РОЗДІЛ І. МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТОРІ

§ 1. Лінії та поверхні в просторі. Геометричний зміст рівнянь і нерівностей

Теоретичні відомості

Поверхню, задану рівнянням $\mathcal{F}(x;y;z)=0$, називають ***геометричним місцем точок*** простору, координати яких задовольняють це рівняння і ця множина не містить жодної точки, координати якої, не задовольняють дане рівняння.

Часткові випадки рівнянь поверхні:

- уявна поверхня $(x^2+y^2+z^2+16=0$. - уявна сфера)

- уявна поверхня з дійсними точками

$((x-1)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=0$. - одна дійсна точка (1;-4;1))

- уявна поверхня з дійсною прямою $(x^2+z^2=0$ - вісь *oy)*.

Теорема 1.1. Рівняння з однією змінною в просторі задає систему дійсних або уявних площин, паралельних тій координатній площині, яка відповідає відсутнім змінним.

Наприклад, рівняння $\mathcal{F}(y)=0$ задає систему дійсних або уявних площин, які паралельні координатній площині xoz.

Теорема 1.2. Якщо ліву частину рівняння $S: F(x;y;z)=0$ можна подати, як добуток двох (або більше) функцій, то це рівняння задає дві(або більше) поверхні, дійсні або уявні, тобто поверхня S розпадається на дві(або більше) поверхонь.

Крива в просторі задається як перетин двох поверхонь, тому її рівняння

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x;y;z)=0, \\ \mathcal{F}_2(x;y;z)=0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Геометричний зміст нерівності в просторі визначаємо аналогічно до того, як ми це робили у випадку площини.

1) Розглянемо поверхню $S : F(x;y;z)=0$. Якщо точка $M \in$, то вона задовольняє рівняння, іншими словами: якщо $F(x;y;z)>0$ (чи $F(x;y;z)<0$) то точка $N \notin$, тобто $\delta_{N(x_0;y_0;z_0)} = F(x_0;y_0;z_0) \neq 0$.

Який геометричний образ визначає задана нерівність? Як і для випадку площини розглянемо поверхню $S : F(x;y;z)=0$. Вона розбиває простір на дві області - внутрішню і зовнішню. Можна довести, що для кожної із областей має зміст одна із нервностей $F(x;y;z)>0$ або $F(x;y;z)<0$. Щоб вияснити, яка нерівність яку із областей задає потрібно у фіксованій області взяти фіксовану точку і обчислити відхилення δ цієї точки від площини. Який знак в числа δ, такого змісту нерівність задає цю область.

Система нерівностей задає переріз областей, що задаються кожною нерівністю системи.

Метод перерізів при вивченні форм поверхонь

Щоб зобразити поверхню в системі координат, зручно користуватися методом перерізів. Суть його полягає в перетині поверхні, координатними площинами або площинами, паралельними їм.

Нехай поверхня S задана $S : F(x;y;z)=0$

1) Перетнемо поверхню координатною площиною $x=0$. Отримаємо *фронтальну* проекцію поверхні – криву $\gamma_1 : F(0;y;z)=0$ на координатну площину yoz. (Ця крива зображається в натуральну величину).
2) Перетнемо поверхню *горизонтальною* площиною z=0. Отримаємо $\gamma_2 : F(x;y;0)=0$.
3) Перетнемо поверхню *профільною* площиною y=0. Отримаємо $\gamma_3 : F(x;0;z)=0$. Часто цих кривих достатньо, щоб зобразити каркас поверхні і мати уявлення про її форму. Якщо ж цього не вистачає, то

потрібно перетинати поверхню площинами, паралельними відповідним координатним доки не складеться уявлення про поверхню.

Дві основні задачі аналітичної геометрії простору

I основна. Задано рівняння, система рівнянь, нерівність або система нерівностей. Вияснити, який геометричний образ заданий відповідним аналітичним виразом і які його властивості; зобразити у вихідній системі координат. Цю задачу ми далі будемо розв'язувати для поверхонь другого порядку.

II основна. Задана геометрична фігура своїми геометричними властивостями; записати її аналітичне задання.

Зауваження. Що стосується поверхонь, то задача складання рівнянь розв'язується за тією ж схемою, що і задача складання рівнянь ліній на площині:

1) доцільно вибираємо систему координат;
2) беремо біжучу точку $M(x; y; z)$, яка має задані властивості;
3) записуємо основні співвідношення, що пов'язують дані і шукані точки;
4) записуємо співвідношення в координатах;
5) виконуємо необхідні перетворення, доки отримаємо найпростіше рівняння;
6) доводимо, що отримане рівняння задає ту множину точок, що має задані властивості, і лише ту;

Одним із способів доведення є такий: візьмемо деяку точку $N(x_1; y_1; z_1)$, яка не належить геометричній фігурі, заданій властивостями і покажемо, що її координати не задовольняють отримане рівняння.

Розв'язання задач

I тип

Геометричний зміст рівнянь та системи рівнянь в просторі

1.1.1. *Дослідити поверхню* $x^2 - y^2 - 2x + 4y -$ [illegible] $= 0$;

Розв'язання. Запишемо ліву частину рівняння у вигляді:

$(x^2 - x + \ ) - \ y^2 - \ y + \ ) = \ ;$ Звідки $(x - \ )^2 - \ y - \ )^2 = \ ;$

$(x - \ + y - \ )(x - \ - y + \ ) = \ ;$ $(x + y - \ )(x - y + \ ) = $

У лівій частині рівняння маємо добуток двох функцій, тобто поверхня розпадається на дві площини π : x+ y -3=0 та π : x-y+1=0 (теорема.7.2)

1.1.2. *Знайти множини точок простору, які визначаються наступними рівняннями:*

а) $x + \ =$

б) $x^2 + \ + \ + \ =$

в) $x^2 + \ + \ =$

г) $x^2 + \ + \ =$

д) $x^2 + \ =$

Розв'язання. Рівняння а) визначає площину, яка проходить через точку $M_0(-$ і паралельна координатній площині yoz (рис. 1.1).

Позначимо через $\vec{r_0}$ вектор з координатами $(-$. Тоді має місце

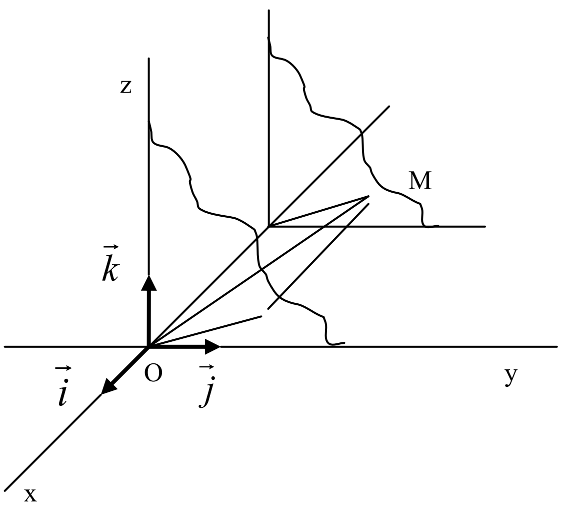

Рис. 1.1

рівність $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\ M_1} + \overrightarrow{\ M_0}$ тобто

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\quad} + \vec{\ }$

яка означає, що кожна точка M отримується із відповідної точки M_1 паралельним перенесенням на вектор $\vec{r_0}$. Очевидно, що точка M_1 пробігає всю координатну площину yoz.

Рівняння б) визначає порожню множину точок, тому що при довільних дійсних значеннях x, y, z сума їх квадратів невід'ємна.

Рівняння в) визначає єдину точку, а саме точку $O(0;\,0;\,0)$, тому, що рівність $x^2 + \quad + \quad =$ рівносильна умовам $x = \quad = \quad =$.

Рівняння г) визначає сферу, центр якої знаходиться в початку координат, а радіус рівний 1. Дійсно, відстань точки $M(x;\,y;\,z)$ від початку координат, тобто від точки $O(0;\,0;\,0)$, визначається за формулою $|OM| = \sqrt{\quad + \quad + \quad}$. Вихідне рівняння рівносильне $\sqrt{x^2 + \quad + \quad} =$. Оскільки $|OM| =$, то рівняння г) визначає множину точок, віддалених від початку координат на відстань 1.

Рівняння д) рівносильне відношенню $x = \quad =$. Третя координата z може бути при цьому довільною. Тому дане рівняння визначає множину всіх точок, які лежать на осі oz.

1.1.3. *Знайти множину точок, яка визначається рівнянням* $y^2 - \quad =$

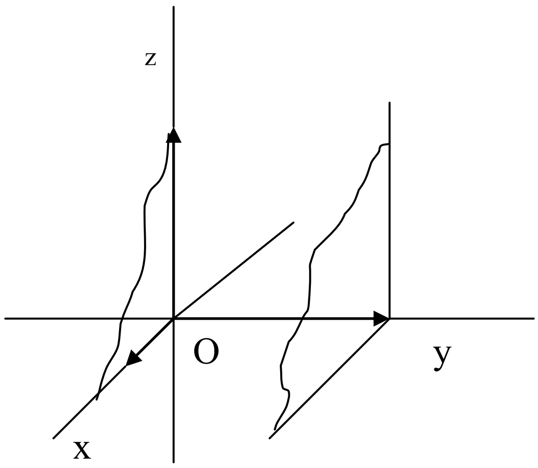

Рис. 1.2

Розв'язання. Переписавши дане рівняння у вигляді $y(y - \quad = \quad$, отримаємо, що воно справедливе тоді і тільки тоді, коли $y =$ або $y - \quad =$. Рівняння $y =$ визначає координатну площину xoz, рівняння $y - \quad =$ визначає площину, яка паралельна площині Oxz і проходить через точку $M_0(0;\,1;\,0)$.

Відповідно шукана множина є об'єднанням вказаних паралельних площин (рис.1.2)

1.1.4. *Знайти множину точок, яка визначається рівнянням*

$$\frac{x}{|x|} + \frac{\quad}{|y|} + \frac{\quad}{|z|} =$$

Розв'язання. Ні x, ні y, ні z не можуть бути рівними нулю, оскільки ділити на нуль не можна. При довільних додатних значеннях координат дане рівняння задовольняється , тому, що модуль додатного числа рівний цьому числу, і значить відношення цих чисел рівне 1. Якщо хоча б одне із чисел x, y, z від'ємне, то відношення такого числа до його абсолютної величини рівне $-$, і вказана сума відношень не рівна 3.

Отже, дане рівняння визначає множину точок, які розміщені у внутрішній області першої координатної чверті.

1.1.1. Дослідити поверхню а) $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+14=0$;

б) $x^2+y^2+z^2-4z+5=0$; $x^2+y^2+(z-2)^2=-1$.

Розв'язання. а) Запишемо ліву частину рівняння у вигляді $x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9=0$; Виділивши повні квадрати, отримаємо $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=0$. Це уявна поверхня з дійсною точкою $(1;2;3)$.

б) $x^2+y^2+(z-2)^2=-1$. Це - уявна сфера з центром в точці (0;0;2), радіус якої рівний 1.

1.1.6. *Дослідити особливості фігури* F*, яка визначається рівнянням* $F(x;y;z)=$ *де* $F(x,y,z)$ *– однорідна функція. Функція* $F(x,y,z)$ *називається* ***однорідною*** *функцією степеня* n*, якщо при довільних значеннях* x, y, z, λ *виконується рівність* $F(\lambda x;\lambda y;\lambda z)=\lambda^n F(x;y;z)$.

Розв'язання. Покажемо, що фігура F містить початок координат. Дійсно, за означенням $F(0;0;0)=$ 0),

Звідси випливає, що $(\lambda -$ $=$.

Але, оскільки λ може набувати довільні значення, то остання рівність повинна виконуватись і при $\lambda \neq$. Звідси слідує, що $F(0;0;0)=$, що і потрібно було довести.

Припустимо, що існує відмінна від початку координат точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, яка належить фігурі F. Тоді $F(x_0;y_0;z_0)=$, а значить і

$F(\lambda$ λ λ $=$ $=$

Відповідно, точка $M'(\lambda x_0; \lambda y_0; \lambda z_0) \in F$ при довільному значенні λ. Множина точок M' при всіх можливих значеннях λ утворює пряму OM, тому, що $\overline{OM'} = \lambda\overline{OM}$. Таким чином, фігура F складається із прямих, які проходять через одну точку $O(0; 0; 0)$. Така фігура називається *конічною поверхнею* з вершиною в початку координат.

1.1.7. *Яка поверхня задана рівнянням*

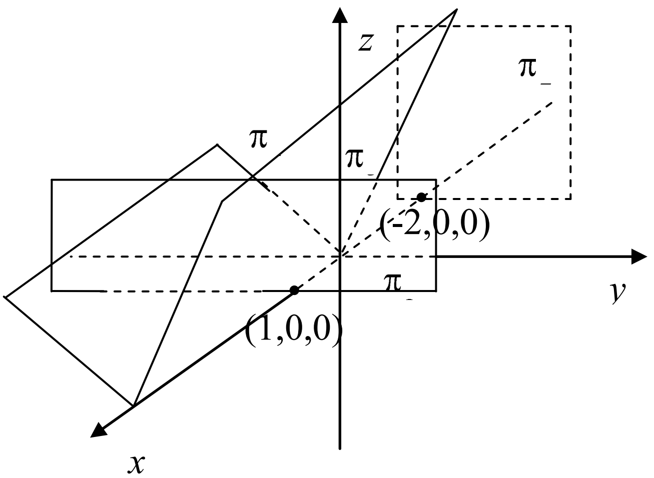

Рис.1.3

$$x^2y^2 - x^2z^2 + xy^2 - xz^2 - 2y^2 + 2z^2 = 0?$$

Розв'язання. Виконаємо тотожне перетворення лівої частини рівняння, а саме:

$$x^2y^2 - x^2z^2 + xy^2 - xz^2 - 2y^2 + 2z^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 + x - 2)(y^2 - z^2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(y-z)(y+z) = 0.$$

За теоремою 1.3, рівняння задає чотири площини (рис.1.3):

π_1: x-1=0, π_2: x+2=0, π_3: y-z=0, π_4: y+z=0.

1.1.8. *Зобразити поверхню, задану рівнянням:* $x^2 + y^2 - 2z = 0$.

Розв'язання. Застосуємо метод перерізів

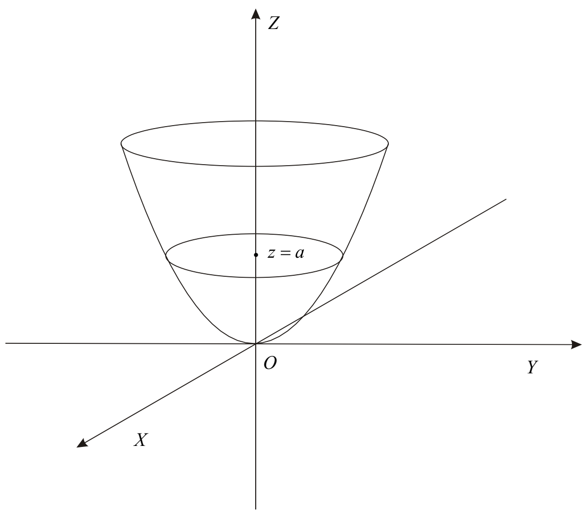

Рис. 1.4

1) $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2z \end{cases}$ – парабола в площині yoz,

2) $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ – точка $O(0;0;0)$ в площині xoy не дає уявлення про поверхню, тому перетнемо площиною $z = a$, паралельною площині xoy:

3) $\begin{cases} z = a \\ x^2 + y^2 = 2a \end{cases}$ O $-$ кола з центрамив точках *(0;0;a),* радіуса $\sqrt{2a}$,

4) $\begin{cases} z = -a \\ x^2 + y^2 = -2a \end{cases}$ $-$ точок не існує,

1) $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2z \end{cases}$ $-$ парабола в площині xoz.

Отримали поверхню обертання, зображену на рис.1.4.

1.1.9. *Дослідити методом перерізів поверхню* $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення у лівій частині даного рівняння

$(2x^2 - 8x + 8) + (3y^2 + 6y + 3) + (z^2 - 4z + 4) - 18 = 0$;

$(\sqrt{2}x - 2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}y + \sqrt{3})^2 + (z - 2)^2 = 18$;

$2(x - 2)^2 + 3(y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 18$;

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{6} + \frac{(z-2)^2}{18} = 1.$$

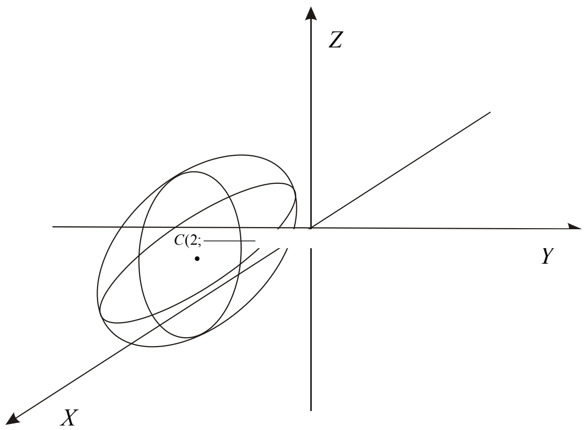

Рис.1.1

Скористаємось методом перерізів:

$$\begin{cases} x = 2; \\ \dfrac{(y+1)^2}{6} + \dfrac{(z-2)^2}{18} = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y = -1; \\ \dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(z-2)^2}{18} = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} z = 2; \\ \dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{6} = 1 \end{cases}.$$

В усіх перерізах – еліпси.

Отже, дане рівняння задає **еліпсоїд** з центром в точці $C(2;-1;2)$ (рис.1.1).

1.1.10. *Дати геометричне тлумачення системи рівнянь*

$$\begin{cases} \quad + \quad + \quad - \quad = \\ \end{cases}$$

Розв'язання. Координати деякої точки задовольняють систему рівнянь тоді і лише тоді, коли ця точка належить перетину поверхонь, що визначаються рівняннями системи. В розглядуваному випадку перше рівняння визначає сферу радіуса 1 з центром в початку координат (рис. 1.6), друге - площину

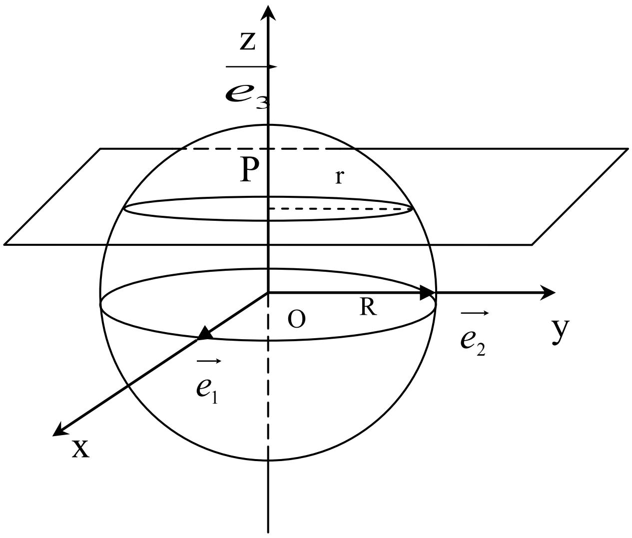

Рис.1.6.

$z=\frac{1}{2}$, яка паралельна площині Oxy. Перетином цих поверхонь є коло, центр якого, в силу перпендикулярності площини $z=\frac{1}{2}$ і осі Oz, має координати $\left(\quad \right)$, а радіус рівний $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (оскільки $z=\frac{1}{2}$, координати x і y довільної точки цього кола задовольняють рівняння $x^2 + \quad = \frac{3}{4}$).

1.1.11. *Вияснити, по якій лінії площина* $x-2=0$ *перетинає поверхню* $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=$ *знайти її півосі та вершини*.

Розв'язання. Лінія перетину даних еліпсоїда і площини визначається такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1; \\ x-2=0 \end{cases}$$

Це є рівняння еліпса, що лежить у площині $x=2$. Центр його міститься в точні $O_1(2;0;0)$, відповідні півосі: $b=3, c=\sqrt{3}$.

Вершинами цього еліпса є точки:

$$A_1(2;3;0), A_2(2;- \ ;0), B_1(2;0;\sqrt{3}), B_2(2;0;-\sqrt{3}).$$

II тип

Геометричний зміст нерівності та системи нерівностей

1.1.12. *Який геометричний зміст нерівності* $x^2 + y^2 \le 2z$?

Розв'язання. Розглянемо спочатку поверхню, задану відповідним рівнянням $x^2 + y^2 = 2z$, дослідивши методом перерізів:

$$\begin{cases} x = 0; \\ y^2 = 2z; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0; \\ x^2 = 2z, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0; \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} z = h; \\ x^2 + y^2 = h^2 \end{cases}$$

Він

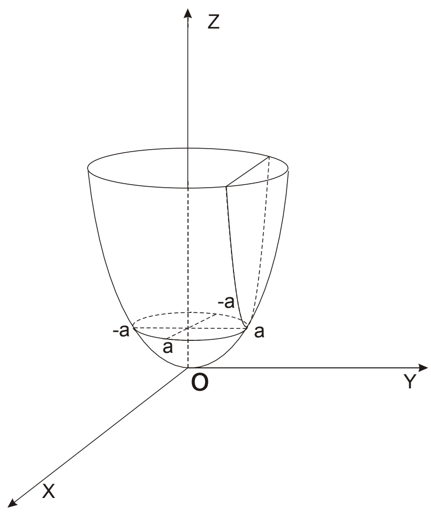

Рис. 1.7

Це параболоїд обертання (рис.1.7). Він розбиває простір на дві частини - внутрішню область параболоїда і зовнішню.

Візьмемо довільну точку з внутрішньої області, наприклад, (0;0;1) і підставимо її координати в дану нерівність: $0^2 + 0^2 \le 2$

Отримуємо правильну числову нерівність.

Отже, даною нерівністю визначається внутрішня область параболоїда обертання.

1.1.13. *Дати геометричне тлумачення системи нерівностей*

$$\begin{cases} \quad < \\ \\ \end{cases}$$

Розв'язання. Перша нерівність системи означає, що шукані точки віддалені від початку координат на відстань меншу за 1 (це внутрішнісь кулі з центром в початку координат (рис.1.3)). Друга нерівність системи задає відкритий півпростір, обмежений площиною $z=\frac{1}{2}$ і який не містить початку координат.

Отже, задана система нерівностей визначає внутрішність кульового сегмента, що міститься над площиною $z=\frac{1}{2}$.

1.1.14. *Зобразити в системі координат фігуру:*

$$\begin{cases} x^2+y^2-2z\le 0, \\ y-z\le 0, \\ z-5\le 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Перша нерівність задає внутрішню область параболоїда обертання (приклад 1.1.11) разом з його контуром. Друга нерівність задає той із півпросторів, на які бісекторна площина ділить простір, якому належить точка (0;0;1). Бісекторна площина перетинає параболоїд по еліпсу (рис.1.8) Дійсно, проекцією цієї лінії на координатну площину xoy є коло $x^2+y^2-2y=0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1$, а в коло ортогонально проектується або коло, або еліпс; взагалі кажучи, еліпс.

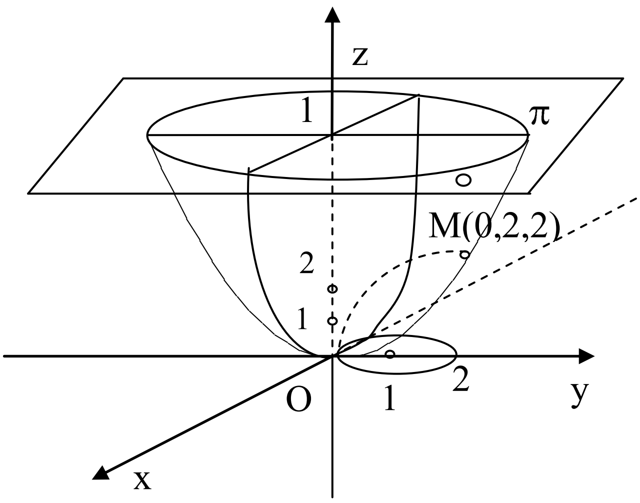

Рис.1.8

Третя нерівність задає той півпростір відносно площини $z-5=0$, в якому лежить точка (0;0;1).

Отже, система нерівностей задає внутрішню область параболоїда, обмежену зверху площиною $z=5$ і збоку площиною $y=z$.

III тип

Задачі на складання рівнянь поверхонь

Ці задачі зручно розв'язувати аналогічно до такого типу задач на площині, тобто за алгоритмом.

1.1.11. *Якою фігурою є множина точок, для яких різниця квадратів відстаней від двох даних точок A і B має стале значення c.*

Розв'язання. Виберемо точку A за початок координат і приймемо пряму AB за вісь абсцис. Тоді точка B буде мати координати $(b;\,0;\,0)$.

Нехай тепер $M(x;\,y;\,z)$ – довільна точка шуканої множини. Тоді

$|MA|^2 - \quad =$ або, записавши це співвідношення в координатах,

$x^2 + \quad + \quad - \quad - \quad - \quad - \quad =$ Звідси: $x = \dfrac{\quad}{2b}$

Отже, шуканою фігурою є площина, яка перпендикулярна до прямої AB і знаходиться від точки A на відстані $\left|\dfrac{c + \;^2}{2в}\right|$.

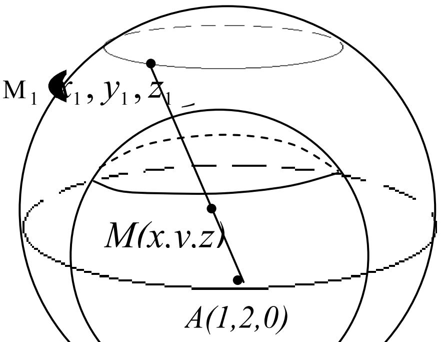

Рис.1.9

1.1.16. *Знайти геометричне місце середин хорд сфери S: $(x - \;)^2 + (y + \;)^2 + z^2 = 25$, які проходять через точку $A(1;2;0)$.*

Розв'язання. Точка A належить сфері: $A \in S$, *бо* $(\; - \;)^2 + (\; + \;)^2 + \;^2 = 25$.

1.Візьмемо біжучу точку $M(x;y;z)$ шуканої множини точок:–. $M_1(x_1; y_1; z_1) \in$ (рис.1.9)

2. Так як M - середина M_1A_1, то

$$x = \frac{5 + x_1}{2};\ y = \frac{2 + y_1}{2};\ z = \frac{0 + z_1}{2} \Rightarrow \Rightarrow \quad = 2x - \;;\quad y_1 = 2y - \;;\quad z_1 = 2z.$$

Оскільки $M_1 \in \;$, то $(2x - 6)^2 + (2y - 1)^2 + 4z^2 = 25 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x - y + \frac{12}{4} = 0 \Leftrightarrow (x - \;)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{25}{4}.$$

Отже, геометричним місцем середин хорд даної сфери, які проходять через дану точку є сферична поверхня з центром $O_1\left(3; \frac{1}{2}; 0\right)$, радіуса $r = \frac{5}{2}$.

1.1.17. *Задані дві точки A і B. Знайти множину точок C, для яких ABC – рівносторонній трикутник.*

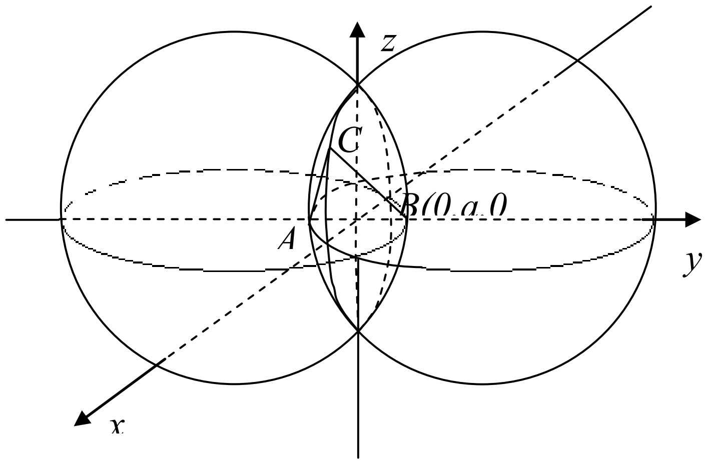

Рис.1.10

Розв'язання. 1. *Вибір системи координат*: вісь oy проведемо через дві дані точки A і B, ;вісь OZ – серединний перпендикуляр до AB, вісь $ox \perp$площині oyz, через середину відрізка AB (рис.1.10)

2. Візьмемо *біжучу точку C*(*x;y;z*).

3. Запишемо основні співвідношення:

$$\begin{cases} AC = AB, \\ BC = AB \end{cases}$$

4. Запишемо ці співвідношення в координатах:

$$\begin{cases} x^2 + (y+a)^2 + z^2 = 4a^2 \\ x^2 + (y-a)^2 + z^2 = 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y+a)^2 + z^2 = 4a^2 \\ 4ay = 0 \end{cases}$$ – це коло в площині xoy з центром в початку координат, радіус якого рівний $\sqrt{3}a$.

Отже, точки цього кола є вершинами C трикутників ABC, які є рівносторонніми.

1.1.18. *Скласти рівняння поверхні правильного октаедра, осі якого співпадають з осями координат* (*рис. 1.11*).

Розв'язання. Розглянемо спочатку ту грань октаедра, яка розміщена в першій чверті (рис.1.4). Нехай $M(x;\, y;\, z)$ – довільна точка грані ABC. З'єднавши точку M З вершинами A, B і C і з початком координат O, розіб'ємо тетраедр $OABC$ на три трикутні піраміди: $MOAC$, $MOBC$ і $MOAB$, основами яких будемо вважати відповідно трикутники

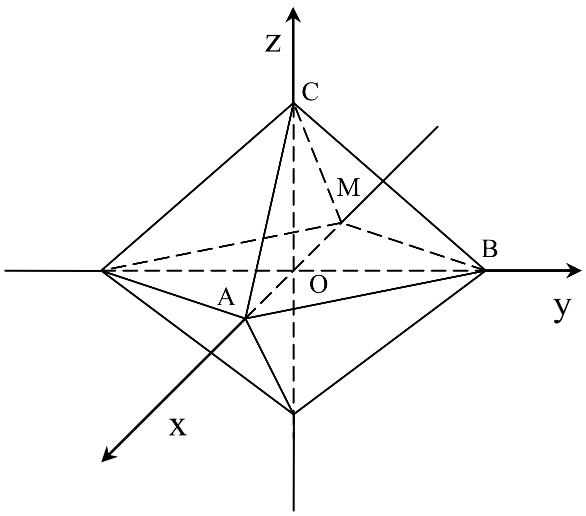

Рис.1.11

OAC, OBC і OAB. Сума об'ємів цих пірамід рівна об'єму тетраедра $OABC$.

Позначимо площі кожного з цих трикутників через s, а відстані $OA = OB = OC$ через a. Тоді, з одного боку, сума об'ємів розглядуваних пірамід буде рівна $\frac{1}{3}sy + \frac{1}{3} \quad + \frac{1}{3} \quad = \frac{1}{3} \quad + \quad + \quad$ а з іншого об'єм – всього тетраедра $OABC$ (якщо прийняти за його основу $\Delta \quad OB$, площа якого рівна s, а за висоту відстань $OC = a$) рівний $\frac{1}{3}sa$.

Прирівнюючи ці значення об'ємів, отримуємо, що для довільної точки $M(x;\, y;\, z)$ грані ABC при $x \geq \quad \geq \quad \geq \quad x + \quad + \quad = \quad$.

При складанні рівнянь поверхонь для інших чвертей, де координати точок можуть мати і від'ємні значення, хід міркувань залишається таким же, за умови використання не самих координат, а їх абсолютних величин.

В результаті отримуємо, що кожна точка $M(x;\, y;\, z)$ октаедра задовольняє рівняння $|x| + \quad + \quad = \quad$, кожен розв'язок якого в свою чергу визначає точку октаедра.

Отже, $|x| + \quad + \quad = \quad$ - це і є рівняння поверхні правильного октаедра.

1.1.19. *Дано точки* $A(x_1; y_1; z_1)$ *і* $B(x_2; y_2; z_2)$. *Довести, що точка* $M(x; y; z)$ *належить відрізку* AB *тоді і тільки тоді, коли її координати виражаються через координати даних точок за формулами:*

$$\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2, \\ y = (1-t)y_1 + ty_2, \text{ де } t \in [0,1] \\ z = (1-t)z_1 + tz_2, \end{cases} \tag{1.2}$$

Розв'язання. Точка $M(x; y; z)$ належить відрізку AB тоді і тільки тоді, коли $\vec{AM} = \ \vec{AB}$, де $0 \leq t \leq \quad$. Звідси

$$\begin{cases} x - x_1 = t(x_2 - x_1), \\ y - y_1 = t(y_2 - y_1), \\ z - z_1 = t(z_2 - z_1), \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2, \\ y = (1-t)y_1 + ty_2, \\ z = (1-t)z_1 + tz_2. \end{cases}$$

IV тип

Знайти рівняння проекції лінії на площину

1.1.20. *Знайти рівняння проекції лінії перетину поверхонь:* $\begin{cases}(x-2)^2+(y+4)^2+z^2=16;\\ x^2+y^2-z^2=0,\end{cases}$ *на площину* xoy.

Розв'язання. Щоб отримати проекцію лінії перетину поверхонь на координатну площину, потрібно із заданої системи виключити ту змінну, яка не входить в координатну площину. Отримаємо рівняння з двома змінними, яке задає циліндричну поверхню з твірною, паралельною тій координатній осі, яка відповідає виключеній змінній. Шуканою проекцією є переріз цієї поверхні з координатною площиною.

В результаті таких перетворень отримаємо:

$(x- \ )^2+\ y- \ )^2-\ 6+x^2+y^2=\ ;\ 2x^2-\ x+\ +\ y^2+\ y+\ 6-\ 6=\ ;$

$x^2-\ x+\ +y^2+\ y=\ ;\ x^2-\ x+\ +y^2+\ y+\ =\ ;\ (x-\ )^2+\ y+\ )^2=\ ;$

Отже, проекцією лінії перетину даних поверхонь є точка (1;-1) у площині xoy.

1.1.21. *Знайти проекцію на площину* xoy *лінії перетину поверхні* $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=$ з площиною $x=\ z$.

Розв'язання. Запишемо систему рівнянь, яка визначає дану лінію:

$\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1;\\ x=2z,\end{cases}$ звідки $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{16}=\ \Rightarrow \frac{y^2}{16}-\ =\ \Rightarrow \ \frac{y}{4}-\ )(\frac{y}{4}+\ )=\ .$

Отримаємо дві прямі $y=\ ,\ y=\ .$

Рекомендована література

[2] §42-46, с. 273-303; [7] §6-9; [12] Розділ 11. §19-61, с. 191-199; [16] Ч. 2. Гл. 3. §1-7, с. 260-268

Завдання для самостійного розв'язання

З'ясувати, які геометричні образи простору відповідають рівнянням:

1.1. $x^2 + y^2 + z^2 = [illegible].$

1.2. $2x^2 + y^2 + [illegible]z^2 = [illegible].$

1.3. $x^2 + y^2 + z^2 - [illegible]x - [illegible]y + [illegible]z - [illegible]9 = [illegible].$

Вияснити форму лінії γ, заданої системою рівнянь:

1.4. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$

1.1. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 0 \end{cases}.$

1.6. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49, \\ y = 0 \end{cases}.$

1.7. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 25 = 0 \end{cases}.$

1.8. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20, \\ z - 2 = 0 \end{cases}.$

1.9. Записати рівняння лінії перетину двох сфер, одна з яких має радіус $R_1 = 6$ і центр у початку координат, а друга має радіус $R_2 = 1$ і центр в точці $M_0(1;-2;2)$.

1.10. Знайти центри та радіуси кіл:

1) $x^2 + y^2 = [illegible], z = [illegible];$

2) $y^2 + z^2 = [illegible]6, x = [illegible];$

3) $x^2 + z^2 = [illegible], y = -[illegible].$

1.11. Дослідити, які геометричні образи визначаються рівняннями:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; 2) $x^2 + y^2 = 1$; 3) $x^2 = 1$;

4) $x^2 - y^2 = 0$; 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; 6) $x^2 + y^2 = 0$;

7) $x^2 = 0$; 8) $xyz = 0$; 9) $y - \sqrt{3z} = 0$.

1.12. Дослідити, які геометричні образи визначають системами рівнянь:

1) $\begin{cases}(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=25,\\ y+1=0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}z=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2},\\ x-y=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1,\\ x-2=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3x^2-y^2+5xz=0,\\ z=0.\end{cases}$

1.13. Знайти рівняння проекції кола $\begin{cases}x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25\\ x^2+y^2+z^2=16\end{cases}$

на площину: 1) oxy; 2) oxz.

1.14. Знайти рівняння проекції кола $\begin{cases}(x+\text{[illegible]})^2+(y+\text{[illegible]})^2+(z-\text{[illegible]})^2=\text{[illegible]}6\\ x^2+(y+\text{[illegible]})^2+(z-\text{[illegible]})^2=\text{[illegible]}6\end{cases}$.

на площину: 1) oxy; 2) oyz.

1.11. Знайти проекцію кривої на площину xoy.

$$\begin{cases}-9y^2+6xy-2zx+24x-9y+3z-63=0,\\ 2x-3y+z=9.\end{cases}$$

1.16. Знайти проекцію кривої $\begin{cases}x^2+z^2+3yz-2x+3z-3=0;\\ y-z+1=0\end{cases}$ на площину *oxz*.

1.17. Знайти геометричне місце точок, що знаходяться на відстані чотирьох одиниць від площині *oyz* і на відстані трьох одиниць від точки *A* (1; 2; -1).

1.18. Записати рівняння площини, знаючи, що точки *A* (4; 0; –3) і *B*(1;–1;2) симетричні відносно цієї площини.

1.19. Знайти геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки і даної площини.

1.20. Знайти геометричне місце точок, сума відстаней яких від двох даних точок *P* (*c*; 0; 0) і *Q* (– *c*; 0; 0) є величина стала, рівна 2*a*.

1.21. Дано точки M_1(2;1; 12), M_2(1; 0; 0), M_3(-1;-1; 4), M_4(-14; 22; 0), M_1(1;-1; 12), M_6(0;0; 1) і площини: а)2*x* - 2*y* + *z* +1=0, б)*x* – 2*z* + 12=0, в)*x* – 1*y* 13*z* +1=0, г) *x* + *y* +4*z* -1=0, д) *x* + 1*y* +*z* + 21=0.

Для кожної із даних площин серед вказаних точок вибрати ті точки, які лежать по один бік від площини, що і початок координат.

1.22. Дана площина $3x - y + 4z + 1=0$. Вказати, які з пар точок, що перераховані нижче, лежать по один бік від даної площини: а) $O(0;0;0)$ і $A(2;1; 0)$;
б) $A_1(1; 2; 1)$, $A_2(1; 11;-1)$;
в) $B_1(-1; 2;-1)$, $B_2(-11; 1;0)$; г) $C_1(1; \sqrt{2} ; 1)$ і $C_2(1; 11;-11)$.

1.23. Дано вершини трикутника $A(2;1;-1)$, $B(1;-1;-11)$, $C(-2;1;3)$. Вияснити, які із сторін трикутника перетинаються кожною із координатних площин.

1.24. Дано вершини тетраедра $A(1; 1;0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0;0; 0)$ і $D(1; 1; 7)$. Записати лінійні нерівності, які задають внутрішню область тетраедра.

1.21. Дано вершини тетраедра $A(-1; 1; 0)$, $B(-2; 2; 0)$, $C(-2; 0; 0)$, $D(-1; 1; 7)$. Вияснити, які з вказаних нижче точок розміщені у внутрішній області тетраедра: $M_1(2; 3;-1)$, $M_2(-\frac{8}{6};\frac{10}{6};\frac{7}{6})$, $M_3(0; 0; 1)$, $M_4(-\frac{14}{9};\frac{19}{9};\frac{35}{18})$.

1.26. Дано дві площини, які перетинаються в прямокутній декартовій системі координат, $x -$ [illegible] $y +$ [illegible] $z +$ [illegible] $=$ [illegible] і $2x - y + z +$ [illegible] $=$ [illegible]. Вияснити, які із точок, що вказані нижче, належать внутрішнім областям тупих двохгранних кутів, утворених даними площинами: A (0;0; 1), B (0; 0;-10), C (1; 0;-2), D (2; 1; 0), E (1; 1; 1).

1.27. Записати за допомогою лінійних нерівностей аналітичне задання внутрішньої області трикутної призми $ABOA_1B_1O_1$, якщо $A(0; 2; 0)$, $B(0; 0; 2)$, $A_1(1; 2; 0)$, $O_1(1; 0; 0)$, $B_1(1; 0; 2)$.

1.28. Записати за допомогою лінійних нерівностей аналітичне задання внутрішньої області тетраедра $OABC$, якщо $A(1; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$.

1.29. Довести, що точки A, B, C і D належать одній площині:

1) A (3;1;1), B (–2;1;–2), C (–3;–1;0), D (2;0;1,7);
2) A (–2;1;–2), B (–1;1;1), C (0;4;–1), D (–2;4;–3).

1.30. Вектор $\vec{a}$ є напрямним для прямої $\mathcal{L}$. Паралельно до $\mathcal{L}$ побудовані проекції A_1, A_2, A_3 точки $A(-3;2;1)$ на координатні площини. Визначити координати цих проекцій, якщо 1) $\vec{a}$ (2;1;–1); 2) $\vec{a}$ (–1;1;2).

1.31. Дано точки $A_1(-7;3;-2)$, A_2 (0;2;1), A_3 (4;–1;0), A_4(–1;–3). Довести, що $R' = (A_1; A_2; A_3; A_4)$ – репер, і визначити його орієнтацію, враховуючи вихідний репер додатно орієнтованим.

§ 2. Основні задачі в просторі

Теоретичні відомості

Основні задачі в просторі такі ж як і на площині і розв'язуються аналогічно. Орієнтація простору визначається орієнтацією базисного репера.

Нехай дано дві системи координат $oxyz$ та $o'x'y'z'$ причому $\vec{e_1}' = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{e_2}' = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{e_3}' = \{x_3; y_3; z_3\}$ $O'(a;b;c)$, то координати x, y, z точки M відносно системи $oxyz$ через координати $x'y'z'$ тієї ж точки відносно $o'x'y'z'$ виражаються за формулами:

$$\begin{cases} x = x_1x' + x_2y' + x_3z' + a, \\ y = y_1x' + y_2y' + y_3z' + b, \\ z = z_1x' + z_2y' + z_3z' + c. \end{cases} \tag{1.3}$$

Якщо обидві системи координат прямокутні, то матриця

$$C = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

ортогональна, тобто сума квадратів елементів одного рядка рівна 1, а сума добутків відповідних елементів двох паралельних рядків рівна нулю. В цьому випадку x_1, y_1, z_1 є косинусами кутів $\alpha \ \ \alpha \ \ \alpha$ одиничного вектора $\overrightarrow{e_1}'$ в системі $oxyz$, x_2, y_2, z_2 - косинуси кутів $\beta\ ,\beta\ ,\beta$ одиничного вектора $\overrightarrow{e_2}'$ в системі $oxyz$, x_3, y_3, z_3 - косинуси кутів $\gamma\ ,\gamma\ ,\gamma$ одиничного вектора $\overrightarrow{e_3}'$ в системі $oxyz$.

Формули перетворення набирають вигляду:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha\ + y'\cos\alpha\ + z'\cos\alpha\ + a, \\ y = x'\cos\beta\ + y'\cos\beta\ + z'\cos\beta\ + b, \\ z = x'\cos\gamma\ + y'\cos\gamma\ + z'\cos\gamma\ + c. \end{cases} \tag{1.1}$$

Зокрема поворот задається формулами:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha\ + y'\cos\alpha\ + z'\cos\alpha \\ y = x'\cos\beta\ + y'\cos\beta\ + z'\cos\beta \\ z = x'\cos\gamma\ + y'\cos\gamma\ + z'\cos\gamma\ . \end{cases} \tag{1.6}$$

Звідки

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha\ + y\cos\alpha\ + z\cos\alpha \\ y' = x\cos\beta\ + y\cos\beta\ + z\cos\beta \\ z' = x\cos\gamma\ + y\cos\gamma\ + z\cos\gamma\ . \end{cases} \tag{1.7}$$

Розв'язування задач

I тип

Перетворення координат

1.2.1. *Побудувати точку* $A\left(\ ;2;-\ .5\right)$ *за її координатами в прямокутній декартовій системі координат.*

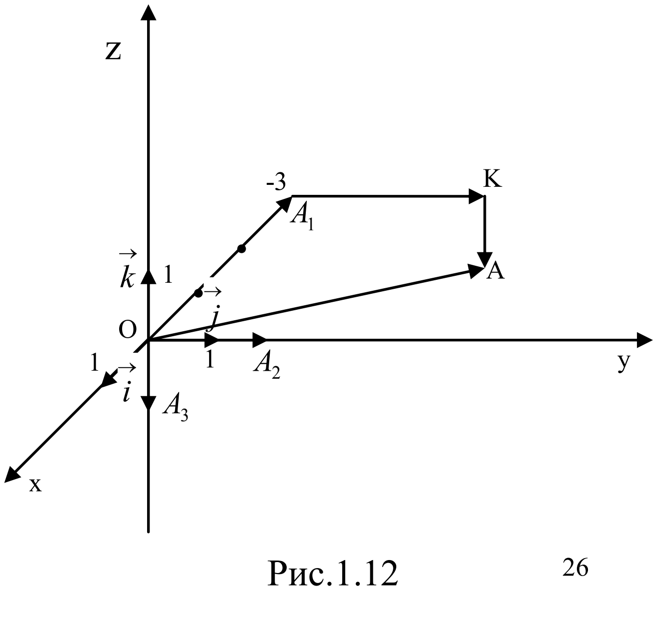

Рис.1.12

Розв'язання. Вектор $\vec{OA}$ можна подати у вигляді (за означенням)

$\overrightarrow{OA} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 1.5\vec{k}$,

$\overrightarrow{OA_1} = -3\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = 2\vec{j}$,

$\overrightarrow{OA_3} = -1.5\vec{k}$.

З другого боку: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1K} + \overrightarrow{KA}$, де $\overrightarrow{A_1K} = \overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{OA_3}$ (Рис.1.12).

Отже, для побудови точки A будуємо радіус-вектор суми векторів $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1K} + \overrightarrow{KA}$. Для цього: з точки O будуємо $\overrightarrow{OA_1} = -3\vec{i}$, з точки A_1 будуємо вектор $\overrightarrow{A_1K} = \overrightarrow{OA_2}$, з його кінця точки K будуємо вектор $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{OA_3}$. Кінець побудованого вектора-суми і є точка A.

1.2.2. *Перевірити, чи точка* O' *– і вектори* $\vec{e}_1'(4;3;-\ )$, $\vec{e}_2'(0;1;5)$, $\vec{e}_3'(-\ ;0;1)$ *визначають в просторі афінну систему координат. Знайти координати точок* $P(0;3;26)$, $Q(6;5;-\ )$, $S(2;3;-\ )$ *в новій системі координат.*

Розв'язання. Покажемо, що $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ можна прийняти за базис нової афінної системи координат. Для цього достатньо перевірити, що визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & - \\ & & 5 \\ - & & \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля. Оскільки $\Delta = - \ \neq$ то $R' = (\ldots)$ є афінним репером. Якщо x, y, z і $x', \ldots$ координати довільної точки M відносно старої і нової системи координат, то ці координати зв'язані наступними формулами:

$$\begin{cases} \ldots + \ldots + \ldots \\ \ldots + \ldots + \ldots \\ \ldots + \ldots + \ldots \end{cases}$$

де $(c_{11}; c_{21}; c_{31}), (c_{12}; c_{22}; c_{32}), (c_{13}; c_{23}; c_{33})$ – координати векторів $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ відповідно відносно базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ і $(x_0; y_0; z_0)$ – координати точки O' відносно репера $R = (\ldots; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

У цій задачі формули набирають вигляду:

$$\begin{cases} \quad - \quad + \\ \quad + \quad + \\ \quad + \quad + \quad - \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} \quad + \\ \quad + \\ \quad + \quad + \quad - \end{cases}$$

знаходимо нові координати точки $P(x' \ ' \ ')$ $x' = -$ $y' =$ $z' = -$ Аналогічно знаходяться координати точок Q і S.

1.2.3. *Нехай $ABCD$ – деякий тетраедр і нехай точка M має координати x, y, z відносно репера $R =$ $\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$ та координати $x' \ ' \ '$ відносно репера $R' =$ $\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD})$. Знайти залежність між тими та іншими координатами точки M (рис. 1.13).*

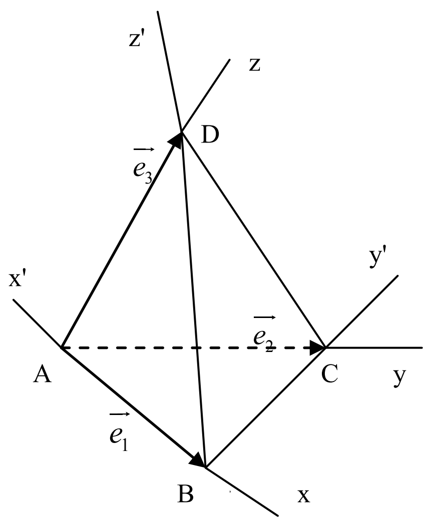

Рис.1.13

Розв'язання. Звернемось до формул:

$$\begin{cases} \quad + \quad + \\ \quad + \quad + \\ \quad + \quad + \end{cases}$$

які пов'язують координати однієї і тієї ж точки відносно двох різних реперів. У нашому випадку $\vec{e'_1} = \overrightarrow{} = -\overrightarrow{} = -\vec{}$, так що $\vec{e'_1} = -$.

Отже, $c_{11} = -$ $c_{21} =$, $c_{31} =$.

Далі: $\vec{e'_2} = \overrightarrow{} = \overrightarrow{} - \overrightarrow{} = \vec{} - \vec{}$ так що $\vec{e'_2} = -$. Отже, $c_{12} = -$, $c_{22} =$, $c_{32} =$ і $\vec{e'_3} = \overrightarrow{} = \overrightarrow{} - \overrightarrow{} = \vec{} - \vec{}$, так що $\vec{e'_3} = -$. Отже, $c_{13} = -$, $c_{23} =$, $c_{33} =$.

Крім того зауважуємо, що $B(1;\,0;\,0)_R$, так, що $x_0 =$ $=$ $=$.

Таким чином, отримуємо формули:

$$\begin{cases} \quad - \quad + \\ \\ \end{cases}$$

1.2.4. *Нехай* $R = \quad \vec{k})$ *і* $R' = \quad$ *– два прямокутні декартові репери, причому*

$(\widehat{\vec{i},\vec{i}'}) = \quad = \quad = \quad (\widehat{\vec{j},\vec{i}'}) = \quad = \quad =$

$(\widehat{\vec{k},\vec{i}'}) = \quad = \quad =$ *і* O' $)$. *Знайти залежність між координатами* x, y, z *довільної точки* M *відносно репера* R *і координатами* x' $'$ $'$ *тієї ж точки* M *відносно репера* R'.

Розв'язання. Скористаємось формулами:

$$\begin{cases} \quad - \quad + \quad + \\ \quad + \quad + \quad + \\ \quad - \quad + \quad + \end{cases}$$

У введених позначеннях: $\vec{i}' = \quad + \quad + \quad$.

Домножуючи дві частини цієї рівності на $\vec{i}$, отримуємо: $\vec{i}' \cdot \quad =$, тому, що $\vec{i}^2 = \quad \cdot \quad = \quad \cdot \quad =$.

Отже, $\quad c_{11} = \cdot \quad = \quad = \quad$.

Точно так само знаходимо, що

$c_{12} = \quad = \quad = \quad = \quad$ і так далі.

Тому шукані формули перетворень прямокутної декартової системи координат мають вигляд:

$$\begin{cases} \quad + \quad + \quad + \\ \quad + \quad + \quad + \\ \quad + \quad + \quad + \end{cases}$$

1.2.1. *Репер* R' *отриманий з прямокутного декартового репера* R *поворотом навколо осі* Oz *на кут* α (*рис.1.14*). *Написати відповідні формули перетворення координат.*

Розв'язання. В даному випадку $x_0 = \quad = \quad = \quad .$

Знайдемо кути, утворені осями вказаних систем координат (рис.1.14):

$\alpha = \quad = \quad = \quad = \frac{}{2} + \quad = \quad = \frac{}{2}$

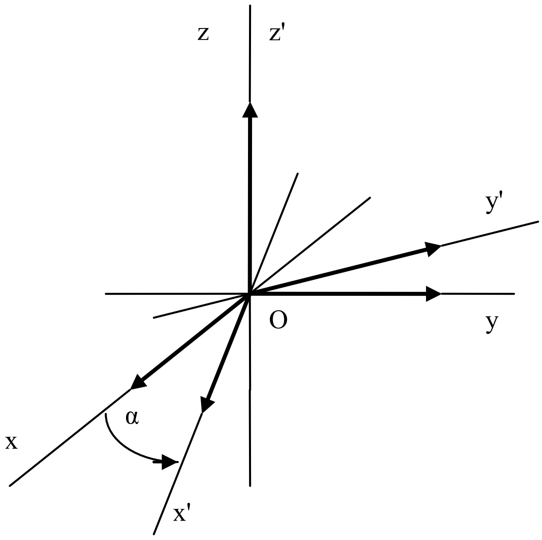

Рис.1.14

$\beta = \quad = \frac{}{2} - \quad = \quad =$

$\beta = \quad = \frac{}{2}$

$\gamma = \quad = \frac{}{2} \quad = \quad = \frac{}{2}$

$\gamma = \quad =$

Підставляючи ці значення кутів у формули, отримані в попередній задачі, знайдемо:

$$\begin{cases} = \quad - \\ = \quad + \\ = \end{cases}$$

1.2.6. *Дано точки* $A(x_1, y_1, z_1)$ *і* $B(x_2, y_2, z_2)$. *Довести, що точка* $M(x; y; z)$ *належить відрізку* AB *тоді і тільки тоді, коли її координати виражаються через координати даних точок формулами:*

$$\begin{cases} \quad + \\ \quad + \\ \quad + \end{cases}$$

де $t \in \quad .$

Розв'язання. Точка $M(x; y; z)$ належить відрізку AB тоді і тільки тоді, коли $\overline{AM} = \quad$, де $0 \le \quad \le \quad$. Звідси:

$$\begin{cases} - \\ - \\ - \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} + \\ + \\ + \end{cases}$$

II тип

Відшукання центра ваги

1.2.7. *Центром ваги трикутника є точка перетину його медіан. Знайти координати центра ваги трикутника ABC з вершинами* $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.

Розв'язання. Для знаходження координат центра ваги P трикутника ABC потрібно подати вектор $\vec{OP}$ у вигляді лінійної комбінації базисних векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Так як $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ і $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1, \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overline{AA'}$, де A' – середина BC, то залишається виразити вектор $\overrightarrow{AA'}$ через базисні вектори.

$$\overline{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overline{BA'}\ \overrightarrow{AB} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1, \overline{BA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{e}_3 - \vec{e}_2).$$

Значить,

$$\overline{AA'} = (\vec{e}_2 - \vec{e}_1) + \frac{1}{2}(\vec{e}_3 - \vec{e}_2) = -\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3.$$

Далі:

$$\overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3, \overrightarrow{OP} = \vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3 = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3.$$

Отже, координати центра ваги трикутника $P\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

1.2.8. *Центр куба, довжина ребра якого рівна 1, знаходиться в початку прямокутної декартової системи координат, а ребра відповідно паралельні осям координат. З куба видалена частина t, яка розміщена в першому октанті. Знайти центр ваги отриманого тіла T.*

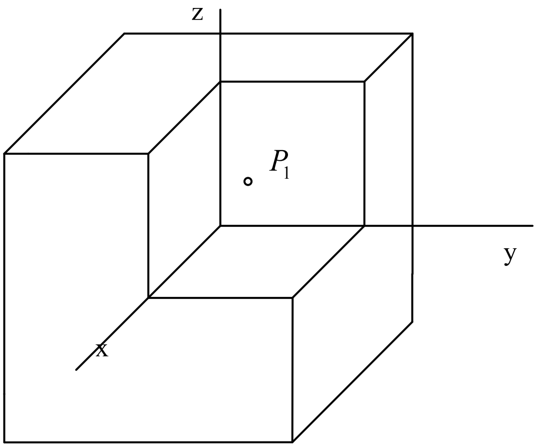

Рис.1.11

Розв'язання. Центр ваги куба знаходиться в початку координат, центр ваги його видаленої частини t – в точці $P_1\left(\quad \right)$ (рис.1.11). Позначимо центр ваги тіла T через $P_2(x;\, y;\, z)$.

Центр ваги куба можна розглядати як центр ваги об'єднання матеріальних точок P_1 і P_2. Якщо масу тіла t прийняти за 1, то маса тіла T буде рівна семи одиницям.

У зв'язку з цим центр ваги повного куба, тобто точка 0, буде ділити відрізок P_1P_2 у відношенні $\lambda = \quad = \quad$, і тому

$0 = \frac{\frac{1}{\cdot} +}{1 +}$ Звідси $x = -\frac{1}{28}$

Аналогічно, знаходимо, що $y = -\frac{1}{28} \quad = -\frac{1}{28}$.

Отже, центр ваги отриманого тіла має координати:

$$x = -\frac{1}{28} \;\; y = -\frac{1}{28} \quad = -\frac{1}{28}.$$

III тип

Основні задачі в просторі

1.2.9. *Знайти відношення, в якому кожна з площин координат ділить відрізок AB*: $A(2;\, -1;\, 7)$, $B(4;\, 1;\, -2)$.

Розв'язання. Розглянемо точки поділу відрізка в кожній з координатних площин і за їх координатами знайдемо відповідні відношення:

а) M_1 є xoy; $z=0$; $\frac{\overrightarrow{AM_1}}{\overrightarrow{M_1B}} = \; l$.

Запишемо тільки для координати z формулу відшукання координат точки, що ділить відрізок у даному відношенні:

$$\frac{0-\ '}{-\ ;-\ )}=\frac{-\ '}{-\ ;}=\frac{7}{2};$$

б) M_2 є xoz, $y=0$; $\dfrac{\overrightarrow{AM_2}}{\overrightarrow{M_2B}}=$.

Тут запишемо тільки для координати y:

$$\frac{0+}{5-\ )}=\frac{1}{5};$$

в) M_3 є yoz, $x=0$; $\dfrac{\overrightarrow{AM_3}}{\overrightarrow{M_3B}}=$.

Запишемо тільки для координати x:

$$\frac{0-\ ;}{4-\ )}=-\frac{1}{2}.$$

Отже, площина xoy ділить даний відрізок у відношенні $\frac{7}{2}$, площина xoz - у відношенні $\frac{1}{5}$, площина yoz - у відношенні $-\frac{1}{2}$.

1.2.10. *Трикутник ABC заданий координатами вершин* $A(\ ;-\ 4)$, $B(\ ;2;-\ )$, $C(-\ ;0;2)$. *Обчислити довжину його медіани, бісектриси та висоти, проведених з вершини A.*

Розв'язання. Нехай точка $M(x;y;z)$- основа медіани AM (рис.1.16). Знайдемо її координати:.

$$x=\frac{-\ +\ }{2}=-\ ;\quad y=\frac{2}{2}=\ ;\quad z=\frac{2-\ }{2}=-\ .$$

Тоді координати вектора $\overrightarrow{AM}(-\ ;2;-\ )$ і його довжина $|AM|=\sqrt{9+\ +\ 6}=\ .$

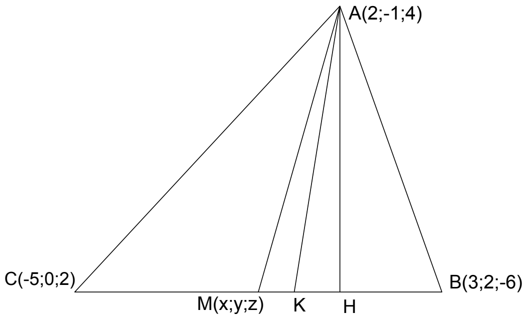

Рис. 1. 16

Розглянемо бісектрису AK, $K(x_1; y_1; z_1)$ - її основа. Запишемо координати векторів $\overrightarrow{AC}(-\ ;1;-\ )$; $\overrightarrow{AB}(1;3;-10)$. Обчислимо їх довжини та знайдемо відношення, за яким визначимо координати точки поділу К:

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{49 + \ + \ } = \sqrt{54}$,

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1 + 9 + 100} = \sqrt{110}$, оскільки $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = \lambda$, то $\lambda = \sqrt{\dfrac{54}{110}} = \sqrt{\dfrac{27}{55}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{55}}$.

Тоді точка *К* має координати:

$$x_1 = \frac{-\ + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{55}} \cdot 3}{1 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{55}}} = \frac{-\ \sqrt{55} + \ \sqrt{3}}{\sqrt{55} + \ \sqrt{3}}; \quad y_1 = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{55}} \cdot 2}{1 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{55}}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{55} + \ \sqrt{3}};$$

$$z_1 = \frac{2 - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{55}} \cdot 6}{1 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{55}}} = \frac{2\sqrt{55} - 8\sqrt{3}}{\sqrt{55} + \ \sqrt{3}}.$$

За координатами кінців бісектриси – точок А і К можемо знайти її довжину. AH – висота., точка $H(x_2; y_2; z_2)$ - її основа; $\overrightarrow{CB}(8;2;-\ )$; $\overrightarrow{AH}(x_2 - 2; y_2 + \ ; z_2 - 4)$; $\overrightarrow{CH}(x_2 + 5; y_2; z_2 - 2)$.

Так як висота перпендикулярна до основи, то $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, і так як $\overrightarrow{CH} \| \overrightarrow{CB}$, то можемо записати систему рівнянь, з якої знайдемо координати точки

$$H:\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AH}=0;\\ \overrightarrow{CH}\parallel\overrightarrow{CB},\end{cases};\quad \begin{cases}8(x_2-2)+2(y_2+1)-8(z_2-4)=0;\\ \dfrac{x_2+5}{8}=\dfrac{y_2}{2}=\dfrac{z_2-2}{-8};\end{cases};$$

$$\begin{cases}8x_2+2y_2-8z_2+18=0;\\ 2x_2+10=8y_2;\\ -8y_2=2(z_2-2);\end{cases}$$

$$8(4y_2-5)+2y_2-8(-4y_2+2)+18=0;$$

$$32y_2-40+2y_2+32y_2+2=0;$$

$$66y_2=38;$$

$$y_2=\frac{19}{33}.$$

Отже, точка H має координати:

$$\begin{cases}x_2=-\dfrac{89}{33};\\ y_2=\dfrac{19}{33};\\ z_2=-\dfrac{10}{33}\end{cases}$$

Тоді, $\overrightarrow{AH}(-\frac{89}{33}-2;\frac{19}{33}+1;-\frac{10}{33}-4)$; $\overrightarrow{AH}(-\frac{155}{33};\frac{52}{33};-\frac{142}{33})$, а довжина висоти

$$\left|\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{\frac{24025+2704+20164}{33^2}}=\sqrt{\frac{46893}{33^2}}=\frac{7\sqrt{957}}{33}.$$

Рекомендована література

[3] Гл. VI. §17, [16] Ч. II, Гл.II, [7] Розділ 1, п.2

Завдання для самостійного розв’язання

2.1. Показати, що в загальній декартовій системі координат координати центра ваги трикутника рівні середнім арифметичним відповідних координат вершин. Знайти координати центра ваги трикутників: а) $A_1(1;-3;4)$, $B_1(2;-2;-1)$, $C_1(0;-1;3)$; б) $A_2(7;1;4)$, $B_2(3;0;2)$, $C_2(2;2;1)$.

2.2. Довести, що координати центра ваги системи матеріальних точок $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_2(x_3;y_3;z_3)$, … , $A_n(x_n;y_n;z_n)$, в яких зосереджені маси m_1, $m_2,\ldots,m_k$, визначають з відношеннь:

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},$$

$$y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},$$

$$z=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\ldots+m_nz_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

2.3. Знайти координати центра ваги системи матеріальних точок в кожному з наступних випадків:

а) A_1(3;0;3), A_2(-1;2;1), A_3(2;1;4), A_4(1;-2;-1); m_1=10г, m_2=11г, m_3=30г, m_4=21г;

б) A_1(1;-1;3), A_2(0;1;4), A_3(-3;1;2), A_4(1;0;6), A_5(0;0;0); m_1=1г, m_2=1г, m_3=2г, m_4=2г m_5=3г.

2.4. Довести, що точки $A(-\ ;0;2)$, $B(\ ;2;4)$, $C(6;0;2)$, $D(4;-\ 1)$ є вершинами трапеції.

2.1. Знайти точку, що ділить відрізок M_1M_2, кінці якого M_1 (–3;2;4) і $M_2(\ ;0;1)$, 1), у співвідношенні: 1) λ = 2; 2) λ = $-\frac{3}{4}$. Система координат афінна.

2.6. На прямій, що проходить через точки M_1 (1;2;4) і M_2 (–1;4;3), знайти точку, що лежить в площині xoz. Система координат афінна.

2.7. Відрізок AB розділений на 1 рівних частин: відома перша точка поділу C (3; –1; 7) і остання F (–2; 4; 8). Визначити координати кінців відрізка і інших точок поділу.

2.8. Дано дві вершини трикутника: A (–4;–1; 2) і B (3;1;– 16). Знайти третю вершину C, якщо середина сторони AC лежить на осі oy, а середина сторони ВС – на площині xoz.

2.9. Знайти відношення, в якому кожна з координатних площин ділить відрізок *AB*: *A* (2; –1; 7) і *B* (4;1;–2).

2.10. Дано дві прямі: одна з них проходить через точки *A* (–3;1;11) і *B*(0;0;7), а інша через точки C (2;–1;4) і D (4;–3;0). Дізнатися, чи перетинаються ці прямі, а якщо перетинаються, то знайти точку перетину.

2.11. Дано дві точки *A* (8;–6;7) і *B* (–20; 11; 10). Встановити, чи перетинає пряма *AB* яку-небудь із координатних осей.

З'ясувати, які геометричні образи простору відповідають рівнянням:

2.12. $(x- \;)^2 + y^2 + (z + \;)^2 = 6$.

2.13. $x^2 - \;x - y^2 - \;y + z^2 = \;$.

2.14. $x^2 + y^2 + z^2 - \;z = \;$.

2.11. Записати рівняння поверхні, сума квадратів відстаней кожної точки з яких до точок $F_1(-a,0,0)$ і $F_2(a,0,0)$ дорівнює сталому числу $4a^2$.

Вияснити, які геометричні образи визначають у просторовій системі координат рівняння:

2.16. $x^2+z^2=21$.

2.17. $\frac{y^2}{15}+\frac{z^2}{16}=1$.

2.18. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}= \;$.

2.19. $6z = \;^2$.

2.20. $x^2 + \;^2 = \;x$.

2.21. $z = \; - \;^2$.

2.22. $y = \;x^2$.

2.23. $z^2 + \;^2 = \;y$.

2.24. Дано трійки точок:

а) A_1(3; 2; 1), B_1(1; 3; -2), C_1(1; 1; 4);

б) A_2(1;-3; 1), B_2(3;-1; 7), C_2(0; 4; 3);

в) $A_3(-1; 0; 4)$, $B_3(2; 3; 1)$, $C_3(8;9;-1)$;

г) $A_4(3; 0;-8)$, $B_4(1; 3; 4)$, $C_4(0;-2; 1)$.

Вказати серед них трійку точок, котрі лежать на одній прямій.

2.21. Виявснити, які з даних чотирьох точок лежать в одній площині:

а)$A_1(0; 0;-1)$, $B_1(-\frac{1}{2}; 0;-\frac{1}{2})$, $C_1(0; 1; 2)$, $D_1(1; 1; 1)$;

б)$A_2(1; 7; 8)$, $B_2(3; 1; 6)$, $C_2(-1; 4; 4)$, $D_2(0; 7; 6)$;

в) $A_3(1; 1; 0)$, $B_3(-1; 2;-1)$, $C_3(0;-1; 0)$, $D_3(-3;-3; 2)$;

г) $A_4(1; 2; 2)$, $B_4(0; 3; 3)$, $C_4(2;-1;-1)$, $D_4(-1;-2; 2)$.

2.26. Дано чотири точки: $A(2; 4; 3)$ і $B(0; 0; 1)$, $C(4; 1; 6)$ і $D(-2; 3; 2)$. Довести, що прямі AB і CD перетинаються і знайти їх точки перетину.

2.27. В прямокутній декартовій системі координат знайти відстань між точками:

$A_1(1; 2; 3)$ і $A_2(1;-2; 0)$, $B_1(2;-3; 1)$ і $B_2(1;-3; 8)$, $C_1(-1;-1; 0)$ і $C_2(2; 3; \sqrt{5})$. Знайти відстань від початку координат до точок $M(1;-3; \sqrt{15})$, $N(0;2; 3)$, $P(3; \sqrt{7};-3)$, $Q(1;-1;6)$.

2.28. В прямокутній декартовій системі координат дано вершини трикутника: $A(2;-1; 4)$, $B(3;2; -6)$, $C(-1;0; 2)$. Обчислити довжину його медіани, проведеної з вершини А.

2.29. В прямокутній декартовій системі координат дано чотири точки: $M_1(0;1;-1)$, $M_2(1;0;1)$, $M_3(-1;1;0)$, $M_4(1;-1; 1)$. Знайти точку, рівновіддалену від кожної із даних точок.

2.30. На прямій l взяті послідовно точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_1, A_6 так, що $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_1=A_1A_6$. Знаючи координати точок $A_3(1;-1; 2)$ і $A_1(2; 1;-4)$, визначити координати інших точок.

2.31. На прямій, що проходить через точки $A(1; 0; 4)$ і $B(3;-1; 2)$, знайти точку C таку, щоб $AC=3AB$ і В лежала між A і C.

2.32. Записати відношення, в якому кожна з координатних площин ділить відрізок AB: $A(2;-1;7)$ і $B(4; 1;-2)$.

2.33. Якщо у вершинах тетраедра помістити однакові маси, то центр ваги даної системи називається *ценртроїдом* тетраедра. Довести, що координати центроїда дорівнюють середньому арифметичному відповідних координат вершин.

2.34. Знайти центр ваги стержневого правильного тетраедра, заданого координатами своїх вершин.

2.31. Дано точки А (2;–1;7), В (4;1;–2). Знайти відношення, в якому кожна координатна площина ділить відрізок $\overline{AB}$.

В задачах 2.36 – 2.40 система координат прямокутна декартова.

2.36. Пряма (*AB*) перетинає координатні площини *oxy* і *oyz* в точках *M* і *N*. Обчислити довжину відрізка *MN*, якщо:

1) *A* (2;1;1), *B* (–2;0;3),

2) *A* (–3;1;1), *B* (0;–1;2).

2.37. В ортонормованому репері дано вершини *A*(4;1;–2), *B*(2;0;0), *C*(–2;3;–1) трикутника *ABC*, *AD* – бісектриса його внутрішнього кута. Знайти координати точки *D* і довжину відрізка *AD*.

2.38. Діагональ *OD* прямокутного паралелепіпеда утворює кут 60^0 з ребрами *OA* і *OB*. Який кут вона утворить з ребром *OC*?

2.39. Обчислити координати ортогональної проекції C_1 точки *C* на пряму *AB*:

1) *A* (2;–1;0), *B* (–1;3;1), *C* (0;1;–1);

2) *A*(3;1;1), *B* (–2;1;–1), *C* (1;–1;2).

2.40. Вершини трикутника знаходяться в точках *A* (1;2;–4), *B* (4;0;–10), *C* (–2;6;8). Знайти внутрішні кути цього трикутника.