

УДК 517.5

К.В. Соліч (Інститут математики НАН України, Київ)

K.V. Solich

**Оцінки білінійних наближень
класів $S_{p,\theta}^\Omega B$ періодичних функцій двох змінних**

**The Estimates of bilinear approximations
of classes $S_{p,\theta}^\Omega B$ of periodic functions of two variables**

Одержано точні за порядком оцінки найкращих білінійних наближень класів $S_{p,\theta}^\Omega B$ періодичних функцій двох змінних у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p, q, θ .

Получены точные по порядку оценки наилучших билинейных приближений классов $S_{p,\theta}^\Omega B$ периодических функций двух переменных в пространстве L_q для некоторых соотношениях между параметрами p, q, θ .

We are obtained exact-order estimates of the best bilinear approximations of classes $S_{p,\theta}^\Omega B$ of periodic functions of two variables in the space L_q at different relations between parameters p, q, θ .

Вступ.

Роботу присвячено дослідженню білінійних наближень класів $S_{p,\theta}^\Omega B$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p, q, θ . У вступі дається означення класів та коротко історія їх дослідження в окресленому напрямку, у другій частині містяться допоміжні твердження. Основною є третя частина, де викладені отримані результати щодо оцінок найкращих білінійних наближень.

Нехай $d \in \mathbb{N}$ і \mathbb{R}^d означає d -вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi; \pi]$, — простір 2π -періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p , $1 \leq p < \infty$, (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$) функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$. Норма в цьому просторі визначається наступним чином:

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Підмножину функцій $f \in L_p(\pi_d)$, для яких виконується умова

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d},$$

позначимо через $L_p^\circ(\pi_d)$.

Означимо простори $S_{p,\theta}^\Omega B \subset L_p(\pi_d)$, властивості яких визначаються за допомогою: $\Omega(t)$, $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d$, — мажорантної функції для мішаного модуля неперервності l -го порядку ($l \in \mathbb{N}$) функції $f \in L_p(\pi_d)$; числових параметрів p і θ , $1 \leq p, \theta \leq \infty$.

Отже, для довільної функції $f \in L_p(\pi_d)$ покладемо

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j = \overline{1, d}}} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p$$

— мішаний модуль неперервності порядку l функції f , де $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \dots \Delta_{h_1}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\dots (\Delta_{h_1}^l f(x)))$, $h = (h_1, \dots, h_d)$, — мішана l -та різниця з кроком h_j за змінною x_j , $j = \overline{1, d}$.

Тут

$$\Delta_{h_j}^l f(x) := \sum_{n=0}^l (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Нехай далі $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l , яка задовольняє наступні умови:

- 1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;
- 2) $\Omega(t)$ неперервна на \mathbb{R}_+^d ;

3) $\Omega(t)$ неспадає по кожній змінній $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$, при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i , $i \neq j$;

4) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \leq C \left(\prod_{j=1}^d m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, $C > 0$ — деяка стала.

Множину таких функцій Ω позначимо через $\Psi_{l,d}$. У випадку $d = 1$ пишемо — Ψ_l . Зауважимо, що якщо $f \in L_p(\pi_d)$, то $\Omega_l(f, \cdot) \in \Psi_{l,d}$.

Підпорядкуємо функції $\Omega \in \Psi_{l,d}$ додатковим умовам, які опишемо в термінах двох понять, запроваджених С.Н. Бернштейном [1]:

а) невід’ємна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in [0; \infty)$ майже зростає, якщо існує стала $C_1 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \leq C_1 \varphi(\tau_2)$, для будь-яких τ_1, τ_2 , $0 \leq \tau_1 < \tau_2$;

б) додатна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0; \infty)$ майже спадає, якщо існує стала $C_2 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \geq C_2 \varphi(\tau_2)$, для будь-яких τ_1, τ_2 , $0 < \tau_1 < \tau_2$.

Нехай $d = 1$ і $\Omega \in \Psi_l^{(1,2)}$, тобто для $\Omega(t)$, $t \geq 0$, виконуються, принаймні, умови 1) і 2).

Будемо писати:

i) $\Omega \in S^\alpha$ ($\alpha > 0$), якщо функція $\frac{\Omega(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при $\tau > 0$;

ii) $\Omega \in S_l$, якщо існує γ , $0 < \gamma < l$, таке, що функція $\frac{\Omega(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при $\tau > 0$.

Умови належності функції Ω до множин S^α і S_l часто називають в літературі умовами Барі-Стечка [2].

При $d > 1$ для функції $\Omega \in \Psi_{l,d}^{(1,2)}$ будемо вважати, що $\Omega \in S^{\alpha,d}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_j > 0$, $j = \overline{1, d}$ (відповідно $\Omega \in S_{l,d}$, $l \in \mathbb{N}$), якщо $\Omega(t_1, \dots, t_d)$ як функція змінної t_j , $j = \overline{1, d}$, при будь-яких значеннях інших змінних t_i , $i \neq j$, належить до множини S^{α_j} (відповідно S_l).

Зауважимо, що у випадку $d = 1$ будемо використовувати позначення $S^{\alpha,1} \equiv S^\alpha$ та $S_{l,1} = S_l$ відповідно.

Покладемо також $\Phi_{\alpha,l}^d = \Psi_{l,d} \cap S^\alpha \cap S_l$.

Отже, нехай $1 \leq p, \theta \leq \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}^d$. Тоді

$$S_{p,\theta}^\Omega B := \{f \in L_p(\pi_d) : |f|_{S_{p,\theta}^\Omega B} < \infty\},$$

де напівнорма $|f|_{S_{p,\theta}^\Omega B}$ визначається співвідношенням

$$|f|_{S_{p,\theta}^\Omega B} = \begin{cases} \left(\int_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup_{t \geq 0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases} \quad (1)$$

Визначимо норму в просторі $S_{p,\theta}^\Omega B$ наступним чином

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^\Omega B} := \|f\|_p + |f|_{S_{p,\theta}^\Omega B}, \quad 1 \leq p, \theta \leq \infty.$$

Наведене означення просторів $S_{p,\theta}^\Omega B$ (з незначною модифікацією) взято із роботи [3]. При $\theta = \infty$ простори $S_{p,\theta}^\Omega B$ (з позначенням $S_p^\Omega H$) уведені і вивчалися в роботі [4].

Шкала просторів $S_{p,\theta}^\Omega B$ є природнім узагальненням шкали просторів Нікольського–Бесова $B_{p,\theta}^r$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, (див., наприклад, [5]) і $S_{p,\theta}^\Omega B \equiv B_{p,\theta}^r$ при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$, $r_j < l$, $j = \overline{1, d}$, (зазначимо, що при $\theta = \infty$, $B_{p,\theta}^r$ — це простори Нікольського H_p^r [6]).

У подальшому ми будемо використовувати порядкові співвідношення. Запис $A \asymp B$ означає двосторонню нерівність між виразами A і B , тобто $C_3 B \leq A \leq C_4 B$, де $C_3, C_4 > 0$ — сталі, значення яких можуть бути різними в різних місцях. Також, якщо $A \leq C_5 B$, $C_5 > 0$, та $A \geq C_6 B$, $C_6 > 0$, будемо писати $A \ll B$ і $A \gg B$ відповідно. Із контексту буде зрозуміло, від яких параметрів ці сталі не залежать. Ми не будемо акцентувати на цьому увагу щоразу при використанні символів " \asymp ", " \ll ", " \gg ".

Сформулюємо необхідні при доведенні одержаних у роботі результатів відомі твердження, що стосуються еквівалентного в сенсі відношення " \asymp " зображення норми $\|f\|_{S_{p,\theta}^\Omega B}$ функцій $f \in S_{p,\theta}^\Omega B$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}^d$.

Ці зображення подаються в термінах визначеного порядку росту p -норм деяких тригонометричних поліномів, які будуються на основі розкладу функції $f \in L_p(\pi_d)$ в ряд Фур'є за тригонометричною системою.

Отже, нехай $f \in L_p(\pi_d)$ і

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}, \quad (k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d,$$

де $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f і для кожного вектора $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$,

$$\rho(s) := \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1, d}\}.$$

В роботі [3] встановлено, що при $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}^d$ для $f \in S_{p,\theta}^\Omega B \cap L_p(\pi_d)$

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^\Omega B} \asymp \begin{cases} \left(\sum_s \Omega(2^{-s})^{-\theta} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup_s \frac{\|\delta_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty, \end{cases} \quad (2)$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$.

Як бачимо, таке зображення норми не охоплює випадки $p = 1$ і $p = \infty$. Деяка модифікація правої частини (2) дозволяє встановити подібне зображення і в цих випадках. Введемо необхідні позначення.

Нехай

$$V_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{2n-k}{n} \cos kt$$

— ядро Валле–Пуссена порядку $2n$ і в точці $x = (x_1, \dots, x_d)$

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)), \quad s = (s_1, \dots, s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}. \quad (3)$$

Якщо $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, то покладемо

$$A_s(f, x) := f * A_s = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t-x) A_s(t) dt, \quad x = (x_1, \dots, x_d). \quad (4)$$

В роботі [7] встановлено, що при $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha, l}^d$ для $f \in S_{p, \theta}^\Omega B \cap L_p^\circ(\pi_d)$ має місце співвідношення

$$\|f\|_{S_{p, \theta}^\Omega B} \asymp \left(\sum_s \Omega(2^{-s})^{-\theta} \|A_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \quad (5)$$

і відповідно в [4] при $\theta = \infty$

$$\|f\|_{S_{p, \infty}^\Omega B} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}. \quad (6)$$

Далі в формулюваннях тверджень задіяно простори $S_{p, \theta}^\Omega B$ у випадку, коли функція Ω має спеціальний вигляд

$$\Omega(t) = \omega \left(\prod_{j=1}^d t_j \right), \quad \omega \in \Phi_{\alpha, l}^1, \quad \alpha > 0. \quad (7)$$

Отже, тут $\omega(\cdot)$ — довільна функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l і $\omega \in \Phi_{\alpha, l}^1$. Згідно попередніх означень зрозуміло, що

$$\omega \in \Phi_{\alpha, l}^1 \implies \Omega \in \Phi_{\alpha, l}^d, \quad \alpha = \underbrace{(\alpha, \dots, \alpha)}_d.$$

Зауважимо, що до множини $\Phi_{\alpha, l}^1$, $l \in \mathbb{N}$, належить, наприклад, функція

$$\omega(u) = \begin{cases} \frac{u^r}{(\log^+ \frac{1}{u})^\beta}, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases}$$

де $\log^+ \tau = \max\{1, \log \tau\}$, $0 < r < l$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Надалі, будемо використовувати термін "клас $S_{p, \theta}^\Omega B$ ", розуміючи одиничну кулю у просторі $S_{p, \theta}^\Omega B \cap L_p^\circ(\pi_d)$, і позначати цю множину функцій так само, як і увесь простір $S_{p, \theta}^\Omega B$.

1. Історія питання та допоміжні твердження. У цьому пункті дамо означення досліджуваної апроксимативної характеристики у випадку функцій багатьох змінних з певною конкретизацією для двовимірного випадку (в загальному випадку функцій $2d$ ($d > 1$) змінних відповідне означення міститься, наприклад, в [8, с. 85]). Також коротко наведемо історичну довідку щодо найкращих білінійних наближень та їх застосувань і сформулюємо допоміжні твердження, які будемо використовувати далі.

Нехай $L_q(\pi_2)$, $q = (q_1, q_2)$ — множина функцій $f(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x_1, x_2)\|_{q_1, q_2} = \| \|f(\cdot, x_2)\|_{q_1} \|_{q_2},$$

де норма обчислюється спочатку у просторі $L_{q_1}(\pi)$, де $\pi := \pi_1$, по змінній $x_1 \in \mathbb{R}$, а потім від результату — по змінній $x_2 \in \mathbb{R}$ у просторі $L_{q_2}(\pi)$. Для $f \in L_q(\pi_2)$ означимо найкраще білінійне наближення порядку M :

$$\tau_M(f)_{q_1, q_2} := \inf_{u_j(x_1), v_j(x_2)} \|f(x_1, x_2) - \sum_{j=1}^M u_j(x_1)v_j(x_2)\|_{q_1, q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}(\pi)$, $v_j \in L_{q_2}(\pi)$ і $\tau_0(f)_{q_1, q_2} := \|f(x_1, x_2)\|_{q_1, q_2}$.

Якщо $F \subset L_q(\pi_2)$ — клас функцій, то покладемо

$$\tau_M(F)_{q_1, q_2} := \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{q_1, q_2}. \quad (8)$$

При $q_1 = q_2 = q$ будемо писати відповідно $\tau_M(f)_q$ і $\tau_M(F)_q$.

Дослідження найкращих білінійних наближень було розпочато ще на початку минулого сторіччя. Так, у 1907 р. Е. Schmidt [9] довів теорему про наближення періодичних функцій двох змінних $f(x, y)$ в L_2 білінійними формами $\sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\psi_k(y)$, де, зокрема, вказав спосіб побудови найкращих білінійних форм.

С.А. Micchelli та А. Pinkus [10], досліджуючи білінійні наближення деяких функцій двох змінних, заданих на квадраті $[0, 1] \times [0, 1]$, застосували отримані результати для знаходження точних значень поперечників класів диференційовних функцій.

М.–Б.А. Бабаєв [11], [12] розглянув питання білінійних наближень неперіодичних функцій.

Поведінка величини $\tau_M(P)_{2,2}$ для функцій P з класів, аналогічних до класів Соболева, вивчались в роботі М.В. Мірошина і В.В. Хромова [13].

Пізніше Р.С. Ісмаїловим [14] був встановлений зв'язок між найкращими білінійними наближеннями функцій виду $f(x - y)$, $f(x) \in F$, і поперечниками за Колмогоровим класів F .

Дослідженню білінійних наближень функцій $2d$ -змінних ($d \geq 1$) з класів $W_{p, \alpha}^r$ і H_p^r , які є аналогами класів С.Л. Соболева та С.М. Нікольського, присвячено низку робіт В.М. Темлякова [8], [15]–[18], [25].

Також відзначимо роботи А.С. Романюка [19], [20] і А.С. Романюка, В.С. Романюка [21], які присвячені дослідженню білінійних наближень функцій $2d$ -змінних із класів О.В. Бесова та їх аналогів. В згаданих роботах можна ознайомитись з більш детальною бібліографією в цьому напрямі.

Нехай $C^d(N)$ позначає множину векторів $k = (k_1, \dots, k_d)$ з цілими координатами, що задовольняють умову $|k_j| \leq N$, $j = \overline{1, d}$.

Справедливе наступне твердження.

Лема А [17]. Нехай задано число N і $M = N^d$. Тоді для заданої функції

$$g(x) = \sum_{k \in C^d(2N)} \widehat{g}(k) e^{i(k,x)}$$

такої, що $|\widehat{g}(k)| \leq 1$ і $|\widehat{g}(k)| = 1$ при $k \in C^d(N)$, виконується співвідношення

$$\tau_M(g(x-y))_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}.$$

Нехай $\Gamma(C^d(2^n))$ позначає множину тригонометричних поліномів з номерами гармонік з $C^d(2^n)$.

Теорема А [22]. Нехай $t \in \Gamma(C^d(2^n))$. Тоді при $1 \leq q \leq p \leq \infty$ має місце нерівність

$$\|t\|_p \ll 2^{nd(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \|t\|_q. \quad (9)$$

Зауважимо, що ця нерівність була встановлена С.М. Нікольським і отримала назву *нерівність різних метрик*. В одновимірному випадку при $p = \infty$ відповідну нерівність довів Д. Джексон [23].

Покладемо $Q_n = \bigcup_{\|s\|_1 \leq n} \rho(s)$, де $\|s\|_1 = s_1 + \dots + s_d$. Множину Q_n називають східчасто-гіперболічним хрестом. Відомо (див., наприклад, [24]), що для кількості точок $|Q_n|$ цієї множини має місце співвідношення

$$|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}. \quad (10)$$

Для $G \subset \mathbb{Z}^d$, де \mathbb{Z}^d — цілочислова решітка в \mathbb{R}^d , через $\Gamma(G, d)$ позначимо множину тригонометричних поліномів d змінних

$$\Gamma(G, d) = \left\{ f : f(x) = \sum_{k \in G} c_k e^{i(k,x)} \right\},$$

і для $G_1, G_2 \subset \mathbb{Z}^d$ через $T(G_1, G_2, 2d)$ — множину тригонометричних поліномів $2d$ змінних

$$T(G_1, G_2, 2d) = \left\{ f : f(x, y) = \sum_{k_1 \in G_1, k_2 \in G_2} c_{k_1, k_2} e^{i((k_1, x) + (k_2, y))} \right\}.$$

Лема Б. [25] Нехай $f \in \Gamma(Q_\mu, Q_\nu, 2d)$. Тоді

$$\begin{aligned} \tau_M(f(x, y))_\infty &\ll \min\{1, M^{-1}\} |Q_\mu|^{\frac{1}{2}} |Q_\nu|^{\frac{1}{2}} (\mu\nu)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\log \left(1 + \frac{|Q_\mu|}{M+1} \right) \log \left(1 + \frac{|Q_\nu|}{M+1} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2. \end{aligned} \quad (11)$$

2. Основні результати. У цьому пункті подані результати щодо порядкових оцінок найкращих білінійних наближень функцій двох змінних, що належать до класів $S_{p,\theta}^\Omega B$,

$1 \leq p \leq \infty$, у просторі $L_{q,q}(\pi_2)$, $1 \leq q \leq \infty$, який в такому випадку співпадає з простором $L_q(\pi_2)$.

Сформулюємо і доведемо наступне твердження.

Теорема. Нехай $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}^2$, $\alpha > \alpha_0$, де

$$\alpha_0 = \begin{cases} \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, & 1 \leq p \leq q \leq 2, \\ \frac{1}{2}, & 2 \leq p \leq q \leq \infty, \\ \frac{1}{p}, & 1 \leq p < 2 < q \leq \infty. \end{cases}$$

Тоді справедливі наступні оцінки

$$\tau_M(S_{p,\theta}^\Omega B)_q \asymp \begin{cases} \Omega(M^{-2})M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 \leq p \leq q \leq 2, \\ \Omega(M^{-2}), & 2 \leq p \leq q \leq \infty, \\ \Omega(M^{-2})M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 \leq p < 2 < q \leq \infty. \end{cases} \quad (12)$$

Доведення. Оскільки для класів $S_{p,\theta}^\Omega B$ при $1 \leq \theta \leq \infty$ мають місце включення

$$S_{p,1}^\Omega B \subset S_{p,\theta}^\Omega B \subset S_{p,\infty}^\Omega B = S_p^\Omega H,$$

то оцінки зверху в теоремі достатньо довести для класів $S_p^\Omega H$, а знизу — для $S_{p,1}^\Omega B$.

Встановимо спочатку оцінки зверху. При цьому будемо наслідувати схему міркувань, яка використовувалась при дослідженні білінійних наближень функцій з класів $W_{p,\alpha}^r$ і H_p^r (див. [8, Гл. IV, с. 105–109]).

Нехай $f \in S_p^\Omega H$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Тоді для f має місце зображення

$$f(x) = \sum_{s_1, s_2 \geq 0} A_s(f, x), \quad x = (x_1, x_2), \quad s = (s_1, s_2) \quad (13)$$

(ряд збігається в просторі $L_p(\pi_2)$), де $A_s(f, x)$ визначено рівністю (4).

Для заданого $n \in \mathbb{N}$ покладемо $\tilde{M} = 2^n$ і розглянемо функції

$$f_{\tilde{M},1}(x) = \sum_{|k_1| < \tilde{M}} \widehat{V}_{\tilde{M}/2}(k_1) e^{ik_1 x_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ik_1 x_1} dx_1$$

і

$$f_{\tilde{M},2}(x) = \sum_{|k_2| < \tilde{M}} \widehat{V}_{\tilde{M}/2}(k_2) e^{ik_2 x_2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_{\tilde{M},1}(x)) e^{-ik_2 x_2} dx_2,$$

де $\widehat{V}_m(l) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} V_m(t) e^{-ilt} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції $V_m(t)$, $t \in \mathbb{R}$, по тригонометричній системі. Зрозуміло, що сума $f_{\tilde{M},1}(x) + f_{\tilde{M},2}(x)$ зображується у вигляді

$$f_{\tilde{M},1}(x) + f_{\tilde{M},2}(x) = \sum_{i=1}^{4\tilde{M}-2} u_i(x_1) v_i(x_2), \quad (14)$$

де u_i і v_i , $i = 1, \overline{4\widetilde{M} - 2}$ — деякі функції із $L_q(\pi)$.

Розклад функції

$$g(x) = f(x) - f_{\widetilde{M},1}(x) - f_{\widetilde{M},2}(x) \quad (15)$$

по тригонометричній системі не містить гармонік $e^{i(k,x)}$ з k такими, що $\min_j |k_j| \leq \frac{\widetilde{M}}{2}$ і, очевидно,

$$g(x) = \sum_{s_1, s_2 > n} A_s(f, x), \quad s = (s_1, s_2). \quad (16)$$

Далі покладемо

$$M_s = [\widetilde{M} \cdot 2^{-\kappa((s_1+s_2)-2n)}], \quad s = (s_1, s_2), \quad s_1, s_2 > n,$$

де число $\kappa > 0$ є вільним у подальшому виборі, а $[c]$ — ціла частина числа $c \in \mathbb{R}$.

Нехай $M = C(\kappa)2^n$, де $C(\kappa)$ — достатньо велике число. Тоді

$$M_0 := 4\widetilde{M} - 2 + \sum_{s_1, s_2 > n} M_s < M, \quad M_0 \asymp 2^n, \quad (17)$$

причому існує $n_0 = n_0(\kappa) \geq n$ таке, що $M_s \geq 1$ при $n \leq s_1, s_2 \leq n_0$ і $M_s = 0$ при $s_1, s_2 > n_0$.

Розглянемо наближення в $L_q(\pi_2)$ функції $A_s(f, x)$, $s_1, s_2 > n$, для $f \in S_p^\Omega H$ (при різних співвідношеннях між p і q , $1 \leq p \leq q \leq \infty$) за допомогою білінійних агрегатів $\sum_i u_i^*(x_1)v_i^*(x_2)$ з M_s доданками в сумі. Функції $A_s(f, x)$ є тригонометричними поліномами порядку 2^{s_1} по змінній x_1 і порядку 2^{s_2} по змінній x_2 і зображуються у вигляді

$$A_s(f, x) = \sum_k A_s(f; x_1^{k_1}, x_2^{k_2}) V_{2^{s_1}}(x_1 - x_1^{k_1}) V_{2^{s_2}}(x_2 - x_2^{k_2}),$$

де $k = (k_1, k_2)$

$$x_1^{k_1} = k_1 \pi 2^{-s_1-1}, \quad k_1 = 0, 1, \dots, 2^{s_1+2} - 1,$$

$$x_2^{k_2} = k_2 \pi 2^{-s_2-1}, \quad k_2 = 0, 1, \dots, 2^{s_2+2} - 1,$$

і підсумовування проводиться за усіма парами (k_1, k_2) .

Позначимо через G_s множину, що складається з M_s точок (k_1, k_2) , яким відповідають найбільші числа $|A_s(f, x_1^{k_1}, x_2^{k_2})|$ і покладемо

$$g_s(x_1, x_2) = \sum_{k \in G_s} A_s(f, x_1^{k_1}, x_2^{k_2}) V_{2^{s_1}}(x_1 - x_1^{k_1}) V_{2^{s_2}}(x_2 - x_2^{k_2}) := \sum_{i=1}^{M_s} u_i^s(x_1) v_i^s(x_2). \quad (18)$$

В [8, с. 105–106] показано, що

$$\|A_s(f, x_1, x_2) - g_s(x_1, x_2)\|_q \ll \min\{M_s^{-\beta}, 1\} 2^{\beta(s_1+s_2)} \|A_s(f, x)\|_p, \quad \beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \quad (19)$$

Нехай $1 \leq p \leq q \leq 2$, а число $\kappa > 0$ в означенні послідовності $(M_s)_{s_1, s_2 > n}$ таке, що $(1 + \kappa)\beta < \alpha$, де α взято з умови теореми.

Тоді, враховуючи, що для $f \in S_p^\Omega H$ (див. [4])

$$\|A_s(f, x_1, x_2)\|_p \ll \Omega(2^{-(s_1+s_2)}), \quad (20)$$

і беручи до уваги зображення (16) та (18), маємо (далі $M^* = \sum_{s_1, s_2 > n} M_s$)

$$\begin{aligned} \tau_{M^*}(g)_q &\leq \sum_{s_1, s_2 > n} \|A_s(f, x) - g_s(x)\|_q \ll \\ &\ll \sum_{n < s_1, s_2 < n_0} M_s^{-\beta} 2^{\beta(s_1+s_2)} \|A_s(f, x)\|_p + \sum_{s_1, s_2 > n_0} \|A_s(f, x)\|_q \asymp \\ &\asymp \sum_{n < s_1, s_2 < n_0} (\widetilde{M} 2^{-\kappa((s_1+s_2)-2n)})^{-\beta} 2^{\beta(s_1+s_2)} \|A_s(f, x)\|_p + \sum_{s_1, s_2 > n_0} \|A_s(f, x)\|_q = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Оцінимо спочатку перший доданок в (21). Оскільки функція $\Omega \in \Phi_{\alpha, l}^2$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &\ll \sum_{n < s_1, s_2 < n_0} M^{-\beta} 2^{\kappa\beta((s_1+s_2)-2n) + \beta(s_1+s_2)} \Omega(2^{-(s_1+s_2)}) \asymp \\ &\asymp M^{-\beta} 2^{-2n\kappa\beta} \sum_{n < s_1, s_2 < n_0} \Omega(2^{-(s_1+s_2)}) 2^{(s_1+s_2)(\kappa\beta+\beta)} \asymp \\ &\asymp M^{-\beta} 2^{-2n\kappa\beta} \sum_{n < s_1, s_2 < n_0} \frac{\Omega(2^{-(s_1+s_2)})}{2^{-\alpha(s_1+s_2)}} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\kappa\beta-\beta)} \\ &\ll M^{-\beta} 2^{-2n\kappa\beta} \Omega(2^{-2n}) 2^{2n(\kappa\beta+\beta)} \asymp \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} 2^{-n(2\alpha-\beta)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Для оцінки величини \mathcal{I}_2 , використовуючи теорему А, можемо записати

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &\ll \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{(s_1+s_2)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|A_s(f, x)\|_p \ll \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{(s_1+s_2)\beta} \Omega(2^{-(s_1+s_2)}) \ll \\ &\ll \sum_{s_1, s_2 > n_0} \frac{\Omega(2^{-(s_1+s_2)})}{2^{-\alpha(s_1+s_2)}} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\beta)} \ll \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\beta)}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що до \mathcal{I}_2 будуть входити доданки лише з тими s_1, s_2 , для яких $M_s = 0$, тобто для цього повинна виконуватись умова $\widetilde{M} \cdot 2^{\kappa((s_1+s_2)-2n)} < 1$. Як зазначалося вище, $\widetilde{M} = 2^n$ і тому цю вимогу перепишемо у вигляді

$$2^{n-\kappa((s_1+s_2)-2n)} < 1,$$

що рівносильно виконанню нерівності

$$s_1 + s_2 > \frac{n}{\kappa} + 2n.$$

Продовжимо оцінку величини \mathcal{I}_2 :

$$\mathcal{I}_2 \ll \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} 2^{(\frac{n}{\kappa}+2n)(\beta-\alpha)} = \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} 2^{-n(2\alpha-\beta)} 2^{(\frac{n}{\kappa}+2n)(\beta-\alpha)+n(2\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} 2^{-n(2\alpha-\beta)} 2^{-\frac{n}{\kappa}(\alpha-\beta-\beta\kappa)}. \quad (23)$$

Далі, оскільки, згідно вибору κ , $\alpha - \beta - \beta\kappa > 0$, то $\mathcal{I}_2 \ll \mathcal{I}_1$ і з (21) будемо мати

$$\tau_{M^*}(g)_q \ll \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} 2^{-n(2\alpha-\beta)} = \Omega(2^{-2n}) 2^{n\beta} = \Omega(M^{-2}) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \quad (24)$$

Отже, для довільної функції $f \in S_p^\Omega H$, внаслідок рівності (15), із урахуванням зображення (14) (див. також (17)) і оцінки (24), отримаємо

$$\tau_M(f)_q \ll \Omega(M^{-2}) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, \quad 1 \leq p \leq q \leq 2.$$

Нехай тепер $2 \leq p \leq q \leq \infty$. Зауважимо, що в цьому випадку, достатньо встановити оцінку зверху в теоремі при $p = 2$. Отже, нехай $f \in S_2^\Omega H$. Згідно з лемою Б для функції двох змінних $g(x)$ вигляду

$$g(x) = \sum_{\substack{k_1 \in Q_{s_1} \\ k_2 \in Q_{s_2}}} c_{k_1, k_2} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)},$$

що належить до $T(Q_{s_1}, Q_{s_2}, 2)$, беручи до уваги співвідношення (11) для $d = 1$, можемо записати

$$\tau_{M_s}(g(x))_\infty \ll \min\{1, M_s^{-1}\} 2^{\frac{s_1+s_2}{2}} \log^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2^{s_1}}{M_s + 1}\right) \log^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2^{s_2}}{M_s + 1}\right) \|g\|_2, \quad s = (s_1, s_2). \quad (25)$$

Далі, оскільки $A_s(f, x) \in T(Q_{s_1+1}, Q_{s_2+1}, 2)$ і, крім того, має місце нерівність (17), внаслідок (25), отримаємо (при $n < s_1, s_2 \leq n_0$)

$$\tau_{M_s}(A_s(f, x))_\infty \ll M_s^{-1} 2^{\frac{s_1+s_2}{2}} \log^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2^{s_1}}{M_s + 1}\right) \log^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2^{s_2}}{M_s + 1}\right) \Omega(2^{-(s_1+s_2)}). \quad (26)$$

Виберемо $\kappa > 0$ в означенні послідовності $(M_s)_{s_1, s_2 > n}$ так, щоб виконувалась нерівність $\alpha - \kappa - \frac{1}{2} > 0$ (за умовою у випадку, що розглядається, $\alpha > \frac{1}{2}$). Далі, як і в попередньому випадку, будемо використовувати зображення (13)–(16) і співвідношення (17). Враховуючи, що $\Omega \in \Phi_{\alpha, l}^2$, $\alpha > \frac{1}{2}$, використовуючи оцінку (26) та теорему А, можемо записати

$$\begin{aligned} \tau_M(f)_\infty &\ll \sum_{s_1, s_2 > n} \tau_{M_s}(A_s(f, x))_\infty \ll \\ &\ll \sum_{s_1=n+1}^{n_0} \sum_{s_2=n+1}^{n_0} M_s^{-1} 2^{\frac{s_1+s_2}{2}} \log^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2^{s_1}}{M_s}\right) \log^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2^{s_2}}{M_s}\right) \Omega(2^{-(s_1+s_2)}) + \\ &\quad + \sum_{s_1, s_2 > n_0} \|A_s(f, x)\|_\infty \ll \\ &\ll \widetilde{M}^{-1} 2^{-2\kappa n} \sum_{s_1=n+1}^{n_0} \sum_{s_2=n+1}^{n_0} \Omega(2^{-(s_1+s_2)}) 2^{-(s_1+s_2)(-\frac{1}{2}-\kappa)} + \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{\frac{s_1+s_2}{2}} \|A_s(f, x)\|_2 \ll \\ &= \widetilde{M}^{-1} 2^{-2\kappa n} \sum_{s_1=n+1}^{n_0} \sum_{s_2=n+1}^{n_0} \frac{\Omega(2^{-(s_1+s_2)})}{2^{-\alpha(s_1+s_2)}} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\kappa-\frac{1}{2})} + \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{\frac{s_1+s_2}{2}} \Omega(2^{-(s_1+s_2)}) \ll \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ll \widetilde{M}^{-1} 2^{-2\kappa n} \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} \sum_{s_1=n+1}^{n_0} \sum_{s_2=n+1}^{n_0} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\kappa-\frac{1}{2})} + \\
& \quad + \sum_{s_1, s_2 > n_0} \frac{\Omega(2^{-(s_1+s_2)})}{2^{-\alpha(s_1+s_2)}} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\frac{1}{2})} \ll \\
& \ll \widetilde{M}^{-1} 2^{-2\kappa n} \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} 2^{-2n(\alpha-\kappa-\frac{1}{2})} + \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\frac{1}{2})} \asymp \\
& \asymp M^{-1} 2^n \Omega(2^{-2n}) + \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\frac{1}{2})} \asymp \\
& \asymp \Omega(2^{-2n}) + \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\frac{1}{2})}. \tag{27}
\end{aligned}$$

Далі повторюючи для оцінки другого доданка (27) міркування, аналогічні до тих, які використовувались для оцінки величини \mathcal{I}_2 (див. (21)–(23)), і враховуючи, що $\alpha - \kappa - \frac{1}{2} > 0$, запишемо

$$\tau_M(f)_\infty \ll \Omega(2^{-2n}) \asymp \Omega(M^{-2}).$$

Отже, у випадку $2 \leq p \leq q \leq \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha, l}^2$, $\alpha > \frac{1}{2}$ оцінку зверху для $\tau_M(S_{p, \theta}^\Omega B)_q$ доведено.

Нехай тепер $1 \leq p < 2 < q \leq \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha, l}^2$, $\alpha > \frac{1}{p}$. В цьому випадку оцінку зверху в теоремі достатньо довести для $q = \infty$. Як і в попередньому випадку, застосовуючи лему Б до функції $A_s(f, x) - g_s(x)$ (див. нерівність (25)) і враховуючи при цьому, що $A_s(f, x) \in T(Q_{s_1+1}, Q_{s_2+1}, 2)$, $f \in S_p^\Omega H$, а $g_s(x) \in T(Q_{s_1}, Q_{s_2}, 2)$, можемо записати

$$\tau_M(A_s(f, x) - g_s(x))_\infty \ll M_s^{-1} 2^{\frac{s_1+s_2}{2}} \log^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2^{s_1}}{M_s}\right) \log^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2^{s_2}}{M_s}\right) \|A_s(f, x) - g_s(x)\|_2. \tag{28}$$

З іншого боку, згідно з оцінками (19) і (20)

$$\|A_s(f, x_1, x_2) - g_s(x_1, x_2)\|_2 \ll M_s^{-\gamma} 2^{\gamma(s_1+s_2)} \Omega(2^{-(s_1+s_2)}), \quad \gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}. \tag{29}$$

Співставляючи (28) і (29) та враховуючи (18), отримуємо

$$\tau_{2M_s}(A_s(f, x))_\infty \ll M_s^{-1-\gamma} 2^{\gamma(s_1+s_2)} 2^{\frac{s_1+s_2}{2}} \log^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2^{s_1}}{M_s}\right) \log^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2^{s_2}}{M_s}\right) \Omega(2^{-(s_1+s_2)}).$$

Зауважимо, що така ж порядкова оцінка зберігається і для $\tau_{M_s}(A_s(f, x))_\infty$.

Далі візьмемо $\kappa > 0$ в означенні послідовності $(M_s)_{s_1, s_2 > n}$ так, щоб виконувалась нерівність $0 < \kappa < \frac{\alpha-1/p}{1/2+1/p}$ (нагадаємо, що за умовою $\alpha > \frac{1}{p}$). Тоді, як і в попередньому випадку, для $f \in S_p^\Omega H$ можемо записати

$$\begin{aligned}
\tau_M(f)_\infty & \ll \sum_{s_1, s_2 > n} \tau_{M_s}(A_s(f, x))_\infty \ll \sum_{s_1=n+1}^{n_0} \sum_{s_2=n+1}^{n_0} M_s^{-1-\gamma} 2^{(s_1+s_2)(\gamma+\frac{1}{2})} \Omega(2^{-(s_1+s_2)}) + \\
& \quad + \sum_{s_1, s_2 > n_0} \|A_s(f, x)\|_\infty \asymp \widetilde{M}^{-1-\gamma} 2^{-2n\kappa(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{s_1=n+1}^{n_0} \sum_{s_2=n+1}^{n_0} \frac{\Omega(2^{-(s_1+s_2)})}{2^{-\alpha(s_1+s_2)}} 2^{-\kappa(s_1+s_2)(-\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \cdot 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\frac{1}{p})} + \\
& \quad + \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{\frac{s_1+s_2}{p}} \|A_s(f, x)\|_p \asymp \\
& \ll \widetilde{M}^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} 2^{-2n\kappa(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} \sum_{s_1=n+1}^{n_0} \sum_{s_2=n+1}^{n_0} 2^{-(s_1+s_2)[(\alpha-\frac{1}{p})-\kappa(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})]} + \\
& \quad + \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{\frac{s_1+s_2}{p}} \Omega(2^{-(s_1+s_2)}) \asymp \\
& \ll \widetilde{M}^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} 2^{-2n\kappa(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} 2^{-2n[(\alpha-\frac{1}{p})-\kappa(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})]} + \\
& \quad + \sum_{s_1, s_2 > n_0} \frac{\Omega(2^{-(s_1+s_2)})}{2^{-\alpha(s_1+s_2)}} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\frac{1}{p})} \asymp \\
& \asymp \widetilde{M}^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} 2^{-n(2\alpha-2\frac{1}{p})} + \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\frac{1}{p})} \asymp \\
& \asymp \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} 2^{-n(2\alpha-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}))} + \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\frac{1}{p})} \ll \Omega(2^{-2n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

Звідси отримуємо остаточну оцінку

$$\tau_M(f)_\infty \ll \Omega(M^{-2}) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Оцінки зверху в (12) доведені.

Перейдемо до встановлення оцінок знизу. Для цього будемо будувати екстремальні функції $g(x_1, x_2) = f(x_1 - x_2)$, де f — функція однієї змінної така, що $g \in S_{p, \theta}^\Omega B$, як функція двох змінних. При цьому, як зазначалося раніше, достатньо обмежитись значенням $\theta = 1$.

Нехай $1 \leq p \leq q \leq 2$. По заданому натуральному числу M знайдемо $n \in \mathbb{N}$ таке, що $2^{n-1} \leq M < 2^n$ і розглянемо білінійне наближення функції двох змінних

$$f_1(x_1, x_2) = C_7 \Omega(2^{-2n}) 2^{-(1-\frac{1}{p})n} V_{2n+2}(x_1 - x_2), \quad C_7 > 0.$$

Покажемо спочатку, що при належному виборі додатньої сталої C_7 функція f_1 належить до класу $S_{p,1}^\Omega B$. За означенням норми функції в цьому класі маємо

$$\begin{aligned}
& \|f_1\|_{S_{p,1}^\Omega B} = C_7 \Omega(2^{-2n}) 2^{-(1-\frac{1}{p})n} \sum_{s_1, s_2 > 0} \Omega^{-1}(2^{-(s_1+s_2)}) \|A_s(V_{2n+2}(x_1 - x_2))\|_p \ll \\
& \ll \Omega(2^{-2n}) 2^{-(1-\frac{1}{p})n} \sum_{s_1=1}^{n+3} \sum_{s_2=1}^{n+3} \Omega^{-1}(2^{-(s_1+s_2)}) \|A_s(x_1, x_2)\|_1 \cdot \|(V_{2n+2}(x_1 - x_2))\|_p. \quad (30)
\end{aligned}$$

Оскільки $\|A_s\|_1 \leq C_8$ (див., наприклад, [15, с. 35]) та $\|V_{2^{n+2}}\|_p \asymp 2^{n(1-\frac{1}{p})}$, $1 \leq p \leq \infty$, (див., наприклад, [15, с. 28]), то оцінку (30) можна продовжити таким чином:

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{S_{p,1}^\Omega B} &\ll \Omega(2^{-2n})2^{-(1-\frac{1}{p})n} \sum_{s_1=1}^{n+3} \sum_{s_2=1}^{n+3} \Omega^{-1}(2^{-(s_1+s_2)}) \|(V_{2^{n+2}}(x_1 - x_2))\|_p \ll \\ &\ll \Omega(2^{-2n})2^{-(1-\frac{1}{p})n} \Omega^{-1}(2^{-2(n+3)})2^{n(1-\frac{1}{p})} \asymp 1. \end{aligned}$$

Отже, при певному виборі сталої $C_7 > 0$ функція f_1 належить до класу $S_{p,1}^\Omega B$.

Далі, в [8, С.107] встановлено, що

$$\tau_M(V_{2^{n+2}}(x_1 - x_2))_{q,1} \gg 2^{-n(\frac{1}{q}-1)},$$

а отже,

$$\begin{aligned} \tau_M(f_1)_{q,1} &\asymp \Omega(2^{-2n})2^{-n(1-\frac{1}{p})} \tau_M(V_{2^{n+2}}(x_1 - x_2))_{q,1} \gg \\ &\gg \Omega(2^{-2n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}2^{n(1-\frac{1}{q})} = \Omega(2^{-2n})2^{-n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} = \Omega(M^{-2})M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Звідки випливає відповідна оцінка знизу і для $\tau_M(S_{p,\theta}^\Omega B)_q$.

У випадку $2 \leq p \leq q \leq \infty$ розглянемо функцію

$$f_2(x_1, x_2) = C_9 \Omega(2^{-2n})2^{-\frac{n}{2}} R_n(x_1 - x_2), \quad C_9 > 0,$$

де $R_n(t) = \sum_{k=-2^n}^{2^n} \varepsilon_k e^{ikt}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ — поліном Рудіна–Шапіро (див., наприклад, [26, с.155]), для якого виконується порядкова нерівність $\|R_n\|_\infty \ll 2^{\frac{n}{2}}$.

Як і в попередньому випадку, можна показати, що при належному виборі додатньої константи C_9 функція f_2 належить до класу $S_{p,1}^\Omega B$.

Нехай $M = 2^n$. Оскільки функція $R_n(t)$ задовольняє умови леми А при $d = 1$, то виконується порядкова нерівність

$$\tau_M(R_n(x_1 - x_2))_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином можемо записати

$$\tau_M(f_2(x_1 - x_2))_{2,1} \gg \Omega(2^{-2n})2^{-\frac{n}{2}} \tau_M(R_n(x_1 - x_2))_{2,1} \gg \Omega(2^{-2n}) = \Omega(M^{-2}),$$

Звідки, очевидно, при будь-якому $M \in \mathbb{N}$

$$\tau_M(S_{p,1}^\Omega B)_q \gg \Omega(M^{-2}).$$

Насамкінець оцінка знизу у випадку $1 \leq p < 2 < q \leq \infty$ випливає з оцінок знизу для $1 \leq p \leq q \leq 2$ при $q = 2$ внаслідок монотонності норми, тобто $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_q$, $q \geq 2$.

Оцінки знизу, а отже, і теорема вцілому доведені.

Зауваження 1. При $\theta = \infty$ твердження теореми є поширенням відповідних результатів В.М. Темлякова [8, с. 101] (теорема 4.2) для класів H_p^r на класи $S_p^\Omega H$.

2. З доведеної теореми при $\Omega(t) = t^r$ і відповідних обмеженнях на параметр r можна отримати твердження для класів $B_{p,\theta}^r$, встановлене в роботі [21].

1. Бернштейн С.Н. Конструктивная теория функций (1931–1953): Собрание сочинений / С.Н. Бернштейн. — М.: Изд. АН СССР. — 1954. — Т.2 — 626 с.
2. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483–522.
3. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. — 1997. — **219**. — С. 356–377.
4. *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. math. — 1994. — **20**, № 1. — Р. 35–48.
5. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **187**. — С. 143–161.
6. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.
7. *Стасюк С.А., Федунук О.В.* Апроксимативні характеристики класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 5. — С. 692–704.
8. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1–112.
9. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I // Math. Ann. — 1907. — **63**. — Р. 433–476.
10. *Micchelli C.A., Pinkus A.* Some problem in the approximation of functions of two variables and n -widths of integral operators // J. Approxim. Theory. — 1978. — 24. — Р. 51–77.
11. *Бабаев М.-Б.А.* Приближение соболевских классов функций суммами произведений функций меньшего числа переменных // Мат. заметки. — 1990. — **48**, №6. — С. 10–21.
12. *Бабаев М.-Б.А.* О порядке приближения соболевского класса W_q^r билинейным формами // Мат. сб. — 1991. — **182**, №1. — С. 122–129.
13. *Миросин Н.В., Хромов В.В.* Об одной задаче наилучшей аппроксимации функций многих переменных // Мат. заметки. — 1982. — **32**, №5. — С. 721–727.
14. *Исмагилов Р.С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. — 1974. — **29**, №3. — С. 161–178.

15. *Temlyakov V.N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. — 419 p.
16. *Темляков В.Н.* Билинейная аппроксимация и близкие вопросы // Тр. Мат. ин-та РАН. — 1991. — **194**. — С. 229–248.
17. *Темляков В.Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **173**. — С. 243–252.
18. *Темляков В.Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения // Мат. сб. — 1987. — **176**, №1. — С. 16–33.
19. *Романюк А.С.* Билинейные приближения и колмогоровским поперечники периодических классов Бесова // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2009. — **6**, №1. — С. 222–236.
20. *Романюк А.С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем. — 2006. — **70**, №2. — С. 69–98..
21. *Романюк А.С., Романюк В.С.* Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 4. — С. 536–551.
22. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1951. — **38**. — С. 244–278.
23. *Jakson D.* Certain problem of closet approximation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1993. — **39**, №12. — С. 889–906.
24. *Никольская Н.С.* Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p // Докл. АН СССР. — 1973. — **208**, № 5. — С. 1283–1285.
25. *Темляков В.Н.* Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1988. — 181. — С. 250–267.
26. *Кашиш С.Б., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. — М.: Наука, 1984. — 495 с.