1. Приклад виконання вправи тренінгу на вміння №8

Завдання

Перевірити, чи точка $M_1(2;1;0)$ належить площині Q: $x - 2y + z = 0$.

Розв'язання

Заповніть таблицю, підібравши до кожного пункту алгоритму конкретне відповідне із завдань.

№ п\п	Алгоритм	Конкретна відповідність даній ситуації запропонованому алгоритмі
1	2	3
1	В дане рівняння площини підставити замість x, y, z координати даної точки x_1, y_1, z_1, відповідно	$2 - 2\cdot 1 + 0 = 0$, або $0 \equiv 0$
2	Якщо при цьому утвориться тотожність, то M_1 лежить на Q	Точка $M_1(2;\ 1;\ 0)$ лежить на даній площині

Розв'язати самостійно наступні задачі

Завдання 1

Перевірити, чи точка $M_1(4;\ -2;\ 0)$ належить площині Q: $2x - 4y + z = 0$.

Завдання 2

Перевірити, чи точка $M_1(0;\ -7;\ 5)$ лежить на площині Q: $x - 4y + z + 1 = 0$.

Завдання 3

Перевірити, чи точка $M_1(5;\ 0;\ 1)$ лежить на площині Q: $3x + y + 3z + 5 = 0$.

Завдання 4

Перевірити, чи точка $M_1(1;\ -2;\ 2)$ лежить на площині Q: $6x - y + 3z = 0$.

Завдання 5

Перевірити, чи точка $M_1(8;\ -1;\ 0)$ лежить на площині Q: $x - 2y + z + 1 = 0$.

2. Приклад виконання вправи тренінгу на вміння №9

Завдання

Знайти нормальний вектор n площини, в якій лежать вектори
$\vec{c}_1 = (1; -5; 2), \vec{c}_2 = (2; 6; 1)$.

Розв'язання

Заповніть таблицю, підібравши до кожного пункту алгоритму конкретне відповідне із завдань.

№ п\п	Алгоритм	Конкретна відповідність даній ситуації запропонованому алгоритмі
1	2	3
1	Впевнитись, що $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$ колінеарні вектори	$\frac{1}{2} \neq \frac{-5}{6} \neq \frac{2}{1}$ Умова колінеарності двох векторів не виконується. Отже, $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$ не колінеарні
2	Знайти векторний добуток $[\vec{c}_1;\vec{c}_2]$: $[\vec{c}_1;\vec{c}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$	$[\vec{c}_1;\vec{c}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$
3	Обчислити детермінант із п. 2, записавши його у вигляді $x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$.	$[\vec{c}_1;\vec{c}_2] = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = -17\vec{i} + 3\vec{j} + 16\vec{k}$, тобто $x_3 = -17$, $y_3 = 3$, $z_3 = 16$
4	Взяти $\vec{n} = (x_3;y_3;z_3)$	$\vec{n} = (-17;3;16)$

Розв'язати самостійно наступні задачі

Завдання 1

Знайти нормальний вектор n площини, в якій лежать вектори
$\vec{c}_1 = (0;-2;1)$, $\vec{c}_2 = (8;5;1)$.

Завдання 2

Знайти нормальний вектор n площини, в якій лежать вектори

$\vec{c}_1 = (0;–2;1)$, $\vec{c}_2 = (8;5;1)$.

Завдання 3

Знайти нормальний вектор n площини, в якій лежать вектори

$\vec{c}_1 = (2;2;0)$, $\vec{c}_2 = (7;3;4)$

Завдання 4

Знайти нормальний вектор n площини, в якій лежать вектори

$\vec{c}_1 = (1;0;1)$, $\vec{c}_2 = (6;2;–1)$

Завдання 5

Знайти нормальний вектор n площини, в якій лежать вектори

$\vec{c}_1 = (4;–1;10)$, $\vec{c}_2 = (–8;2;–20)$.

3. Приклад виконання вправи тренінгу на вміння №10

Завдання

Знайти координати x_0, y_0, z_0 якої-небудь точки, яка належить площині

$$x + 3y + 2z – 2 = 0.$$

Розв’язання

Заповніть таблицю, підібравши до кожного пункту алгоритму конкретне відповідне із завдань.

№ п\п	Алгоритм	Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму
1	2	3
1	Замість x_0, y_0 взяти два довільні числа і в рівнянні площини покласти $x = x_0$, $y = y_0$	Нехай $x_0 = –2$, $y_0 = 0$. $1·(–2) + 3·0 + 2z – 2 = 0$, або $2z – 4 = 0$.
2	Із отриманого рівняння знайти $z = z_0$	$2z_0 = 4$, $z_0 = 2$. Отже, $(x_0, y_0, z_0) = (–2, 0, 2)$.

Розв’язати самостійно наступні задачі

Завдання 1

Знайти координати x_0, y_0, z_0 якої-небудь точки, яка належить площині

$$2x + y + 5z – 2 = 0.$$

Завдання 2

Знайти координати x_0, y_0, z_0 якої-небудь точки, яка належить площині

$$x - 4y + 2z - 1 = 0.$$

Завдання 3

Знайти координати x_0, y_0, z_0 якої-небудь точки, яка належить площині

$$x + 3y + z + 8 = 0.$$

Завдання 4

Знайти координати x_0, y_0, z_0 якої-небудь точки, яка належить площині

$$5x - 2y + z = 0.$$

Завдання 5

Знайти координати x_0, y_0, z_0 якої-небудь точки, яка належить площині

$$2x - y + 9z - 1 = 0.$$

4. Приклад виконання вправи тренінгу на властивість №11

Завдання

Написати рівняння площин, які проходять через точку $M_0(1;-2;3)$

а) паралельно площині $4x + 2y - z + 5 = 0$;

б) перпендикулярно до прямої $\frac{x-\ }{3} = \frac{y-\ }{0} = \frac{z+\ }{1}$.

Розв'язання

Заповніть таблицю, підібравши до кожного пункту алгоритму конкретне відповідне із завдань.

№ п\п	Алгоритм	Конкретна відповідність даній ситуації запропонованому алгоритмі
1.	Оволодіти різними способами задання площини в просторі	
2.	Виписати координати вектора нормалі даної площини	$\vec{n} = (4;2;-\ )$
3.	Написати рівняння площини, яка паралельна даній, і проходить через точку M_0	$4(x-\ )+\ (y+\ )-(z-\ )=$ або $4x+\ y-z+\ =$
4.	Виписати координати напрямного вектора	$\vec{s} = (\ ;0;1)$

	даної прямої	
5.	Написати рівняння площини, яка перпендикулярна до даної прямої і проходить через точку M_0	$3(x - \;) + 0(y + 2) + (z - 3) = 0$ або $3x + z - \; = 0$ Площина паралельна OY

Розв'яжіть самостійно наступні завдання

Завдання 1

Написати рівняння площини, яка проходить через точку M_0 (5;–3;7) і паралельна площині $x + \; y - z + \; 0 = 0$.

Завдання 2

Написати рівняння площини, яка проходить через точку M_0 (0;–1;4) і перпендикулярна до прямої $\frac{x - \;}{1} = \frac{y - \;}{6} = \frac{z + \;}{7}$.

Завдання 3

Написати рівняння площини, яка проходить через точку M_0 (1;–1;1) і паралельна координатній площині XOZ.

Завдання 4

Написати рівняння площини, яка проходить через початок координат і перпендикулярна до прямої $\frac{x - \;}{3} = \frac{y - \;}{- \;} = \frac{z + \;}{1}$.

Завдання 5

Написати рівняння площини, яка проходить через точку M_0 (1;–3;1) і перпендикулярна до осі OY.

5. Приклад виконання вправи тренінгу на вміння №12

Завдання

Написати рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 (1;2;–1) і
а) має напрямний вектор $\vec{p} = (\;;0;1)$
б)перпендикулярна до площини $x + 4y - 2z + 5 = 0$;
с) проходить через точку M_0 і M_1(0;5;1)

Розв’язання

Заповніть таблицю, підібравши до кожного пункту алгоритму конкретне відповідне із завдань.

№ п\п	Алгоритм	Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму
1.	Написати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 з напрямним вектором $\vec{p}$	$\frac{x-}{2}=\frac{y-}{0}=\frac{z+}{1}$ ця пряма перпендикулярна осі OY
2.	Виписати координати вектора нормалі n для даної площини	$\vec{n} = (;4;-)$
3.	Написати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 з напрямним вектором $\vec{n}$	$\frac{x-}{1}=\frac{y-}{4}=\frac{z+}{-}$
4.	Знайти координати вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$	$\overrightarrow{M_0M_1} = (0-1;\ 5-2;\ 1-\ (-1))$ $\overrightarrow{M_0M_1} = (-1;\ 3;\ 2)$
5.	Написати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 з напрямним вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$	$\frac{x-}{-}=\frac{y-}{3}=\frac{z+}{2}$

Розв’яжіть самостійно наступні завдання:

Завдання 1

Написати рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 (1;1;1) і має напрямний вектор $\vec{p} = (;0;7)$.

Завдання 2

Написати рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 (2;–8;1) і паралельна до прямої $\frac{x-}{6}=\frac{y-}{-}=\frac{z+}{4}$.

Завдання 3

Написати рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 (3;2;–6) і перпендикулярна до площини $x + 4y - 7z = 0$.

Завдання 4

Дані вершини трикутника $A(-2;1;7)$, $B(8;0;3)$, $C(6;2;2)$. Записати рівняння його сторін.

Завдання 5

Записати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(1;9;6)$ на площину $5x + 5y - 2z + 3 = 0$.

Завдання 6

Записати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(1;3;7)$ на площину XOY.

6. Приклад виконання вправи тренінгу на вміння №13

Завдання

прямої, заданої як перетинЗнайти напрямний вектор р двох площин:

$$\begin{cases} x - 3y - 2z - 1 = 0, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Заповніть таблицю, підібравши до кожного пункту алгоритму конкретне відповідне із завдань.

№ п\п	Алгоритм	Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму
1	2	3
1	Виписати координати нормальних векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ даних площин	$\vec{n}_1 = (1;3;-2)$, $\vec{n}_2 = (2;1;1)$
2	Знайти векторний добуток $[\vec{n}_1 \vec{n}_2]$ і записати його у вигляді $x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$	$[\vec{n}_1 \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}$ тобто $x_0 = 5$, $y_0 = 5$, $z_0 = -$ [illegible]
3	Взяти $\vec{p}(x_0;y_0;z_0)$	$\vec{p}(5;5;-$ [illegible]$)$

Розв'язати самостійно наступні задачі

Завдання 1

Знайти напрямний вектор p прямої, заданої як перетин двох площин:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z + 1 = 0, \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Завдання 2

Знайти напрямний вектор p прямої, заданої як перетин двох площин:

$$\begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0, \\ 4x - y + 8z - 2 = 0 \end{cases}$$

Завдання 3

Знайти напрямний вектор p прямої, заданої як перетин двох площин:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ 4x - y + 5z - 1 = 0 \end{cases}$$

Завдання 4

˜Знайти напрямний вектор p прямої, заданої як перетин двох площин:

$$\begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0, \\ 6x - y + z - 9 = 0 \end{cases}$$

Завдання 5

˜Знайти напрямний вектор p прямої, заданої як перетин двох площин:

$$\begin{cases} 5x + y - 6z + 1 = 0, \\ 3x - y + 7z = 0 \end{cases}$$

7. Приклад виконання вправи тренінгу на вміння №14

Завдання

Знайти точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перетину площини $x + \ 0y - \ z =$ з прямою

$$\begin{cases} x = 5t, \\ y = 2 - 6t, \\ z = 8 + t. \end{cases}$$

Розв’язання

Заповніть таблицю, підібравши до кожного пункту алгоритму конкретне відповідне із завдань.

№ п\п	Алгоритм	Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму
1	2	3
1	Розв’язати систему рівнянь, складену з рівнянь площини і прямої: $A(x_1 + \ell t) + B(y_1 + mt) + C(z_1 + nt) + D = 0$, і знайти значення $t = t_0$, відповідне точці перетину M_0.	$5t +$ [illegible]$0(2 - 6t) -$ [illegible]$(8 + t) = 0$ $t = t_0 = -\frac{20}{60} = -\frac{1}{3}$
2	Знайти $x_0 = x_1 + \ell t_0$, $y_0 = y_1 + mt_0$, $z_0 = z_1 + nt_0$ із рівняння прямої.	$x_0 = 4(-\frac{1}{3}) = -\frac{4}{3}$, $y_0 = 2 - 6(-\frac{1}{3}) = 4$, $z_0 = 8 + (-\frac{1}{3}) = \frac{23}{3}$ $M_0 = (-\frac{4}{3};\ 4;\ \frac{23}{3})$

Розв’язати самостійно наступні задачі

Завдання 1

Знайти точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перетину площини $x + y - 12z = 0$ з прямою

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 3 - 6t, \\ z = 5t. \end{cases}$$

Завдання 2

Знайти точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перетину площини $2x + y - 5z = 0$ з прямою

$$\begin{cases} x = 2 + 5t, \\ y = 3 - 6t, \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Завдання 3

Знайти точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перетину площини $7x + 2y - z = 0$ з прямою

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 12 - t, \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Завдання 4

Знайти точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перетину площини $6x + 1y + z + 1 = 0$ з прямою

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 4 + t, \\ z = 14t. \end{cases}$$

Завдання 5

Знайти точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перетину площини $x + 7y - z + 2 = 0$ з прямою

$$\begin{cases} x = 24t, \\ y = 1 - 9t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

8. Приклад виконання вправи тренінгу на вміння №15

Завдання

Знайти напрямну циліндра $x^2 = 4pz$. Які із координатних осей паралельні твірні цього циліндра?

Розв'язання

Заповніть таблицю, підібравши до кожного пункту алгоритму конкретне відповідне із завдань.

№ п\п	Алгоритм	Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму
1	2	3
1	Рівняння напрямної (в одній із координатних площин) співпадає з рівнянням циліндра	$x^2 = 4pz -$ напрямна циліндра в площині Oxz.
2	Твірна паралельна тій координатній осі, яка відповідає відсутній змінній у рівнянні циліндра	В рівнянні відсутня змінна y. Значить, твірні паралельні осі Oy.

Розв'язати самостійно наступні задачі

Завдання 1

Знайти напрямну циліндра $x^2 + 2z^2 =$. Які з координатних осей паралельні твірні цього циліндра?

Завдання 2

Знайти напрямну циліндра $x^2 - 4z^2 = 6$. Які з координатних осей паралельні твірні цього циліндра?

Завдання 3

Знайти напрямну циліндра $x^2 - y^2 =$. Які з координатних осей паралельні твірні цього циліндра?

Завдання 4

Знайти напрямну циліндра $-\dfrac{y^2}{9 + z^2} =$. Які з координатних осей паралельні твірні цього циліндра?

Завдання 5

Знайти напрямну циліндра $4x^2 + z^2 = 6$. Які з координатних осей паралельні твірні цього циліндра?

9. Приклад виконання вправи тренінгу на вміння №16

Завдання

Складати характеристичне рівняння поверхні другого порядку

$$2x^2 + y^2 - 3xy + 5yz = 0.$$

Розв'язання

Заповніть таблицю, підібравши до кожного пункту алгоритму конкретне відповідне із завдань.

№ п\п	Алгоритм	Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму
1	2	3
1	$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$, де $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{32} = a_{23}$ – коефіцієнти квадратичної форми при $x^2, y^2, z^2, 2xy, 2xz, 2yz$ відповідно	Так як $a_{11} = 2$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = 0$, $a_{21} = a_{12} = -4$, $a_{31} = a_{13} = 0$, $a_{23} = a_{32} = 3$, то характеристичне рівняння має вигляд $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix}$

Розв'язати самостійно наступні задачі

Завдання 1

Скласти характеристичне рівняння поверхні другого порядку

$$x^2 + 5y^2 - z^2 - 2xy + 6yz = 0.$$

Завдання 2

Скласти характеристичне рівняння поверхні другого порядку

$$x^2 + z^2 - 8xz + 10yz = 0.$$

Завдання 3

Скласти характеристичне рівняння поверхні другого порядку

$$x^2 + 5y^2 - z^2 - yz = 0.$$

Завдання 4

Скласти характеристичне рівняння поверхні другого порядку

$$y^2 - 9z^2 + 4xy + 2xz = 0.$$

Завдання 5

Скласти характеристичне рівняння поверхні другого порядку

$$x^2 + 2y^2 - 12xy + 16xz - 2yz = 0.$$

10. Приклад виконання вправи тренінгу на вміння №17

Завдання

Виясніть, яку поверхню задає кожне із рівнянь другого порядку:

1) $x^2 + \;y^2 + \;z^2 - \; = \;$,

2) $2x^2 - \;y + \;z^2 = \;$,

3) $3x^2 + \;y^2 = \;$ $13x^2 + 5y^2 = 11$.

Розв’язання

Заповніть таблицю, підібравши до кожного пункту алгоритму конкретне відповідне із завдань.

№ п\п	Алгоритм	Конкретна відповідність даної ситуації запропонованому алгоритму
1	2	3
1	Якщо в рівняння входять x^2, y^2, z^2 і знаки перед ними однакові, то дана поверхня є еліпсоїдом	$x^2 + \;y^2 + \;z^2 - \; = \;$ – еліпсоїд
2	Якщо дві змінні входять у другому степені, а третя – в першому, то поверхня – параболоїд	$2x^2 - \;y + \;z^2 = \;$ – параболоїд
3	Якщо одна із змінних x, y, z, (в 1-ому і 2-ому степенях) відсутня, то поверхня – циліндрична (циліндр)	$3x^2 + \;y^2 = \;1$ – циліндр

Розв’язати самостійно наступні задачі

Завдання 1

Вияснити, яку поверхню задає кожне із рівнянь другого порядку:

1) $9x^2 + y^2 - \;z^2 - \; = \;$,

2) $x + \;y^2 + \;3z^2 = \;$,

3) $14x^2 + \;z^2 = \;$.

Завдання 2

Вияснити, яку поверхню задає кожне із рівнянь другого порядку:

1) $x^2 + \;y^2 + \;z^2 - \; = \;$,

2) $2x^2 - \;y + \;z^2 = \;$,

3) $3x^2 + \;y^2 = \;1$.

Завдання 3

Вияснити, яку поверхню задає кожне із рівнянь другого порядку:

1) $x^2 - \;y^2 + z^2 + \;6 = \;$,

2) $-x^2 - \;y + z^2 = \;$,

3) $3x^2 - \;0y^2 = \;$.

Завдання 4

Вияснити, яку поверхню задає кожне із рівнянь другого порядку:

1) $3x^2 + y^2 + 2z^2 = $ [illegible],
2) $-$ [illegible]$x^2 -$ [illegible]$y + z^2 =$ [illegible],
3) $x^2 +$ [illegible]$y =$ [illegible].

Завдання 5

Вияснити, яку поверхню задає кожне із рівнянь другого порядку:

1) $x^2 +$ [illegible]$y^2 +$ [illegible]$z^2 -$ [illegible] $=$ [illegible],
2) $2x^2 -$ [illegible]$y +$ [illegible]$z^2 =$ [illegible],
3) $x -$ [illegible]$y^2 =$ [illegible]1.

РОЗДІЛ І.

§ 1.

1.1. Сфера з центром в початку координат, радіуса 2.

1.2. Точка $O(0;0;0)$

1.3. Сфера з центром в точці (2;1;-1), радіуса 5.

1.5. Коло з центром в початку координат, радіус якого 2, в площині xoy.

1.6. Коло з центром у початку координат, радіус якого 7, в площині xoz.

1.8. Коло з центром в точці $(0;0;2)$ радіуса 4.

1.11. 1) Сферична поверхня з центром в початку координат і радіусом R=1.

2) круглий циліндр, вісь якого співпадає з віссю z**;** напрямне коло має радіус $r = 1$;

3) дві площини, які паралельні площині (yz) і проходять з двох сторін від неї на відстані, рівній одиниці;

4) сукупність двох площин $x - y = 0$ і $x + y = 0$, що ділять двогранний кут між площинами (xz) і (yz) навпіл;

5) поверхня, що має тільки одну дійсну точку – початок координат;

6) всі дійсні точки цієї поверхні лежать на одній прямій – на осі z;

7) площина (yz), взята двічі;

8) сукупність усіх трьох координатних площин: x=0, y=0, z=0;

9) площина, що проходить через вісь x і нахилена до площини (xy) під кутом $\frac{\pi}{6}$.

(Циліндрична поверхня, що містить прямолінійну напрямну).

1.12. 1) Коло, розташоване в площині, паралельній площині (xz); центр його має координати (1; -1; 0) і радіус $r = 4$;

2) гіпербола, площина якої паралельна до площини (yz); центр гіперболи має координати (2, 0, 0); дійсна вісь паралельна осі y і дорівнює 6; уявна вісь паралельна осі z і рівна 4;

3) парабола, розташована в площині, що ділить двогранний кут між площинами (xz) і (yz) навпіл; вершина параболи співпадає з початком координат, вісь параболи співпадає з віссю z і параметр її $p = 1$;

4) дві прямі, які лежать в площині (xy), проходять через початок координат і утворюють з віссю x кути в 60° і 120°.

1.15. Гіперболічний циліндр $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=\ $.

1.16. Еліпс $\frac{(x-\ )^2}{4}+z^2=\ ;\ y=\ $.

1.17. Коло $(x-\ )^2+\ y-\ )^2+\ z+\ )^2=\ ;\quad x=\ $.

1.18. $6x+\ 0y-\ 0z+\ =\ $.

1.19. $2pz=\ ^2+\ ^2$. ця поверхня отримується від обертання параболи $x^2=\ pz$ навколо своєї осі і називається параболоїдом обертання.

1.20. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\ $, де $b^2=\ ^2-\ ^2$.

1.21. а) M_1, M_2, M_3, M_5, M_6; б) M_2, M_3, M_6; в) M_2; г)не має точок; д) $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$.

1.22. пари O і A, B_1 і B_2.

1.23. площина *xoy* перетинає AC і BC, *yoz* – AC і BC, *xoz*- AB і BC.

1.24. Грані мають рівняння: (ABC):z=0, (ABD) : $7x+\ y-\ z-\ 4=\ $,

(BCD): $7x-z=\ $, ($ACD$) $7x-7y+4z=0$. Тому, для того щоб точка належала внутрішній області, необхідно і достатньо, щоб її координати одночасно задовольняли наступні нерівності:

$$z>0,\ 7x+\ y-\ z-\ 4<\ ,\ 7x-z>0,\ 7x-\ y+\ z<\ .$$

1.25. M_2 і M_4.

1.26. *A, B* і E

1.27. $y>0, x>0, y+z-2<0$.

1.28. $x>0, y>0, z>0,\ \frac{x}{5}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}-1<0$.

1.31. R' орієнтований додатно.

§ 2.

2.1. а) (1;-2;2); б) $(4;1;\frac{7}{3})$.

2.3. а) $(\frac{5}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{7}{4})$; б) $(-\frac{3}{13};\ \frac{14}{13})$.

2.5. 1) $(3,\frac{2}{3},2)$; 2) (-30, 8, 13).

2.6. (3;0;5).

2.7. $A(\frac{14}{3};- \ ;12)$, B $(-\frac{11}{3};7;- \ 3)$ і інші точки поділу D $(\frac{4}{3};- \ ;2)$, E $(-\frac{1}{3};1;- \ )$.

2.8. C (4;–5;2).

2.9. $\lambda_1 = \frac{7}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{5}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$.

2.10. Дані прямі перетинаються в точці $(-\frac{3}{2};\frac{5}{2};11)$.

2.11. Перетинає вісь *oz*.

2.12. Сфера з центром в точці $(\ ;0;- \ )$ радіуса 4.

2.13. Двопорожнинний гіперболоїд з центром в точці (1;-2;0), осі якого паралельні координатним осям.

2.14. Уявна сфера з центром в точці (0;0;3) радіуса 3.

2.15. Записати рівняння поверхні, сума квадратів відстаней кожної точки з яких до точок $F_1(-a;0;0)$ і $F_2(a;0;0)$ дорівнює сталому числу $4a^2$.

2.16. Круговий циліндр, твірна якого паралельна осі oy, напрямна – коло

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 25, \\ y = 0. \end{cases}$$

2.17. Еліптичний циліндр, твірна якого паралельна осі ox, напрямною є коло

$$\begin{cases} \frac{y^2}{15} + \frac{z^2}{16} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

2.18. Гіперболічний циліндр, твірна якого паралельна осі oz, напрямна – гіпербола

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = \ $ в площині xoy.

2.19. Параболічний циліндр, твірна якого паралельна осі oy, напрямна – парабола $6z = x^2$ в площині xoz.

2.20. Круговий циліндр, твірна якого паралельна осі oz, напрямна – коло

$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ в площині xoy.

2.22. Параболічний циліндр, твірна якого паралельна осі oz, напрямна – парабола $y = x^2$ в площині xoy.

2.24. а), в)

2.25. а), г)

2.26. Дано чотири точки: $A(2; 4; 3)$ і $B(0; 0; 5)$, $C(4; 1; 6)$ і $D(-2; 3; 2)$. Довести, що прямі AB і CD перетинаються і знайти їх точки перетину.

2.26. (1; 2; 4)

2.27. $A_1A_2=5$, $B_1B_2=\sqrt{50}$, $C_1C_2=\sqrt{30}$; $OM=5$, $ON=\sqrt{13}$, $OP=5$, $OQ=\sqrt{62}$.

2.28. 7

2.29. $(-\frac{1}{6};-\frac{1}{2};-\frac{1}{6})$

2.30. $A_1(0;-3;8)$, $A_2(\frac{1}{2};-2;5)$, $A_4(\frac{3}{2};0;-1)$, $A_6(\frac{5}{2};2;-7)$.

2.31. C(7;-3,;2)

2.32. $\lambda=-\frac{1}{2}$, $\lambda=\frac{1}{5}$, $\lambda=\frac{7}{2}$.

2.34. $(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4};\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4})$.

2.35. $(\frac{7}{2};\frac{1}{5};-\frac{1}{2})$.

2.36. 1) $\sqrt{21}$.

2.37. $D\left(\frac{8}{10},\frac{9}{10},\frac{3}{2}\right)$ $|AD| = \frac{\sqrt{570}}{5}$.

2.38. 45^0.

2.39. 1) $C_1\left(\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$.

2.40. $\cos\hat{A} = -\frac{89}{91}$, $\cos\hat{B} = \frac{23}{7\sqrt{11}}$, $\cos\hat{C} = \frac{36}{13\sqrt{11}}$.

РОЗДІЛ ІІ.

§ 1.

1.2. (1;0;4)

1.3. а) $x + y - z + 1 = 0$, б) $x + 3y - z + 1 = 0$.

1.4. а) $6x + 2y - 5z + 5 = 0$, б) $x - z + 1 = 0$, в) $y - z = 0$.

1.5. а) $x + y - 4z + 9 = 0$, б) $x - 2y + z = 0$.

1.6. а) ні, б) так: $x + y + z - 2 = 0$, в) ні, г) ні.

1.7. а) $10x + 9y + 5z - 50 = 0$, б) $6x + 5y + 3z - 30 = 0$.

1.8. а) $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$; б) $y + 2z + 6 = 0$, $x - z - 5 = 0$, $2x + y - 4 = 0$;

в) $5y + z = 0$, $5x + 2z = 0$, $x - 2y = 0$.

1.9. $3y + 2z = 0$, $3x - z = 0$, $2x + y = 0$.

1.10. $\frac{x}{-} + \frac{y}{16/11} + \frac{z}{1} = 1$.

1.11. а) $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$; б) $\frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$.

1.12. $x + y + z = 9$, $-x + y + z = 3$, $x - y + z = 5$, $x + y - z = 1$.

1.14. $x = \;+\; - \;v,\ y = \; + \;u + \;v,\ z = \; - \;u - \;v.$

1.15. Кординати вектора $\vec{a}$ визначають розв′язок рівнянь: $5a_1 - \;a_2 - \;a_3 = \;$.

1.16. $x = \;+\;,\ y = \; + \;u + \;v,\ z = \;+\;.$

1.17. $x + y + z - \; = \;,\ 14x + \;3y + \;z - \;4 = \;,\ 8x + \;y + \;z - \;0 = \;,\ x + y + z - \; = \;,$

$14x + \;3y + \;z - \;0 = \;,\ 8x + \;y + \;z - \;2 = \;.$

1.18. $\Phi_1 = \; - \; - \; + \; > \;$ і $2x - \; - \; + \; <$

$\Phi_2 = \; - \; - \; + \; < \;$ і $2x - \; - \; + \; >$

$\Phi_3 = \; - \; - \; + \; > \;$ і $2x - \; - \; + \; >$

$\Phi_4 = \; - \; - \; + \; < \;$ і $2x - \; - \; + \; <$

1.22. а) $6x - \;y + \;z + \;7 = \;$; б) $5x - y - \;z - \;9 = \;$.

1.23. $20x + \;3y + \;1z - \;3 = \;$.

1.24.: $x+3y=0$.

1.25. d) $a=-6$; $c=3/2$; (площина паралельна осі oy);

e) $a=0$; $в=$о; $c=0$;

f) a=7 (площина парплельна координатній площині *YOZ*).

1.26. *ABC:* $x - 3y - z + 2 = 0$

ABD: $x - 4y - z + 2 = 0$

ACD: $2x - 8y - 3z + 6 = 0$

BCD: $2x - 11y - 3z + 9 = 0$.

1.27. можна.

1.28. $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z + \ }{1}$.

§ 2.

2.1. $(x - \ )^2 + (y + \ )^2 + (z - \ )^2 = \ 6$.

2.3. $7x - \ y + \ 1z - \ 2 = 0$.

2.4. $x + z - \ = 0$.

2.6. $8x + \ 2y + \ z + \ = 0$.

2.7. $\left(\ ; - \ ; -\frac{5}{2} \right)$

2.8. $x - \ y - \ z - \ 0 = 0$, $2x + \ y - z + \ = 0$, $2x - y + \ z + \ 0 = 0$, $2x - y2z - \ 2 = 0$.

2.9. $2x - y - \ z - \ = 0$, $x - \ y - \ z - \ 2 = 0$, $2x + \ y - z \pm \ = 0$.

2.10. $3x - \ y + \ z - \ = 0$.

2.11. $3x + y - \ z + \ = 0$, $\cos\varphi = \frac{1}{9}$.

2.12. $(x + \ )^2 + (y + \ )^2 + (z - \ )^2 = \ $.

2.22. $2x - \ y + \ z - \ 9 = 0$.

2.23. $x + y - \ z + \ = 0$.

2.24. а) $2x - \ y + \ z = 0$; б) $2y - \ z = 0$; в) $x = 0$.

2.25. а) $3x - y + z - \ 1 = 0$; б) $x - \ y - \ 0 = 0$; в) $z - \ = 0$.

2.26. а) на лінії перетину лежить, наприклад, точка (1;-2;-4); б) $p(-1; 3; 5)$

2.27. $-\frac{2}{3}x - \frac{2}{15}y + \frac{11}{15}z - \ = 0$.

2.28. $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

2.29. a) $\rho = \frac{3}{2}$;

b) $\rho = 0$ (точка лежить на площині).

2.30. площини перпендикулярні одна до одної.

2.31. дані площини не мають спільних точок.

§ 3.

3.1. $x = t - \;;\; y = \; t + \;;\; z = \; t - \;.$

3.2. $\frac{x-}{2} = \frac{y-}{5} = \frac{z-}{-}.$

3.3. $\frac{x-}{3} = \frac{y+}{-} = \frac{z+}{5}.$

3.4. $\frac{x-}{0} = \frac{y-}{0} = \frac{z-}{1}.$

3.5. $\frac{x-}{\sqrt{2}} = \frac{y+}{1} = \frac{z-}{1}, \frac{x-}{\sqrt{2}} = \frac{y+}{1} = \frac{z-}{-}.$

3.6. 1) $\cos\alpha = \frac{4}{13};\ \cos\beta = -\frac{3}{13};\ \cos\gamma = \frac{12}{13}$. 2) $\cos\alpha = \frac{12}{25};\ \cos\beta = \frac{9}{25};\ \cos\gamma = \frac{4}{5}.$

3.7. $\frac{x+}{3} = \frac{y-}{4} = \frac{z-}{5};\ \cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{10};\ \cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{5};\ \cos\gamma = \frac{-\sqrt{2}}{2};$

3.8. 1) $x = t + \;;\; y = t + \;;\; z = t - \;$; 2) $x = \;t + \;;\; y = \;;\; z = \;t + \;$ 3) $x = \;t - \;;\; y = \;t - \;;\; z = \;t + \;$; 4) $x = \;t + \;;\; y = \;t + \;;\; z = \; t - \;.$

3.9. $x = \; - \;t;\; y = 1t - \;;\; z = \;.$

3.10. AD: $\frac{x-}{-} = \frac{y}{5} = \frac{z+}{6}$; CD: $\frac{x}{2} = \frac{y-}{-} = \frac{z-}{3}.$

3.11. $\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-}.$

3.12. 45°.

3.13. 120°.

3.16. $\frac{x-\ }{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+\ }{-}.$

3.17. $\frac{x-\ }{\sqrt{2}}=\frac{y-\ }{1}=\frac{z+\ }{-}.$

3.18. 1) $\Theta=\arccos\frac{5\sqrt{21}}{42}\approx\ 6^{\circ}\ 6'$ 2) $\Theta=\arccos\left(\frac{-\ \sqrt{7}}{14}\right)\approx\ 00^{\circ}\ 4'$

3.19. $\mathcal{L}=3.$

3.20. $M_1\in\quad M_2\notin$

3.21. $x=\ +\ ,\ y=\ -\ ,\ z=\ -\ +\ .$

3.22. $\begin{cases}x-3y-2z-5=0,\\3x+5y-6z-1=0.\end{cases}$

3.23. (-1;-11;0).

3.24. $\cos\varphi=\frac{19}{15\sqrt{2}}.$

3.25. 1) Перетинаються; 2) мимобіжні; 3) мимобіжні; 4) мимобіжні; 5)паралельні; 6) перетинаються.

3.26. $x=\ +\ t,\ y=\ -\ t,\ z=\ .$

3.27. $\begin{cases}x-3y+5z+2=0,\\x-2y-5z+9=0.\end{cases}$

3.28. $\begin{cases}5x+y+5z-6=0,\\x+5y-2z=0.\end{cases}$

3.29. $x=\ -\ ,\ \ y=\ +\ t,\ \ z=\ +\ t.$

3.30. $\begin{cases}2x-y+10z-47=0,\\x+3y-2z+6=0.\end{cases}$

4.35. $\cos\varphi=\frac{100}{3\sqrt{22}\sqrt{273}}.$

4.36. $\begin{cases}x-y-3=0,\\z=0;\end{cases}\quad\begin{cases}2x-z+2=0,\\y=0;\end{cases}\quad\begin{cases}2y-z+8=0,\\x=0.\end{cases}$

4.37. $\frac{133}{\sqrt{741}}.$

§ 4.

4.1. а) θ = $\arcsin\left(\frac{1}{7\sqrt{6}}\right)$ б) пряма паралельна площині; в) θ = $\frac{\pi}{2}$; г) θ = $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{6}}.\right)$

4.2. B = -8; p = 5.

4.3. а) (2;-3;6); б) пряма паралельна площині; в) пряма належить площині;

г) пряма паралельна площині; д) (2;3;1).

4.4. а) так; б) ні; в) ні.

4.5. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку M_1(1;-3;5) перпендикулярно до площини x + 6y - 5z - 17 = 0.

4.5. $\frac{x-\ }{1}=\frac{y+\ }{6}=\frac{z-\ }{-\ }.$

4.6. $x = \ + t,\ y = \ -\ +\ t,\ z = \ -\ t,\ (4;-\ ;-\ )$

4.7. а) $2x - y - \ z - \ = 0$; б) $x + \ y + \ z = 0$; в) $2x - \ y + \ z - \ = 0$.

4.8. а) $8x - \ y - \ 2z - \ 9 = 0$; б) $23x - \ 2y + \ 6z - \ 7 = 0$; в) $4x + \ y + \ z - \ = 0$.

4.9. $13x - \ 4y + \ 1z + \ 1 = 0$.

4.10. $15x - \ y + \ z - \ = 0$.

4.11. а) $8x - y + \ 0z - \ = 0$; б) $11x - \ 7y - \ 9z + \ 0 = 0$.

4.12. а) $x - \ z + \ = 0$; б) $2x + \ y + \ z + \ = 0$; в) $21x - \ y + \ z - \ = 0$; г) $6x - \ 0y - \ 1z + \ = 0$.

4.13. а) $2x - \ 6y - \ 3z + \ 1 = 0$; б) $6x - \ 0y - \ 1z + \ = 0$; в) $13x + \ y + \ 1z - \ 5 = 0$; г) $3x + \ y + \ z - \ 1 = 0$.

4.14. (2;-3;-5).

4.15. а) $d = \frac{\sqrt{66}}{3}$; б) $d = \frac{4\sqrt{35}}{7}$; в) $d = \frac{\sqrt{83}}{5}$.

4.16. а) d = 7; б) d = 6; в) d = 15.

4.17. $d = \frac{5}{6}\sqrt{30}.$

4.18. d = 25.

4.19. 1) $d = 13$; 2) $d = \frac{127}{13}$; 3) $d = 7$; 4) $d =$ [illegible]$\sqrt{29}$; 5) $d = 3$; 6) $d = 11$; 7) $d = 7$;

8) $d = 13$.

4.20. Q (-5;1;0).

4.21. Q (1;-2;2).

4.22. Q (3;3;-3).

4.23. Q (2;9;6).

4.24. Q (2;-3;2).

4.25. Q $(\frac{9}{7};-\frac{4}{7};-\frac{22}{7})$.

4.26. Q (-5;-4;6).

4.27. $\begin{cases} 2x + 2y - z - 14 = 0, \\ 10x + 11y + 4z - 53 = 0. \end{cases}$

4.28. $\begin{cases} 2x + y + z - 5 = 0, \\ x - y - z - 5 = 0. \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} 2x - y + z - 20 = 0, \\ x + y + z - 10 = 0. \end{cases}$

4.30. $x -$ [illegible] $y +$ [illegible] $z +$ [illegible] $= 0$.

4.31. $\begin{cases} 54x + 32y - 49z - 76 = 0, \\ 69x - 42y + 41z + 235 = 0. \end{cases}$

4.32. $\begin{cases} x - 3y + z - 1 = 0, \\ 3x - 3z - 2 = 0. \end{cases}$

4.33. $\left(\frac{2}{9};\frac{2}{9};-\frac{2}{9}\right)$

4.34. M_1 (0;2;-3), M_2 (3;0;-2), M_3 (9;-4;0).

РОЗДІЛ III.

§ 1.

1.1. $(x+\ y+z)^2+\ (x-z)^2=\ 6$

$$z=\ +\ t,\quad z=\ -\ t.$$

1.2. $9\ (x-\ )^2+\ y-\ z+\ )^2=\ 6\ (x-\ )^2+y^2+\ (z+\ )^2.$

1.3. $(x-y-\ )^2+\ (x-z+\ )^2+\ (y-z+\ )^2=\ .$

1.4. $8x^2+\ y^2+\ z^2-\ xy+\ xz+\ yz+\ 6x+\ 4y+\ 2z-\ 9=\ .$

1.5. $(x+y+z)^2+\ \left(x-y-\frac{}{4}\right)=\ .$

1.6. 1) $\left(x+\frac{}{2}z\right)+\left(y+\frac{}{2}z\right)=\ 5;$

2) $\left(y-\frac{}{5}z\right)-\left(z+\frac{}{5}x\right)=\ ;$

3) $\left(x-\frac{}{3}y\right)-\ \left(z+\frac{}{3}y\right)=\ .$

1.7. $(x+\ )^2-\ y^2-\ z^2=\ .$

1.8. $4x-\ y-\ z+\ =\ .$

1.9. $36\ (x+y+z)^2+\ 44\ (x+y-\ )^2-\ 5y^2=\ .$

1.10. $(\ ^2+\ ^2+\ ^2+\ 5)^2=\ 4(\ ^2+\ ^2)$. Ця поверхня називається **тором**.

1.11. $(\ ^2+\ ^2+\ ^2)^2=\ r^2(\ ^2+\ ^2).$

1.12. $z^4=\ 00(\ ^2+\ ^2).$

1.13. $z^2+\ 5=\ 0\sqrt{x^2+\ ^2}.$

1.14. а) $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\ ;$ в) $\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\ $

б) $\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\ ;$ г) $x^2+\ ^2=\ py.$

1.15. $z^2=\ \text{in}^2\sqrt{x^2+\ ^2}.$

1.16. Поверхня, що утворилася в результаті обертання кривої $\begin{cases} y^4 + y^2 + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі oz;

1.17. $xy + xz + yz = 0$. Вказівка. За твірну шуканого конуса можна вважати коло, яке перетинає всі три осі і розміщену в будь-якій площині, утворює рівні кути з осями координат. Таке коло може бути зображене рівняннями :

$$(x - \ )^2 + (y - \ )^2 + (z - \ )^2 = \ a^2; x + \ + \ = \ a.$$

1.18. $(x - \ )^2 + y^2 - (z - \ )^2 = 0.$

1.19. $\left(x - \frac{5}{2}z\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}z\right)^2 = 25.$ Вказівка. Рівняння твірної має вид:

$\frac{x - \ }{5} = \frac{y - \ }{3} = \frac{z}{2}$. Відношення, яке зв'язує параметри *a* і *b*, наступне: $a^2 + b^2 = 25.$

1.20. 1) $2y^2 + \ z^2 - \ yz + \ 2y - \ 0z - \ = 0$;

2) $(x - y)^2 + \ z^2 - \ (x - y) - \ z - \ 6 = 0.$

1.21. $(x + z)^2 - \ 0(x + z) + \ 5y^2 = 0.$

1.22. Площини, які перевальні площині *(xy)*, перетинають еліпсоїд по колах; площини, які паралельні іншим координатним площинам, перетинають його по еліпсах. Дійсні лінії перетину отримаються, якщо січні площини знаходяться від центра не дальше відповідних вершин. Кожна лінія перетину подібна паралельному головному січенню – осі їхні пропорційні. Дана поверхня – еліпсоїд обертання; а вісь обертання – вісь *z*.

1.23. $a : a_1 = \ : c_1 = \ : \sqrt{5}.$

§ 2.

2.2 $(x + \ )^2 + (y - \ )^2 + z^2 = 21.$

2.3. $(x + \ )^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 + (z + \ )^2 = \frac{64}{9}.$

2.4. $\frac{(x - \ )^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{225}{16}} + \frac{z^2}{\frac{100}{16}} = \ .$

2.5. $6x - \quad y + \quad z - \quad 8 = \quad$.

2.6. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{9} = \quad$.

2.7. $\left.\begin{aligned} \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{2} = \\ \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{2} = \end{aligned}\right\}$ $\qquad \left.\begin{aligned} 3x - 5y = 0 \\ z = 2 \end{aligned}\right\}$.

2.8. Еліпс або уявний еліпс, якщо $\alpha > 0$, $D^2 \neq \alpha$; П ─ дотична площина, якщо $\alpha > 0$, $D^2 = \alpha$; гіпербола, якщо $\alpha < 0$; парабола, якщо $\alpha = 0$, $D \neq 0$; пара уявних паралельних прямих, якщо $\alpha = 0$, $D = 0$, де $\alpha \quad {}^2 a^2 - \quad {}^2 b^2 - \quad {}^2 c^2$.

2.9. $x - y + z - \dfrac{5}{2} = \quad$,

$l_1:\ \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ x + 2y - 16 = 0, \end{cases} \qquad l_2:\ \begin{cases} 10x - 12y + 15z = 0 \\ 2x - 3z - 30 = 0 \end{cases}$.

2.10. $l_1:\ \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ x + 2y - 16 = 0, \end{cases} \qquad l_2:\ \begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$.

2.11. Гіперболічний параболоїд $Z = \quad X^2 - \quad Y^2$ з вершиною $\left(\dfrac{3}{2}; 1; \dfrac{1}{2}\right)$.

2.12. Еліптичний параболоїд $Z = \quad {}^2 + \quad Y^2$ з вершиною (0;1;–2).

2.13. Конус $X^2 + \quad Y^2 - \quad Z^2 = \quad$ з вершиною (–1;–1;–1).

2.14. Параболічний циліндр $Z^2 = \quad X$.

2.15. Еліпсоїд $\dfrac{X^2}{36} + \dfrac{Y^2}{9} + \dfrac{Z^2}{4} = \quad$ з центром (3; –1; 1).

2.16. Однопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{X^2}{16} + \dfrac{Y^2}{4} - \dfrac{Z^2}{16} = \quad$ з центром (5; 2; 3).

2.17. Параболічний циліндр $X^2 - \quad 0Y = \quad$.

2.18. Сфера $\quad - \quad + \left(y + \dfrac{\quad}{3}\right) + z^2 = \dfrac{16}{9}$.

2.19. Круговий циліндр $\quad - \quad + \left(y + \dfrac{\quad}{3}\right) + \quad = \dfrac{16}{9}$.

2.20. Круговий конус $X^2+Y^2-Z^2=0$

2.21. Пара площин $(x-\;)\pm(y-\;)=0$.

2.22. $x^2+\;y^2+\;xy-\;x-\;y=0$.

2.23. $x^2-\;xz-\;yz=0$; $x+\;y+\;z-\;=0$.

2.24. $z^2=\;xy$.

2.25. $y^2+z^2+\frac{p}{r}xy-\;px-\;ry=0$.

2.26. $x^2+y^2-\;2x-\;8y-\;z+\;2=0$.

2.27. $(x-\;)^2+\;y+\;)^2+\;z-\;)^2=\;9$.

2.28. Таких хорд можна провести незчисленну кількість; всі вони лежать в площині $288x+\;25y-\;00z-\;201=0$. Вказівка. Шукана пряма зобразиться системою рівнянь: $\frac{x-\;}{m}=\frac{y-}{n}=\frac{z+}{1}$. Вирішуючи їх одночасно з рівнянням даної поверхні (виключаємо координати x та y) і враховуючи умови задачі, які можна виразити рівністю $\frac{z_1+z_2}{2}=\;$ отримаємо тільки одне співвідношення: $228m+\;25n-\;00=0$, яке повинні задовольняти кутові коефіцієнти шуканої прямої. Виключивши ці коефіцієнти із отриманої рівності та із рівнянь прямої, отримаємо рівняння геометричного місця шуканих прямих.

2.29. Таких прямих можна провести безліч; їх геометричне місце є конус

$$\frac{(x-\;)^2}{9}+\frac{(y-\;)^2}{4}-(z-\;)^2=0.$$

2.30. $\frac{x-\;}{3}=\frac{y-\;}{0}=\frac{z-\;}{4}$ і $\frac{x-\;}{9}=\frac{y-\;}{8}=\frac{z-\;}{20}$. Вказівка. Цю задачу можна вирішити чи безпосередньо, рішаючи спільно рівняння поверхні з рівняннями прямої, яка проходить через дану точку, і прирівнюючи до нуля всі коефіцієнти в рівнянні, отриманому після виключення двох координат, чи користуючись загальними рівняннями прямолінійних твірних.

2.31. $\frac{x-\;}{2}=\frac{y-}{-}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x-\;}{2}=\frac{y+\;}{1}=\frac{z}{2}$. Вказівка. Прямолінійні твірні одного типу визначаються рівняннями: $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=\;,\frac{x}{4}-\frac{y}{2}=\frac{z}{k}$; зводимо їх до канонічного вигляду:

$\frac{x-2k}{2}=\frac{y-\ }{-}=\frac{z}{k}$. Параметр k визначений з умови паралельності з площиною $3x+2y-\ z=0$.

2.32. Зручно, написавши рівняння цих проекцій, скористуватися умовою дотикання прямої і кривої другого порядку.

2.33. Проекції прямолінійних твірних дотикаються до параболічних перерізів в площинах (xz) і (yz), а в площині (xz) вони утворюють (складають) пучки прямих, які паралельні тим двом прямим, на яких розпадається лінія перетину поверхні і площини (xy).

2.34. Однопорожнинний гіперболоїд: $\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=\ $. Вказівка. Утворена пряма зображається системою рівнянь $\frac{x-\ }{m}=\frac{y-\ }{n}=\frac{z}{1}$. Умова перетину цієї прямої з трьома даними дасть три рівності, які зв'язують параметри a, b, m і n. Виключаючи чотири параметри із цих трьох рівностей і двох рівнянь твірної, отримаємо шукану поверхню.

2.35. Гіперболічний параболоїд $z=\frac{x^2}{4}-y^2$. Вказівка. Знайдемо точки перетину обох траєкторій з площиною (xy): (1; $-\frac{1}{2}$; 0) і (-1; $\frac{1}{2}$; 0), і приймемо їх за розміщення рухливих точок в початковий момент руху. Нехай далі по першій прямій точка піднімається (рух точки співпадає з додатнім напрямом прямої), а по другій прямій відповідна точка опускається вниз (щоб напрям руху співпадав з напрямом прямої, змінивши знаки кутових коефіцієнтів в другої прямої на протилежні). Тоді рівняння траєкторій зручніше буде записати так: $\frac{x-\ }{2}=\frac{y+\ /2}{1}=\frac{z}{2}$ і $\frac{x+\ }{2}=\frac{y-\ /2}{1}=\frac{z}{-\ }$, чи в параметричній формі: $\begin{cases} x=2\rho\ -1, \\ y=\rho\ -1/2, \\ z=2\rho \end{cases}$ (1) і $\begin{cases} x=2\rho\ -1, \\ y=\rho\ +1/2, \\ z=-2\rho \end{cases}$ (2). В цих рівняннях ρ і ρ відображають величини, пропорційні відстаням рухливих точок від їх початкового положення. За умовою задачі ці відстані повинні бути рівні між собою в будь-який момент руху; крім того, множники пропорційності для обох прямих однакові $\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=\frac{1}{3}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{m_1{}^2+n_1{}^2+p_1{}^2}}=\frac{1}{3}\right)$ тому можна прямо покласти $\rho = \rho$. Пишемо тепер рівняння прямої , яка проходить через обидві рухливі точки [координати цих точок задані рівностями (1) і (2)]: $\frac{x - \rho -}{2} = \frac{y - +\ /2}{-} = \frac{z - \rho}{4\rho}$. Виключимо параметр ρ із цих двох рівнянь і тоді отримаємо рівняння шуканої поверхні.

2.36. Гіперболічний параболоїд: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} =$. Вказівка. На утворену пряму $\frac{x -}{m} = \frac{y -}{n} = \frac{z -}{p}$ накладено три умови: перетин з двома прямими і паралельність з даною площиною. Виразимо ці умови аналітично та із отриманих трьох рівнянь виключимо відношення кутових коефіцієнтів; тоді ми отримаємо одне співвідношення, яке зв'язує координати (*a*, *b*, *c*) будь-якої точки твірної прямої, це і дасть нам рівняння шуканої поверхні, якщо замінити *a*, *b*, *c* поточними координатами.

2.37. $x - y - z - =$. Вказівка. Розв'язавши задачу для параболоїда в загальному вигляді, переконатися, що її умови може задовольняти не більше однієї площини.

2.38. $4x + y \pm 0 =$. Вказівка. Всі дотичні до площини даного циліндра повинні бути паралельні осі *z*.

2.39. 1) $x - z =$ і $3x - y - z - 8 =$; пряма перетинає поверхню в двох дійсних точках; 2) дійсних дотичних площини провести не можна; пряма не має дійсних точок перетину з поверхнею; 3) $x - y - z - =$; пряма дотикається до поверхні і через неї можна провести тільки одну дотичну площини.

2.40. $\sqrt{15} \cdot y - z + =$ і $\sqrt{15} \cdot y + z - =$; $(;2\sqrt{15};16)$ і $(;-\sqrt{15};16)$.

2.41. $\frac{x -}{1} = \frac{y -}{2} = \frac{z - 1}{6}$ і $\frac{x -}{1} = \frac{y -}{-} = \frac{z - 1}{14}$. Вказівка. Можна знайти проекцію лінії їх перетину на площину (*xy*): $4x^2 - y^2 - 0x + y + 4 =$ і знайти рівняння кожної із тих прямих, на які ця лінія розпадається: $2x - y - =$ і $2x + y - 4 =$. Кожне з цих рівнянь дасть площину, яка проектує шукану пряму на площину (*xy*). Кожна із шуканих прямих утвориться одним із цих рівнянь і рівнянням дотичної площини. По-іншому можна розв'язати цю задачу, знайшовши точку дотику даної площини і поверхні і склавши рівняння прямолінійних твірних, які проходять через знайдену точку.

2.42. $16x \pm 3z =$.

§ 3.

3.1. $X+Y+Z=$ [illegible].

3.2. $X-Y-Z=$ [illegible], (0;0;1).

3.3. $4x-y-$ [illegible]$z+$ [illegible] $=$ [illegible].

3.4. $Y=h$.

3.5. $3x+$ [illegible] $=$ [illegible], $3z-$ [illegible] $=$ [illegible].

3.6. (0;0;1).

3.7. $x+y+$ [illegible]$z+$ [illegible] $=$ [illegible], $x+$ [illegible] $-$ [illegible] $\pm$ [illegible]$\sqrt{8}$ [illegible] $y-$ [illegible] $\pm$ [illegible]$\sqrt{8}=$ [illegible].

3.8. $z-$ [illegible] $=$ [illegible], $x+y-z+$ [illegible] $=$ [illegible] і $x-z+$ [illegible] $=$ [illegible], $x+y+$ [illegible] $=$ [illegible].

3.9. $x+$ [illegible]$y-$ [illegible] $=$ [illegible] і $x+$ [illegible]$y=0$.

3.10. $4x-$ [illegible]$y-$ [illegible]$z+$ [illegible] $=$ [illegible].

3.11. Пара площин $x+y\pm z=$ [illegible].

3.12. Параболічний циліндр $Z=$ [illegible]X^2.

3.13. Гіперболічний циліндр Z^2- [illegible]$X^2=$ [illegible].

3.14. Конус $X^2-Y^2+Z^2=$ [illegible].

3.15. Пара площин $x-y\pm$ [illegible] $-$ [illegible] $=$ [illegible].

3.16. Гіперболічний параболоїд X^2- [illegible]$^2=$ [illegible] Z.

3.17. Круговий циліндр $X^2+Z^2=$ [illegible].

3.18. Однопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{[illegible]}}+\dfrac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{[illegible]}}-\dfrac{Z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{[illegible]}}=$ [illegible], центр $\left(-\frac{[illegible]}{3};-\frac{[illegible]}{3};\frac{2}{3}\right)$

координати одиничних векторів нової системи $e'_{[illegible]}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$e'_{[illegible]}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ $e'_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3.19. Двопорожнинний гіперболоїд $\frac{X^2}{\frac{4}{5}}+\frac{Y^2}{\frac{4}{15}}+\frac{Z^2}{\frac{4}{25}}=-$ центр $\left(0;1;-\frac{2}{5}\right)$,

$e'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$ $e'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$ $e'=(0;0;1)$.

3.20. конус обертання $X^2+Y^2-\ Z^2=$, вершина (1;1;–1), вектор, паралельний осі конуса, (2;1;–2).

3.21. $\frac{X^2}{\frac{4}{7\sqrt{14}}}-\frac{Y^2}{\frac{2}{\sqrt{14}}}=\ Z$ – гіперболічний параболоїд; $p=\frac{4}{7\sqrt{14}}$, $q=\frac{2}{\sqrt{14}}$; додатній напрям осі параболи, отриманої в перетині поверхні площиною $O'YZ$, визначається вектором (1;2;–3). Додатній напрям осі $O'Y$ визначається вектором (4;1;2); додатній напрям осі O' визначається вектором (–1;2;1), вершина $O'=\left(-\frac{617}{392};-\frac{113}{196};\frac{1011}{392}\right)$.

3.22. $x'^2=-\frac{\sqrt{5}}{3}y'$; $x=\ '$, $y=\frac{y'-\ z'}{\sqrt{5}}$, $z=\frac{-\ y'-\ '}{\sqrt{5}}$.

3.23. $\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{2}-\frac{z'^2}{6}=$ ($\lambda=$; $\lambda=$, $\lambda=-$); $x=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'$,

$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{2}{\sqrt{6}}y'$, $z=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'-\frac{1}{\sqrt{2}}z'$.

3.24. $z^2-\ =$ ($\lambda=\lambda=$, $\lambda=$); $x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'$,

$y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{2}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'$, $z=-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{2}{\sqrt{6}}z'$.

3.25. $\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{9}=$, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $z=\ '$.

3.26. $-\frac{x'^2}{12}+\frac{y'^2}{2}-\frac{z'^2}{6}=$.

3.27. $3x'^2-\ z'^2=\ y'$.

3.28. $\frac{y'^2}{12}-\frac{z'^2}{6}=$.

3.29. $\frac{x'^2}{14}+\frac{y'^2}{28}+\frac{z'^2}{7}=\ .$

3.30. $\frac{x'^2}{2}+\frac{z'^2}{1}=-\ y'.$

3.31. $\frac{x'^2}{3}+\frac{y'^2}{2}=2z'.$

3.32. $-\frac{x'^2}{2}+\frac{z'^2}{1}=2y'.$

3.33. $x'^2-y'^2+z'^2=0.$

3.34. $x'^2-\ y'^2=0.$

3.35. $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}+\frac{z'^2}{5}=-\ .$

3.36. $\frac{x'^2}{15}+\frac{y'^2}{5}+\frac{z'^2}{10}=\ .$

3.37. $x'^2=-\ \frac{\sqrt{5}}{3}y'.$

3.38. $\frac{x'^2}{3}-\frac{z'^2}{3}=2y'.$

3.39. $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{\frac{32}{5}}+\frac{z'^2}{4}=\ .$

3.40. $x'^2+\ '^2=2y'.$

3.41. $\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{2}=\ .$

3.42. $y'^2=\frac{2}{\sqrt{5}}z'.$

3.43. $-\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{6}-\frac{z'^2}{6}=\ .$

3.44. $\frac{x'^2}{3}+\frac{y'^2}{2}+\frac{z'^2}{1}=0.$

3.45. *A* (0;0;0), *B* (1;1;1).

3.46. $\vec{b}$ і $\vec{d}$.

3.48. $\begin{cases} x+y-z+3=0, \\ z-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-z+2=0, \\ x+y+2=0. \end{cases}$

3.49. а) a_{11}=0, a_{22}>0, a_{33}>0; б) a_{11}>0, a_{22}>0, a_{33}>0, або a_{11}<0, a_{22}<0, a_{33}<0 .

3.50. $4x - \ y - \ z = $.

3.51. (1;1;-1); б) (0;2;-2); в) ($\frac{3}{2}$;0;-1).

3.52. пряма центрів: $3x - \ y = \ $, $y - \ z + \ = \ $; б) немає центрів, поверхня другого типу; в) єдиний центр (0;0;0), належить поверхні, поверхня канонічна; г) подищина центрів $x + \ y - \ z + \ = \ $; поверхня п’ятого типу $\lambda \ z'^2 + a'_{44} = \ $.

3.53. O'(1;-1;1). λ =-2, λ =3, λ =6, $\frac{x'^2}{6} - \frac{y'^2}{4} - \frac{z'^2}{2} = $; б) $O'(\frac{1}{6};\frac{1}{6};\frac{1}{3})$ λ =-3,

λ =-3, λ =6, $x'^2 + y'^2 - \ z'^2 = \ $.

3.54. $\frac{x+\sqrt{12}}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-}$ і $\frac{x-\sqrt{12}}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-}$.

3.55. $4x - \ y - \ z + \ = \ $.

3.56. $\frac{x-}{1} = \frac{y+}{1} = \frac{z-}{0}$; $\frac{x-}{1} = \frac{y+}{-} = \frac{z-}{1}$; $\frac{x-}{-} = \frac{y+}{1} = \frac{z-}{2}$.

3.57. $x - y = \ $; $x + y - z = \ $; $3x + \ y + \ z - \ = \ $.

3.58. $x^2 + y^2 = \ $.

3.59. $2x^2 + \ y^2 - \ \sqrt{2}z = \ $.

3.60. $31x^2 - \ 1y^2 + \ 0z^2 - \ 6xy + \ 0xz + \ 0yz + \ 6x + \ 02y - \ 0z - \ 1 = \ $. Пара площин, які перетинаються по спільному перпендикуляру до даних прямих, проведеному в точці їх перетину.