РОЗДІЛ II. ПРЯМА І ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

§1. Площина в афінній системі координат

Теоретичні відомості

Різні види рівнянь площини в афінній системі координат

Якщо площина задана точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і двома напрямними векторами $\overrightarrow{p_1}(\ell_1;m_1;n_1)$ та $\overrightarrow{p_2}(\ell_2;m_2;n_2)$, то її рівняння можемо записати у вигляді:

- канонічне
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.1)$$

- параметричне
$$\begin{cases} x = x_0 + \ell_1 t_1 + \ell_2 t_2, \\ y = y_0 + m_1 t_1 + m_2 t_2, \\ z = z_0 + n_1 t_1 + n_2 t_2. \end{cases} \qquad (2.2)$$

де t_1, t_2 - довільні дійсні числа.

Інші види рівнянь площини

Загальне $\quad Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (2.3)$

де $\vec{p}(-B;A;0)$, $\vec{q}(-C;0;A)$, $\vec{r}(0;-C;B)$ - напрямні вектори цієї площини.

У "відрізках" на осях
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (2.4)$$

де $a, в, c$ - "відрізки", які відтинає пряма відповідно на координатних осях ox, oy, oz.

Через три точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$:
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.5)$$

Необхідна і достатня умови паралельності вектора і площини

Якщо $\vec{p}(\alpha;\beta;\gamma)$, а площина π: $Ax + By + Cz + D = 0$, то
$$\vec{p} \parallel \pi \Leftrightarrow A\alpha + B\beta + C\gamma = 0. \qquad (2.6)$$

Розміщення площини відносно системи координат

Нехай π: $Ax + By + Cz + D = 0$. Тоді можливі такі випадки розміщення площини відносно системи координат:

1. Якщо $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, то площина

$$\pi: \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{Z}} = 1$$

перетинає всі координатні осі, відтинаючи на них відповідно відрізки

$$-\frac{D}{A},\ -\frac{D}{B},\ -\frac{D}{C}.$$

2. Якщо один з коефіцієнтів при змінних у рівнянні рівний нулю, а $D \neq 0$, то ця площина паралельна тій координатній осі, що відповідає відсутній змінній.

   Наприклад, π: $Ax + By + D = 0$ паралельна осі oz.

3. Якщо в рівнянні площини два коефіцієнти при змінних рівні нулю, а $\mathrm{D} \neq 0$, то ця площина паралельна тій координатній площині, що відповідає відсутнім змінним.

   Наприклад, площина π: $Cz + D = 0$ паралельна площині xoy.

4. *D=0* – площина проходить через початок координат.

5. Один з коефіцієнтів при змінних рівний нулю і *D=0*, тоді площина проходить через ту координатну вісь, що відповідає відсутній змінній.

   Наприклад, $A = 0, D = 0$, π: $By + Cz = 0$ – проходить через вісь ox.

6. Два коефіцієнти при змінних рівні нулю і *D=0* –це координатна площина.

   Наприклад, $A = B = D = 0$, π: $Cz = 0$– площина xoy.

Взаємне розміщення двох площин

Нехай π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Можливі три випадки взаємного розміщення двох площин:

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \qquad (2.7)$$

$$\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \tag{2.8}$$

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \mathcal{L}, \text{ де } \vec{p}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \parallel \mathcal{L}. \tag{2.9}$$

Взаємне розміщення трьох площин

Теорема 2.1. Залежно від коефіцієнтів загальних рівнянь площин π_1, π_2 і π_3 можливі вісім і тільки вісім випадків взаємного розміщення їх між собою.

Взаємне розміщення трьох площин визначається розв'язками системи, складеної із рівнянь даних площин

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \pi_3 &: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

Можливі такі випадки:

I. Ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної

$$rangA = rangB.$$

Тоді система має розв'язки.

II. Ранг основної матриці системи не дорівнює рангу розширеної $rangA \neq rangB$.

Тоді система розв'язків не має.

Дослідження

1. $rangA = rangB = 3$.

В системі (α) рівняння лінійно незалежні.

Система має єдиний розв'язок, а площини єдину спільну точку.

2. $rangA = rangB = 2$.

В системі два лінійні незалежні рівня.

В такому випадку:

або дві площини перетинаються по прямій, а третя або також проходить через цю пряму,

або третя співпадає з однією із площин, які перетинаються.

Отже, всі три площини мають спільну пряму.

3. $rangA = rangB = \ $.

Одне лінійно незалежне рівняння і всі площини мають спільні точки.

Всі три площини співпадають $\pi_{\ } = \pi_{\ } = \pi_{\ }$.

4. $rangA = \ , rangB = \ $.

Система не має розв'язку, площини не мають спільних точок, але так як $rangA = \ $, то серед цих рівнянь є два лінійно незалежні і, отже, дві площини з трьох перетинаються по прямій, через яку не проходить третя площина.

Тут можливі **два** випадки:

або вони перетинаються попарно,

або дві площини паралельні, а третя їх перетинає.

5. $rangA = \ , rangB = \ $.

Одне рівняння лінійно незалежне.

Такі **два** випадки:

або три площини паралельні,

або дві співпали, а третя паралельна.

Інших випадків не існує.

Пучок площин – це сукупність площин, що проходять через одну і ту ж пряму (*вісь пучка*).

Рівняння пучка площин

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \qquad (2.10)$$

В'язка площин – сукупність площин, що мають спільну точку (*центр в'язки*).

Рівняння в'язки:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (2.11)$$

де $C(x_0, y_0, z_0)$ – центр в'язки.

При розв'язанні задач, аналізуючи дані умови задачі, вибираємо той вид рівняння площини, яким зручно скористатися в даному випадку.

Наприклад, якщо відома точка і за умовами задачі можна знайти координати двох неколінеарних векторів, паралельних площині, то найкраще використати канонічне рівняння (2.1). Якщо ж в умові задачі вимагається записати рівняння площини, яка проходить через лінію перетину двох площин і має деяку властивість, то зручно скористатись рівнянням пучка (2.10), в якому тільки одне невідоме λ. Щоб його знайти, використаємо задану умовою задачі, властивість шуканої площини.

Будь-яку задачу на складання рівняння площини можна розв'язати, використовуючи рівняння (2.3):

1. Шукане рівняння площини має вигляд π: $Ax + By + Cz + D = 0$.
2. Три задані умови задачі записуємо через коефіцієнти *A,B,C,D*.

   Отримаємо систему трьох рівнянь з чотирма невідомими *A,B,C,D*.
3. Розв'язуємо отриману систему, вважаючи одне з невідомих *A,B,C,D* відомим (наприклад *A*), при умові, що детермінант системи трьох рівнянь вже з трьома невідомими – відмінний від нуля (тобто система має єдиний розв'язок). Якщо це не так, то в ролі відомого слід взяти інший коефіцієнт.

   Нехай розв'язком системи є: $B = \alpha_1 A$; $C = \alpha_2 A$; $D = \alpha_3 A$.
4. Підставляємо ці значення в рівняння площини. Маємо:

$$Ax + \alpha_1 Ay + \alpha_2 Az + \alpha_3 A = 0.$$

($A \neq 0$, бо в протилежному випадку *B=C=D=0*).

Поділимо обидві частини рівняння на *A*. Отримаємо:

$$x + \alpha_1 y + \alpha_2 z + \alpha_3 = 0.$$

Якщо в умові задачі задана точка, то краще скористатися рівнянням (2.11). Тоді дві інші умови дадуть можливість записати систему двох рівнянь з трьома невідомими *A,B,C*. Вважаючи одне з них відомим, розв'язуємо систему двох рівнянь з двома невідомими (аналогічно до попереднього випадку).

Розв'язання задач

2.1.1. *Знайти точки перетину площини* π: $2x-y+3z-6=0$ *з осями координат.*

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді (2.4) у «відрізках» на осях:

$$\frac{2x}{6}-\frac{y}{6}+\frac{3z}{6}=1, \text{ тобто } \frac{x}{3}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{2}=1.$$

Бачимо з рівняння, що $\pi \cap Ox$ в точці $A(3;0;0)$, $\pi \cap Oy$ в точці $B(0;-6;0)$, $\pi \cap Oz$ в точці $C(0;0;2)$.

2.1.2. *Записати рівняння площини, яка проходить через точки* $A_1(-3;1;5)$, $A_2(1;-1;2)$ *і паралельна вектору* $\vec{p}(1;0;1)$.

Розв'язання. Скористаємось канонічним рівнянням площини (2.1). Нехай для означеності $M_0 = A_1$, $\vec{q} = \overrightarrow{A_1A_2} = (4;-2;-3)$, за умовою $\vec{p} = (1;0;1)$, тоді

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \text{ або } 2x+7y-2z-[illegible]=0.$$

2.1.3. *Записати рівняння площини, що проходить через точку* $A_1(-1;2;1)$ *і через вісь* oz.

Розв'язання. Так як площина проходить через вісь oz, то в її загальному рівнянні відсутня змінна z та вільний член, тобто рівняння має вигляд $Ax+By=0$. З того, що площина проходить через точку A, отримаємо $A(-1)+B\cdot 2+0\cdot 1=0$ (координати точки A задовольняють рівняння площини). Звідси $A=2B$. Тоді рівняння шуканої площини можна записати $2Bx+By=0$ або $2x+y=0$.

2.1.4. *Записати рівняння площини, яка проходить через три точки* $A_1([illegible];0;1)$, $A_2(-[illegible];1;0)$, $A_3([illegible];2;-[illegible])$.

Розв'язання. Скористаємося рівнянням площини через три точки (2.5).

Тоді $\begin{vmatrix} x- & y & z- \\ - \; - & 1- & 0- \\ 1- & 2- & - \; - \end{vmatrix} = 0$, звідки $x + y + z - \; = 0$.

2.1.5. *Записати рівняння площини, яка проходить через точку* $M_0(-1;2;3)$, *паралельно площині* $x + 4y + 2z - \; = 0$.

Розв'язання. Рівняння шуканої площини запишемо у вигляді

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Тоді $1 \cdot (x + 1) + 4(y - 2) + 2(z - 3) - \; = 0$ або $x + 4y + 2z - 13 = 0$.

2.1.6. *Тетраедр ABCD заданий координатами своїх вершин A(-1;2;5), B(0;-4;5), C(-3;2;1), D(1;2;4). Написати рівняння площин граней тетраедра.*

Розв'язання. Очевидно найзручніше скористатися рівнянням (2.5) площини через 3 точки. Запишемо, для прикладу, рівняння площини грані *ABC*, взявши в ролі точки A_1 – точку *A*, точки A_2 – точку *B*, точки A_3 – точку *C*. (рис. 2.1):

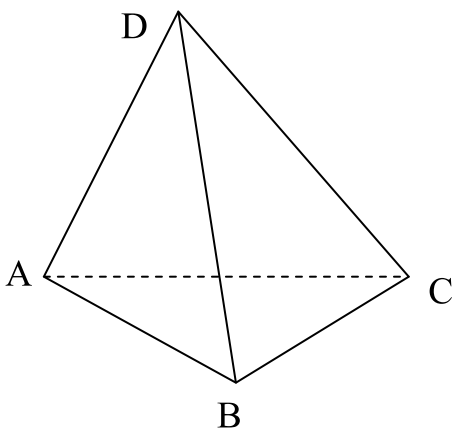


Рис.2.1

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-5 \\ 0+1 & -4-2 & 5-5 \\ -3+1 & 2-2 & 1-5 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідки: $\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-5 \\ 1 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0$ або

$$(x+1)\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + (z-5)\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Виконаємо перетворення і отримаємо загальне рівняння площини грані *ABC:* $6x+y-3z+19=0$.

Аналогічно записуємо рівняння площин інших граней тетраедра.

2.1.7. *Записати систему лінійних нерівностей, які визначають той двогранний кут, утворений площинами* π_1 : $2x-y+z-1=0$ *і* π_2 : $x+3y+z+2=0$, *якому належить точка* $M_0(1;-5;2)$.

Розв'язання. Дві площини, перетинаючись, утворюють чотири двогранні кути, які можна задати такими чотирма системами нерівностей:

$$\Omega \ \begin{cases} x-y+z- \ > \\ x+ \ y+z+ \ > \end{cases}; \qquad \Omega \ \begin{cases} x-y+z- \ > \\ x+ \ y+z+ \ < \end{cases};$$

$$\Omega \ \begin{cases} x-y+z- \ < \\ x+ \ y+z+ \ > \end{cases}; \qquad \Omega \ \begin{cases} x-y+z- \ < \\ x+ \ y+z+ \ < \end{cases}.$$

Обчислимо $\delta_{M_0}^{\pi}$ =2+5+2-1>0 і $\delta_{M_0}^{\pi_2}$ =1-15+2+2<0, отже, $M_0 \in$.

Тобто, $M_0 \in \begin{cases} 2x-y+z-1>0 \\ x+3y+z+2<0 \end{cases}$.

Отже, двогранний кут, утворений даними площинами, якому належить точка $M_0(1,-5,2)$, визначається системою нерівностей $\begin{cases} 2x-y+z-1>0 \\ x+3y+z+2<0 \end{cases}$.

2.1.8. *Записати параметричні рівняння площини* $3x+ \quad - \ + \ = \ .$

Розв'язання. *I спосіб.* Довільні дві із трьох змінних x, y, z можна прийняти за незалежні параметри. Поклавши, наприклад, $x =$, $y =$ з рівняння площини знаходимо, що $z = \quad + \quad +$.Шукані параметричні рівняння можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \\ \\ \quad + \end{cases}$$

II спосіб. Знайдемо яку-небудь точку на площині, наприклад точку $M_0(- \quad -$. Знайдемо пару неколінеарних векторів, паралельних даній площині. Для цього запишемо умову паралельності вектора і площини

$$3p_1 + \quad - \quad =$$

Такими векторами є, наприклад, вектори $\vec{l} = \quad - \quad$, $\vec{m} =$.

Знаючи точку M_0 і два напрямних вектори $\vec{l}$ і $\vec{m}$, записуємо параметричні рівняння заданої площини:

$$\begin{cases} \quad + \\ \\ \end{cases}$$

2.1.9. *Написати рівняння площини, яка проходить через початок координат і через лінію перетину двох площин, заданих рівняннями* $x + \quad - \quad =$ *і* $x - \quad + \quad = \quad .$

Розв'язання. Шукана площина належить пучку площин, які проходять через лінію перетину даних площин. Рівняння цього пучка площин має вигляд:

$$\alpha \quad + \quad - \quad + \qquad - \quad + \quad =$$

причому коефіцієнти α і β визначені з точністю до пропорційності. Оскільки початок координат має належати шуканій площині, то $- \quad + \quad = \quad .$

Покладемо, наприклад, $\alpha = \qquad = \quad .$

Тоді рівняння $6x + \quad - \qquad =$ є рівняння шуканої площини.

2.1.10. *Записати рівняння площини, яка проходить через точку* $A(1; -$ *і через пряму, задану канонічними рівняннями* $\frac{x}{4} = \qquad = \quad .$

Розв'язання. *І спосіб.* Одна із точок шуканої площини – точка $A(1; -$. Друга точка – точка даної прямої – це точка $B(0; 5; 0)$. Вектори $\overline{AB} = - \qquad -$ і $\vec{l} =$ паралельні шуканій площині. Залишається скористатись канонічним рівнянням (2.1) площини, заданої точкою і двома напрямними векторами:

$$\begin{vmatrix} x - & + & - \\ - & & - \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

Розкривши отриманий визначник за елементами першого рядка, отримаємо:

$$25x - \qquad - \qquad + \qquad =$$

ІІ спосіб. Задамо пряму системою двох рівнянь:

$$\begin{cases} \quad = \\ - \qquad = \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} - \quad = \\ - \quad - \quad = \end{cases}$$

Складемо рівняння пучка площин, які проходять через цю пряму:

$$\alpha \quad - \quad + \qquad - \quad - \quad = \quad \text{або} \ \alpha \ + \qquad - \qquad + \qquad - \quad =$$

З цього пучка потрібно вибрати площину, якій належить дана точка A. Має виконуватись рівність

$$\alpha - \quad - \quad + \quad - \quad =$$

звідси $11\alpha + \quad =$

Підставивши ці значення у рівняння пучка, отримаємо рівняння шуканої площини $25x - \quad - \quad + \quad =$

III спосіб. Запишемо як рівняння площини, яка проходить через точки $A(1; -$ $,$ $B(0; 5; 0)$. і яку-небудь точку даної прямої, наприклад, точку $C(4; 1; 1)$. Скористаємось рівнянням (2.5) площини через три точки, обчислимо визначник, розклавши за елементами першого рядка і отримаємо рівняння шуканої площини $25x - \quad - \quad + \quad =$

2.1.11 *Записати рівняння площини, яка проходить через пряму*

$\begin{cases} - \quad + \quad = \\ \quad - \quad - \quad - \quad = \end{cases}$ *паралельно до прямої* $\begin{cases} - \quad - \quad - \quad = \\ + \quad - \quad + \quad = \end{cases}$

Розв'язання. Друга з даних прямих має напрямний вектор

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \\ \quad - \quad - \quad \end{pmatrix} =$$

Шукана площина належить пучку площин $x - \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \quad =$ і має рівняння $(1 + \quad + - - \quad - \quad + - \quad =$

Оскільки нормальний вектор цієї площини перпендикулярний вектору $\vec{p}$, то $(1 + \quad \cdot + - - \quad \cdot + - \quad \cdot =$ звідси $3 + \quad - - \quad - \quad = \quad = -$

Отже, шукане рівняння має вигляд: $- \quad + \quad + \quad + \quad =$ або $3x - \quad - \quad - \quad =$

2.1.12. *Довести, що площина, яка визначається рівнянням* $11x - \quad + \quad - \quad =$ *, проходить через лінію перетину площин, заданих рівняннями* $x - \quad + \quad =$ *і* $5x + \quad - \quad =$.

Розв'язання. *I спосіб.* Знайдемо ранг r матриці коефіцієнтів при

невідомих у рівняннях трьох даних площин: $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ Цей ранг рівний 2.

Так само знайдемо, що ранг r' розширеної матриці $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

рівний 2.

У випадку, коли ранги основної і розширеної матриць рівні 2, всі три площини перетинаються по одній спільній прямій, тобто належать одному пучку.

II спосіб. Площина $Ax + \quad + \quad + \quad = \quad$ належить пучку, який визначається площинами $A_1x + \quad + \quad + \quad = \quad$ і $A_2x + \quad + \quad + \quad = \quad$,

тоді і тільки тоді, коли многочлен $Ax + \quad + \quad +$ можна представити у вигляді:

$$\alpha \quad + \quad + \quad + \quad + \qquad + \quad + \quad + \quad =$$

В нашому випадку ця умова приводить до рівності:

$\alpha \quad - \quad + \quad + \qquad + \; - \; = \quad - \quad + \quad -$ або

$(\alpha + \qquad - \qquad + \qquad + \qquad - \; = \quad - \quad + \quad -$

Прирівнявши ліву і праву частини цієї рівності, отримаємо систему

рівнянь: $\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

Ця система сумісна і має єдиний розв'язок: $\alpha = \qquad = \quad .$

Отже, площина $11x - \quad + \quad - \quad =$ проходить через лінію перетину двох даних площин.

2.1.13 *Записати рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі*

$$\frac{x-}{1} = \frac{y+}{-} = \frac{z-}{3},$$

$$\frac{x}{1}=\frac{y-}{-}=\frac{z+}{3}.$$

Розв'язання. Шукана площини $Ax+By+C+D=$ паралельна обом даним прямим. Умова належності площині точки $M(;-\ ;2)$ прямої має вигляд:

$A(-\ )+B(y+\ )+C(-\ )=\ .$ (4)

Запишемо умову належності цій площині точки $(;1;-\ )$ другої прямої:

$$-A+\ B-\ C=\ . \tag{5}$$

Умова паралельності площини прямій така:

$$A-\ B+\ C=\ . \tag{6}$$

Одержали систему трьох однорідних лінійних рівнянь (4), (5), (6) з трьома невідомими A, B, C:

$$\begin{cases} \quad + \quad + \quad + \quad - \quad = \\ \quad = \\ \quad = \end{cases}$$

Ця система має розв'язки, відмінні від нульового, якщо

$$\begin{vmatrix} x- & y+ & z- \\ 1 & - & 4 \\ 1 & - & 3 \end{vmatrix}=\ .$$

Звідси : $-\ (-\ )+\ (y+\ )-\ (-\ )+\ (-\ )-\ (y+\ )+\ (-\ )=\ ,$

$2x+y-\ =\ .$

Це і є рівняння шуканої площини.

2.1.14. *Навести приклад таких трьох площин, які перетинаються попарно по трьох паралельних прямих.*

Розв'язання. Рівняння двох площин можна написати довільно, уникаючи лише випадку їх паралельності, тобто не вибираючи їх коефіцієнти відповідно пропорційними. Складемо наприклад такі два рівняння:

$$x+\ +\ +\ =\ \text{і}\ x+\ +\ -\ =\ .$$

Рівняння пучка, який визначається двома даними площинами має вигляд:

$$\alpha\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ -\ =$$

Кожна площина, яка паралельна деякій площині пучка і відмінна від неї, перетинає дані площини по прямих, які паралельні осі пучка (рис.2.2), так що кожна така площина буде разом з даними площинами задовольняти умовам задачі .

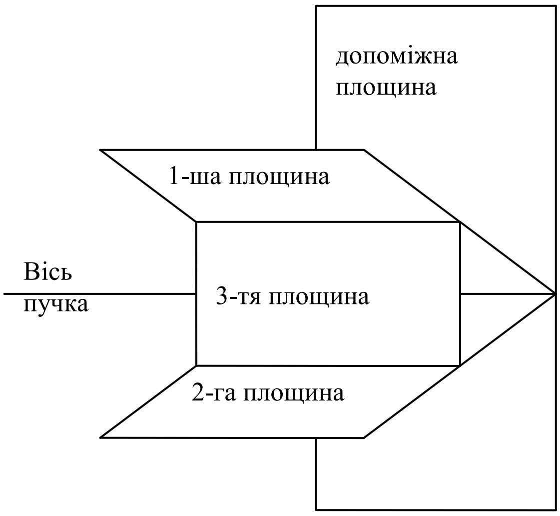


Рис.2.2

Щоб отримати яку-небудь площину пучка, можна покласти, наприклад, $\alpha = \quad = \quad$. Тоді із рівнянь пучка отримаємо:

$$2x + \quad + \quad =$$

Щоб отримати рівняння площини, паралельній цій і відмінній від неї, треба зберегти коефіцієнти цього рівняння і змінити вільний член. Таким чином в ролі шуканої площини можна взяти, наприклад, площину:

$$2x + \quad + \quad + \; =$$

Рекомендована література

[7] §10-11; [16] Ч. 2. Гл. 4. §1-6, ст. 268-278, Гл. 5. §8, ст. 310-312;
[19] Розділ 5. §1, ст. 169-172.

Завдання для самостійного розв'язання

1.1. Знайти координати деяких точок, що лежать в площині 3x – 2y + z -12 = 0.

1.2. Знайти координати точки, що має абсцису рівну одиниці і лежить в площинах xoy і $2x - y + z$ - 6 = 0.

1.3. Записати рівняння площини:

а) що проходить через точку A(0;2;3) і паралельної векторам p_1(1;0;1) і p_2(2;1;3);

б) що проходить через точку A(0;0;1) і паралельної векторам p_1(2;1;5) і p_2(1;0;1).

1.4. Записати рівняння площини:

а) що проходить через точки M_1(1;2;3), M_2(2;-1;3) і паралельна вектору p(1;2;2);

б) що проходить через точки M_1(-1, 0, 0), M_2(0, 0, 1) і паралельна вектору p(2;1;2);

в) що проходить через вісь ox і точку $A(1;1;1)$.

1.5. Записати рівняння площини:

а) що проходить через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(2;1;3)$ і $M_3(0;-1;2)$;

б) що проходить через точки $M_1(0;0;0)$, $M_2(1;2;3)$ і $M_3(0;3;6)$.

1.6. Перевірити, чи можна провести площину через дані четвірки точок:

а) (3; 1; 0), (0; 1; 2), (-1; 0;-5), (4; 1; 5);

б) (2; 1; 0), (1;-1; 2), (0; 4;-2), (3; 1; 2);

в) (0; 0;-1), (1; 3; 4), (5; 0;-3), (4; 4; 1);

г) (0; 0; 2), (3; 0; 5), (1; 14 0), (4; 1; 2).

1.7. Дано вершини тетраедра: $A(4; 0; 2)$, $B(0; 5; 1)$, $C(4;-1; 3)$ і $D(3;-1; 5)$.

а) Написати рівняння площини, що проходить через ребро AB і паралельна ребру CD.

б) Написати рівняння площини, що проходить через вершину A і паралельна грані BCD.

1.8. Написати рівняння площин:

а) що проходять через точку $M_0(1; 2;-1)$ і паралельні кожній із координатних осей;

б) що проходять через дві точки $M_1(1; 2;-4)$ і $M_2(2;0;-3)$ і паралельні кожній із координатних осей;

в) що проходять через точку $M(2; 1;-5)$ і через кожну із координатних осей.

1.9. Записати рівняння площин, кожна з яких проходить через одну із осей координат і паралельна вектору $\vec{p}(1;-2; 3)$.

1.10. Площина проходить через точку $M(1;-2;5)$ і відтинає на осі абсцис напрямлений відрізок довжиною $a = -$, а на осі аплікат відрізок $c = 1$.
Записати для цієї площини рівняння «у відрізках» на осях

1.11. Написати рівняння площини:

а) що паралельна осі oz і відтинає на осі ox напрямлений відрізок довжиною $a = 3$, а на осі oy напрямлений відрізок довжиною $b = -4$;

б) що відтинає на осях oy і oz рівні відрізки довжиною $a = b = \vdash$.

1.12. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(3;\,2;\,4)$ і відтинає на осях відрізки однакової довжини.

1.13. В загальній афінній системі координат дана площина: $2x - y + 3z + 5 = 0$.

а) записати координати декількох векторів, паралельних даній площині;

б) записати координати декількох векторів, паралельних одночасно даній площині і одній з координатних площин.

1.14. Написати параметричні рівняння площини трикутника ABC, якщо в репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ дано координати його вершин: $A(2;-5;1)$, $B(3;4;-2)$, $C(0;0;-1)$.

1.15. В афінній системі координат площина π задана рівнянням $5x-2y-3z+6=0$. Знайти координати будь-якого вектора $\vec{a}$, паралельного площині π.

1.16. Написати параметричні рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;-1;3)$, паралельно площині $2x - y + \text{[illegible]}z - \text{[illegible]} = 0$.

1.17.В афінній системі задано вершини $A(4;0;2)$, $B(0;5;1)$, $C(4;-1;3)$, $A_1(3;-1;5)$ паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Написати рівняння площин, які містять його грані.

1.18. Задано рівняння площин $\pi_{\text{[illegible]}}:\ x - \text{[illegible]}y - \text{[illegible]}z + \text{[illegible]} = 0$, $\pi_{\text{[illegible]}}:\ 2x - \text{[illegible]}y - \text{[illegible]}z + \text{[illegible]} = 0$ в афінній системі координат. Записати нерівностями кожну з областей Φ_i, на які площинами $\pi_{\text{[illegible]}}$ $\pi_{\text{[illegible]}}$ діляться всі точки простору (i=1,2,3).

1.19. Записати рівняння площини, яка проходить через точку A паралельно векторам $\vec{b}_1$ і $\vec{b}_2$:

1) $A(1;\,3;\,5)$, $\vec{b}_1=(1;\,-1;\,5)$, $\vec{b}_2=(-4;\,3;\,0)$;

2) $A(3;\,-1;\,-2)$, $\vec{b}_1=(0;\,5;\,1)$, $\vec{b}_2=(2;\,-3;\,0)$.

1.20. Записати рівняння площини, яка проходить через точки K_1, K_2 паралельно вектору $\vec{c}$:

1) $K_1(-3;\,7;\,1)$, $K_2(-2;\,8;\,1)$, $\vec{c}=(1;\,0;\,5)$;

2) $K_1(7;\,-3;\,-1)$, $K_2(7;\,1;\,0)$, $\vec{c}=(0;\,-5;\,1)$.

1.21. Записати рівняння площини, яка проходить через три точки A, B, C:

1) $A(5;\,-6;\,1)$, $B(1;\,8;\,0)$, $C(0;\,2;\,0)$;

2) A(0; -1; 0), B(2; 0; 1), C(-1; 1; 8).

1.22. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ паралельно до заданої площини, якщо:

а) M_0(-4;3;-7), $6x - 5y + 4z - 5 = 0$;

б) M_0(4;1;0), $5x - y - 6z + 2 = 0$.

1.23. Записати рівняння площини, яка проходить через точку M_0(-2;4;1) паралельно до площини, проведеної через точки M_1(0;-3;2), M_2(4;-6;1) і M_3(-7;5;-2).

1.24. Написати рівняння площини, яка проходить через вісь oz і точку (-3;1;-2;).

1.25. Знайти відрізки,які відтинають на координатних осях наступні площини:

d) $x - 4z + 6 = 0$;

e) $5x - 2y + z = 0$;

f) $x - 7 = 0$.

1.26. Дано координати вершин тетраедра: A(0;0;2), B(3;0;5), C(1;1;0), D(4;1;2). Записати рівняння усіх його граней.

1.27. Перевірити чи можна провести площину через наступні чотири точки: A(1;-1;1), B(0;2;4), C(1;3;3), D(4;0;-3).

1.28. Записати рівняння прямої в канонічному вигляді $2x - 3y - 2z - 1 = 0$, $x - 2y + z + 3 = 0$.

§2. Площина в прямокутній декартовій системі координат

Теоретичні відомості

Всі рівняння площини, розглянуті в афінній системі координат, можна використовувати при розв'язанні задач в прямокутній декартовій системі координат. Крім того, для прямокутної є ще деякі рівняння площини.

Якщо $\vec{n}(A;B;C) \perp \pi$ і $M_0(x_0;y_0;z_0) \in \pi$, то рівняння площини, заданої *нормальним вектором і точкою* має вигляд:

$$\pi:\ \alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0 \qquad (2.12)$$

Теорема 2.2. Якщо $\pi:\ Ax+By+Cz+D=0$, то коефіцієнти при змінних є координатами вектора нормалі, тобто

$$\vec{n}(A;B;C)\perp\pi. \qquad (2.13)$$

Нормальне рівняння площини:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \qquad (2.14)$$

де p - відстань від початку координат до площини, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ - кути, які утворює вектор нормалі площини з додатними напрямами координатних осей.

Нормоване рівняння площини (2.3):

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0, \qquad (2.15)$$

де знак перед радикалом береться протилежним знаку вільного члена.

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***до площини*** $\pi:\ Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою $\rho(M_0,\ \pi)=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (2.16)

Кут між двома площинами – це кут між векторами їх нормалей:

$$\cos(\widehat{\pi_1,\pi_2})=\cos(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (2.17)$$

Необхідна і достатня умова перпендикулярності двох площин

$$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \qquad (2.18)$$

Відстань між паралельними площинами

$$\pi_1:\ Ax+By+Cz+D_1=0 \text{ та } \pi_2:\ Ax+By+Cz+D_2=0$$

обчислюється за формулою

$$\rho(\pi_1,\pi_2)=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (2.19)$$

Розв'язання задач

2.2.1. *Площина проходить через точки* $M(0;0;1)$, $N(3;0;0)$ *і утворює кут* 60^0 *з площиною* xoy. *Записати рівняння площини.*

Розв’язання. *I спосіб.* Рівняння шуканої площини запишемо у вигляді $Ax+By+Cz+D=0$. Використаємо умову того, що площина проходить через точку M:

$$Ax+By+C(z-1)=0 \tag{1}$$

і через точку N:

$$3A-C=0. \tag{2}$$

Рівняння координатної площини $xoy: z=0$. Щоб знайти кут між шуканою площиною і xoy, використаємо формулу (2.17).

$$\cos 60^0=\frac{1}{2}=\frac{|A\cdot 0+B\cdot 0+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Звідси $A^2+B^2-3C^2=0$. (3)

З рівності (2) випливає відношення

$$A:C=1:3. \tag{4}$$

Визначимо відношення $B:C$, поділивши всі члени рівності (3) на C^2 $(C\neq 0)$:

$$\frac{A^2}{C^2}+\frac{B^2}{C^2}-3=0,\ \frac{1}{9}+\frac{B^2}{C^2}-3=0.$$

Звідси: $B:C=\pm\dfrac{\sqrt{26}}{3}$. (5)

Поділимо всі члени рівності (1) на C і потім підставимо в неї знайдені значення відношень (4) і (5):

$$\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+(z-1)=0,\ \frac{1}{3}x\pm\frac{\sqrt{26}}{3}y+z-1=0.$$

Отже, рівняння шуканої площини $x\pm\sqrt{26}y+3z-3=0$.

*II спосіб***.** Рівняння шуканої площини запишемо у нормальному вигляді (2.14):

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \tag{1}$$

Умова незалежності точки M площині (1): $\cos\gamma-p=0$; $\cos\gamma=p$.

За умовою задачі

$$\cos\gamma=\frac{1}{2},\ \text{отже}\ p=\frac{1}{2} \tag{2}$$

Умова незалежності точки N площині (1): $3\cos\alpha + \frac{1}{2} = 0$.

Звідси

$$\cos\alpha = -\frac{1}{6} \qquad (3)$$

Враховуючи (2) і (3), з формули $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ знайдемо:

$$\cos\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{36}} = \pm\frac{\sqrt{26}}{6} \qquad (4)$$

Підставивши значення (2), (3), (4) у рівняння (1), матимемо $x \pm \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$ – рівняння шуканої площини.

2.2.2. *У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дані рівняння площин* (ABC)*:* $3x + 2y - 6z + 8 = 0$*,* *(*ABB_1*)***:** $2x + 6y - 3z - 42 = 0$ *і центр грані $A_1B_1C_1D_1$ – точка* $M_0(2,3,1)$. *Написати рівняння площин інших граней куба.*

Розв'язання.

1. Площина π_1=($A_1B_1C_1$)||(ABC) (рис.2.3) тому, за формулою (2.12), її рівняння

$\pi_1 : 3(x-2) + 2(y-3) - 6(z-1) = 0 \Leftrightarrow \pi_1 :$ $3x + 2y - 6z - 6 = 0$.

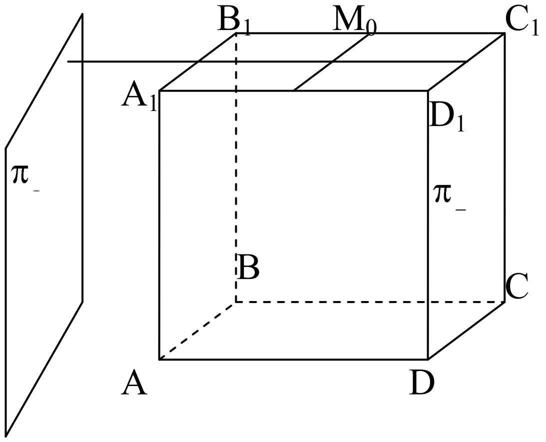


Рис.2.3

Щоб записати рівняння інших площин, слід скористатися умовою паралельності чи перпендикулярності двох площин та відстанню від точки до площини або відстанню між паралельними площинами:

$\rho(\pi_1; (ABC))=$

$$= \frac{|6+8|}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{14}{7} = 2 = \rho((AA_1B_1),(DD_1C_1)).$$

$$\rho(M_0,(AA_1D_1)) = \rho(M_0,(BB_1C_1)) = 1.$$

2. π_2=(DD_1C_1) || (AA_1B_1)$\Rightarrow$ π_2 : $2x+6y-3z+D=0$

$$2 = \frac{|D+42|}{\sqrt{9+4+36}} \Leftrightarrow 14 = |D+42|$$

Розкривши модуль, отримаємо $D + \ 2 = \ 4 \Rightarrow \ = \ ; \quad D + \ 2 = - 4 \Rightarrow \ = - 6$

$$\pi\_ : 2x + \ y - \ z + \ = \ \text{ і } \ \pi\_ : 2x + \ y - \ z - \ 6 = \ .$$

Вияснимо, яке з цих рівнянь задовольняє умову задачі. Необхідно, щоб площині належала грань куба, а це буде тоді, коли точка M_0 лежатиме між (AA_1B_1) і $\pi\_$, що буде виконуватися в тому випадку, якщо $\rho \ \ M_0, \ \pi\_$)=1.

Тому обчислимо: $\rho \ \ M_0, \ \pi \ ) = \dfrac{|4 + 18 - 3 + 2|}{7} = 3 \Rightarrow \pi\_$ не задовольняє умову задачі.

$$\rho \ \ M_0, \ \pi\_ \ ) = \frac{|4 + \ 8 - \ \ - \ 6|}{7} = \ ; \ \ \pi\_ = \pi\_ - \text{задовольняє умову.}$$

Отже, площина $\pi\_$ має рівняння $: 2x + \ y - \ z - \ 6 = \ .$

3. $\pi\_ = (AA_1D)$: $Ax + By + Cz + D = \ $

$$\begin{cases} \pi\_ \perp \pi\_, \\ \pi\_ \perp \pi\_, \\ \rho \ M_0, \pi\_)=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A + 6B - 3C = 0, \\ 3A + 2B - 6C = 0, \\ \dfrac{|2A + 3B - 3C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 1. \end{cases}$$

Розв’яжемо систему, вважаючи C відомим. Із перших двох рівнянь отримаємо: $A = \dfrac{5}{7}C; \quad B = - \dfrac{3}{14}C.$ Підставимо ці значення в трете рівняння системи. Отримаємо: $\dfrac{|9C + \ 4D|}{\sqrt{1105C^2}} = \ \Rightarrow \ C + \ 4D| = \ \sqrt{1105}.$

Розкриємо модуль: $\begin{matrix} 9C + \ 4D = \ \sqrt{1105} \\ 9C + \ 4D = - \ \sqrt{1105} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} D = \ \sqrt{1105} - \ C \\ D = - \ \sqrt{1105} - \ C \end{matrix}$

$$\pi : \frac{15}{7}Cx - \frac{3}{14}Cy + Cz + C\sqrt{1105} - \ C = \ \Leftrightarrow \ x - \ y + \ 4z + \ \sqrt{1105} - \ = \ $$

$$\pi : \frac{15}{7}Cx - \frac{3}{14}Cy + Cz - C\sqrt{1105} - \ C = \ \Leftrightarrow \ x - \ y + \ 4z - \ \sqrt{1105} - \ = \ $$

$$\rho \ \ \pi \ , \ \pi \ ) = \frac{|\sqrt{1105} - \ + \ \sqrt{1105} + \ |}{\sqrt{1105}} = \ ;$$

І так як $\rho(M_0,\pi_1)=\rho(M_0,\pi_2)$ = 1, то одна з цих площин – (AA_1D), друга – (BB_1C_1).

Отже, рівняння площин граней куба такі: $A_1B_1C_1$: 3*x*+2*y*-6*z*-6=0;

DCC_1:2*x*+6*y*-3*z*-26=0; AA_1D_1: $30x-3y+14z+\sqrt{1105}-$ [illegible] $=0$;

BB_1C_1: $30x-3y+14z-\sqrt{1105}-$ [illegible] $=0$.

2.2.3. *Написати рівняння площини, перпендикулярної до площини* $3x-2y+z-1=0$ *і яка перетинає цю площину по прямій, що лежить в площині* xoz.

Розв'язання. *І спосіб***.** Так як шукана площина належить пучку площин, що визначаються даними площинами π_1: $3x-2y+z-1=0$ та π_2: *y*=0, то рівняння шуканої площини запишемо у виглядіп $\pi: 3x-2y+z-1+\lambda y=0$.

Для знаходження λ скористуємося умовою (2.12), отримаємо

$9+1-2\lambda+4=0\Rightarrow\lambda=7$.

Підставивши це значення у рівняння шуканої площини, отримаємо 3*x*+5*y*+$z-1$=0.

Отже шукана площина має рівняння π: 3*x*+5*y*+$z-1$=0.

ІІ спосіб. Цю задачу можна було б розв'язати, використавши умову (2.18). Дійсно, так як π проходить через пряму: $\begin{cases}3x-2y+z-1=0\\ y=0\end{cases}$, то вона їй паралельна, і кожна точка цієї прямої належить π. Тому, знайдемо напрямний вектор прямої $\vec{p}\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right)=(-1;0;3)$ і візьмемо точку на цій прямій, наприклад, M(0,0,1). Запишемо три задані умови:

$$\begin{cases}\pi \parallel \vec{p}\\ \pi\perp\pi_1\\ M\in\pi\end{cases}\quad \begin{cases}-A+3C=0\\ 3A-2B+C=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3C\\ B=5C\end{cases}$$

$$A(x-0)+B(y-0)+C(z-1)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz-C=0.$$

Звідси: $3Cx+5Cy+Cz-C=0\Leftrightarrow 3x+5y+z-1=0$

2.2.4. Записати рівняння площини, рівновіддаленої від площин $6x-2y+3z-14=0$, $6x-2y+3z+21=0$

Розв'язання. *I спосіб.* Дослідимо, як розміщені дані площини. Умовою паралельності площин є пропорційність коефіцієнтів:

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1},$$

що має місце у даному випадку. Отже, задані площини паралельні. Якщо ці площини розміщені по один бік від початку координат, то відстань між ними $d=|p_1-p_2|$, а якщо по різні боки, то $d=p_1+p_2$ де p — відстань площини від початку координат. На те, як розміщені площини відносно початку координат, вказує знак нормуючого множника:

$$N_1=\frac{1}{\sqrt{36+4+9}}=\frac{1}{7},\ \ N_2=-\frac{1}{7},$$

N_1 та N_2 мають різні знаки, то площини розміщені по різні боки від початку координат. Значить, вектори їхніх нормалей колінеарні, але різні за напрямом.

Відстань між даними площинами $d=p_1+p_2$, $p_1=2, p_2=3,$ отже, $d=5$. Половина відстані між даними площинами дорівнює $\frac{5}{2}$. Як бачимо, шукана площина розмішена по один бік від початку координат разом з площиною, яка має довшу нормаль. Величина нормалі шуканої площини $p=p_2-\frac{d}{2}$, тобто $p=3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$. Напрям вектора нормалі такий самий, як і площини, в якої $p_2=3$,, тобто

$$\vec{n}=\left(-\frac{6}{7};\frac{2}{7};-\frac{3}{7}\right)$$

що визначається з нормального рівняння відповідної площини:

$$-\frac{6}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{3}{7}z-3=0$$

Отже, рівняння шуканої площини в нормальному вигляді можна записати так:

$$-\frac{6}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{3}{7}z-\frac{1}{2}=0$$

або в загальному вигляді:

$$12x- \ y+ \ z+ \ = \ ;.$$

Цей спосіб розв'язування, як бачимо, потребує певного дослідження, і, отже, змінюватиметься кожного разу залежно від умов задачі.

II спосіб. Встановивши, що задані площини паралельні, виберемо на шуканій площині біжучу точку $M(x;y;z)$ і пов'яжемо її координати з відомими параметрами. Для цього знайдемо відстань точки М до кожної з даних площин, записавши з цією метою їх нормальні рівняння:

$$\frac{6x- \ y+ \ z-4}{7}= \quad \text{та} \quad \frac{6x- \ y+ \ z+ \ 1}{-}=$$

Звідси $d_1=\left|\frac{6X-2Y+3Z-4}{7}\right|; d_2=\left|\frac{6X-2Y+3Z+21}{-}\right|$

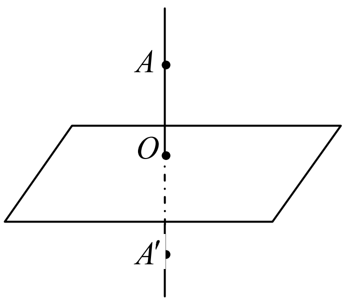
Оскільки за умовою задачі $d_1=d_2$, тоді маємо: $|6X- \ Y+ \ Z-4|=|6X- \ Y+ \ Z+ \ 1|$, або

а) 35 = 0 — рівняння нескінченно віддаленої площини;

б) $12X- \ Y+ \ Z+ \ = \ $ - рівняння шуканої площини, яка паралельна даним площинам і рівно віддалена від них (вона міститься між даними площинами).

Другий спосіб розв'язування задачі більш загальний і особливого дослідження не потребує.

2.2.5. *Знайти координати точки A', симетричної точці $A(\ ;-\ 0)$ відносно площини π $x- \ y+ \ z+ \ = \ $.*



Розв'язання. Запишемо параметричне рівняння прямої AA' (рис.2.4)., напрямний вектор якої $\vec{p}(\ ;-\ ;2)$

Рис.2.4

і яка проходить через точку A: $x = 2 + \ \ , \ y = \ - \ - \ t, \ z = \ t$ (див. §3, рівняння 2.20).

Знайдемо точку перетину цієї прямої з даною площиною

$(+t) - (- \ - \ t) + \ \cdot 2t + \ = \ .$

Звідси $t = -\frac{1}{2}$, а $x = \ .5, \ y = \ .5, \ z = \ -$, тобто $O(.5; 1.5; -\ )$.

Координати точки A' знайдемо за координатами кінця та середини відрізка AA': $1.5 = \frac{2 + \ }{2}$; $1.5 = \frac{- \ + \ }{2}$; $- \ = \frac{0 + \ }{2}$. Звідси, $x = \ , \ y = \ , \ z = \ -$.

Отже, $A'(;4;-\ )$.

2.2.6. *Записати рівняння площини, що проходить через точку* $N(- \ ;3;0)$ *перпендикулярно до вектора* $\vec{n}(;- \ ;1)$, *і знайти кут між нею та площиною* $x - \ y + \ z - \ = \ $.

Розв'язання. Скористаємося рівнянням площини (2.12), що задана точкою і вектором нормалі. Тоді рівняння набере вигляду:

$$2(x + \ ) - (y - \ ) + (z - \ ) = \ \text{ або } 2x - y + z + \ = \ .$$

Кут між площинами знайдемо як кут між їх векторами нормалей. Вектор нормалі (2.13) даної площини $\vec{n}_1(;- \ ;3)$. За формулою (2.17)

$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot 1 - \ \cdot (- \ ) + \ \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (- \ )^2 + \ ^2}\sqrt{1^2 + (- \ )^2 + \ ^2}} = \frac{7}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

2.2.7. *Серед площин знайти пару паралельних і обчислити відстань між ними:*

$$\pi \ : 3x - \ y + \ z - \ = \ ,$$

$$\pi \ : 6x + \ y - \ z + \ = \ ,$$

$$\pi \ : 6x - \ y + \ z - \ 0 = \ .$$

Розв'язання. Очевидно $\pi \parallel \pi$ (виконується умова (2.7) - коефіцієнти при змінних пропорційні). Відстань між ними знайдемо за формулою (2.19):

$$\rho(\pi \ \pi) = \frac{|D_1 - D_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Запишемо рівняння площини так, щоб коефіцієнти при змінних були однакові (або π домножити на 2 або π – розділити на 2). Рівняння π можна записати: $3x - \;y + \;z - \; = \;$.

Тоді $\rho\ \tau\ \pi \;= \frac{|- \;+ \;|}{\sqrt{3^2 + \; - \;)^2 + \;^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$.

2.2.8. *Знайти рівняння площин, які проходять через вісь* ox *на відстані 1 від точки* $P(1;\,2;\,3)$.

Розв'язання. Оскільки вісь ox можна розглядати як перетин площин xoy і xoz, тобто площин, які визначаються відповідно рівняннями $z =$ і $y =$, то рівняння пучка площин, які проходять через вісь ox можна записати рівнянням

$\alpha \; + \; = \;$.

Оскільки площина xoy не задовольняє умовам задачі, то треба вважати, що $\alpha \neq$, і тому можна користуватися більш простим рівнянням $y + \; = \;$.

За умовою відстань від точки $P(1;\,2;\,3)$ до шуканої площини рівна 1.

Отже, отримуємо, що

$$\frac{|2 + \;|}{\sqrt{1 + \;}} =$$

Це відношення приводить нас до рівняння

$$8\lambda \; + \; + \; =$$

з якого слідує, що

$$\lambda = \frac{\;}{4}.$$

Отже, шукані площини мають рівняння:

$$y - \frac{\;}{4} \; = \; \text{ і } y - \frac{\;}{4} \; = \;.$$

2.2.9. *Знайти площину, яка розміщена між площинами* $x - \;y + z - \; = \;$ *і* $x - \;y + z - \; = \;$ *і ділить відстань між ними у відношенні* 1:3.

Розв'язання. Позначимо відстань від шуканої площини до даних a і $в$ відповідно. Тоді $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ або $b = \ a$. Відстань між даними площинами

$$d = \frac{|- \ + \ |}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$, тобто $a + b = \frac{4}{\sqrt{6}}$. Тоді $\begin{cases} \rho(\ ;\pi\ = \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \rho(\ ;\pi\ ) = \frac{6}{\sqrt{6}} \end{cases}$

$$\rho(\ ;\pi\ = d_x = \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{6},\ \rho\ = d_1 = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Рівняння шуканої площини можемо записати у вигляді $x - \ y + z + D = \ $.

Тоді $\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{|D|}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \ = \ |D|$. Звідки $|D| = \ $. D=3 — не підходить. Значить, D = -3

Отже, рівняння шуканої площини $x - \ y + z - \ = \ $.

2.2.10. *Знайти рівняння площин, які проходять через вісь* Ox *і утворюють з площиною* $x - \ + \ - \ = \ $ *кути по* $45°$.

Розв'язання. Запишемо рівняння пучка площин, які проходять через вісь ox, у вигляді $y + \ = \ $.

Скористаємось формулою (2.17), яка виражає косинус кута між двома площинами:

$$\cos\varphi = \frac{|A\ A_2 + \ + \ |}{\sqrt{A_1^2 + \ + \ } \cdot \sqrt{\ + \ + \ }}.$$

В даному випадку можна покласти: $A_1 = \ = - \ =$ $A_2 = \ = \ = \ $. Оскільки кут φ між площинами повинен бути рівний $45°$, то $\cos\varphi = \frac{\sqrt{\ }}{2}$. Отже, приходимо до рівняння:

$$\frac{|3\lambda - \ |}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{\ + \ }} = \sqrt{\ }$$

Звідси, знаходимо, що $\lambda = \frac{6 \pm \ }{2}$.

Таким чином, задача має два розв'язки:

$$\pi\ : 2y + \ + \ = \ \text{ і } \pi\ : 2y + \ - \ = $$

2.2.11. *Куб $ABCDA'\ '\ '\ '$, довжина діагоналі якого рівна $2a$, розміщений так, що центр його грані $ABCD$ знаходиться в початку прямокутної декартової системи координат, вершина A – на осі ox, B – на осі oy, аплікати вершин $A'\quad'\quad'\quad'$ додатні. Записати формулу симетрії відносно центра куба.*

Розв'язання. Нехай $M(x;\, y;\, z)$ – довільна точка простору, $M'(x';\, y';\, z')$ – її образ при даній симетрії. Задача полягає в тому, щоб виразити змінні x', y', z' через x, y, z.

Центр S симетрії куба має координати $\left(\qquad\qquad\right)$, тому що довжина ребра куба рівна $a\sqrt{2}$. Отже,

$$\frac{x'+}{2} = \quad \frac{'}{2} = \quad \frac{'}{2} = \quad 2$$

так що $x' = - \quad = - \quad = \quad -$

Вершини куба мають наступні координати: $A(a;\, 0;\, 0)$, $B(0;\, a;\, 0)$, $C(- \qquad$, $D(0;\, - \qquad$, $A'(a;\, 0;\, a\sqrt{2})$, $B'(0;\, a;\, a\sqrt{2})$, $C'(- \qquad \overline{2})$, $D'(0;\, - \qquad$. При розглядуваній симетрії вершина A переходить в точку з координатами $(- \qquad \overline{2})$, тобто у вершину C'. Аналогічно перевіряється, що і решта вершин куба відображаються на вершини того ж куба.

2.2.12. *Знайти формули перетворення симетрії відносно площини, яка визначається рівнянням $x + \quad + \quad - \quad = \quad$.*

Розв'язання. Нехай $M(x;\, y;\, z)$ – довільна точка простору, $M'(x';\, y';\, z')$ – її образ при симетрії відносно даної площини. Задача полягає в тому, щоб виразити $x';\, y';\, z'$ через $x;\, y;\, z$.

Симетрія відносно площини визначається двома умовами: 1) вектор $\overrightarrow{MM'}$ перпендикулярний до даної площини; 2) середина MM' лежить в даній площині.

Оскільки $\overrightarrow{MM'} = \quad - \quad - \quad -$, а коефіцієнти рівняння даної площини $A = \quad = \quad =$, то умови перпендикулярності вектора і площини мають наступний вигляд:

$x' - \ = \cdot \quad - \ = \cdot \quad - \ = \cdot$ де t – довільний коефіцієнт пропорційності. Тоді $x' = \ + \quad = \ + \quad = \ +$

Середина відрізка MM' має координати $\frac{x' +}{2}, \frac{+}{2}, \frac{+}{2}$.

Підставляючи їх в рівняння даної площини, отримуємо: $x + \ + \ + \ + \ + \ - \ =$

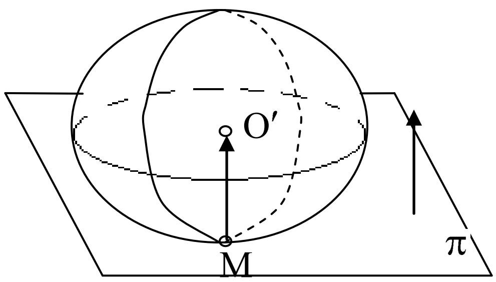
Підставляючи сюди вирази $x'; y'; z'$, отримаємо: $2x + \quad + \quad + \ - \ =$

Звідси слідує, що $t = \frac{-}{3}$.

Значить, $\begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \end{cases}$

2.2.13. *Задачі на взаємне розміщення площини* π*:* $Ax + By + Cz + D = 0$ *і сфери:* $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz - d = 0$.

При розв’язуванні таких задач необхідно в рівнянні сфери виділити повні квадрати, визначити центр і радіус сфери:



$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = d + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$$

$$O'\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) \quad R = \sqrt{d + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}}$$

Рис.2.5

Далі скористатися тим, що у випадку, коли π дотикається до сфери в точці *M*, то $MO' \parallel \vec{n} \perp \pi$ і $\rho(O', \pi) = R$ (рис.2.5).

Якщо площина π перетинає сферу, то $\rho(O', \pi) < R$.

Якщо площина π і сфера не мають спільних точок, то $\rho\ O'\ \ \pi) > R$,

де $\rho\ O'\ \ \pi)$ – відстань від центра сфери до π, яка обчислюється за формулою (2.16).

Рекомендована література

[2] §47. ст. 304-312; [7] §§18-19; [12] Розділ 12. §65. ст. 210-214; [16] Ч. 2. Гл. 4. §§7-10. ст. 281-291, Гл. 5. §6. ст. 307-308; [19] §2. ст. 172-173

Завдання для самостійного розв'язання

2.1. Записати рівняння сфери, з радіусом $r = 6$, яка дотинається до площини $\pi\ x+2y-2z+1=0$ в точці $M_0(3;0;2)$ і розташована по однин бік з точкою $P(0;1;2)$ відносно π. $(R = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

2.2. Написати рівняння сфери, яка лежить в гострому куті, утвореному площинами $2x - \ y - \ z + \ 1 = \ ,\ 5x - \ z = \ ,$ і дотикається до цих площин, якщо її центр лежить на осі абсцис $(R = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

2.3. Записати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;- \ 3)$ $M_2(5,1,2)$, і перпендикулярна до площини $\pi: x - \ y - \ z - \ = \$ $(R = \ O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

2.4. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $M_0\ ;3;1$ і перпендикулярна до площин $\pi: x + \ y - z + \ = \ ,\ \pi: 3x + y - \ z + \ = \$ $(R = \ O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

2.5. Визначити косинус того двогранного кута, який утворюють площини $\pi: 2x - y - \ z + \ = \ ,\ \pi: x - \ y - \ z + \ = \$ і якому належить точка $M_0\ ;- \ ;- \ (R = \ O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

2.6. Дано рівняння паралельних площин $\pi: 4x + \ y + \ z - \ = \ ,$ $\pi: 2x + \ y + z + \ = \$. Написати рівняння площини, яка проходить посередині між заданими площинами.

2.7. Знайти координати центра кулі, з радіусом $r = 5$, вписаної в тригранний кут, утворений площинами $\pi: 3x - \ y + \ 0 = \ ,\ \pi: x - \ y - \ z + \ = \ ,$ $\pi: x + \ y + \ z - \ = \ ,$ якому належить точка $M_0\ ;- \ - \ (R = \ O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

2.8. Дано рівняння площин двох граней куба: $x - 2y - 2z + \ldots = 0$, $2x + 2y - z - \ 3 = 0$ і координати його центра $M_0(\ ;1;- \ )$. Знайти рівняння площин останніх граней куба. $(R = O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).

2.9. В кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано рівняння площин (ABC): $2x - y + 2z + \ 5 = 0$, (ABB_1): $x - 2y - 2z + \ = 0$ і центр $M_0(\ ;- \ 0)$ грані $A_1B_1C_1D_1$ в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Записати рівняння площин всіх останніх граней куба.

2.10. Написати рівняння бісекторної площини двогранного кута, утвореного площинами $\pi_1: x - y + 2z - \ = 0$, $\pi_2: 2x - y + z - \ = 0$, якому належить точка $M_0(\ ;1;1)$ $(R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$.

2.11. Дано вершини тетраедра *A*(-1;-2;0), *B*(5;0;5), *C*(3;2;2), *D*(-1;0;2). Написати рівняння бісекторної площини внутрішнього двогранного кута при ребрі AB і знайти косинус цього кута. $(R = O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).

2.12. Написати рівняння сфери, вписаної в тетраедр, утворений координатними площинами репера $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ і площиною $\pi: x + 2y - 2z + \ = 0$.

2.13. Куб $ABCDA'\ '\ '\ '$, довжина діагоналі якого рівна $2a$, розміщений так, що центр його грані $ABCD$ знаходиться в початку прямокутної декартової системи координат, вершина A – на осі ox, B – на осі oy, аплікати вершин $A'\ \ '\ \ '\ \ '$ додатні. Записати формули наступних перетворень:

а) симетрії відносно центра куба;

б) симетрії відносно прямої, яка з'єднує середини ребер AA' і CC';

в) повороту навколо осі oz на кут $\frac{\pi}{2}$;

г) поворотного відображення з віссю oz площиною $z = \frac{\ }{2}$ і кутом $\frac{\pi}{2}$.

Показати, що ці перетворення відображають куб на себе.

2.14. Записати рівняння площини, яка проходить через точку *M* і її нормальний вектор $\vec{n}$:

1) *M*(1; -1; 2), $\vec{n}$=(5; 4; -2);

2) *M*(0; 2; -3), $\vec{n}$=(-1; 2; 0);

3) $M(-1; 0; 2)$, $\vec{n}=(3; 0; 0)$;

4) $M(0; 0; 1)$, $\vec{n}=(0; 0; -3)$.

2.15. Дано точки P_1 і P_2. Записати рівняння площини, яка проходить через точку K перпендикулярно вектору $\overrightarrow{P_1P_2}$:

1) $P_1(0; 2; -5)$, $P_2(3; -1; 8)$, $K(3; 1; 0)$;

2) $P_1(-1; 0; -8)$, $P_2(1; 2; -3)$, $K(-2; 7; 6)$.

2.16. Записати рівняння площини, яка проходить через точку N паралельно площині α :

1) $N(4; 0; -1)$, $\alpha : 3x - y + \text{[illegible]}z - \text{[illegible]} = \text{[illegible]}$;

2) $N(-4; 2; 0)$, $\alpha : x + y - \text{[illegible]}z + \text{[illegible]} = \text{[illegible]}$;

2.17.. Записати рівняння площини, яка проходить через точку L перпендикулярно двом площинам α і β:

1) $L(2; 0; -3)$, $\alpha: 5x - y + z - \text{[illegible]} = \text{[illegible]}5$, $\beta: x + \text{[illegible]}z - \text{[illegible]} = \text{[illegible]}$;

2) $L(-1; 1; 0)$, $\alpha: y - \text{[illegible]}z + \text{[illegible]} = \text{[illegible]}$, $\beta: x - \text{[illegible]}y + z - \text{[illegible]} = \text{[illegible]}$.

2.18. Знайти відстань від точки P до площини α:

1) $P(1; 2; 1)$, $\alpha : 3x - \text{[illegible]}y - 2z + \text{[illegible]}6 = \text{[illegible]}$;

2) $P(0; 3; 1)$, $\alpha : 2x - y + \text{[illegible]}z - \text{[illegible]} = \text{[illegible]}$.

2.19. Знайти відстань між паралельними площинами α і β :

1) $\alpha : 6x - \text{[illegible]}y - \text{[illegible]}z - 4 = \text{[illegible]}$, $\beta: 6x - \text{[illegible]}y - \text{[illegible]}z + \text{[illegible]} = \text{[illegible]}$;

2) $\alpha : x + \text{[illegible]}y + \text{[illegible]}z - \text{[illegible]}7 = \text{[illegible]}$, $\beta: x + \text{[illegible]}y + \text{[illegible]}z - \text{[illegible]}0 = \text{[illegible]}$.

2.20. Визначити величину кута між площинами α і β :

1) $\alpha : 2x - y + \text{[illegible]}z - \text{[illegible]} = \text{[illegible]}$, $\beta: x - \text{[illegible]}y + \text{[illegible]}z + \text{[illegible]}0 = \text{[illegible]}$;

2) $\alpha : 3x + \text{[illegible]}y - z = \text{[illegible]}$, $\beta: x - \text{[illegible]}z + \text{[illegible]} = \text{[illegible]}$.

2.21. В трикутній піраміді *OABC* бічні ребра взаємно перпендикулярні, їх довжини відповідно рівні a, b, c, довжина висоти OH рівна h. Довести рівність:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

2.22. Записати рівняння дотичної площини до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ в точці $M_0(2;-3;6)$.

2.23. Записати рівняння дотичної площини до сфери $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 24$ в точці $M_0(0;1;3)$.

2.24. Записати рівняння площини, яка проходить через початок координат і паралельна :

а) площині $2x - y + z - = 0$;

б) площині $2y - z + = 0$;

в) площині $3x + = 0$.

2.25. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(1;-3;5)$ і паралельна :

а) площині $3x - y + z + = 0$;

б) площині $x - y + = 0$;

в) площині $3z - = 0$.

2.26. Дано дві площини, що перетинаються :

$x - y + z + = 0, \quad 2x - y + z = 0.$

Записати : а) координати деякої точки, яка лежить на лінії перетину даних площин; б) координати вектора p, паралельного цим площинам.

2.27. Звести до нормального виду рівняння площини $10x + y - 1z + 0 = 0$.

2.28. Знайти напрямні косинуси прямої, яка перпендикулярна до площини $2x - y - z + = 0$.

2.29. Знайти відстань:

а) від точки (3;1;-1) до площини $22x - y - 0z - 5 = 0$;

b) від точки (4;3;-2) до площини $3x - y - z + = 0$.

2.30. Знайти кут між площинами: $3x - y + z + 5 = 0$ і $5x + y - z - = 0$.

2.31. Перевірити чи мають спільну точку наступні чотири площини:

$5x + y - = 0$; $x + y - z = 0$; $2x - y + z + = 0$; $3x + z - = 0$.

§3. Пряма лінія в просторі

Теоретичні відомості

Різні види рівнянь прямої в просторі

Пряма, яка проходить через $M_0(x_0;y_0;z_0)$, паралельна вектору $\vec{p}(\ell;m;n)$ визначається рівняннями:

- *канонічне*
$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{2.20}$$

- *параметричне*
$$\begin{cases} x=x_0+\ell t,\\ y=y_0+mt,\\ z=z_0+nt. \end{cases} \tag{2.21}$$

Якщо пряма проходить *через дві точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то її

рівняння
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{2.22}$$

Пряма може визначатися *перетином двох площин*, тоді її рівняння записується у вигляді:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{2.23}$$

і координати *напрямного вектора* знаходимо:

$$\vec{p}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix} C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right) \tag{2.24}$$

Взаємне розміщення двох прямих в просторі

Якщо прямі задані канонічними рівняннями:

$$\mathcal{L}_1\colon \frac{x-x_1}{\ell_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \qquad \mathcal{L}_2\colon \frac{x-x_2}{\ell_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

то:

$$-\quad \mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2} \tag{2.25}$$

$$- \ \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.25)$$

- $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$ – мимобіжні, якщо не виконуються умови (2.24) і (2.25) ;

- $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$ співпадають, якщо виконується умова (2.24) і точка прямої $\mathcal{L}_1$ належить прямій $\mathcal{L}_2$ (чи навпаки).

Кут між двома прямими – це кут між їх напрямними векторами Знаходимо косинус кута за формулою

$$\cos(\widehat{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2}) = \cos(\widehat{\vec{p}_1, \vec{p}_2}) = \frac{\ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{\ell_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \qquad (2.27)$$

Умова перпендикулярності прямих

$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \qquad (2.28)$$

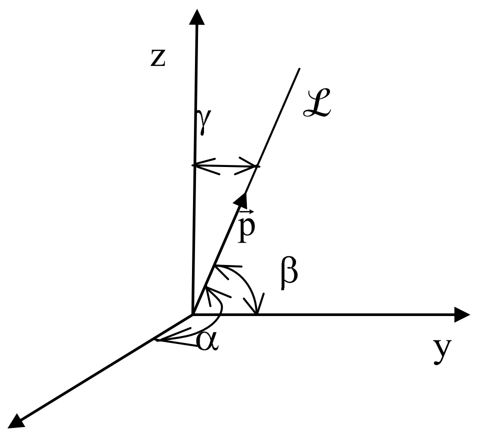


Рис. 2.6

Напрямні косинуси прямої

$$\vec{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \qquad (2.29)$$

де $\vec{e} = \dfrac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$. (рис.2.6)

Якщо $\vec{p}(l; m; n)$ – напрямний вектор прямої $\mathcal{L}$, то

$$\vec{e}\left(\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}; \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}; \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}\right) \qquad (2.30)$$

Відстань від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ***до прямої*** $\mathcal{L}$, заданої рівнянням (2.20) обчислюємо за формулою:

$$\rho(M_0,\mathcal{L}) = \frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \ell & m & n \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}} \qquad (2.31)$$

Відстань між мимобіжними прямими $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$:

$$\rho(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 \\ \ell_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}} \qquad (2.32)$$

Рівняння спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$:

$A_1A_2 = \pi \cap \pi$ (рис.2.7):

1) через $\mathcal{L}_1$ проведемо $\pi \parallel \mathcal{L}_2$;

2) через $\mathcal{L}_2$ проведемо $\pi \perp \pi$;

3) через $\mathcal{L}_1$ проведемо $\pi \perp \pi$;

4) знайдемо перетин площин π і π - це спільний перпендикуляр до даних прямих.

Запишемо рівняння цих площин:

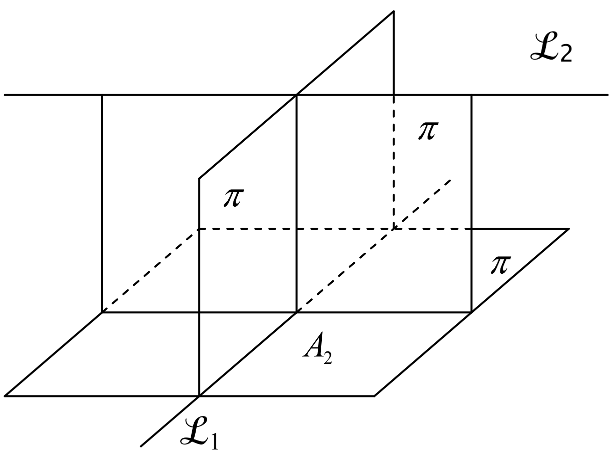


Рис.2.7

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 \\ \ell_2 & m_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0;$$

$$\pi \;: \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_1 & \ell_1 \\ n_2 & \ell_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 \\ \ell_2 & m_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Система двох рівнянь, що задають площини π і π, і є рівнянням спільного перпендикуляра до двох даних прямих, тобто

$$AA_1 = \begin{cases} \pi \\ \pi \end{cases} \tag{2.33}$$

Зауваження. При розв’язанні задач в багатьох випадках необхідно вміти перейти від рівняння (2.23) до рівняння (2.20).

Для цього надаємо будь-якого значення одному із невідомих, підставляємо в систему (2.23) і розв’язуємо її вже як систему двох рівнянь з двома невідомими.

Отриманий розв’язок визначає координати точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Напрямний вектор прямої , заданої як перетин двох площин визначаємо за формулою (2.24) $\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$. (Див. задачу 2.3.1)

Тоді канонічне рівняння прямої набирає вигляду

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \tag{2.34}$$

Розв’язання задач

Основні типи задач

І тип

Записати рівняння прямої, заданої певними умовами.

Якщо рівняння прямої шукаємо у вигляді (2.20), то необхідно знати $(x_0; y_0; z_0)$ (а для цього необхідно мати три умови) і $(\ell; m; n)$ – необхідно дві умови (виразити два із них через третє). В кожному конкретному випадку досліджуємо, якими при цьому скористатися формулами .

2.3.1. *Записати канонічне рівняння прямої:* $\mathcal{L}:\begin{cases}2x-y+z-3=0\\ x+3y-z-1=0\end{cases}$.

Розв'язання. Знайдемо координати напрямного вектора прямої (2.24):

$$\vec{p}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right)\quad \text{тобто}\quad \vec{p}\{-2;3;7\}.$$

Знайдемо координати деякої точки $M_0 \in \mathcal{L}$.

Покладемо, наприклад, $y=0$, підставимо у дане рівняння прямої. Будемо мати $\begin{cases}2x+z-3=0\\ x-z-1=0\end{cases}$. Звідки $x=\frac{4}{3}$; $z=\frac{1}{3}$.

Отже, точка $M_0(\frac{4}{3};0;\frac{1}{3})$.

Запишемо канонічне (2.20) рівняння прямої $\dfrac{x-\frac{4}{3}}{-2}=\dfrac{y-0}{3}=\dfrac{z-\frac{1}{3}}{7}$.

2.3.2. *Дано трикутник* ABC: $A(3;-$ [illegible] $-$ [illegible]$)$, $B(1;2;-$ [illegible]$)$ *і* $C(-$ [illegible] $14;-$ [illegible]$)$. *Записати параметричне рівняння бісектриси внутрішнього кута* B *цього трикутника.*

Розв'язання. Параметричне рівняння прямої має вигляд:

$$\begin{cases}x=x_0+lt;\\ y=y_0+mt;\\ z=z_0+nt;\end{cases}$$

де $(x_0;y_0;z_0)$ — координати точки, через яку проходить пряма (в даній задачі це точка B), l,m,n — координати напрямного вектора прямої.

Шукану бісектрису можна розглядати як пряму, що проходить через точки B і D, де D — точка перетину бісектриси із стороною AC. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{CB}=\lambda,$$

де λ — число, яке показує, у якому відношенні точка D ділить відрізок AC. Визначивши відрізки AB і BC, знайдемо λ:

$AB=\sqrt{4+9+36}=7$; $BC=\sqrt{36+144+16}=14$; $\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$.

За формулами $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ визначимо координати точки D: $x=\frac{3+0{,}5\cdot(-7)}{1+0{,}5}=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{-1+0.5\cdot 14}{1+0{,}5}$, $z=\frac{-\ +0{,}5\cdot(-\ )}{1+0.5}$,

тобто $D\left(-\frac{1}{3};4;-\frac{5}{3}\right)$

З рівняння (2.22) прямої $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, що проходить через дві точки $(x_1;y_1;z_1)$ і $(x_2;y_2;z_2)$ дістанемо напрямні вектори цієї прямої, оскільки вектори $\vec{p}_1=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$ і $\vec{p}=\{l;m;n\}$ колінеарні $\vec{p}_1=\overrightarrow{BD}=\left(-\frac{4}{3};2;\frac{16}{3}\right)$.

Знайдемо вектор $\vec{p}$, колінеарний вектору $\vec{p}_1$, який і беремо за напрямний вектор шуканої прямої. Внаслідок пропорційності однойменних координат колінеарних векторів записуємо $\vec{p}=\{-1;3;8\}$

Тоді параметричне рівняння шуканої бісектриси матиме вигляд:

$$\begin{cases} x=1-t; \\ y=2+3t; \\ z=-7+8t, \end{cases}$$

Параметричне рівняння бісектриси можна було б отримати відразу після запису рівняння цієї бісектриси як прямої, що проходить через дві точки, позначивши величину рівних відношень через t:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=t.$$

Звідси ,
$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t; \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t; \\ x = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$$

2.3.3. *Знайти кути, які утворює пряма* $\frac{x-\;}{4} = \frac{y-\;}{-\;} = \frac{z+\;}{12}$ *з координатними осями.*

Розв'язання. Знайдемо $\vec{e}\,(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\;)$ за формулами (2.30)

$$\cos\alpha \;\; \frac{4}{\sqrt{4^2+\;-\;)^2+\;2^2}} = \frac{4}{\sqrt{169}} = \frac{4}{13};\quad \cos\beta \;\; \frac{-\;}{13};\quad \cos\gamma = \frac{12}{13};$$

Звідси $\alpha \;\; \mathrm{rccos}\frac{4}{13};\;\; \beta \;\; \mathrm{rccos}(-\frac{3}{13});\;\; \gamma = \;\mathrm{rccos}\frac{12}{13}.$

2.3.4. *Записати рівняння прямої, яка проходить через точку* $P(1;0;5)$ *і перетинає кожну із прямих* $\mathcal{L}_1: \; x = \frac{\;}{2} = \frac{\;}{3}$ і $\mathcal{L}_2: \; x - \;=\; - \;=\; .$

Розв'язання. *I спосіб.* Запишемо рівняння шуканої прямої у вигляді (2.20) канонічного:

$$\frac{x-\;}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z-\;}{n}$$

Так як коефіцієнти l,m,n визначені з точністю до пропорційності, то можна вважати, що рівняння шуканої прямої має вигляд: $\frac{x-\;}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z-\;}{n}$

Скористаємось умовою перетину двох прямих (2.26). Застосовуючи цю умову до шуканої прямої і до першої із заданих прямих, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ l & m & n \end{vmatrix} = $$

Звідси $5l - m - n = \;$.

Застосовуючи цю умову до шуканої прямої і до другої прямої, отримаємо: $\begin{vmatrix} 0 & -\; & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = \;$, звідси $7l - \;m - \;n = \;$

Знайдемо який-небудь ненульовий розв’язок системи отриманих рівнянь:

$$\begin{cases} 5l - m - n = 0 \\ 7l - 5n - 2n = 0 \end{cases}$$

Так як $\begin{vmatrix} 5 & - \\ 7 & - \end{vmatrix} \neq$ то можна покласти $n =$. Тоді $l = \frac{1}{6}$, $m = \frac{1}{6}$.

Отже, рівняння шуканої прямої можна записати у вигляді: $\frac{x-}{\frac{1}{6}} = \quad = \frac{}{-6}$

або $x - \; = - \; = \frac{-}{6}$

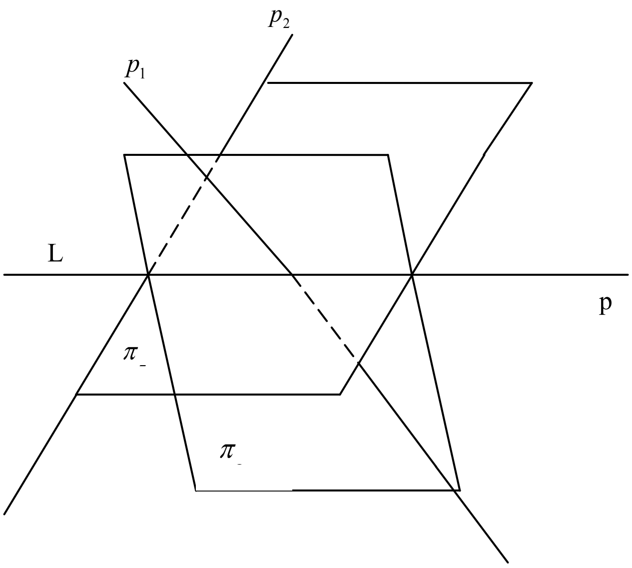


Рис. 2.8

II спосіб. Шукану пряму можна розглянути як лінію перетину двох площин π і π, кожна з яких проходить через дану точку $P(1; 0; 5)$ і одну із даних прямих (рис. 2.8).

Користуючись довільним із способів, розглянутих в задачі 2.1.10, отримаємо для площин π і π відповідно рівняння $5x - \; - \; =$ і $7x - \; - \; + \; =$ Отже, рівняння шуканої прямої можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \quad = \\ \quad + \; = \end{cases}$$

III спосіб. Будемо знову розглядати шукану пряму L як перетин $\pi \cap$, але для складання рівнянь цих площин скористаємось рівнянням пучка площин, який проходять через дану пряму. Першу пряму можна представити як перетин площин, які визначаються рівняннями $2x - \; =$ і $3x - \; =$. Отже, площина π належить пучку

$$2x - \; + \quad - \; =$$

Оскільки ця площина повинна проходити через точку $P(1;\,0;\,5)$, то $\lambda = \;$. Отже, площина π визначається рівнянням:

$$5x - \quad - \quad =$$

Точно так само можна отримати рівняння площини π.

2.3.5. *Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(\;;2;3)$, перетинає вісь oz і перпендикулярна до прямої $x = y = z$.*

Розв'язання. Будемо шукати рівняння прямої в канонічному вигляді

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}. \qquad (1)$$

Запишемо умову належності точки M прямій (1):

$$\frac{x - \;}{l} = \frac{y - 2}{m} = \frac{z - 3}{n} \qquad (2)$$

і рівняння осі Oz:

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}. \qquad (3)$$

Умова (2.26) перетину прямих (2) і (3):

$$\begin{vmatrix} - & -2 & - \\ l & m & n \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси: $$m = 2l. \qquad (4)$$

Умова (2.28) перпендикулярності шуканої прямої (1) і прямої $x = y = z$ має вигляд

$$l + m + n = 0. \qquad (5)$$

Поділивши всі члени рівності (5) на l $(l \neq 0)$ і врахувавши (4), отримаємо:

$$n : l = \;, \text{ або } n = \; l. \qquad (6)$$

Підставивши в рівняння (2) значення (4) і (6) та помноживши всі члени одержаної рівності на l, матимемо канонічні рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x - \;}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - \;}{- \;}.$$

II тип

Встановити взаємне розміщення прямих $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$.

Якщо вони перетинаються, то написати рівняння площини, що їх містить.

Розв’язання. 1) Перевіряємо умову паралельності (2.25);

2) Якщо вона не виконується, то перевіряємо умову перетину (2.26);

3) Якщо вона виконується, то візьмемо точку з однієї із заданих прямих і напрямні вектори обох прямих і запишемо рівняння (2.20).

2.3.6. *Виявнити, чи перетинаються прямі* $£_1 : \frac{x+}{-} = \frac{y-}{-} = \frac{z-}{4}$ *та* $£_2 : \frac{x+}{3} = \frac{y-}{2} = \frac{z+}{-}$.

Розв’язання. Запишемо і перевіримо умову (2.26) перетину двох прямих

$$\begin{vmatrix} 4 & - & 5 \\ - & - & 4 \\ 3 & 2 & - \end{vmatrix} = 0 - 2 - 0 + 5 + - 2 = 3 \neq .$$

Отже, прямі не перетинаються.

2.3.7. *Дослідити взаємне розміщення прямих, заданих системами рівнянь:*

$$\begin{cases} - = \\ + = \end{cases} \; i \; \begin{cases} + = \\ \end{cases}$$

Розв’язання. Знайдемо напрямні вектори даних прямих за формулою (2.24).

$$\overrightarrow{p_1} = \left(\begin{vmatrix} - & 3 \\ 2 & - \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ - & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & - \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = - ;4;4 ; \; \overrightarrow{p_2} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & - \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ - & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = - ;3;1$$

Оскільки координати векторів $\overrightarrow{p_1}$ і $\overrightarrow{p_2}$ не пропорційні, то прямі не паралельні, тобто вони перетинаються або мимобіжні. Для відповіді на питання задачі потрібно обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 - & & l_1' \\ - & & l_2' \\ z_0 - & & l_3' \end{vmatrix},$$

де $(x_0; y_0; z_0)$ і $(x_0'; y_0'; z_0')$ – довільно вибрані точки даних прямих. В ролі таких точок зручно взяти, наприклад, точки перетину цих прямих з площиною Oxy.

Покладаючи $z_0 =$ з рівнянь першої прямої знайдемо, що

$$\begin{cases} = \\ = - \end{cases}$$

звідси $x_0 = \frac{}{2}$ $= -\frac{}{4}$. Таким же способом для другої прямої отримаємо, що $x_0' = -$ $=$ $=$

Отже,

$$\Delta \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & - & - \\ -\frac{5}{2} & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Оскільки, $\Delta \neq$ то дані прямі мимобіжні.

2.3.8. *Знайти кут між прямими* $£_1: \frac{x-}{2} = \frac{y}{-} = \frac{z+}{1}$ *та*

$y = + \ , z = - \ t, \ £_2 : x = - \ ,$

Розв'язання. Кут між прямими (2.27) знайдемо як кут між напрямними векторами $\vec{p}_1 (;- ;1)$ та $\vec{p}_2 (- ;1;-)$.

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot(-) - \cdot 1 + \cdot(-)}{\sqrt{2^2 + -)^2 + ^2}\sqrt{(-)^2 + ^2 + -)^2}} = \frac{- 0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} = \frac{-\sqrt{42}}{63}.$$

Отже, кут між мимобіжними прямими $\alpha = \pi - \arccos\left(\frac{5\sqrt{42}}{63}\right)$

III тип

Відстань від точки до прямої

2.3.9. *Знайти відстань від точки* $M_1(2;-1)$ *до прямої* $\mathscr{L}$: $\begin{cases} x = t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$

Розв'язання. *І спосіб.* За формулою (2.31)

$$\rho(M_0;L) = \frac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2-0 & -1-1 & 1-2 \end{vmatrix}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4^2+3^2+2^2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{29}{6}};$$

ІІ спосіб. Через точку M_1 проведемо площину π, перпендикулярну до даної прямої $\mathscr{L}$, напрямний вектор якої є вектором нормалі площини. Тому за рівнянням (2.12) площини: $1(x-2)-2(y+1)+1(z-1)=0$.

Звідки $x-2y+z-5=0$.

Знайдемо точку перетину даної прямої $\mathscr{L}$ з площиною π, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x-2y+z-5=0, \\ x = t, \\ y = 1-2t, \\ z = 2+t. \end{cases}$$

Звідки, $x=\frac{5}{6}$; $y=-\frac{2}{3}$; $z=\frac{17}{6}$, тобто точка $O(\frac{5}{6};-\frac{2}{3};\frac{17}{6})$. Відстань від точки M_1 до площини π рівна відстані від точки M_1 то O, яку знайдемо за формулою (2.13) $\rho(M_1;O) = M_1O = \sqrt{\left(2-\frac{5}{6}\right)^2+(-1+\frac{5}{3})^2+\left(1-\frac{17}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{29}{6}}$.

Отже, відстань від точки M_1 до прямої $\mathscr{L}$ рівна $\sqrt{\frac{29}{6}}$.

2.3.10. *Написати рівняння перпендикуляра, проведеного з точки* $A(2;3;1)$ *на пряму* $\mathscr{L}$: $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$.

Розв'язання. Нехай задача розв'язана. Рівняння шуканої прямої AA_1 (рис.2.9) запишемо у вигляді: $\frac{x-}{\ell}=\frac{y-}{m}=\frac{z-}{n}$.

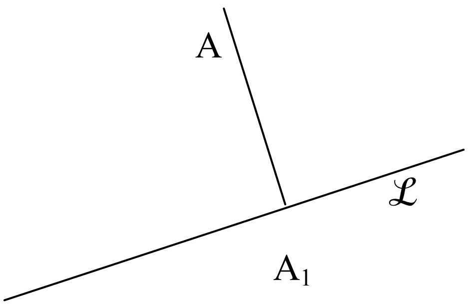


Рис.2.9

Потрібно знайти $\ell; m; n$. Для цього необхідно мати 2 умови:

1. Умова перпендикулярності AA_1 і $\mathcal{L}$.
2. Умова їх перетину.

Запишемо ці умови у вигляді системи двох рівнянь: $\begin{cases} 2\ell - m + 3n = 0, \\ \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ \ell & m & n \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$

Звідси знайдемо: $m = \ n, \quad \ell = \ n$.

Тоді рівняння шуканої прямої набирає вигляду

$$\frac{x-}{-\ n}=\frac{y-}{-\ n}=\frac{z-}{n} \quad \text{або} \quad \frac{x-}{-}=\frac{y-}{-}=\frac{z-}{1}.$$

2.3.11. *На прямій* $\frac{x-}{-} - \quad = \quad 2$ *знайти точки, віддалені від осі* ox *на відстань* 10.

Розв'язання. Відстань від довільної точки $M(x; y; z)$ до осі ox рівна $\sqrt{y^2+\ }$.

Запишемо параметричні рівняння прямої $\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

Координати шуканих точок повинні задовольняти відношенню

$\sqrt{y^2+\ } = \quad$ або $y^2 + \quad =$

Підставивши замість y і z їхні вирази через параметр t, отримаємо:

$29t^2 + \quad + \quad =$ звідси $t_1 = \quad = -\frac{75}{29}$. Отже, шукані точки M_1 і M_2 мають координати: $x_1 = \quad = \quad =$ і $x_2 = \frac{17}{29} \quad = -\frac{22}{29} \quad = -\frac{5}{29}$

IV тип

Знайти точку, симетричну точці $M(x_0;y_0;z_0)$ *відносно прямої* $\mathcal{L}$*:* $x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\quad z = z_0 + nt.$

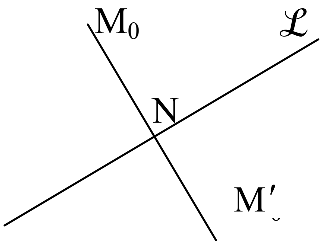


Рис.2.10

Розв'язання. *І-й спосіб.*

Запишемо рівняння прямої (M_0, M'), що проходить через точку M_0, перпендикулярної до прямої $\mathcal{L}$ і такої, що перетинає $\mathcal{L}$. Знайдемо точку перетину цих прямих N. Далі, як у попередній задачі.

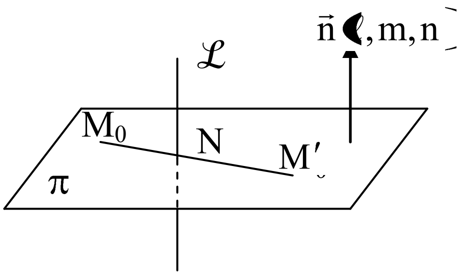


Рис.2.11

ІІ-ий спосіб.

Через M_0 проведемо площину $\pi \perp \mathcal{L}$ і знайдемо точку $N = \pi \cap \mathcal{L}$.

Далі, як у попередньому випадку.

2.3.12. *Знайти точку* A*, симетричну точці* $B(\ ;-\ ;7)$ *відносно прямої*

$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0; \\ 2x + y - 2z + 3 = 0, \end{cases}$$

Розв'язання. Точки $A(x;y;z)$ та $B(\ ;-\ ;7)$ лежать на прямій, перпендикулярній до заданої, і відрізок AB ділиться цією прямою навпіл.

Знайдемо середину відрізка AB, координати якої позначимо через $x_0;y_0;z_0;C(x_0;y_0;z_0)$. Через точку B проведемо площину, перпендикулярну до осі симетрії, тобто до заданої прямої. Рівняння цієї площини має вигляд:

$l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0$, де ℓ, т, п — координати вектора-напряму прямої, до якої дана площина є перпендикулярною.

Якщо пряма задана загальним рівнянням

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

то за її напрямним вектором можна взяти вектор $\vec{p}$:

$\vec{p}\left(\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right)$. Тоді рівняння площини запишемо так:

$\begin{vmatrix}- & -\\ 1 & -\end{vmatrix}(x - \ \ ) + \begin{vmatrix}- & 1\\ - & 2\end{vmatrix}(y + \ \ ) + \begin{vmatrix}1 & -\\ 2 & 1\end{vmatrix}(z - \ \ ) =$ або $2x - \ y + z - \ 1 =$

Знайдемо точку перетину цієї площини з віссю симетрії. Ця точка і буде точкою *C*. Розв'яжемо спочатку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0;\\ 2x + y - 2z + 3 = 0;\\ 2x - 2y + z - 21 = 0; \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є: $x_0 =$, $y_0 =$, $z_0 =$ тобто С (5; —3; 5).

Визначимо тепер точку A, якщо середина відрізка AB і точка B відомі;

$5 = \frac{\ +\ }{2}; - = \frac{-\ +\ }{2}; 5 = \frac{7+}{2}$

Звідки $x =$, $y =$, $z =$.

Отже, $A(\ ;-\ 3)$.

2.3.13. *Записати формули, які виражають симетрію відносно прямої, заданої рівнянням* $\frac{x+}{2} = \frac{}{3} = $.

Розв'язання. Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка простору, $M'(x'; y'; z')$ – її образ при симетрії відносно даної прямої. Симетричність точок M і M' відносно даної прямої виражається двома умовами: 1) вектор $\overrightarrow{MM'} = \ \ - \ \ - \ \ -$ перпендикулярний до цієї прямої; 2) середина відрізка $[MM']$ належить прямій.

Так як вектор $\vec{v} =$ паралельний до прямої і $MM' \perp$, то $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\ \ } =$, тобто

$$2(x' - \ \ + \ \ - \ \ + \ \ - \ \ = \qquad (*)$$

Так як середина відрізка MM' має координати $\frac{x'+}{2}, \frac{+}{2}, \frac{+}{2}$ і ця точка належить даній прямій, то

$$\frac{x' + \ +}{2} = \frac{}{3} = \frac{}{1}$$

Позначаючи ці рівні відношення через t, отримаємо:

$$\begin{cases} \quad - \\ \quad + \qquad (**) \\ \end{cases}$$

Підставляючи ці вирази в рівняння (*), отримаємо: $14t = \quad + \quad + \quad +$

звідси: $t = \frac{\quad + \quad +}{\quad}$.

Підставляючи знайдений вираз t у формули (**), отримаємо шукані вирази координат x', y', z' через x, y, z:

$$\begin{cases} \quad + \quad + \quad - \\ \quad + \quad + \quad + \\ \quad - \quad + \end{cases}$$

V тип

Відстань між прямими

2.3.14. *Знайти відстань між прямими:*

$$£_1: \quad \frac{x+}{5} = \frac{y-}{0} = \frac{z-}{1}; \quad £_2 \frac{x}{3} = \frac{y+}{1} = \frac{z+}{4}$$

Розв'язання. Визначимо, як розміщені дані прямі в просторі. Якщо прямі паралельні, то $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ а в даному випадку $\frac{5}{3} \neq \frac{0}{1}$. тобто дані прямі не паралельні. Перевіримо, чи вони перетинаються. За умовою (2.27) перетину прямих для даних прямих:

$$\begin{vmatrix} - \quad - & 3+ & 7+ \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - & 5 & 8 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \quad 4$$

Отже, дані прямі не перетинаються. Якщо вони не перетинаються і не паралельні, то мимобіжні.

Найкоротшою відстанню між мимобіжними прямими є довжина спільного перпендикуляра, проведеного до цих прямих. Для його визначення проведемо через одну з даних прямих площину, паралельну іншій прямій. Рівняння цієї площини $\left(\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{S_1}\,\overrightarrow{S_2}\right)$ або $\pi \;\; x+\;7y-\;z-\;5=0$.

На другій прямій візьмемо точку (0;-2;-1) і знайдемо відстань від неї до знайденої площини — це й буде довжина спільного перпендикуляра до мимобіжних прямих.

Зведемо до нормального вигляду рівняння допоміжної площини π:

$$N=\frac{1}{\sqrt{1^2+\;7^2+\;^2}}=\frac{1}{\sqrt{315}},$$

$$\frac{x+\;7y-\;z-\;5}{\sqrt{315}}=0,$$

Звідси, $d=\left|\frac{-\;4+\;-\;5}{\sqrt{315}}\right|=\frac{44}{\sqrt{315}}$,

Відстань між даними прямими $d=\frac{44}{\sqrt{315}}$.

2.3.15. *Знайти відстань між прямими*

$$\mathcal{L}_1:\begin{cases}3x+2y-z+1=0,\\2x-3y+z-4=0.\end{cases}\qquad \text{і} \qquad \mathcal{L}_2:\begin{cases}x=t,\\y=1-2t,\\z=3+t.\end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор прямої $\mathcal{L}_1$ за формулою (2.24): $\overrightarrow{p_1}\left(\begin{vmatrix}2 & -\\ - & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}- & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -\end{vmatrix}\right)=-\;;-\;;-\;3$. Напрямний вектор другої прямої $\mathcal{L}_2$ має координати $\overrightarrow{p_2}(1;-\;;1)$. Так як $\mathcal{L}_1 \nparallel \mathcal{L}_2$, оскільки $\left(\frac{5}{1}\neq\frac{-5}{-2}\neq\frac{-11}{1}\right)$, то перевіримо, чи вони перетинаються (умова 2.26). Для цього знайдемо довільну точку прямої $\mathcal{L}_1$: нехай $x=0$, тоді $y=-\;;\;z=-$, тобто $M_1(0;-3;-5)\in\mathcal{L}_1$, $M_2(0;1;3)\in\mathcal{L}_2$. Умова (2.26) запишеться у вигляді $\begin{vmatrix}0 & 4 & 8\\ 1 & - & 1\\ 5 & - & -1\end{vmatrix}=04\neq 0$.

Отже, прямі мимобіжні. Відстань між ними знайдемо за формулою (2.32):

$$\rho(\mathcal{L}_1;\mathcal{L}_2)=\frac{\begin{vmatrix}0 & 4 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 5 & -3 & -1\end{vmatrix}}{\sqrt{27^2+6^2+5^2}}=\frac{104}{\sqrt{1010}}=\frac{52\sqrt{1010}}{505}.$$

Отже, відстань між даними прямими $\rho(\mathcal{L}_1;\mathcal{L}_2)=\dfrac{52\sqrt{1010}}{505}$

VI тип

Знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих

$$\mathcal{L}_1:\frac{x-x_1}{\ell_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\quad \text{і}\quad \mathcal{L}_2:\frac{x-x_2}{\ell_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Розв'язання. 1) Перевіримо, чи прямі мимобіжні, тобто превіряємо виконання умов (2.25), (2.26).

2) Через $\mathcal{L}_1$ проведемо $\pi_1 \parallel \mathcal{L}_2$ (рис.2.13), рівняння цієї площини має вигляд:

$$\pi_1:\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ \ell_1 & m_1 & n_1\\ \ell_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0\Rightarrow \vec{n}\left(\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}n_1 & \ell_1\\ n_2 & \ell_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\ell_1 & m_1\\ \ell_2 & m_2\end{vmatrix}\right)$$

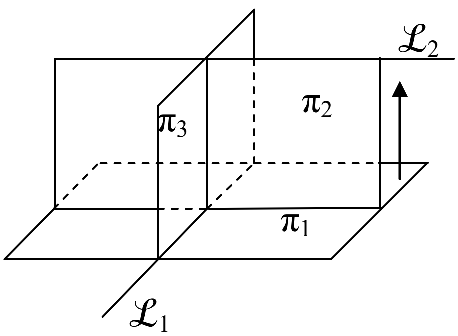


Рис.2.12

3) Через $\mathcal{L}_2$ проведемо площину $\pi_2 \perp \pi_1$. Її рівняння: π_2:

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ \ell_1 & m_1 & n_1\\ \begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}n_1 & \ell_1\\ n_2 & \ell_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\ell_1 & m_1\\ \ell_2 & m_2\end{vmatrix}\end{vmatrix}=0$$

4) Через $\mathcal{L}_1$ проведемо $\pi_3 \perp \pi_1$. Її рівняння:

$$\pi_3:\begin{vmatrix}x-x_2 & y-y_2 & z-z_2\\ \ell_2 & m_2 & n_2\\ \begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}n_1 & \ell_1\\ n_2 & \ell_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\ell_1 & m_1\\ \ell_2 & m_2\end{vmatrix}\end{vmatrix}=0$$

5) Система рівнянь, якими задані площини π_2 і π_3, і задає спільний перпендикуляр.

Рекомендована література

[2] §51, ст. 327; [7] §§28-29; [16] Ч. 2. Гл. 5. §§6-7, ст. 307-310, §§9-10, ст. 312-319; [19] §7, ст. 189

Завдання для самостійного розв'язання

3.1.Записати параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(\ ;1;-\ )$ паралельно вектору $\vec{s}(\ ;-\ ;3)$.

3.2. Написати канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(5;3;4)$ і паралельна вектору $\vec{s}(\ ;5;-\ )$.

3.3. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;-1;-3)$ паралельно до прямої $\frac{x+}{3}=\frac{y-}{-}=\frac{z-}{5}$.

3.4.Записати канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(\ 1;1;1)$ паралельно осі oz.

3.5. Записати канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1\ ;-2;3)$ і утворює з осями *ox* та *oy* кути $\alpha = 45°$ та $\beta = 60°$.

3.6. Знайти напрямні косинуси прямих:

1) $\frac{x-}{4}=\frac{y-}{-}=\frac{z+}{12}$;

2) $\frac{x}{12}=\frac{y-}{3}=\frac{z+}{20}$.

3.7. Записати рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(\ 1;2;3)$ і $M_2(2;6;-2)$, та знайти її напрямні косинуси.

3.8. Записати параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві точки M_1 та M_2, якщо:

1) $M_1(3;4;0)$, $M_2(2;3;-1)$; 2) $M_1(1;2;4)$, $M_2(-1;2;-4)$; 3) $M_1(2;4;5)$, $M_2(-1;-2;3)$;

4) $M_1(7;8;-9)$, $M_2(3;1;-5)$;

3.9. Дані вершини трикутника *A*(3;6;-7), *B*(5;2;3) і *C*(4;-7;-2). Написати параметричні рівняння його медіани, проведеної з вершини *C*.

3.10. Дані три вершини паралелограма: *A*(3;0;-1), *B*(1;2;-4) і *C*(0;7;2). Написати рівняння сторін *AD* і *CD*.

3.11. Знайти рівняння прямої, що проходить через початок координат та середину відрізка AB, якщо *A*(4;0;2), *B*(2;6;-4).

3.12. Знайти кут між прямими: $x = \ t - \ , y = \ , z = -t + \ $ і

$x = \ t - \ , y = o, z = t - \ $.

3.13. Знайти тупий кут між прямими: $\frac{x}{1} = \frac{y - \ }{- \ } = \frac{z + \ }{\sqrt{2}}$; $\frac{x - \ }{1} = \frac{y - \ }{1} = \frac{z + \ }{\sqrt{2}}$.

3.14. Довести паралельність прямих:

$$1)\ \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}\ i\ \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0; \end{cases}$$

$$2)\ x = 2t + 5,\ \ y = -t + 2,\ \ z = t - 7,\ \ i\ \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

3.15. Довести перпендикулярність прямих:

$$1)\ \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}\ \ i\ \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0; \end{cases}$$

$$2)\ x = 2t + 1,\ \ y = 3t - 2z = -6t + 1,\ \ i\ \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$$

3.16. Записати канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку M (2;0;-3)

паралельно прямій $\frac{x - \ }{5} = \frac{y + \ }{2} = \frac{z + \ }{- \ }$..

3.17. Записати рівняння прямої, що проходить через точку (5;5;-2) і утворює з осями координат кути α = 45° , β= 60°, γ= 120°.

3.18. Знайти кут між прямими:

$$1)\ \begin{cases} x + y - z = \ , \\ x - y + \ z + \ = \ ; \end{cases}\ \ i\ \begin{cases} x - z + \ = \ , \\ y + \ z - \ = \ ; \end{cases}$$

$$2)\ \frac{x}{2} = \frac{y}{- \ } = \frac{z + \ }{- \ }\ \ i\ \ \frac{x}{3} = \frac{y - \ }{5} = \frac{z + \ }{- \ }.$$

3.19. При якому значенні $\mathcal{L}$ прямі $\frac{x+}{2}=\frac{y}{-}=\frac{z-}{4}, \frac{x-}{l}=\frac{y-}{4}=\frac{z-}{2}.$

перетинаються?

3.20. Визначити, яка з точок $M_1(-1;2;-1)$, $M_2(2;1;3)$ належить прямій $\mathcal{L}$, заданій в репері $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ рівняннями: $x = 2-3t$, $y = 1+t$, $z = -3+2t$.

3.21. Написати параметричні рівняння прямої $\mathcal{L}$, яка проходить через точку $M_0(;3;-)$ і паралельна прямій $\mathcal{L}'$, заданій рівняннями: $\begin{cases} x-2y-3z=0, \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$

3.22. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку *M(2;-1;0)*, перпендикулярно до прямій $\mathcal{L}$: $\begin{cases} x=t, \\ y=-1-3t, \\ z=-1-2t \end{cases}$ і перетинає її.

3.23. Знайти координати точки M_2, симетричної точці $M_1(3;1;-4)$ відносно прямої $\mathcal{L}$, заданої рівняннями: $x = - + t$, $y = - -$, $z = - -$.

3.24. В репері $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ прямі $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$ задані рівняннями:

$$\mathcal{L}_1:\ \begin{cases} x=2t+1, \\ y=-t, \\ z=3+2t, \end{cases} \qquad \mathcal{L}_2:\ \begin{cases} x-y-2z-1=0, \\ 2x+2y+z+3=0. \end{cases}$$

Визначити косинус кута, утвореного цими прямими.

3.25. Визначити взаємне розміщення прямих $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$, заданих в репері $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ рівняннями:

$$1)\begin{cases} x=1+2t, \\ y=7+t, \\ z=3+4t, \end{cases} \begin{cases} x=6+3t, \\ y=-1-2t, \\ z=-2+t, \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x=1+2t, \\ y=2-2t, \\ z=-t, \end{cases} \begin{cases} x=-2t, \\ y=-5+3t, \\ z=4, \end{cases} \quad 3)\begin{cases} 2x-3y=0, \\ x+z-8=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-4=0, \\ 2x+3z-7=0, \end{cases}$$

4) $\begin{cases} x = t, \\ y = -8 - 4t, \\ z = -3 - 3t, \end{cases}$ $\begin{cases} z - y - z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0, \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 1 + t, \\ z = -1 - 2t, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 + 6t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 1 + 4t, \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2y - z + 2 = 0, \\ x - 7y + 3z - 17 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = -1, \\ z = 4 - t. \end{cases}$

3.26. Написати рівняння прямої, яка лежить в площині, заданій в афінній системі координат рівняннями $y + 2z = 0$, і перетинає прямі $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$ задані рівняннями:

$$\mathcal{L}_1: \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = t, \\ z = 4t, \end{cases} \quad \text{та} \quad \mathcal{L}_2: \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 4 + 2t, \\ z = 1. \end{cases}$$

3.27. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 *(2;3;1)* і перетинає прямі $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ задані в афінній системі координат рівняннями:

$$\mathcal{L}_1: \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y + z + 4 = 0, \end{cases} \quad \mathcal{L}_2: \begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

3.28. Написати рівняння прямої, яка містить висоту *AH* трикутника *ABC,* якщо *A*(-1;1;2), *B*(1;1;0), *C*(2;6;-2) в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3.29. Довести, що прямі $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ задані в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ рівняннями:

$$\mathcal{L}_1: \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 2t, \end{cases} \qquad \mathcal{L}_2: \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 2 + 2t, \end{cases}$$

перетинаються, і написати рівняння прямої, що є бісектрисою гострих кутів, які утворені прямими $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$.

3.30. Знайти рівняння спільного перпендикуляра мимобіжних прямих $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ заданих в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ рівняннями: $\mathcal{L}_1: \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 4, \end{cases}$

$\mathcal{L}_2: \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + y - z + 4 = 0. \end{cases}$

3.31. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку P паралельно вектору $\vec{a}$:

1) $P(7; -1; 2)$, $\vec{a}=(-2; 1; 3)$;

2) $P(1; 0; -1)$, $\vec{a}=(4; 3; -2)$.

3.32. Записати рівняння прямої, яка проходить через дані дві точки M_1 і M_2:

1) $M_1(3; 6; -1)$, $M_2(4; 6; 2)$;

2) $M_1(1; -2; -3)$, $M_2(2; 3; 4)$.

3.33. Площини α і β перетинаються по прямій $\mathcal{L}$. Довести, що $\mathcal{L}$ паралельна вектору $\vec{c}$, якщо

1) $\mathcal{L}$: $\begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0, \\ x + 2y - z + 3 = 0, \end{cases}$ $\vec{c}=(-3; 5; 7)$;

2) $\mathcal{L}$: $\begin{cases} x - 2y + 2z - 2 = 0, \\ 3x - 2y + 5z - 1 = 0, \end{cases}$ $\vec{c}=(-6; 1; 4)$;

3.34. Визначити величину кута між прямими $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$:

1) $\mathcal{L}_1$ $\frac{x-}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-}{6}$, $\mathcal{L}_2$ $\frac{x+}{1} = \frac{y-}{2} = \frac{z+}{-}$;

2) $\mathcal{L}_1$ $\frac{x+}{3} = \frac{y-}{1} = \frac{z}{1}$, $\mathcal{L}_2$ $\frac{x}{-} = \frac{y-}{1} = \frac{z+}{2}$;

3) $\mathcal{L}_1$ $\begin{cases} 3x - y + 5z - 4 = 0, \\ 2x + y - 3 = 0, \end{cases}$, $\mathcal{L}_2$ $\frac{x-}{1} = \frac{y-}{2} = \frac{z}{-}$;

4) $\mathcal{L}_1$ $\begin{cases} x + y - z + 11 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0, \end{cases}$, $\mathcal{L}_2$ $\begin{cases} x - y - z + 1, \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$

3.35. Знайти кут між двома прямими, з яких одна задається перетином площин: $2x + \ y + \ z - \ = 0$, $3x - \ y + z + \ = 0$, а інша – рівняннями: $x + \ y - \ z + \ = 0$, $13x + \ 0y + \ 1z - \ 2 = 0$ в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3.36. Знайти ортогональні проекції прямої: $x - \ y + z - \ 1 = 0$, $2x - \ y + \ z - \ 0 = 0$ на кожну із координатних площин прямокутної системи координат.

3.37. Визначити взаємне розміщення двох прямих, заданих рівняннями

$$\alpha_{\ }: \frac{x-\ }{2} = \frac{y-\ }{4} = \frac{x+\ }{3}, \text{ та } \alpha_{\ }: \frac{x+\ }{3} = \frac{x+\ }{-\ } = \frac{x-\ }{4}.$$

§ 4. Пряма і площина в просторі

Теоретичні відомості

Взаємне розміщення прямої і площини

Якщо $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, $\mathcal{L}: \dfrac{x - x_0}{\ell} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$, то:

а) $\mathcal{L} \parallel \pi \Leftrightarrow \begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases},$ (2.35)

б) $\mathcal{L} \subset \pi \Leftrightarrow \begin{cases} A\ell + Bm + Cn = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0, \end{cases}$ (2.36)

в) $\mathcal{L} \cap \pi \Leftrightarrow A\ell + Bm + C \neq 0,$ (2.37)

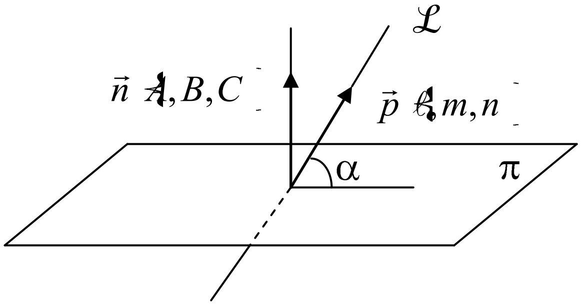
г) $\mathcal{L} \perp \pi \Leftrightarrow \dfrac{A}{\ell} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}.$ (2.38)

Щоб знайти ***точку перетину прямої з площиною,*** *слід розв'язати систему*

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x = x_0 + \ell t, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (2.39)$$

Звідси $t = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A\ell + Bm + Cn}$. Підставимо знайдене значення параметра t у параметричне рівняння прямої і знайдемо координати точки перетину її з площиною.

Кут між прямою і площиною.



Якщо $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$,

$\mathcal{L}$: $\dfrac{x - x_0}{\ell} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ (рис.2.13), то

Рис.2.13

$$\sin\alpha = \frac{\vec n \cdot \vec p}{|\vec n| \cdot |\vec p|} = \frac{A\ell + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}; \qquad (2.40)$$

Розв'язання задач

I тип

Записати рівняння прямої чи площини, які пов'язані спільними умовами

2.4.1. *Записати рівняння прямої, яка лежить в площині*

$\pi: x - y + z - 2 = 0$, *перетинає пряму* $\mathcal{L}_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+1}{1}$ *і перпендикулярна до пряміої* $\mathcal{L}_2: \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

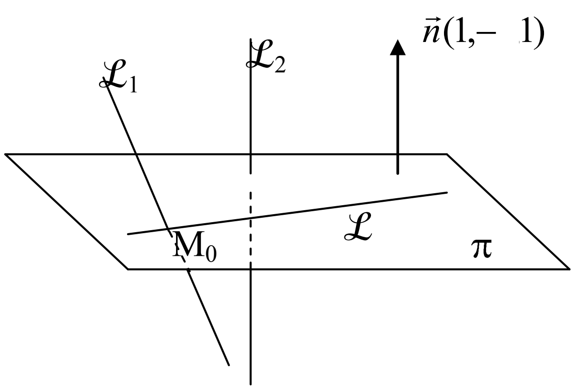


Рис 2.14.

Розв'язання. Знайдемо точку M_0 перетину прямої $\mathcal{L}_1$ з площиною π (рис.2.14).

$$M_0 = \mathcal{L}_1 \cap \pi \Rightarrow \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x = t + 1, y = 0, z = t - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$t + 1 - 0 + t - 1 - 2 = 0 \Rightarrow 2t = 2 \Rightarrow t = 1$

$x = 2, y = 0, z = 0$; $M_0(2,0,0)$.

II. Запишемо систему рівнянь, з якої знайдемо координати напрямного вектора прямої $\mathcal{L}$:

$$\begin{cases} \mathcal{L} \parallel \pi \\ \mathcal{L} \perp \mathcal{L} \end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases} \ell - m + n = 0 \\ \ell\ell_2 + mm_2 + nn_2 = 0 \end{cases}.$$

Знайдемо $\overrightarrow{p_2}\,(l_2;m_2;n_2)$ - напрямний вектор прямої $\mathcal{L}_2$ за формулою (2.24)

$$\vec{p}_2\left(\begin{vmatrix} 1 & - \\ - & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} - & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & - \\ - & 0 \end{vmatrix} \right) = - \;;- \; - \;;\leftarrow \;;- \; - \parallel (\;;1;3).$$

Тоді система матиме вигляд

$$\begin{cases} \ell - m + n = 0 \\ \ell + m + 3n = 0 \end{cases}.$$

Так як $\begin{vmatrix} 1 & - \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq$, то виразимо ℓ і m через n: $2\ell = - \; n \Rightarrow \ell = - \; n, m = - \;$;

Тепер можемо записати рівняння шуканої прямої, яка проходить через точку $M_0(2;0;0)$, напрямний вектор якої $\overrightarrow{p}(- \; n;- \; ;n)$:

$$\mathcal{L}\colon \frac{x-}{-\,n} = \frac{y}{-n} = \frac{z}{n} \Leftrightarrow \frac{x-}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-}.$$

Отже, пряма має рівняння: $\mathcal{L}\colon \dfrac{x-}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-}$.

2.4.2. *Написати рівняння площини, перпендикулярної площині* $\pi\colon\ 3x - \; y + z - \; = \;$, *що перетинає її по прямій, яка лежить в площині* xoz.

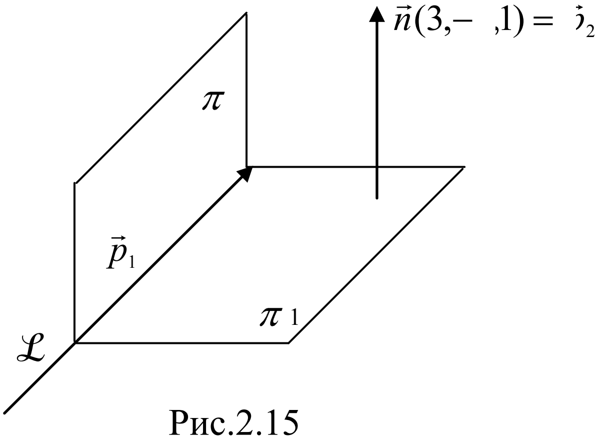


Рис.2.15

Розв'язання. Рівняння прямої перетину даної і шуканої площин можна записати так:

$$\mathcal{L}\colon \begin{cases} y = 0 \\ 3x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Для неї: $\vec{p}\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\right) = (0,-\ \ )$.

Визначимо одну точку на прямій $\mathcal{L}$. Наприклад, $M_0(0;0;1)$, вона також належить π (рис.2.15).

Відомо точку $M_0(0;0;1)$ і напрямні вектори $\vec{p}_1(1,0,-\ \ )$ і $\vec{p}_2(3,-\ \ ,1) =$.

Скористаємося рівнянням (2.20), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x & y & z- \\ 3 & - & 1 \\ 1 & 0 & - \end{vmatrix} = \ \Leftrightarrow\ x+\ \ 0y+\ \ z-\ \ =\ .$$

Отже, шукана площина має рівняння $3x-\ \ y+z-\ \ =\ $.

II тип

Перпендикулярність прямої і площини

2.4.3. *Записати рівняння площини, що проходить через точку* $M_0(-\ \ ;2;2)$ *перпендикулярно до прямої* $\begin{cases} x+3y+z+1=0, \\ 2x-y-z+2=0. \end{cases}$

Розв’язання. Скористаємося рівнянням площини, що визначається точкою і вектором нормалі, який колінеарний напрямному вектору даної прямої (рис.2.16)

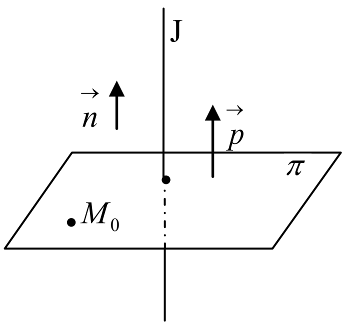


Рис.2.16

Знайдемо координати цього вектора за формулою

$$\vec{n}\left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ - & - \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ - & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & - \end{vmatrix}\right) = (-\ \ ;3;-\ \ ).$$

Тоді рівняння площини запишемо у вигляді $-\ \ (x+\ \ )+\ \ (y-\ \ )-\ \ (z-\ \ )=\ $.

Звідки рівняння шуканої площини $-\ \ x+\ \ y-\ \ z+\ \ =\ $.

2.4.4. *Знайти точку, симетричну точці* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *відносно площини* π *: Ax+By+Cz+D=0.*

Розв’язання.

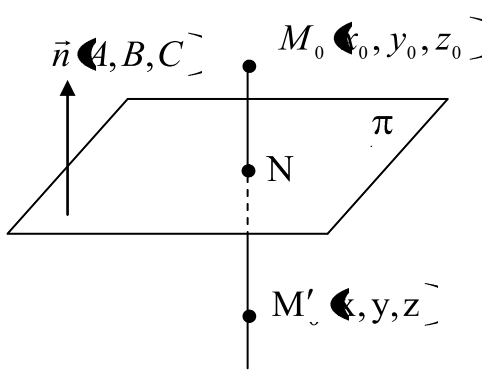


Рис.2.17

1) Запишемо рівняння прямої $M_0M_0' \perp \pi$, тобто $\overline{M_0M_0'} \parallel \vec{n}$ (рис.2.17), скориставшись (2.20).

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}.$$

2) Знаходимо точку $N = M_0M_0' \cap \pi$.

Розв'язавши систему

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ x=x_0+At,\ y=y_0+Bt,\ z=z_0+Ct, \end{cases}$$

знайдемо t. Підставимо це значення t в параметричне рівняння M_0M_0'.

Нехай $N(x_1,y_1,z_1)$.

3) Знаючи N – середину відрізка і один з його кінців, знайдемо координати точки M_0'.

$$\frac{x+x_0}{2}=x_1,\quad \frac{y+y_0}{2}=y_1,\quad \frac{x+x_0}{2}=z_1 \Rightarrow \begin{matrix} x=2x_1-x_0 \\ y=2y_1-y_0 \\ z=2z_1-z_0 \end{matrix}.$$

Наприклад. *Знайти точку, симетричну точці* $N(7;-\ ;2)$ *відносно площини* $x+2y-2z+\ =\ $.

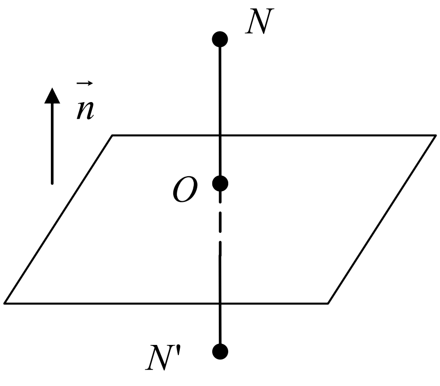


Рис. 2.18

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої NO, перпендикулярної до даної площини, скориставшись канонічним її рівнянням (2.20). За напрямний вектор прямої візьмемо вектор нормалі $\vec{n}$ площини (рис.2.18), коефіцієнтами якого є коефіцієнти при змінних у рівнянні площини тобто $\vec{n}(1;2;-\ )$. Тоді рівняння прямої

NO: $\dfrac{x-\ }{1}=\dfrac{y+\ }{2}=\dfrac{z-2}{-2}$. Запишемо параметричні рівняння прямої $x=7+\ $, $y=\ +2t$, $z=2-2t$ і знайдемо точку O перетину цієї прямої з даною площиною, розв’язавши систему: $\begin{cases} x+2y-2z+5=0, \\ x=7+t, \\ y=-1+2t, \\ z=2-2t. \end{cases}$ Звідки $x=\frac{19}{3}$, $y=-\frac{7}{3}$,

$z=\frac{10}{3}$, тобто точка $O\left(\frac{19}{3};-\frac{7}{3};\frac{10}{3}\right)$. Точку N' знайдемо як кінець відрізка NN' за початком N та серединою O, скориставшись формулами (2.10) координат середини відрізка. Позначимо координати точки $N'(x';y';z')$, тоді

$\frac{19}{3}=\frac{7+x'}{2}$; $-\frac{7}{3}=\frac{-1+y'}{2}$; $\frac{10}{3}=\frac{2+z'}{2}$. Звідки $x'=\frac{17}{3}$; $y'=-\frac{11}{3}$; $z'=\frac{14}{3}$. Отже, точка N' симетрична точці N відносно даної площини, має координати $\left(\frac{17}{3};-\frac{11}{3};\frac{14}{3}\right)$.

2.4.5. *Знайти координати проекції точки* $N(-1;0;0)$ *на площину* $-3x-y+2z-4=0$.

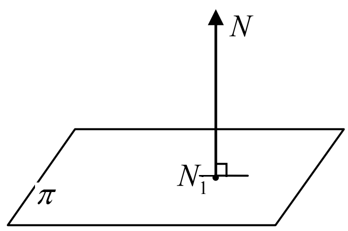


Рис.2.19

Розв’язання. Через точку N проведемо пряму перпендикулярну до даної площини (рис.2.19), вектор нормалі якої є напрямним для прямої, тобто $\vec{p}_{\ell}=\vec{n}_{\pi}=(-3;-1;2)$.

Запишемо канонічне рівняння $\frac{x+1}{-3}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$.

Знайдемо точку перетину цієї прямої з даною площиною. Для цього запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді $\begin{cases} x=-1-3t, \\ y=-t, \\ z=2t \end{cases}$, підставимо ці значення змінних у рівняння площини

$-3(-1-3t)-(-t)+2\cdot 2t-4=0$.

Звідки $t=\frac{1}{\sqrt{14}}$, тоді $x=-\frac{17}{14}$, $y=-\frac{1}{14}$, $z=\frac{1}{7}$.

Отже, проекція точки N має координати $N_1\left(-\frac{17}{14};-\frac{1}{14};\frac{1}{7}\right)$.

2.4.6. *Записати рівняння площини, що проходить через точку* $M_0 (\; ;2;2)$ *перпендикулярно до прямої* $\begin{cases} x+3y+z+1=0 \\ 2x-y-z+2=0 \end{cases}$.

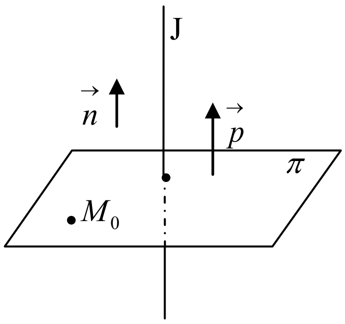


Рис.2.20

Розв'язання. Скористаємося рівнянням площини, що визначається точкою і вектором нормалі, який колінеарний напрямному вектору даної прямої.

Знайдемо координати цього вектора за формулою (2.24):

$$\vec{n}\left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ - & - \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ - & 2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & - \end{vmatrix}\right) = -\;;3;-\;.$$

Тоді рівняння площини запишемо у вигляді (2.12) $-\;(x+\;)+\;(y-\;)-\;(z-\;)=\;$ або $-\;x+\;y-\;z+\;=\;$.

III тип

Взаємне розміщення прямих і площин

Якщо пряма задана канонічним рівнянням, а площина загальним, то взаємне розміщення прямої і площини встановлюємо, використавши формули (2.34) – (2.37).

2.4.7. *Показати, що дані прямі і площини перетинаються, і знайти точку їх перетину:*

а) $\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$ i $4x+\;+\;+\;=$

б) $\frac{x+}{2}=\frac{}{-}-$ i $x+\;-\;+\;=$

в) $\begin{cases} -\;= \\ = \end{cases}$ і $x-\;+\;=$

Розв'язання. Площина і пряма перетинаються тоді і тільки тоді, коли

$$Al+Bm+Cn\neq\; \text{ - умова (2.37),}$$

де A, B, C – коефіцієнти при невідомих в рівнянні площини, l, m, n – координати напрямного вектора прямої.

В розглядуваному випадку $A = \quad = \quad = \quad l = \ , m = \ \cdot \ n = \ \cdot$, а отже, $4\cdot \ + \ - \ + \ - \ = \ \neq$ Значить, пряма і площина перетинаються.

Для знаходження точки перетину, підставимо в рівняння площини замість $x; y; z$ їх вирази через параметр t:

$$4(- \ + \quad + \quad - \ + \quad - \ + \quad =$$

або

$$7t = -$$

Звідси $t = -$, і точка перетину має координати $x = - \qquad = \qquad =$

Зауважимо, що для відповіді на перше питання можна відразу шукати значення параметра t; якщо це значення визначається однозначно, то пряма і площина перетинаються.

б) *Вказівка.* Спочатку потрібно перейти до параметричних рівнянь даної прямої, потім розв'язати задачу так само як і а). Другий спосіб розв'язання аналогічний розв'язанню задачі в).

в) Площина і пряма перетинаються тоді і лише тоді, коли система рівнянь:

$$\begin{cases} \quad - \ = \\ \quad = \\ \quad = \end{cases}$$

має єдиний розв'язок. Розв'язавши цю систему, отримаємо: $x = - \qquad = \qquad = -$

2.4.8. *Показати, що дані прямі і площини не мають спільних точок:*

а) $\begin{cases} \\ \quad \cdot \\ \\ \end{cases}$ $i \ \ x + \ + \ - \ =$

б) $\dfrac{x+}{-} - \qquad = \ \ 4 \qquad i \ \ 4x + \ \ - \ =$

в) $\begin{cases} \quad - \ = \\ \quad \cdot \ = \end{cases}$ $i \ \ 2x + \ \ - \ =$

Розв’язання. Площина $Ax + \quad + \quad + \quad =$ і пряма $\begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$

не мають спільних точок тоді і тільки тоді, коли виконується умова (2.35):
$Al + Bm + Cn = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

В розглядуваному випадку $A = \quad = \quad = \quad ,$ $D = - \quad = \quad = - \quad = \quad ,$
$x_0 = - \quad = \quad =$ тому $1 \cdot - \cdot + \cdot =$, а $1 \cdot - + \cdot + \cdot - \neq$

Отже, дані пряма і площина не мають спільних точок.

б) Розв’язується так само, як і задача а).

в) Площина і пряма не мають спільних точок тоді і тільки тоді, коли система рівнянь:

$$\begin{cases} \quad - \quad = \\ \quad - \quad = \\ \quad - \quad = \end{cases}$$

не має розв’язків. Знайдемо ранги r і r' основної і розширеної матриці:

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$r =$ і $r' =$. Так як $r \neq$, то система несумісна, тому пряма і площина не мають спільних точок.

2.4.9. *Показати, що дані прямі $\mathcal{L}$ належать вказаним площинам π:*

а) $\mathcal{L}: \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$ *і* $\pi: x + \quad + \quad =$

б) $\mathcal{L}: \begin{cases} \quad - \quad = \\ \quad - \quad + \quad = \end{cases}$ і $\pi: 4x - \quad + \quad - \quad =$

Розв’язання. а) Підставивши в рівняння площини замість x, y, z їх вирази через параметр t, отримаємо: $0 \cdot \quad + \quad =$
тобто рівняння перетворюється в рівність при довільному значенні t. Отже, пряма належить площині.

б) Пряма належить площині тоді і тільки тоді, коли система рівнянь:

$$\begin{cases} \quad - = \\ \quad - \quad + = \\ \quad - \quad - = \end{cases}$$

має нескінченну множину розв'язків. Знайдемо ранги r і r' матриць

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$r = \quad = \quad$. Оскільки, $r = \quad = \quad < \quad$, то система має нескінченну множину розв'язків, тому пряма належить площині.

2.4.10. *Відомі координати двох точок* $A(\,;2;3)$ *і* $B(4;0;5)$. *Знайти точку перетину прямої* AB *з площиною* xoy.

Розв'язання. *I спосіб.* Нехай $P(x, y, z)$ – шукана точка.

Так як вона лежить в площині xoy, то $z = 0$. Позначимо відношення, в якому точка P ділить відрізок AB через λ. Тоді, застосовуючи формулу ділення відрізка в даному відношенні до аплікатів z точок A, B і P, отримаємо:

$$0 = \frac{3 + 5\lambda}{1 + \lambda},$$

Звідки слідує, що $\lambda = - \,,6$. Користуючись тепер формулою для x, отримаємо:

$$x = \frac{1 - \,,6 \cdot 4}{1 - \,,6} = - \,,5.$$

Аналогічно знайдемо, що $y = \;$.

II спосіб. Вважаючи точку A першою, B - другою, P - третьою і використувучи умови колінеарності трьох точок

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x - & - \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} - & 2 \\ y - & - \end{vmatrix} = 0,$$

звідки: $x = - \,,5,\ y = \;$.

IV Тип

Записати рівняння проекції прямої $\mathcal{L}$ *:* $\dfrac{x-x_0}{\ell}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ *на площину* π *: Ax+By+Cz+D=*0.

Розв'язання

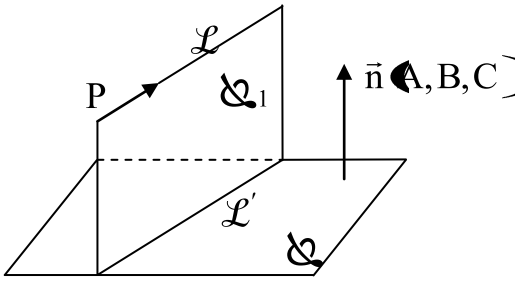


Рис.2.21.

1) Через $\mathcal{L}$ проведемо $\pi_1 \perp \pi$.

Її рівняння:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \ell & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

2) $\mathcal{L}: \begin{cases} \pi \\ \pi_1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \ell & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$ – лінія перетину площин π і π_1.

2.4.11. *Знайти проекцію прямої* $\mathcal{L}_1$ *:* $\dfrac{x-[illegible]}{-[illegible]}=\dfrac{y-[illegible]}{6}=\dfrac{z-[illegible]}{8}$ *на площину* xoy.

Розв'язання. через пряму $\mathcal{L}$ проведемо площину π , перпендикулярно площині xoy. Скориставшись рівнянням (2.1) запишемо рівняння площини π :

$$\begin{vmatrix} x-[illegible] & y-[illegible] & z-[illegible] \\ -[illegible] & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ (в ролі другого напрямного вектора цієї площини беремо вектор нормалі даної площини π , тобто $\overrightarrow{p_2}=\vec{n_o}=(0;0;1)$).

Тоді π : $6(x-[illegible])+[illegible](y-[illegible])=0$ або $6x+[illegible]y-[illegible]8=0$. Лінія перетину даної площини π та знайденої π і є проекцією $\mathcal{L}_1$ прямої на площину xoy, тобто

$$\mathcal{L}_1: \begin{cases} 6x+5y-38=0, \\ z=0. \end{cases}$$

V Тип

Застосування теорії прямої і площини до розв'язання задач елементарної математики

2.4.12. *Дано прямокутний паралелепіпед. Прямі $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$ містять діагоналі його суміжних граней і утворюють з площиною основи кути α і β. Знайти косинус кута між прямими $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$.*

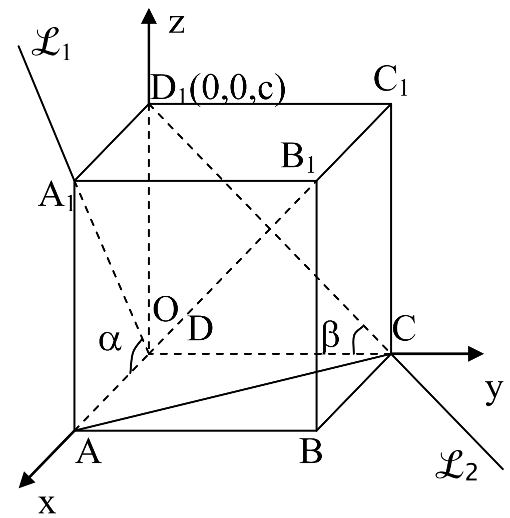


Рис.2.22.

Розв'язання *1)*Вибір системи координат (як на рис. 2.22).

2) $\mathcal{L}_1$: $\frac{x}{\ell_1} = \frac{y}{m_1} = \frac{z}{n_1}$

$\mathcal{L}_2$: $\frac{x}{0} = \frac{y}{m_2} = \frac{z-c}{n_2}$. 3) Площина основи має рівняння: π: z=0. За формулою (2.39)

$$\sin\alpha = \sin(\mathcal{L}_1,\pi) = \frac{\ell_1\cdot 0 + 0\cdot 0 + n_1\cdot 1}{\sqrt{\ell_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{1}} = \frac{n_1}{\sqrt{\ell_1^2+n_1^2}};$$

$$\sin\beta = \frac{n_2}{\sqrt{\ell_2^2+n_2^2}};$$

Косинус кута між прямими знайдемо за формулою (2.27):

$$\cos(\widehat{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}) = \frac{\ell_1\cdot 0 + 0\cdot m_2 + n_1\cdot n_2}{\sqrt{\ell_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}} = \frac{n_1 n_2}{\sqrt{\ell_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}} = \sin\alpha\cdot\sin\beta .$$

2.4.13. *Виміри прямокутного паралелепіпеда a, b, c. Знайти відстань між діагоналлю паралелепіпеда і мимобіжною з нею діагоналлю основи.*

Розв'язання.

1) Вибір системи координат (як у попередній задачі).

2) A(a;0;0); C(0;b;0); D(0;0;0); B_1(a;b;c).

3) $(AC): \frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{0}$; $(DB_1): \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

$$4)\ \rho\,(AC, CD_1) = \frac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ - & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b & 0 \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & - \\ c & a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} - & b \\ a & b \end{vmatrix}^2}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{\sqrt{b^2c^2 + \ ^2c^2 + \ a^2b^2}}.$$

2.4.14. *Ребро основи правильної чотирикутної піраміди має довжину 10 см, висота рівна 12 см. Знайти кут між бічним ребром і площиною основи.*

Розв'язання. Направимо вектори $\vec{i}$ і $\vec{j}$ прямокутної декартової системи координат по ребрах AB і AD піраміди $ABCDE$ (рис. 2.23). Тоді точка A матимекоординати $(0; 0; 0)$, а точка E – координати $(5; 5; 12)$. Запишемо рівняння прямої $AE: \frac{x}{5} = \frac{\ }{5} = \frac{\ }{12}$

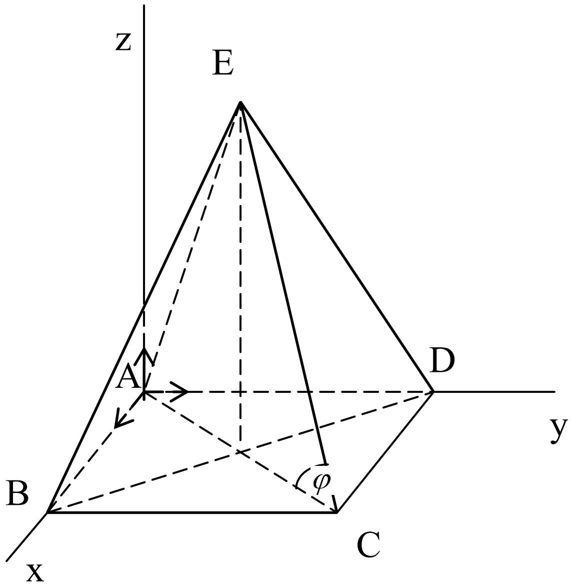


Рис.2.23.

Залишається знайти кут між цієї прямою і площиною основи $ABCD$, тобто площиною, рівняння якої $z = \ $.

Застосовуючи формулу (2.39) для синуса кута між прямою і площиною отримуємо:

$$\sin\varphi = \frac{|0 \quad |}{\sqrt{0^2 + \quad + \quad \cdot \quad + \quad + }} = \frac{6\sqrt{194}}{97} \approx \quad .$$

Отже, $\varphi = \arcsin 0{,}8282 \approx \ 5^0 6'$.

Рекомендована література

.[2] §52, ст. 389-398; [16] Ч. 2. Гл. 4. §§1-10, ст. 268-319, Гл. 5. §§6-8, ст. 307-312

Завдання для самостійного розв'язання

4.1 Знайти кут між прямою і площиною, якщо пряма і площина задані відповідно рівняннями:

а) $\frac{x}{2}=\frac{y+}{-}=\frac{z-}{3}$, та $2x+y+z-\;=\;$;

б) $\frac{x-}{5}=\frac{y+}{2}=\frac{z-}{3}$, та $2x+\;y-\;z+\;=\;$.

в) $x=\;-t,\; y=\;-\;t,\; z=\;t$, та $2x+\;y-\;z+\;=\;$.

г) $\begin{cases} y=\;x-\;, \\ z=\;x+\;. \end{cases}$, та $2x+y+z-\;=\;$.

4.2. При яких значеннях B і t пряма $x=5-3t,\; y=9+4t,\; z=-2+\;t$ перпендикулярна до площини $6x+By-\;0z+\;=\;$?

4.3. Знайти точку перетину прямої і площини:

а) $\frac{x-}{1}=\frac{y+}{-}=\frac{z}{6}$, і $2x+\;y+z-\;=\;$;

б) $\frac{x+}{3}=\frac{y-}{-}=\frac{z+}{-}$, і $x-\;y+z-\;5=\;$;

в) $\frac{x+}{-}=\frac{y-}{3}=\frac{z-}{2}$, і $x+\;y-\;z+\;=\;$;

г) $\frac{x+}{2}=\frac{y-}{4}=\frac{z}{3}$, і $3x-\;y+\;z-\;=\;$;

д) $\frac{x-}{5}=\frac{y-}{14}=\frac{z-}{4}$, і $3x-y+\;z-\;=\;$.

4.4. Перевірити, чи належить пряма:

а) $\frac{x-}{2}=\frac{y+}{-}=\frac{z+}{5}$ площині $4x+\;y-z+\;=\;$;

б) $\frac{x-}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z-}{3}$ площині $5x-\;y-\;z-\;=\;$;

в) $\frac{x+}{3}=\frac{y-}{4}=\frac{z}{1}$ площині $3x-\;y-z+\;5=\;$.

4.5. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(1;-3;5)$ перпендикулярно до площини $x + 6y - 5z - 17 = 0$.

4.6. Записати параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку

$M_1(3;-6;7)$ перпендикулярно до площини $x+\ y-\ z-\ =\ $, і знайти точку їх перетину.

4.7. Записати рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярна до прямої, якщо:

а) $M_1(5;7;-1)$, $\mathcal{L}: \dfrac{x-}{2} = \dfrac{y}{-} = \dfrac{z+}{-\ }$;

б) $M_1(1;-2;1)$, $\mathcal{L}: \begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0; \end{cases}$

в) $M_1(1;-1;-1)$, $\mathcal{L}: x = \ +\ t,\ y = \ -\ t,\ z = \ +\ t$.

4.8. Записати рівняння площини, яка проходить через точку M_1 та пряму $\mathcal{L}$, якщо:

а) $M_1(3;1;-2)$, $\mathcal{L}: \dfrac{x-\ }{5} = \dfrac{y+\ }{2} = \dfrac{z}{1}$;

б) $M_1(1;1;1)$, $\mathcal{L}: \begin{cases} 4x-y+3z-1=0, \\ x+5y-z+2=0; \end{cases}$

в) $M_1(2;-2;1)$, $\mathcal{L}: x = \ +\ t,\ y = \ -\ t,\ z = \ +\ t.$

4.9. Записати рівняння площини, яка проходить через пряму $x = \ t+\ ,\ y = \ t+\ ,\ z = \ t-\ $ паралельно прямій $\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0. \end{cases}$

4.10. Записати рівняння площини, яка проходить через пряму $\dfrac{x+}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-\ }{-}$ паралельно прямій $x = \ -\ ,\ y = \ +\ t,\ z = \ +\ t$.

4.11. Записати рівняння площини, яка проходить через пряму $\mathcal{L}$ перпендикулярно до заданої площини, якщо:

а) $\mathcal{L}: \dfrac{x-}{-\ } = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{1}$, $\qquad \mathcal{L}: 3x+\ y-z-z=\ $;

б) $\mathcal{L}: \dfrac{x-\ }{5} = \dfrac{y-}{1} = \dfrac{z+}{2}$, $\qquad \mathcal{L}:\ x+\ y-\ z+\ =\ $.

4.12. Записати рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі:

а) $\frac{x+\ }{3}=\frac{y-\ }{-\ }=\frac{z}{1}\ \ i\ \ \frac{x-\ }{6}=\frac{y+\ }{-\ }=\frac{z-\ }{2};$

б) $x=\ t+\ ,\ y=\ t+\ ,\ z=t-\ $ і $\begin{cases}x+3y+z+2=0,\\ x-y-3z-2=0;\end{cases}$

в) $x=\ -\ t,\ y=\ +\ t,\ z=\ +\ 2t$ і $\frac{x-\ }{-\ }=\frac{y-\ }{3}=\frac{z}{12};$

г) $\frac{x-\ }{3}=\frac{y+\ }{2}=\frac{z-\ }{-\ }\ \ i\ \ \frac{x-\ }{3}=\frac{y-\ }{2}=\frac{z+\ }{-\ }.$

4.13. Довести, що наведені прямі лежать в одній площині та записати її рівняння, якщо:

а) $\frac{x-\ }{2}=\frac{y+\ }{-\ }=\frac{z-\ }{4}\ \ i\ \ \frac{x-\ }{3}=\frac{y-\ }{2}=\frac{z-\ }{-\ };$

б) $\frac{x-\ }{3}=\frac{y+\ }{2}=\frac{z-\ }{-\ }\ \ i\ \ \frac{x-\ }{3}=\frac{y-\ }{2}=\frac{z+\ }{-\ };$

в) $x=\ t-\ ,\ y=\ t-\ ,\ z=\ t+\ $ і $x=t+\ ,\ y=\ t-\ ,\ z=t-\ ;$

г) $\frac{x}{2}=\frac{y-\frac{3}{2}}{1}=\frac{z-\ }{-\ }\ \ i\ \ \frac{x+\ }{1}=\frac{y-\ }{-\ }=\frac{z}{1}.$

4.14. Знайти проекцію точки $M_1(3;-4;-2)$ на площину, яка проходить через дві прямі $\frac{x-\ }{13}=\frac{y-\ }{1}=\frac{z+\ }{-\ },\ \frac{x-\ }{13}=\frac{y-\ }{1}=\frac{z+\ }{-\ }.$

4.15. Обчисліть відстань від точки $M_1(1;2;-1)$ до прямої:

а) $\frac{x-\ }{2}=\frac{y+\ }{-\ }=\frac{z}{1};$

б) $x=\ +\ t,\ y=\ -\ ,\ z=\ -\ t;$

в) $\begin{cases}x-2y+z=0,\\ 2x+y+2z-1=0.\end{cases}$

4.16. Обчислити відстань d від точки M_1 до прямих:

а) $M_1(1;-1;-2),\ \ \frac{x+\ }{3}=\frac{y+\ }{2}=\frac{z-\ }{-\ };$

б) $M_1(2;3;-1)$, $x = t + \ , y = t + \ , z = \ t + \ 3$;

в) $M_1(2;3;-1)$, $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0, \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0. \end{cases}$

4.17. Обчисліть відстань між двома паралельними

прямими: $\frac{x}{1} = \frac{y-}{2} = \frac{z-}{1}$, $\frac{x-}{1} = \frac{y+}{2} = \frac{z-}{1}$.

4.18. Переконавшись, що прямі $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ і $\frac{x+}{3} = \frac{y-}{-} = \frac{z-}{4}$

паралельні, обчислити відстань d між ними.

4.19. Знайти найкоротшу відстань d між двома прямими:

1) $\frac{x+}{3} = \frac{y+}{4} = \frac{z+}{-}$, $\frac{x-1}{6} = \frac{y+}{-} = \frac{z-}{-}$;

2) $\frac{x-}{3} = \frac{y-}{-} = \frac{z+}{4}$, $\frac{x+}{3} = \frac{y+}{-} = \frac{z-}{8}$;

3) $\frac{x}{1} = \frac{y-}{4} = \frac{z+}{-}$, $\frac{x-}{2} = \frac{y}{-} = \frac{z+}{9}$;

4) $\frac{x+}{3} = \frac{y-}{-} = \frac{z-}{3}$, $\frac{x-}{1} = \frac{y+}{2} = \frac{z+2}{-}$;

5) $x = \ t - \ , y = \ t + \ , z = \ t - \ ,$

$x = \ t - \ , y = \ t + \ , z = \ t + \ $;

6) $\frac{x+}{3} = \frac{y+}{2} = \frac{z-}{-}$, $x = \ t + \ , y = \ t, z = \ t + \ $;

7) $\frac{x-}{4} = \frac{y+}{-} = \frac{z}{1}$, $\frac{x}{-} = \frac{y+}{9} = \frac{z-}{2}$;

8) $\frac{x+}{4} = \frac{y-}{-} = \frac{z-}{2}$, $\frac{x-}{8} = \frac{y+}{-} = \frac{z+}{3}$.

4.20. Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(1;3;-4)$ відносно площини $3x + y - \ z = \ $.

4.21. Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(3;-4;-6)$ відносно площини, що проходить через точки $M_1(-6;1;-5)$, $M_2(7;-2;-1)$ і $M_3(10;-7;1)$.

4.22. Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(1;1;1)$ відносно площини $x+y-\ z-\ =\ .$

4.23. Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(4;3;10)$ відносно прямої

$$\frac{x-}{2}=\frac{y-}{4}=\frac{z-}{5}.$$

4.24. Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(4;1;6)$ відносно прямої

$$\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$$

4.25. Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(1;1;1)$ відносно прямої

$$\frac{x-}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+}{-}.$$

4.26. Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(1;-2;-6)$ відносно прямої

$$\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-z+2=0. \end{cases}$$

4.27. Дано рівняння прямої $\alpha: \begin{cases} x=2-t, \\ y=2+3t, \\ z=\ -3t, \end{cases}$ і площини $\pi:\ 2x+\ y-z-\ =\ .$

Написати рівняння прямої α' яка проходить через точку $M_1(5;1;-2)$, паралельна площині π і перетинає пряму α

4.28. Написати рівняння ортогональної проекції прямої l, заданої рівняннями: $x=\ -\ t,\ y=\ +\ ,\ z=\ t$, на площину $\pi:\ x-y-z-\ =\ .$

4.29. Дано рівняння прямої α: $x=2t, y=1-\ , z=3+$ і площини $\pi: x+y+z-\ 0=\ .$ Написати рівняння прямої $\alpha\ \subset\ l$, яка перпендикулярна до прямої α і проходить через точку $M=\Pi\cap\ $.

4.30. Дано рівняння прямих α: $x=2+4t,\ y=\ -1+\ , z=1-$ та α: $x=\ +\ t,\ y=\ -\ t,\ z=\ -\ t.$ Довести, що прямі $\alpha\ \alpha$ мимобіжні. Знайти рівняння площини π, паралельної до прямих $\alpha\ \alpha$ і однаково віддаленої від них.

A_1

1. Дані точки: $A(5;- \ ;2)$, $B(2;- \ ,0)$, $C(- \ 2;- \ ,)$ $D(2;4;- \ )$. Написати рівняння спільного перпендикуляра до прямих AB і CD.

4.32. Дано рівняння прямої $\alpha:$ $2x - y - z - \ = \ ,$ $x + y - \ z + \ = \ $ і площини $\pi: x - \ y + z - \ = \ $. Написати рівняння ортогональної проекції прямої l на площину π.

4.33. Знайти координати центра сфери, вписаної в тетраедр, грані якого задаються координатними площинами прямокутної декартової системи координат і площиною $2x + \ y - \ z - \ = \ $.

4.34.Через точки M_1(-6;6;-5) і M_2(12; 6;1) проведена пряма. Знайти точки перетину цієї прямої з координатними площинами.

4.35. Визначити величину кута між прямою l і площиною α :

1) $l: \ \frac{x}{5} = \frac{y-}{2} = \frac{z+}{1}$, $\alpha: \ 5x - y + 2z + 1 = 0;$

2) $l: \ \frac{x}{-} = \frac{y}{0} = \frac{z-}{2}$, $\alpha: x + 2y - z - 4 = 0.$

4.36. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку D перпендикулярно до площини α :

1) $D(-8; 0; 5)$ $\alpha: 4x - y + 8z - 3 = 0;$

2) $D(1; 7; 15)$ $\alpha: -x + y - 10z = 0.$