vec{b},$ тоді $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$

§7. **Лінійна залежність векторів**

Ми вивчили лінійні операції над векторами. Це дає можливість розв'язати певний клас геометричних задач. Але ще не можемо розв'язувати задачі на обчислення довжин відрізків, величини кутів, площ, об'ємів, геометричних фігур тощо. Очевидно маємо ввести інші операції, а для цього нам буде потрібний допоміжний матеріал.

Нехай задана система векторів

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$$

і, відповідно, система дійсних чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in R.$$

Означення. Лінійною комбінацією векторів

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$$

з коефіцієнтами

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$$

називається ***вектор***, що є сумою добутків векторів $\vec{a}_i$ на відповідні коефіцієнти α_i, де *i* – пробігає значення 1,2,3…

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_m\vec{a}_m \Leftrightarrow \vec{a} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i, \ \Sigma - \text{сігма}.$$

Означення. Система векторів

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$$

називається ***лінійно залежною***, якщо існують такі числа

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m,$$

серед яких хоча б одне відмінне від нуля, що лінійна комбінація цих векторів з цими коефіцієнтами рівна $\vec{0}$.

Отже, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ - лінійно залежні $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0}$, (4).

причому $\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \neq 0$ (хоча б одне α_i не дорівнює нулю).

Означення. Система векторів називається ***лінійно незалежною***, якщо не існує чисел α_i, відмінних від нуля, таких, що виконується (4).

Іншими словами, система векторів лінійно незалежна, якщо $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0} \Leftrightarrow$ всі α_i=0.

Наслідок1. Якщо дана система векторів містить нуль-вектор, то така система лінійно залежна.

Доведення.

Дійсно, розглянемо систему векторів

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{0}.$$

Очевидно,

$$0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

Так як один з коефіцієнтів (третій) 1≠0, то дана система векторів лінійно залежна.

Наслідок2. Якщо дана система векторів містить лінійно залежну підсистему, то і вся система лінійно залежна.

Доведення.

Дійсно, нехай $\vec{a}, \vec{b}$ - лінійно залежна система.

Розглянемо систему

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$$

Так як $\vec{a},\vec{b}$ - лінійно залежна, то, за означенням,

$\exists\alpha,\beta:\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$, де α і β одночасно не рівні нулю. Нехай для означеності α≠0, тоді, очевидно,

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+0\cdot\vec{c}+0\cdot\vec{d}=0, \text{ оскільки } \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=0, \text{ причому } \alpha\neq 0.$$

Це означає, що система векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ є лінійно залежною.

§8. **Колінеарність векторів**

Виникає питання, як вияснити, чи дані вектори лінійно залежні чи лінійно незалежні? В цьому допоможе

Теорема 3. Для того, щоб два вектори були колінеарні необхідно і достатньо, щоб вони були лінійно залежними:

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow \text{лінійно залежні}$$

Доведення.

Необхідність: нехай $\vec{a}\parallel\vec{b}$

За лемою 1 $\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}-\lambda\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow 1\cdot\vec{a}-\lambda\vec{b}=\vec{0}.$ Маємо, лінійна комбінація векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівна нуль-вектору, причому один із коефіцієнтів відмінний від нуля $1\neq 0$. Значить вектори $\vec{a},\vec{b}$ - лінійно залежні.

Достатність: нехай вектори $\vec{a},\vec{b}$ - лінійно залежні.

За означенням, $\exists\alpha,\beta,$ з яких хоча б одне відмінне від нуля, що $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=0.$

Нехай для означеності α≠0.

Так як α≠0, то можемо поділити обидві частини рівності на α і виразити вектор $\vec{a}$: $\vec{a}=-\dfrac{\beta}{\alpha}\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\uparrow\uparrow\lambda\vec{b}\parallel\vec{b}$. Звідси $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

Теорема доведена.

§9. **Компланарність векторів**

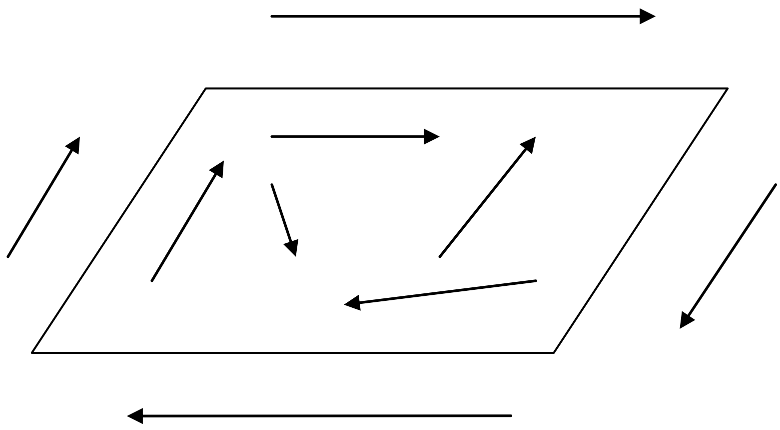


Рис.1.28

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються ***компланарними,*** якщо вони паралельні одній площині (або лежать в одній площині).

Теорема 4. Для того, щоб три вектори були компланарними, необхідно і достатньо, щоб вони були лінійно залежними,

тобто: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ –компланарні $\Leftrightarrow$ вони лінійно залежні.

Доведення. *Необхідність.* Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні.

Тут принципово можливі два випадки:

а) серед цих трьох векторів є два колінеарні.

б) немає колінеарних.

Розглянемо ці випадки.

1) Нехай для означеності $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тоді за теоремою 3, вектори $\vec{a}, \vec{b}$ – лінійно залежні. За наслідком II §7 і вся система векторів лінійно залежна.

2) Нехай для означеності вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. З довільної точки А простору будуємо вектори

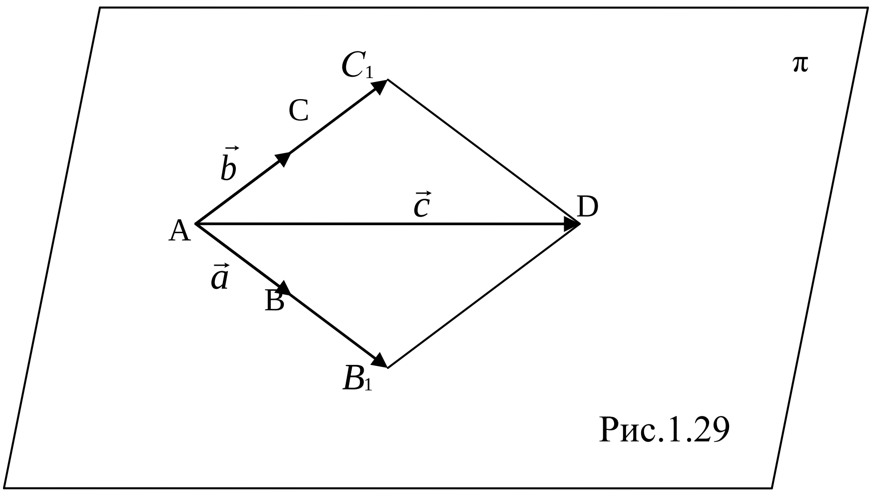


Рис.1.29

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$$
$$\overrightarrow{AC} = \vec{b}$$

Так як вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то точки A,B,C – єдиним способом визначають площину π. Побудуємо вектор $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Через точку D проведемо $DB_1 \parallel AC$, $DC_1 \parallel AB$. Отримаємо паралелограм AB_1DC_1. Вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}$

Так як $\overrightarrow{AB_1} \parallel \vec{a}$, то, за лемою $\overrightarrow{AB_1} = \alpha\vec{a}$ і так як $\overrightarrow{AC_1} \parallel \vec{b}$, то за лемою, $\overrightarrow{AC_1} = \beta\vec{b}$.

Тоді $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \Leftrightarrow 1 \cdot \vec{c} - \alpha\vec{a} - \beta\vec{b} = \vec{0}.$

Очевидно система векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно залежна, оскільки один з коефіцієнтів відмінний від нуля (1≠0).

Достатність. Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно залежні. Тоді $\exists \alpha, \beta, \gamma$, не всі одночасно рівні нулю такі, що $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}.$

Нехай, для означеності, α≠0 , тоді поділивши обидві частини рівності на α, виразимо вектор $\vec{a}$:

$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{c}.$$

Ввівши позначення, отримаємо $\vec{a} = m \cdot \vec{b} + n \cdot \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow (m\vec{b} + n\vec{c})$.

Якщо одне із чисел, m або n, дорівнює нулю, то вектори колінеарні і отже, компланарні. Якщо ж m,n відмінні від нуля, то вектори $m\vec{b}$ і $n\vec{c}$ визначають площину π і вектор $\vec{a} \parallel$π, тобто всі вектори компланарні. Що й треба було довести.

§10. **Лінійна залежність чотирьох векторів простору**

Теорема 5. Будь-які чотири вектори простору лінійно залежні.

Доведення. Нехай дано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Принципово можливі два випадки.

1) Серед цих чотирьох векторів є три компланарні, тоді, за теоремою 4, ці три вектори лінійно залежні і, за наслідком II §7 , вся система векторів лінійно залежна.

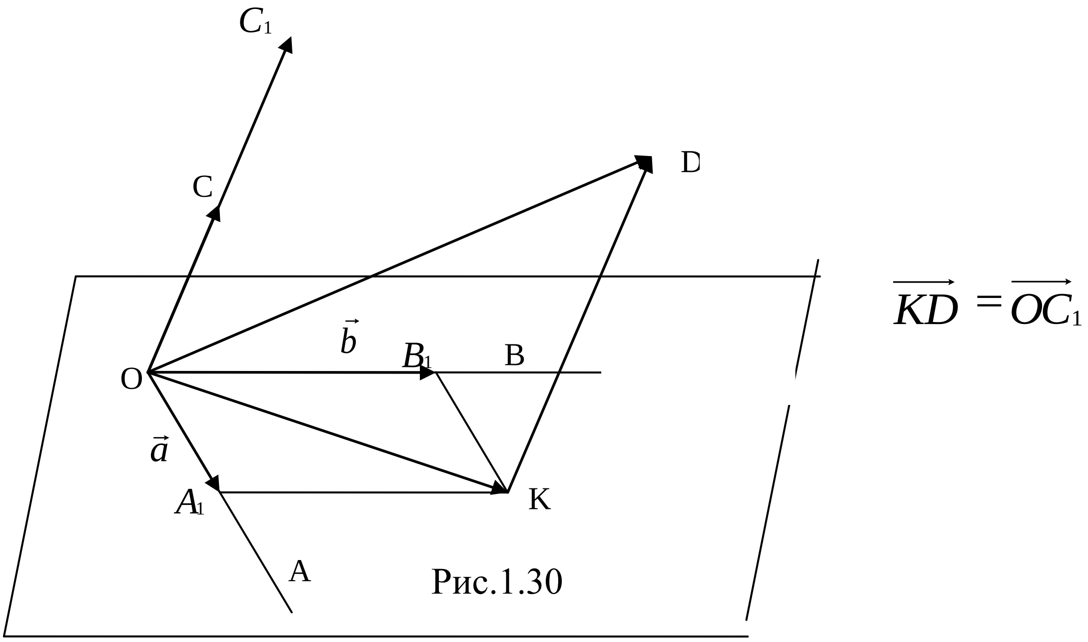


Рис.1.30

2) Серед цих чотирьох векторів є три некомпланарні. Нехай для означеності $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ –некомпланарні. З довільної точки О простору будуємо $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Точки О, А, В– єдиним способом визначають площину π. Побудуємо $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Так як $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ –некомпланарні, то точка С $\notin$ π. Побудуємо $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$. Через точку D проведемо пряму DK ‖ OC до перетину з площиною π в точці К. Розглянемо вектор $\overrightarrow{OK}$. Через точку К проведемо прямі $KA_1 \parallel OB$ і $KB_1 \parallel OA$. Отримаємо паралелограм OA_1KB_1.

І, отже, $\vec{d}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$,

Так як $\overrightarrow{OA_1}\parallel\vec{a}$, $\overrightarrow{OB_1}\parallel\vec{b}$, $\overrightarrow{OC_1}\parallel\vec{c}$.

Тобто, $1\cdot\vec{d}-\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}-\gamma\vec{c}=\vec{0}$ - лінійна комбінація векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ рівна нулю, причому існує коефіцієнт, відмінний від нуля. Отже, вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ лінійно залежні.

Наслідок1. Будь-які n≥4 векторів простору лінійно залежні, так як є лінійно залежною підсистемою з чотирьох векторів.

Наслідок2. Максимальне число лінійно незалежних векторів простору рівне 3 і тому простір тривимірний.

Означення. Упорядкована трійка лінійно незалежних векторів простору називається ***базисом*** цього ***простору.*** Здебільшого він позначається

$$B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3).$$

§11. **Розклад вектора. Координати вектора**

Теорема 6. Будь-який вектор простору можна єдиним способом подати як лінійну комбінацію базисних векторів.

Доведення. 1) Нехай задано базис $B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ і довільний вектор $\vec{a}$ простору. Розглянемо систему векторів

$$\vec{a},\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$$

За теоремою 5, система лінійно залежна. За означенням лінійної залежності

$\exists\alpha,\beta,\gamma,\delta$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, що

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{e}_1+\lambda\vec{e}_2+\delta\vec{e}_3=\vec{0}.$$

Доведемо, що α≠0. Дійсно, в супротивному випадку ми б отримали, що

$$\beta\vec{e}_1+\lambda\vec{e}_2+\delta\vec{e}_3=\vec{0}$$

і хоча б один з коефіцієнтів не рівний нулю. Це означало б, що система векторів

$$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$$

була б лінійно залежною, що неможливо, бо це базис. Отже, на α можна поділити обидві частини рівності, тоді

$$\vec{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\vec{e}_1-\frac{\gamma}{\alpha}\vec{e}_2-\frac{\delta}{\alpha}\vec{e}_3.$$

Позначивши коефіцієнти при $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ відповідно x,y,z, отримаємо вираз

$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3 \quad (5)$$

для вектора $\vec{a}$ через лінійну комбінацію векторів $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$.

2) Єдиність доведемо методом від супротивного.

Нехай крім коефіцієнтів (x;y;z) існують відмінні від них $(x_1;y_1;z_1)$, такі що

$$\vec{a}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3.$$

Прийнявши до уваги (5) отримаємо:

$x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3$ або $(x-x_1)\vec{e}_1+(y-y_1)\vec{e}_2+(z-z_1)\vec{e}_3=\vec{0}$

Так як система $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ лінійно незалежна, то за означенням

$$\begin{cases} x - x_1 = 0, \\ y - y_1 = 0, \\ z - z_1 = 0. \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} x = x_1, \\ y = y_1, \\ z = z_1. \end{cases}$$

Ми прийшли до суперечності. Отже, коефіцієнти розкладу єдині.

Теорема доведена.

Означення. Координатами вектора відносно заданого базису називається впорядкована трійка дійсних чисел, які є коефіцієнтами в лінійному розкладі вектора за базисними векторами і позначається

$\vec{a}$ (x;y;z)

Зауваження: Якщо вектор $\vec{a}$ (x;y;z), то $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ і

як при доведенні теореми 5 вектор

$$\vec{a} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

тобто $\begin{cases} x\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}, \\ y\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}, \\ z\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}. \end{cases}$, де $\vec{e}_1$ – орт $\overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2$ – орт $\overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3$ – орт $\overrightarrow{OC}$.

$$\text{Отже, } x = \begin{cases} +\left|\overrightarrow{OA}\right|, \text{якщо} \overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \vec{a}, \\ -\left|\overrightarrow{OA}\right|, \text{якщо} \overrightarrow{OA} \uparrow\downarrow \vec{a}. \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{Аналогічно } y = \begin{cases} +\left|\overrightarrow{OB}\right|, \overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow \vec{e}_2, \\ -\left|\overrightarrow{OB}\right|, \overrightarrow{OB} \uparrow\downarrow \vec{e}_2. \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} +\left|\overrightarrow{OC}\right|, \overrightarrow{OC} \uparrow\uparrow \vec{e}_3, \\ -\left|\overrightarrow{OC}\right|, \overrightarrow{OC} \uparrow\downarrow \vec{e}_3. \end{cases}$$

Взагалі кажучи, ці орти можуть бути різної довжини. В такому випадку **базис *B*** називається *афінним*.

Якщо вектор колінеарний одному із базисних векторів, наприклад, $\vec{a} \parallel \vec{e}_2$, то за лемою

$$\vec{a} = \lambda \vec{e}_2.$$

Формула (5) набуде вигляду:

$$\vec{a} = 0\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

тобто $\vec{a}(0; \lambda; 0)$

Якщо вектор колінеарний площині, що визначається двома базисними векторами, наприклад $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, то

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

тобто $\vec{a}(x; y; 0)$

Ортонормований базис

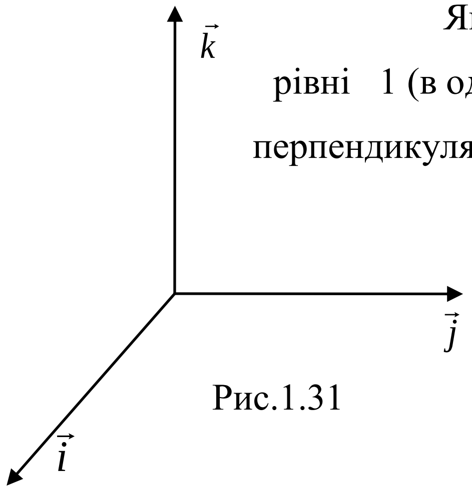


Рис.1.31

Якщо базисні вектори однієї й тієї ж довжини, а саме рівні 1 (в одному і тому ж масштабі) і, крім того, вони взаємно перпендикулярні, то такий ***базис*** називається ***ортонормованим*** і позначається

$$B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}|, \ \vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$$

Формула (5) така

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Лінійні операції над векторами в координатах

Ми вивчили лінійні операції над векторами геометрично: сума, різниця, добуток на скаляр будуються як геометричні об'єкти. За допомогою базису і координат вектора геометричну задачу перекладають на мову алгебри і замість геометричних об'єктів працюють з числами – координатами за законами чисел.

Теорема 7. Координати лінійної комбінації векторів рівні тій же лінійній комбінації відповідних координат.

Доведення. Для означеності розглянемо лінійну комбінацію двох векторів. Міркування справедливі для будь-якого числа векторів n≥2/

Нехай $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ – два дані вектори.

Побудуємо $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha(x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) + \beta(x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3) =$
$= (\alpha x_1 + \beta x_2)\cdot\vec{e}_1 + (\alpha y_1 + \beta y_2)\cdot\vec{e}_2 + (\alpha z_1 + \beta z_2)\cdot\vec{e}_3$.

Отже, отримали:

$$x_{\vec{c}} = \alpha x_1 + \beta x_2,$$
$$y_{\vec{c}} = \alpha y_1 + \beta y_2,$$
$$z_{\vec{c}} = \alpha z_1 + \beta z_2.$$

Наслідок1. Координати суми векторів рівні сумі координат (α= β=1)

Наслідок2. Координати добутку вектора на скаляр (β=0 рівні добутку скаляра на відповідні координати.

Теорема 8 (*Необхідна і достатня умови колінеарності векторів у координатах).*

Для того, щоб вектор $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ був колінеарний вектору $\vec{b}$ $(x_2; y_2; z_2)$, необхідно і достатньо, щоб координати цих векторів були пропорційні.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (7)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

За лемою $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Запишемо цю рівність у координатах.

Вектор $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$,

Вектор $\lambda\vec{b}$ $(\lambda x_2; \lambda y_2; \lambda z_2)$.

Рівні вектори мають рівні відповідні координати, бо рівні вектори це один і той же вектор. Тому

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_2, \\ y_1 = \lambda y_{2,} \\ z_1 = \lambda z_2. \end{cases} \text{ тобто } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda.$$

Достатність. Нехай має місце формула (7). Введемо коефіцієнти пропорційності

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda \text{ , тоді } \begin{cases} x_1 = \lambda\, x_2 \\ y_1 = \lambda\, y_2 \\ z_1 = \lambda\, z_2 \end{cases} \text{, оскільки } \begin{matrix} \vec{a}(x_1; y_1; z_1), \\ \lambda\vec{b}(\lambda\, x_2; \lambda\, y_2; \lambda\, z_2), \end{matrix} \text{, то}$$

$$\vec{a} = \lambda\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ .}$$

Теорема 9 (*Необхідні і достатні умови компланарності трьох векторів координатах).*

Для того, щоб вектори

$$\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1),\ \vec{b}\,(x_2; y_2; z_2),\ \vec{c}\,(x_3; y_3; z_3)$$

були компланарні, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова: детермінант, складений з координат цих векторів, дорівнював нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

Доведення. Необхідність. Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні, тоді $\exists \alpha, \beta, \gamma$ не всі одночасно рівні нулю, що $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$.

За теоремою 7

$$\begin{cases} \alpha\, x_1 + \beta\, x_2 + \gamma\, x_3 = 0, \\ \alpha\, y_1 + \beta\, y_2 + \gamma\, y_3 = 0, \quad (*) \\ \alpha\, z_1 + \beta\, z_2 + \gamma\, z_3 = 0. \end{cases}$$

З алгебри відомо, що має місце (8).

Достатність. Якщо виконується (8), то має місце система (*) і, отже, вектори лінійно залежні і за теоремою 4 вони компланарні.

§12. **Проектування вектора**

Будемо проектувати вектор на площину, на пряму і на вісь. Напрям проектування буде задано відповідно прямою α і площиною π .

I. ***На площину***

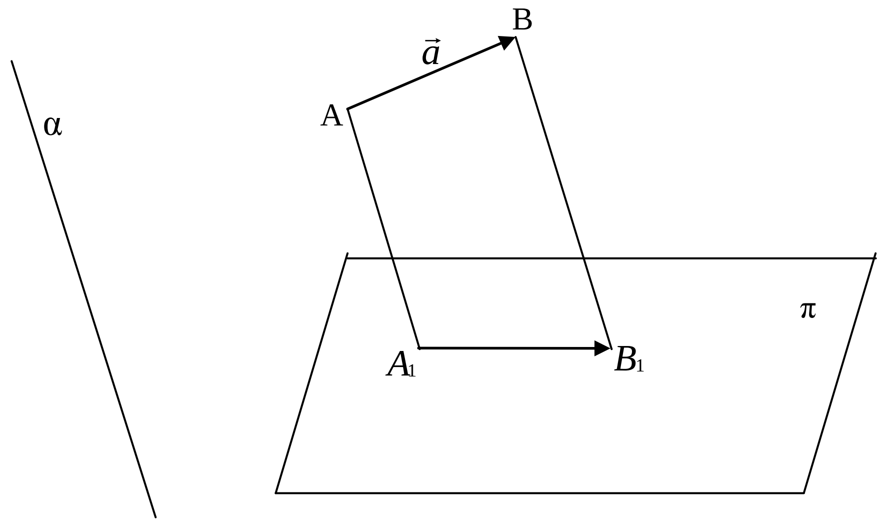


Рис.1.32

Означення 1. ***Проекцією точки*** А на площину π в напрямку прямої α називається точка перетину прямої, проведеної через точку А паралельно α з площиною π.

Означення 2. ***Проекцією вектора*** $\overrightarrow{AB}$ ***на площину*** π в напрямку прямої α називається вектор, початком якого є проекція початку, а кінцем – проекція кінця (рис.1.32).

II. ***На пряму.***

Означення 3. ***Проекцією точки А на пряму U*** в напрямку площини α називається точка A_1 перетину площини, проведеної через точку А

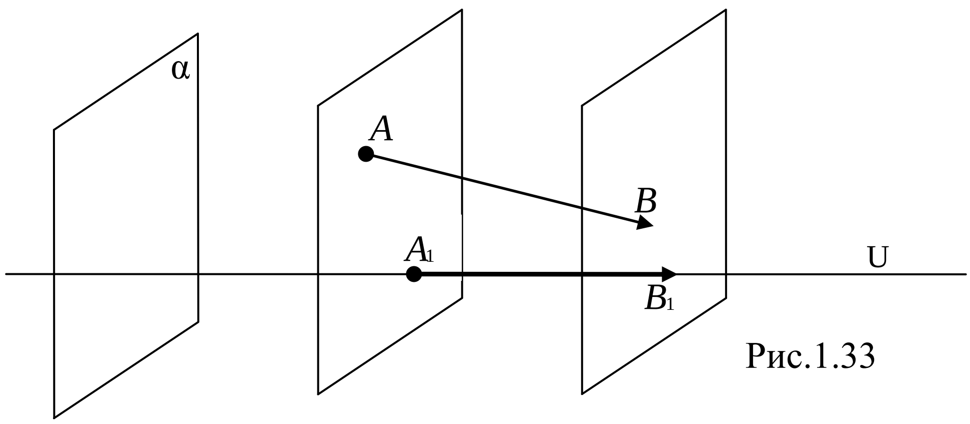


Рис.1.33

паралельно площині α з прямою U (рис.1.33).

Означення 4. ***Проекцією вектора*** $\overrightarrow{AB}$ ***на пряму U*** в напрямку площини α (***вектор-проекцією*** або ***компонентою*** вектора) називається вектор, початком якого є проекція початку вектора, а кінцем – проекція кінця (рис.1.33).

$\overrightarrow{A_1B_1}$ – компонента $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$ – компонента $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{A_1B_1} \neq \overrightarrow{B_1A_1}$.

III. ***На вісь***

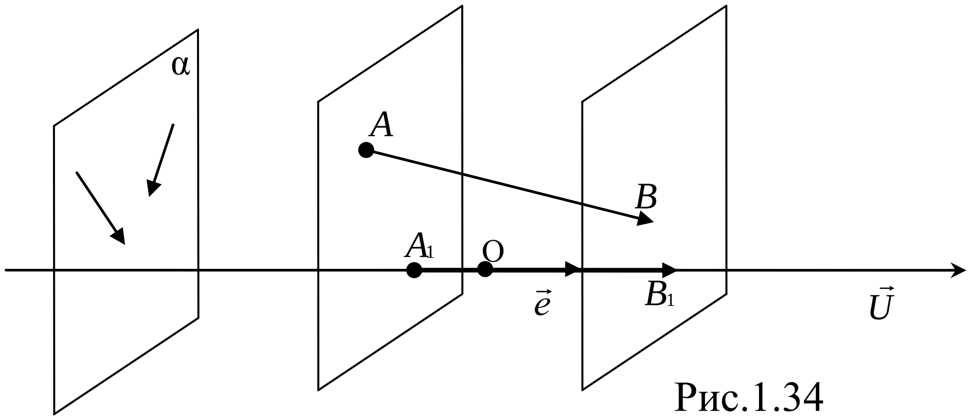


Рис.1.34

Нагадаємо: ***віссю*** називається пряма, на якій задано початок відліку точку *О,* масштаб і додатний напрям. Так як на осі заданий напрям, то легко відрізнити проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ від проекції $\overrightarrow{BA}$, їх можна відрізнити знаком.

Означення 5*. *Проекцією вектора* $\vec{a}$ *на вісь $\vec{U}$ називається число, абсолютна величина якого дорівнює довжині компоненти вектора на відповідну пряму, взятій із знаком « +», якщо вона співнаправлена з напрямом осі, із знаком « - » в супротивному випадку.

Отже, $$\text{Пр.}_{\vec{U}}\,\vec{a} = \begin{cases} +\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|, \textit{якщо}\ \overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \vec{U}, \\ -\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|, \textit{якщо}\ \overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \vec{U}. \end{cases} \quad (9)$$

Якщо ж вектор належить площині α, що задає напрям проектування, то він спроектується в точку.

§13. **Зв'язок понять "координати вектора" і " Пр $\vec{a}$ "**

Теорема 10. Проекція вектора $\vec{a}$ на координатну вісь (базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) у напрямку площини, що визначається двома іншими координатними осями, рівна відповідній координаті вектора в даному базисі.

$$Пр._{\vec{e}_1} \vec{a} = x, \text{ в напрямку площини векторів } (\vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

$$Пр._{\vec{e}_2} \vec{a} = y, \text{ в напрямку площини векторів } (\vec{e}_1, \vec{e}_3) \qquad (10)$$

$$Пр._{\vec{e}_3} \vec{a} = z, \text{ в напрямку площини векторів } (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

Доведення. Розглянемо першу координату x. Ми знаємо з §11, що

$$\vec{a} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \Rightarrow$$

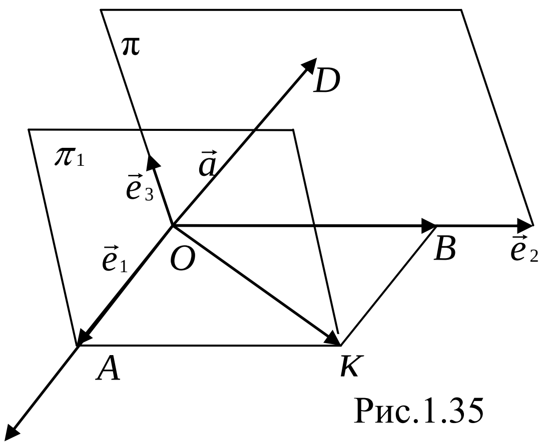


Рис.1.35

$$\begin{matrix} x\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA} \\ y\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB} \\ z\vec{e}_3 = \overrightarrow{OD} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \begin{cases} +\left|\overrightarrow{OA}\right|, \overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \vec{e}_1, \\ -\left|\overrightarrow{OA}\right|, \overrightarrow{OA} \uparrow\downarrow \vec{e}_1, \end{cases} \\ y = \begin{cases} +\left|\overrightarrow{OB}\right|, \overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow \vec{e}_2, \\ -\left|\overrightarrow{OB}\right|, \overrightarrow{OB} \uparrow\downarrow \vec{e}_2, \end{cases} \\ z = \begin{cases} +\left|\overrightarrow{OD}\right|, \overrightarrow{OD} \uparrow\uparrow \vec{e}_3, \\ -\left|\overrightarrow{OD}\right|, \overrightarrow{OD} \uparrow\downarrow \vec{e}_3. \end{cases} \end{cases} \qquad (10)$$

За формулами (6)

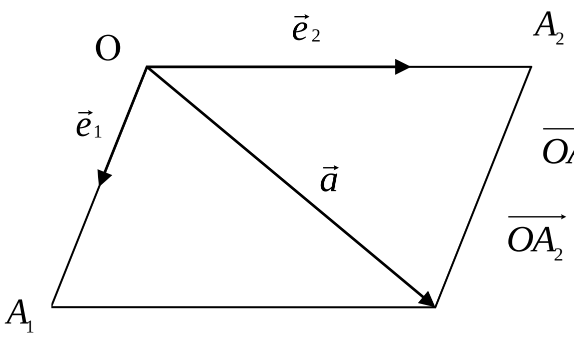
$$x = \begin{cases} +\left|\overrightarrow{OA}\right|, \overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \vec{e}_1, \\ -\left|\overrightarrow{OA}\right|, \overrightarrow{OA} \uparrow\downarrow \vec{e}_1. \end{cases}$$

Спроектуємо вектор $\vec{a}$ на напрям $\vec{e}_1$ в напрямку площини π, що визначається векторами $\vec{e}_2, \vec{e}_3$. Точка O проектується в точку O. Через кінець вектора $\vec{a}$ проведемо площину π_1:

$$\pi_1 \parallel \pi.$$

Тоді $Пр._{\vec{e}_1}\vec{a} = \begin{cases} +\left|\overrightarrow{OA}\right|, \overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \vec{e}_1 \\ -\left|\overrightarrow{OA}\right|, \overrightarrow{OA} \uparrow\downarrow \vec{e}_1 \end{cases}$

Аналогічно для плоского випадку. Проектування відбувається в напрямку одного із базисних векторів на напрям другого:



$\overrightarrow{OA_1} = Пр_{\vec{e}_1}\vec{a}$ в напрямку вектора $\vec{e}_2$,

$\overrightarrow{OA_2} = Пр_{\vec{e}_2}\vec{a}$ в напрямку вектора $\vec{e}_1$.

Рис.1.36

§14. **Властивості проекції вектора на вісь**

Теорема 11. Проекція лінійної комбінації векторів на вісь дорівнює тій же лінійній комбінації проекцій на ту ж вісь.

$$Пр._{\vec{U}}(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{a}_m) = \alpha_1 Пр._{\vec{U}}\vec{a}_1 + \alpha_2 Пр._{\vec{U}}\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m Пр._{\vec{U}}\vec{a}_m$$

Доведення. За формулами (10) координати вектора і проекція вектора на вісь це одне і те ж. Тому, щоб довести теорему слід в цій теоремі термін "проекція" замінити терміном "координата" і ми отримаємо теорему 7, яка вже доведена.

Наслідок1. Проекція суми векторів на вісь рівна сумі проекцій на цю ж вісь.

Наслідок2. Проекція добутку вектора на скаляр рівна добутку скаляра на проекцію вектора.

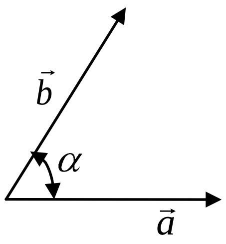
Ортогональне проектування

Якщо напрям проектування α перпендикулярний до площини, прямої чи осі, то таке проектування називається ***ортогональним***.

Теорема 12. Ортогональна проекція вектора на вісь рівна довжині вектора, помноженій на косинус кута між вектором і віссю:

$$Пр._{\vec U}\,\vec a = |\vec a|\cos(\vec a, \vec U) \quad (11)$$

Під кутом між векторами $\vec a$ і $\vec b$ розуміють менший із кутів, утворених ними (рис.1.37)

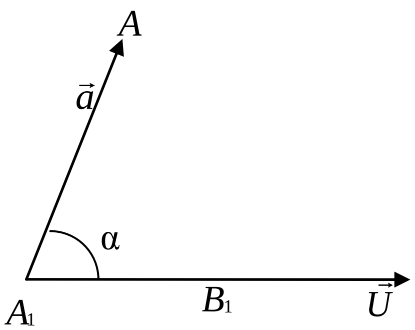


$\alpha = (\vec a \wedge \vec b) = (\vec b \wedge \vec a)$ – менший із кутів.

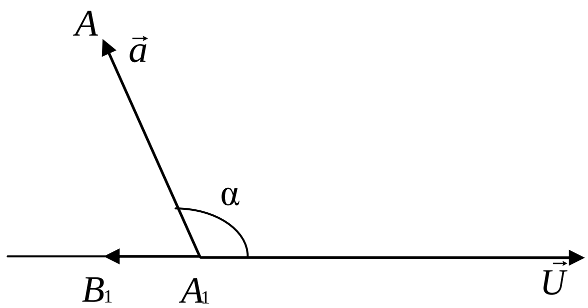
$(\vec a \wedge \vec b) < \pi$

Рис.1.37

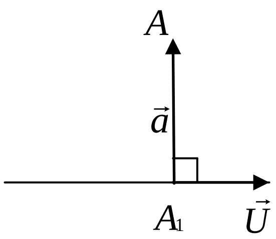
а) Знайдемо ортогональну проекцію вектора на вісь, розглянувши різні випадки на площині.



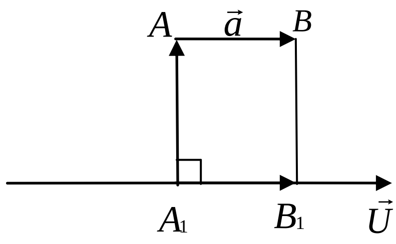
(1)



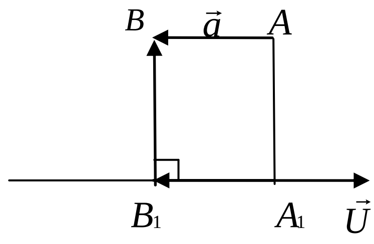
(2)



(3)



(4)



(5)

Для кожного випадку матимемо:

1) $Пр_{\vec U}\,\overrightarrow{A_1A} = |\overrightarrow{A_1B_1}| = |\overrightarrow{AA_1}|\cos\alpha = |\vec a|\cos\alpha;$

2) $Пр._{\vec U}\,\vec a = -|\overrightarrow{A_1B_1}| = -|\vec a|\cos(180° - \alpha) = -|\vec a|\cdot(-\cos\alpha) = |\vec a|\cos\alpha;$

3) $Пр._{\vec U}\,\vec a = +|\overrightarrow{A_1A}|\cos 90° = \vec 0 \cdot 0 = \vec 0;$

4) $Пр._{\vec{U}}\,\vec{a} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos 0° = |\vec{a}| \cdot (1) = |\vec{a}|$;

5) $Пр._{\vec{U}}\,\vec{a} = -\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| \cdot \cos 180° = -|\vec{a}|(-1) = |\vec{a}|$.

Наслідок 1. Розглянемо ортонормований базис ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) в просторі і деякий вектор $\vec{a}$. Введемо кути між вектором і базисними ортами.

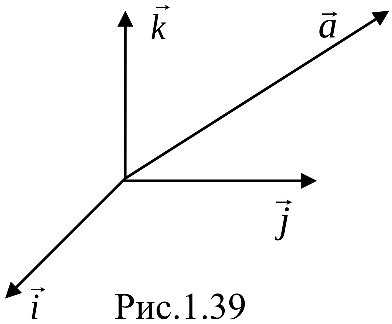


Рис.1.39

($\vec{a}\wedge\vec{i}$)=α, ($\vec{a}\wedge\vec{j}$)=β , ($\vec{a}\wedge\vec{k}$)=γ.

За теоремою 11, $x = Пр._{\vec{i}}\,\vec{a}$. За формулою (11)

$$Пр._{\vec{i}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha,$$

$$\text{тоді} \begin{cases} x = Пр_{\vec{i}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha, \\ y = Пр_{\vec{j}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\beta, \\ z = Пр_{\vec{k}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\gamma. \end{cases} \qquad (12)$$

ІІ. Розглянемо будь-який орт $|\vec{e}| = 1$. За формулами (12)

$$\begin{cases} x_{\vec{e}} = \cos\alpha, \\ y_{\vec{e}} = \cos\beta, \\ z_{\vec{e}} = \cos\gamma. \end{cases}$$

Будь-який орт $\vec{e}$ має координати

$\vec{e}\,(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, і так як $|\vec{e}| = 1$, то, забігаючи наперед,

оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (формула(17))

то отримаємо формулу:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \quad (13).$$

§15. **Скалярний добуток двох векторів**

Означення 1. Скалярним добутком двох векторів називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \quad (14)$$

Означення 2. Скалярним добутком двох векторів називається число, що дорівнює довжині одного вектора помноженій на проекцію другого в напрямку першого.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,Пр._{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,Пр._{\vec{b}}\vec{a} \quad (15)$$

Доведення еквівалентності цих означень проводиться так. Нехай дано (14). Використаємо формулу (11) отримаємо (15).

Навпаки, нехай дано (15). Використавши (11) отримаємо (14).

І. Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1) *Комутативна*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

Доведення випливає з формули (14) з урахуванням того, що ($\vec{a}\wedge\vec{b}$)=($\vec{b}\wedge\vec{a}$) за домовленістю.

2) *Асоціативна*

$$(\alpha\vec{a})\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Доведення випливає із формули (15). Дійсно,

$$(\alpha\vec{a})\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\alpha\,Пр._{\vec{b}}\vec{a}=\alpha|\vec{b}|\,Пр._{\vec{b}}\vec{a}=\alpha(\vec{a}\vec{b})$$

3) *Дистрибутивна*

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Дійсно, за формулою (15)

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\cdot Пр._{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|(Пр._{\vec{c}}\vec{a}+Пр._{\vec{c}}\vec{b})=|\vec{c}|\cdot Пр._{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|\cdot Пр._{\vec{c}}\vec{b}=$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

З доведених властивостей випливає, що скалярно множити лінійні комбінації векторів можна так , як множити многочлени.

Приклад: Знайти скалярний добуток лінійних комбінацій векторів $3\vec{a}-7\vec{b}$ і $4\vec{a}+2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2, (\vec{a},\vec{b})=60°$.

Множимо як многочлени:

$(3\vec{a}-7\vec{b})(4\vec{a}+2\vec{b})=12\vec{a}\cdot\vec{a}+6\vec{a}\cdot\vec{b}-28\vec{a}\cdot\vec{b}-14\vec{b}\cdot\vec{b}=12a^2-22\vec{a}\cdot\vec{b}-14b^2=108-$
$-22\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ-14\cdot 4=-14$

ІІ. Геометричні властивості скалярного добутку

Теорема 13. Скалярний добуток двох векторів рівний нулю тоді і тільки тоді, коли вектори перпендикулярні.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, тобто $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=0$, тоді можливі два випадки:

1) Перемножувані вектори є нуль-вектори (один або обидва). За домовленістю $\vec{0}$ має той напрям, який нам потрібно, в даному випадку– перпендикулярний.
2) Якщо $|\vec{a}|\neq 0, |\vec{b}|\neq 0$, тоді $\cos(\vec{a},\vec{b})=0$, а це означає, що $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Достатність. Нехай $\vec{a}\perp\vec{b}$, тоді

$(\vec{a}\wedge\vec{b})=90°$, отже, $\cos(\vec{a},\vec{b})=0$ або $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=0$, тобто $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Довжина вектора дорівнює кореню квадратному із скалярного квадрата вектора.

$$\text{Дійсно, } \vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0°=|\vec{a}|^2$$

$$\text{Звідси: } |\vec{a}|=\sqrt{a^2}$$

§16. Скалярний добуток в координатах відносно ортонормованого базису

1)**Теорема 14.** Якщо дано вектори $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то скалярний добуток цих векторів обчислюється за формулою:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2 \quad (16)$$

Доведення. За означенням координат вектора можемо записати

$$\vec{a}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3,$$
$$\vec{b}=x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3.$$

Тоді $\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$

$= x_1x_2(\vec{i}\vec{i}) + x_1y_2(\vec{i}\vec{j}) + x_1z_2(\vec{i}\vec{k}) + y_1x_2(\vec{i}\vec{j}) + y_1y_2(\vec{j}\vec{j}) + y_1z_2(\vec{j}\vec{k}) + z_1x_2(\vec{k}\vec{i}) +$

$+ z_1y_2(\vec{k}\vec{j}) + z_1z_2(\vec{k}\vec{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, так як $\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$ і базисні вектори взаємно ортогональні, тобто $\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = \vec{j}\vec{i} = \vec{k}\vec{i} = 0$.

2) ***Довжина вектора***.

За попереднім параграфом $|\vec{a}| = \sqrt{a^2}$, за формулою (16) отримуємо $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ (17), якщо $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$.

3) ***Кут між двома векторами***.

Із першого означення скалярного добутку за формулами (16) і (17) матимемо:

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}, mod i \cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (18)$$

Отже, користуючись скалярним добутком двох векторів, ми можемо розв’язувати такі типи задач:

1) на обчислення довжини відрізків, векторів;
2) на відшукання кута між прямими, векторами.
3) задачі на перпендикулярність прямих, векторів.

§17. Спільні та різні властивості скалярного множення векторів і множення чисел

Алгебраїчні властивості скалярного множення векторів обумовлюють глибоку (хоч і неповну) аналогію між векторною алгеброю та алгеброю чисел. На підставі першої властивості можна переставляти місцями множники; друга властивість дозволяє об’єднувати числові коефіцієнти векторних множників, третя – розкривати або вводити дужки, виносити за них спільні скалярні і векторні множники. Взагалі при скалярному множенні двох векторних многочленів (лінійних) дії виконуються аналогічно діям елементарної алгебри.

Наприклад.

$$(2\vec{a}-3\vec{b})(4\vec{c}+5\vec{d})=8\vec{a}\vec{c}-12\vec{b}\vec{c}+10\vec{a}\vec{d}-15\vec{b}\vec{d}.$$

Варто пам’ятати, що вказана аналогія між векторною алгеброю та алгеброю чисел хоч і значна, але неповна. Зокрема, скалярний добуток векторів істотно відрізняється від звичайного множення чисел вже тим, що не існує скалярного добутку трьох (і більше) векторних множників. Так, наприклад, символ $(\vec{a}\,\vec{b}\,)\vec{c}$ є вектор, а не скаляр; це добуток числа $(\vec{a}\,\vec{b}\,)$ на вектор $\vec{c}$, тобто вектор $\vec{c}$ “ розтягнутий ” в $(\vec{a}\,\vec{b}\,)$ разів.

Наведемо другий приклад порушення аналогії. В алгебрі чисел із рівності α ·β=0 випливає, що α=0 або β=0. У векторній алгебрі, як нам відомо, рівність

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

означає, що *або* $\vec{a}=0$ *або* $\vec{b}=0$, *або* $\vec{a}\perp\vec{b}$ при $\vec{a}\neq0$ і $\vec{b}\neq0$, тобто рівність

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

може виконуватись і при ненульових множниках.

У зв’язку з цим, взагалі кажучи не можна скорочувати рівність $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{a}\,\vec{c}$ на векторний множник $\vec{a}$, навіть коли $\vec{a}\neq0$. З $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{a}\,\vec{c}$ рівність має місце і при $\vec{b}\neq\vec{c}$. Вона означає, що вектор $\vec{a}$ перпендикулярний до вектора $(\vec{b}-\vec{c}\,)$. Справді,

$$\vec{a}\,\vec{b}=\vec{a}\,\vec{c} \text{ або } \vec{a}\,\vec{b}-\vec{a}\,\vec{c}=0,$$

$$\text{тобто } \vec{a}\,(\vec{b}-\vec{c}\,)=0.$$

Отже,

$$\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c}).$$

В окремому випадку, коли $\vec{b}=\vec{c}$, то $\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$, тобто нуль-вектору, який перпендикулярний будь-якому вектору, в тому числі і $\vec{a}$.

Проте, якщо рівність $\vec{a}\vec{x}=\vec{b}\vec{x}$ справедлива для будь-якого вектора $\vec{x}$, то справедлива також і рівність $\vec{a}=\vec{b}$, тобто “ скорочення ” обох частин рівності

$\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$ на вектор $\vec{x}$ можливе лише тоді, коли ця рівність справджується для *будь-якого* $\vec{x}$.

§18 **Векторний добуток двох векторів**

I. ***Означення. Репером*** $R(0;\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ називається базис із точкою, яка є початком базисних векторів.

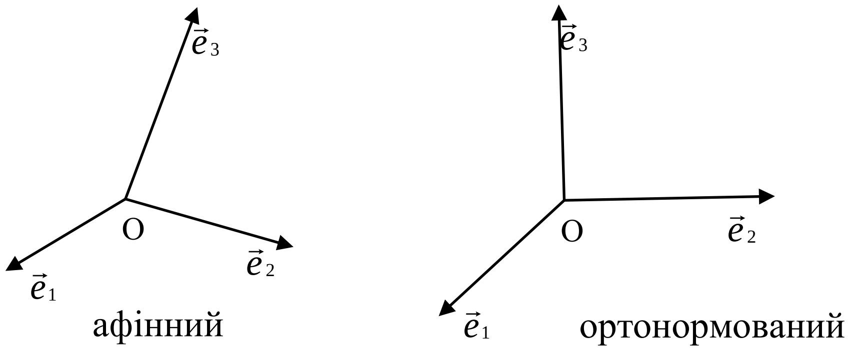


Рис.1.40

II. ***Орієнтація простору***.

Означення 1. **Простір** називається *орієнтованим*, якщо в ньому орієнтований репер.

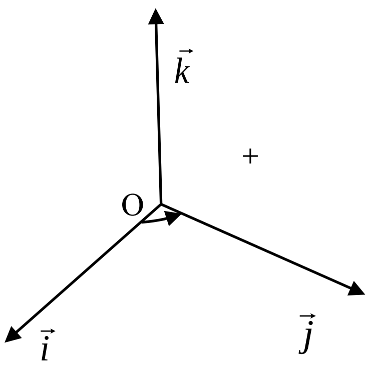


Рис.1.41

Означення 2. Репер називається ***додатно орієнтованим*** або ***правим***, якщо спостерігач, який дивиться з кінця третього вектора на площину першого і другого векторів бачить рух від першого до другого вектора по найменшому куту проти руху годинникової стрілки.

Ці три вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ визначають шість реперів:

$R(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ – правий,

$R(0;\vec{j};\vec{i};\vec{k})$ – лівий,

$R(0;\vec{j};\vec{k};\vec{i})$ – правий,

$R(0;\vec{k};\vec{i};\vec{j})$ – правий,

$R(0;\vec{i};\vec{k};\vec{j})$ – лівий,

$$R(0; \vec{k} : \vec{i}\ ; \vec{j}\ ) \text{ – лівий.}$$

Орієнтацію репера можна визначити за правилом руки(правої – правий; лівої – лівий): великий палець – перший вектор $\vec{a}$, вказівний – другий вектор $\vec{b}$ і середній, поставлений до них перпендикулярно – третій $\vec{c}$. Два інші загнуті.

III. ***Означення векторного добутку***.

Означення. Векторним добутком двох векторів називається ***вектор***, довжина, якого дорівнює добутку довжин перемножуваних векторів на синус кута між ними; цей вектор перпендикулярний до площини перемножуваних векторів; множене, множник і векторний добуток утворюють правий репер.

Позначається векторний добуток

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,] \text{ або } \vec{a} \times \vec{b}\ .$$

Отже, векторним добутком двох векторів є вектор $[\vec{a}\,\vec{b}\,]$, який задовольняє такі три умови:

1) $\left|[\vec{a}\,\vec{b}\,]\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a},\vec{b}\,)$.

2) $[\vec{a}\,\vec{b}\,] \perp$ площині $(\vec{a},\vec{b}\,)$.

3) $\vec{a},\vec{b},[\vec{a}\,\vec{b}\,]$ – правий репер.

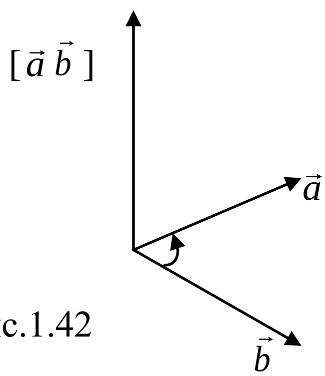


Рис.1.42

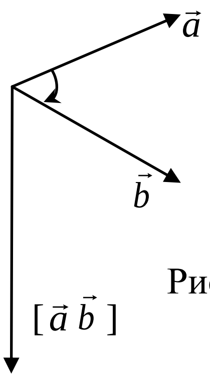


Рис.1.43

Геометричні властивості.

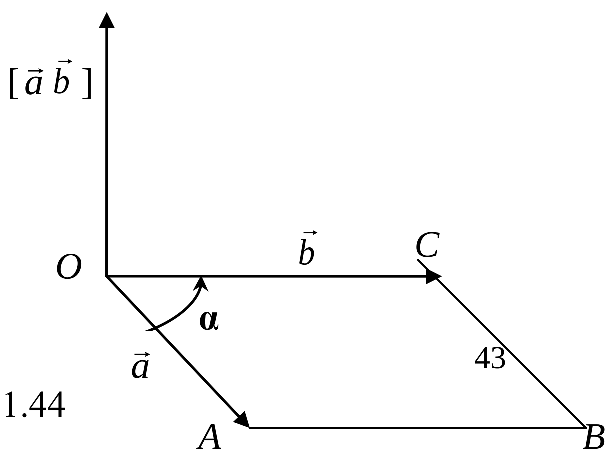


Рис.1.44

1) ***Довжина*** вектора ***векторного добутку*** чисельно *дорівнює площі паралелограма,* побудованого на

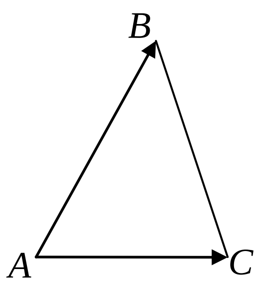
перемножуваних векторах

Дійсно, $|[\vec a\, \vec b\,]| = |\vec a\,|\,|\vec b\,| \sin(\vec a, \vec b\,)$.

$$S_{OACB} = OA \cdot OC \sin\alpha = |\vec a||\vec b| \sin\alpha \text{ (рис.144).}$$

Звідки очевидно, що $S_{\Diamond} = |[\vec a \cdot \vec b\,]|$.

А отже S_{Δ} дорівнює



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}]| \quad (19).$$

Рис.1.45

2) ***Векторний добуток*** двох векторів ***рівний 0*** тоді і тільки тоді, коли ***вектори колінеарні***.

Доведення. Якщо один з векторів є нуль-вектор, то доведення очевидне. Нехай обидва вектори відмінні від нульових.

Необхідність. Нехай $[\vec a\, \vec b\,]=0$, тоді $|[\vec a\, \vec b\,]|=0$, тобто

$|\vec a\,|\,|\vec b\,| \sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ або $\alpha = \pi$.

Достатність. Нехай $\vec a \parallel \vec b$, тоді $\alpha=0$ або $\alpha=\pi \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow |\vec a\,|\,|\vec b\,| \sin\alpha = 0 \Rightarrow |[\vec a\, \vec b\,]| = 0 \Rightarrow [\vec a\, \vec b\,]=0$.

V. Алгебраїчні властивості.

1) *Антикомутативна*

$$[\vec a\, \vec b\,] = -[\vec b\, \vec a\,] \quad \text{(рис.1.46)}$$

Доведення. Позначимо $[\vec a \cdot \vec b\,] = \vec p, -[\vec b\, \vec a\,] = \vec q$ і доведемо рівність векторів $\vec p$ і $\vec q$.

Дійсно, $|\vec p| = |\vec q|$, так як $\angle(\vec a, \vec b) = \angle(\vec b, \vec a)$

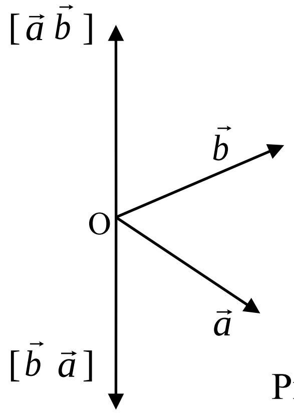


Рис.1.46

і $\vec p \uparrow\downarrow [\vec b\,\vec a] \Leftrightarrow \vec p \uparrow\uparrow \vec q$ (рис.1.46)

2) *Асоціативна*

$$[\alpha\vec a\vec b] = \alpha[\vec a\vec b]$$

Доведення. Введемо позначення $[\alpha\vec a\cdot\vec b] = \vec p, \alpha[\vec a\cdot\vec b] = \vec q$ і доведемо їх рівність. Дійсно,

а) $|\vec p| = |\vec q|$ –очевидно. $|\vec p| = |[\alpha\vec a\vec b]| = |\alpha\vec a||\vec b|\sin(\vec a,\vec b) = |\alpha||\vec a||\vec b|\sin(\vec a,\vec b)$.

і $|\vec q| = |\alpha[\vec a\vec b]| = |\alpha||[\vec a\vec b]| = |\alpha||\vec a||\vec b|\sin(\vec a,\vec b)$.

б) Покажемо, що вектори $\vec p$ і $\vec q$ співнапрямлені: можливі два випадки α>0 і α<0.

Розглянемо другий випадок . Нехай α<0, тоді $\alpha\vec a \uparrow\downarrow \vec a$ (рис.1.47)

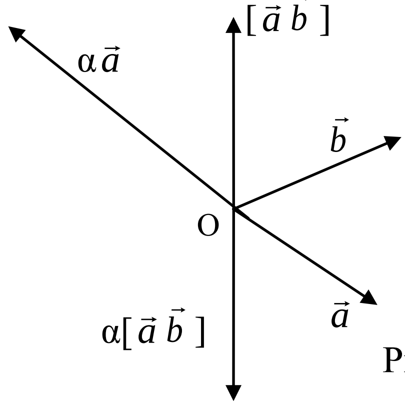


Рис.1.47

Орієнтації реперів $\vec a,\vec b,[\alpha\vec a\cdot\vec b]$ та $\vec a,\vec b,[\vec a\cdot\vec b]$ - різні, тому $[\alpha\vec a\cdot\vec b]\uparrow\downarrow[\vec a\cdot\vec b]$ і вектор $\alpha[\vec a\cdot\vec b]\uparrow\downarrow[\vec a\cdot\vec b]$, бо $\alpha<0$.

Отже, $[\alpha\vec a\cdot\vec b]\uparrow\uparrow\alpha[\vec a\cdot\vec b]$.

3) *Дистрибутивна*

$$[\vec a(\vec a_1+\vec a_2+\dots+\vec a_n)] = [\vec a\,\vec a_1] + [\vec a\,\vec a_2] + \dots + [\vec a\,\vec a_n]$$

Доведемо цю властивість в три етапи.

1. Побудуємо векторний добуток *орта* на будь-який вектор $\vec{a}$. З довільної точки О простору будуємо вектор $\vec{e}$; через точку О будуємо площину $\pi \perp \vec{e}$; будуємо $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} \notin \pi$ (рис.1.48)

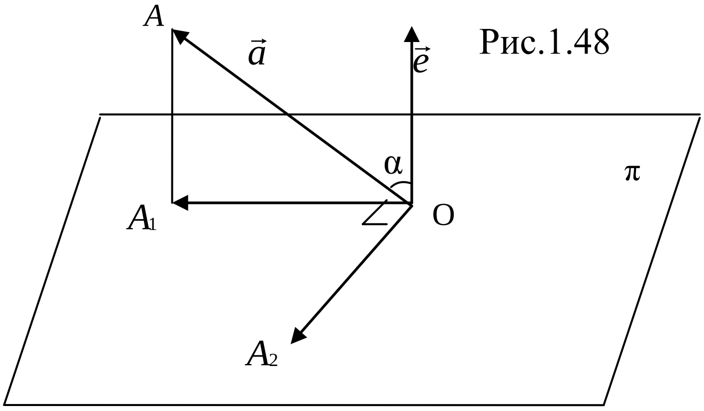


Рис.1.48

Ортогонально проектуємо вектор $\vec{a}$ на площину π: $\overrightarrow{OA_1}$ – компонента. В площині повертаємо вектор $\overrightarrow{OA_1}$ навколо точки О на кут 90° проти годинникової стрілки. Легко бачити, що $\overrightarrow{OA_2} = [\vec{e}\,\vec{a}]$. Дійсно,

а) $\left|\overrightarrow{OA_2}\right| = \left|\overrightarrow{OA_1}\right| = |\vec{a}|\cos(90° - \alpha) = |\vec{a}|\sin\alpha$.

б) $\overrightarrow{OA_2} \perp \vec{a}, \overrightarrow{OA_2} \perp \vec{e}$

в) $\vec{e}, \vec{a}, \overrightarrow{OA_2}$ – правий репер.

2. Розглянемо побудову вектора $[\vec{e}(\vec{a}_1 + ... + \vec{a}_n)]$ і доведемо для цього випадку властивість. Нехай, для означеності, розглянемо суму трьох векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ (рис.1.49)

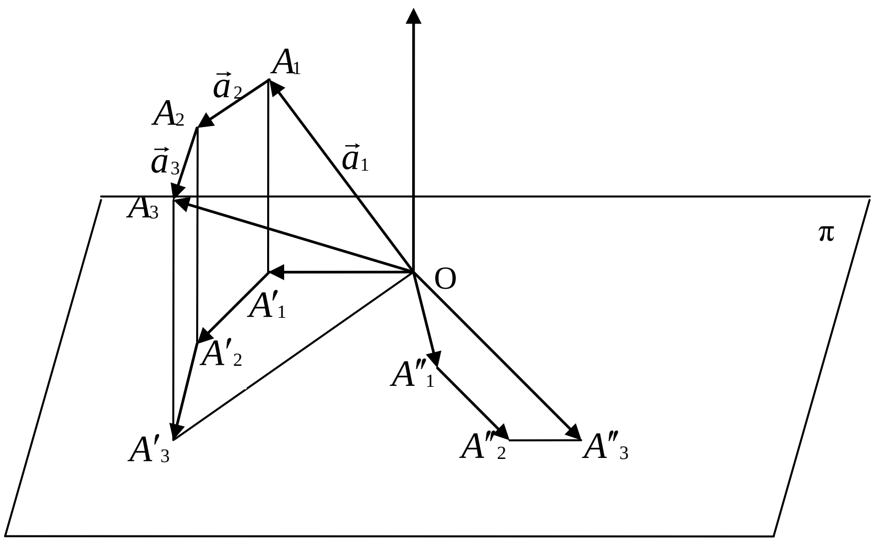


Рис.1.49

Спроектуємо на площину весь цей малюнок і виконаємо поворот на кут $90°$ проти руху годинникової стрілки.. За першим випадком

$$\overrightarrow{OA''_1} = [\,\vec a_1\,],$$
$$\overrightarrow{A''_1 A''_2} = [\,\vec a_2\,],$$
$$\overrightarrow{OA''_3} = [\,\overrightarrow{OA_3}\,] = [\,(\vec a_1 + \vec a_2 + \vec a_3)\,],$$
$$\overrightarrow{A''_2 A''_3} = [\,\vec a_3\,].$$
$$\overrightarrow{OA''_3} = \overrightarrow{OA''_1} + \overrightarrow{A''_1 A''_2} + \overrightarrow{A''_2 A''_3}$$

Тоді підставивши значення векторів-доданків з попередніх формул:

$$[\,(\vec a_1 + \vec a_2 + \vec a_3)\,] = [\,\vec a_1\,] + [\,\vec a_2\,] + [\,\vec a_3\,]$$

Побудуємо векторний добуток

3. $[\,\vec a \cdot (\vec a_1 + \vec a_2 + \vec a_3)\,] = [\,|\vec a|\vec e \cdot (\vec a_1 + \vec a_2 + \vec a_3)\,] = |\vec a|\,[\,(\vec a_1 + \vec a_2 + \vec a_3)\,] = |\vec a|(\,[\,\vec a_1\,] + [\,\vec a_2\,] +$

$+ [\,\vec a_3\,]) = [\,|\vec a|\vec e\,\vec a_1\,] + [\,|\vec a|\vec e\,\vec a_2\,] + [\,|\vec a|\vec e\,\vec a_3\,] = [\,\vec a\,\vec a_1\,] + [\,\vec a\,\vec a_2\,] + [\,\vec a\,\vec a_3\,].$

Отримали доведення властивості.

Висновок. 1) Доведені алгебраїчні властивості дають право векторно множити лінійні комбінації векторів так, як множаться многочлени, з однією лише різницею, що при перестановці місцями множників, потрібно змінити знак на протилежний.

3) За допомогою векторного добутку двох векторів розв'язуються задачі:

- на знаходження площ фігур, а саме

$$S_{паралелограма} = \left|\,[\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,]\,\right|,$$
$$S_{трикутника} = \frac{1}{2}\left|\,[\,\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,]\,\right|,$$

площа многокутника рівна сумі площ трикутників, на які слід розбити многокутник;

- задачі на колінеарність векторів.

§19. **Векторний добуток в координатах відносно ортонормованого базису**

Теорема 15. *Якщо вектори* $\vec a\,(x_1; y_1; z_1)$, $\vec b\,(x_2; y_2; z_2)$, то

$$[\vec a, \vec b] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \vec x_1 & \vec y_1 & \vec z_1 \\ \vec x_2 & \vec y_2 & \vec z_2 \end{vmatrix} \qquad (20)$$

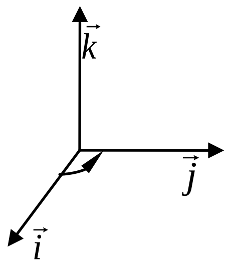


Рис.1.50

Доведення. В ході доведення ми використаємо факти, що

$$[\vec i, \vec j] = \vec k; \quad [\vec j, \vec i] = -\vec k,$$
$$[\vec j, \vec k] = \vec i; \quad [\vec k, \vec j] = -\vec i,$$
$$[\vec k, \vec i] = \vec j; \quad [\vec i, \vec k] = -\vec j,$$
$$[\vec i, \vec i] = [\vec j, \vec j] = [\vec k, \vec k] = 0.$$

За означенням координат вектора і за алгебраїчними властивостями векторного добутку отримаємо:

$$[\vec a, \vec b] = [(x_1\vec i + y_1\vec j + z_1\vec k)\cdot(x_2\vec i + y_2\vec j + z_2\vec k)] = x_1x_2[\vec i, \vec i] + x_1y_2[\vec i, \vec j] + x_1z_2[\vec i, \vec k] + y_1z_2[\vec j, \vec i] +$$
$$+ y_1y_2[\vec j, \vec j] + y_1z_2[\vec j, \vec k] + z_1x_2[\vec k, \vec i] + z_1y_2[\vec k, \vec j] + z_1z_2[\vec k, \vec k].$$

Звідси

$$[\vec a, \vec b] = x_1y_2\vec k - x_1z_2\vec j - y_1x_2\vec k + y_1z_2\vec i + z_1x_2\vec j - z_1y_2\vec i = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec i + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec j +$$
$$+ (x_1y_2 - y_1x_2)\vec k = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec i + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec k$$

Очевидно, що $[\vec a, \vec b] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \vec x_1 & \vec y_1 & \vec z_1 \\ \vec x_2 & \vec y_2 & \vec z_2 \end{vmatrix}$. Цим теорема доведена.

Приклад. Знайти векторний добуток векторів $\vec a\,(1;0;–2)$, $\vec b\,(–1;1;0)$.

Скористаємося формулою (20):

$$[\vec a, \vec b] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \vec x_1 & \vec y_1 & \vec z_1 \\ \vec x_2 & \vec y_2 & \vec z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec i + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec k = 2\vec i + 2\vec j + \vec k \Rightarrow [\vec a, \vec b] = (2;2;1).$$

§20. **Мішаний добуток трьох векторів**

І. ***Означення. Мішаним добутком трьох векторів*** називається число

$$\mu = [\vec a, \vec b]\cdot\vec c,$$

яке дорівнює скалярному добутку векторного добутку перших двох векторів на третій. Позначається

$$\mu = \vec a\vec b\vec c = [\vec a\vec b]\,\vec c. \quad (21)$$

Теорема 16. ***(Геометричний зміст мішаного добутку).*** *Абсолютна величина мішаного добутку трьох векторів чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Це число додатне, якщо перемножувані вектори в порядку $\vec a, \vec b, \vec c$ утворюють правий репер, і від’ємне, якщо лівий. Число дорівнює нулю, якщо перемножувані вектори компланарні.*

Доведення.

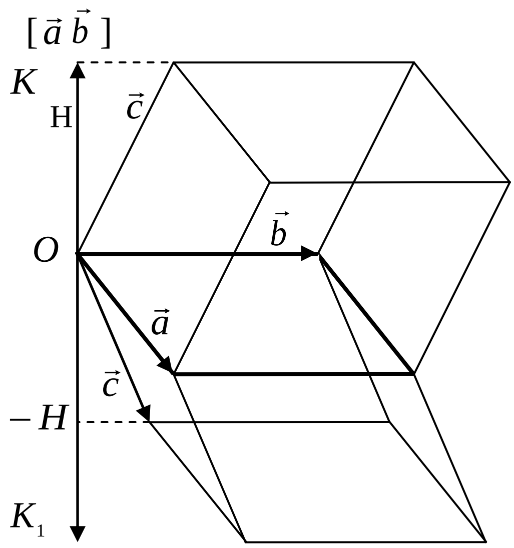


Рис.1.51

1. $\mu = [\vec a\vec b]\cdot\vec c = \left|[\vec a\vec b]\right| Пр._{[\vec a\vec b]}\vec c$. Оскільки $OH = Пр._{[\vec a\vec b]}\vec c = (\pm h)$, то

$\mu = S_{паралелограма}\cdot(\pm H)$, тобто $\mu = \pm V_{паралелепіпеда}$. (рис.1.51)

2. Нехай $\vec a, \vec b, \vec c$ – правий репер, тоді $\overrightarrow{OH} \uparrow\uparrow [\vec a\vec b]$

Тобто $\left|\overrightarrow{OK}\right| = H$

$\mu = V.$

3. Нехай $\vec a, \vec b, \vec c$ – лівий репер, тоді $OK_1 = -H$, $\overrightarrow{OH} \uparrow\downarrow [\vec a\vec b]$, і $\mu = -V$.

4. Якщо $\vec a, \vec b, \vec c$ – компланарні (рис.1.52), то вектор $[\vec a \cdot \vec b]$ перпендикулярний

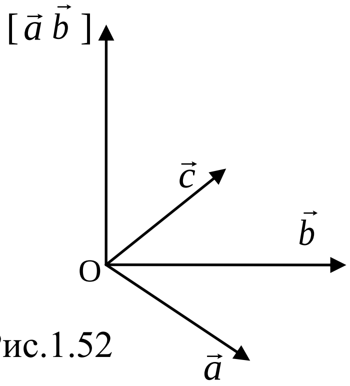


Рис.1.52

до площини векторів $\vec a, \vec b$, тобто $[\vec a \vec b] \perp \vec c$, отже, $[\vec a \cdot \vec b] \cdot \vec c = 0$, тобто $\mu = 0$.

§21. **Мішаний добуток в ортонормованому базисі**

Теорема 17. Якщо $\vec a(x_1; y_1; z_1), \vec b(x_2; y_2; z_2), \vec c(x_3; y_3; z_3)$, то мішаний добуток обчислюється за формулою
$$\vec a \vec b \vec c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (22)$$

Доведення. Так як вектор $\vec c$ заданий координатами, то можемо подати його у вигляді розкладу за базисними векторами $\vec i, \vec j, \vec k$, тобто $\vec c = x_3 \vec i + y_3 \vec j + z_3 \vec k$ і скористаємось формулою (20). За означенням мішаного добутку $\vec a \vec b \vec c = [\vec a \cdot \vec b] \cdot \vec c$.

Отримаємо

$$\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot (x_3 \vec i + y_3 \vec j + z_3 \vec k) =$$

$$(x_3 \vec i + y_3 \vec j + z_3 \vec k) = \left(\begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec i + \begin{vmatrix} z_1 x_1 \\ z_2 x_2 \end{vmatrix} \cdot \vec j + \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec k \right)(x_3 \cdot \vec i + y_3 \cdot \vec j + z_3 \cdot \vec k) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 x_1 \\ z_2 x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{vmatrix} z_3$$

Отже, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Висновок: користуючись поняттям мішаного добутку розв'язують клас геометричних задач на обчислення об'ємів тіл, зокрема$V_{паралелепіпеда} = |\vec{a} \cdot \vec{в} \cdot \vec{c}|$ і

$V_{тетраедра} = \frac{1}{6}|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|$.

Дійсно, паралелепіпед діагональною площиною розбивається на дві рівновеликі трикутні призми, а кожну трикутну призму можна розбити на три рівновеликі трикутні піраміди. Отже, паралелепіпед розбивається на шість рівновеликих пірамід(трикутних)- *тетраедрів.*

§22. **Історична довідка**

Поняття *вектора* (від лат.vector- той, що несе (везе)) в науку ввів англійський математик, механік та астроном Уільям Роуен Гамільтон в 1846 році. В Росії – Й. І. Сомов та П. Є. Ромер. Сомов вперше в російській літературі дав систематичний виклад векторного числення на механічній основі із застосуванням його до диференціальної геометрії простору. Саме він перший звернув увагу на силу векторного методу – *незалежність результатів від вибору системи координат.*

Ми бачимо, що поняття вектора. і векторне числення виникли не так давно, тільки в 40-их роках XIX ст. В той час як теоретична механіка – наука, де фігурують сили і , тобто, векторні величини - набула цілком завершеної форми ще в кінці XVIII ст.. Величини, які пізніше були названі векторними , проектували на горизонтальний та вертикальний напрям і далі оперували з цими проекціями, які вже є числами (координатами). Це створювало певні труднощі і незручності , приводило до громіздких обчислень. Адже у векторному численні ми оперуємо з відомими, тобто геометричними об'єктами, оперуємо ними безпосередньо, а не обхідним шляхом через числа. Ця можливість такого оперування геометричними об'єктами і є другою сильною стороною векторного числення. Але, щоб все це з`явилося, необхідно було, щоб, *по-перше*, математика досягла свого певного розвитку, зокрема теорія комплексних чисел; а *по-друге*, щоб фізики і механіки досконало вивчили різні види рухів матеріальних тіл, електрику, магнетизм і т. д. Люди зрозуміли, що величини характеризуються не лише числом, а й напрямом. Як результат – є поняття вектора. Отже, *вектор* – це матеріальна абстракція конкретних величин, які існують в природі та теоретичних наукових дослідженнях. Так як вектор – напрямлений відрізок, а відрізок – ідеальний об'єкт, то поняття вектора – ідеалізація. Векторне числення сприяло дальшому розвитку тих наук, на базі яких воно виникло, але воно також продовжує розвиватись. В природі векторні величини існують трьох **типів:**

1) ***Прикладений або зв'язний вектор*** – це напрямлений відрізок (наприклад, сила, що діє на точку; *швидкість* – частинки рідини, яка рухається із збуренням). Тут кожна частинка має свій вектор швидкості, який не є вектором швидкості іншої частинки. Його не можна від точки його прикладання і переносити.
2) ***Ковзний***(наприклад, сила, що діє на тверде тіло). Такі вектори можна переносити вздовж лінії їх дії.
3) ***Вільний вектор*** (наприклад, момент сили). Його можна зміщувати вздовж лінії його дії, переносити паралельно самому собі на будь-яку пряму, паралельну його дії, не змінюючи напряму самого вектора.

Пряме оперування з геометричними об'єктами є однією з сильних сторін векторного числення.