УДК 517.5

К.В. Соліч (Інститут математики НАН України, Київ)
K.V. Solich

Колмогоровські поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q

Одержано точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при $1 \leq p,\ q \leq \infty$.

We are obtained exact-order estimates of the Kolmogorov widths of classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space L_q for $1 \leq p,\ q \leq \infty$.

Вступ.

У роботі досліджуються колмогоровські поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при різних співвідношеннях між p і q.

Спочатку наведемо необхідні позначення, а також дамо означення класів і апроксимативної характеристики, що буде досліджуватись.

Нехай $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, означає d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$, і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi; \pi)$,— простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p, $1 \leq p < \infty$, (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$) функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$. Норма в цьому просторі визначається наступним чином:

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Означимо простори $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset L_p(\pi_d)$, властивості яких визначаються за допомогою: $\Omega(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, — мажорантної функції для модуля неперервності l–го порядку ($l \in \mathbb{N}$) функції $f \in L_p(\pi_d)$; числових параметрів p і θ, $1 \leq p, \theta \leq \infty$.

Для довільної функції $f \in L_p(\pi_d)$ покладемо

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \| \Delta^l_h f(\cdot) \|_p$$

— модуль неперервності порядку l функції f, де $\Delta^l_h f(x) = \Delta_h \Delta^{l-1}_h f(x), \quad \Delta^0_h f(x) = f(x)$, $h = (h_1, ..., h_d)$, - кратна l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j, $j = \overline{1, d}$, яку можна записати ще таким чином:

$$\Delta^l_h f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l+n} C^n_l f(x + nh).$$

Нехай далі $\Omega(t)$ — задана функція типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t > 0$; $\Omega(t) = 0$, $t = 0$;

2) $\Omega(t)$ неперервна;

3) $\Omega(t)$ зростає;

4) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ $\Omega(nt) \leq C n^l \Omega(t)$, де $C > 0$ не залежить від n і t.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l. Зауважимо, що якщо $f \in L_p(\pi_d)$, то $\Omega_l(f, \cdot) \in \Psi_l$.

Підпорядкуємо функції $\Omega \in \Psi_l$ додатковим умовам, які опишемо в термінах двох понять, запроваджених С.Н. Бернштейном [1]:

а) невід'ємна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in [0; \infty)$ майже зростає, якщо існує стала $C_1 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \leq C_1 \varphi(\tau_2)$, для будь-яких τ_1, τ_2, $0 \leq \tau_1 < \tau_2$;

б) додатна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0;\infty)$ майже спадає, якщо існує стала $C_2 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \geq C_2\varphi(\tau_2)$, для будь-яких τ_1, τ_2, $0 < \tau_1 < \tau_2$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ належить множинам S^α і S_l. Умови належності до цих множин часто в літературі називають умовами Барі – Стєчкіна [2]. Це означає наступне:

i) $\Omega \in S^\alpha$ $(\alpha > 0)$, якщо функція $\frac{\Omega(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при $\tau > 0$;

ii) $\Omega \in S_l$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що функція $\frac{\Omega(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при $\tau > 0$.

Покладемо також $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$.

Варто зазначити, що функції $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ можуть мати, наприклад, такий вигляд

$$\Omega(t) = \begin{cases} t^r\left(\log^+\left(\frac{1}{t}\right)\right)^\beta, & t > 0, \\ 0 & , t = 0, \end{cases}$$

де $\log^+(t) = \max\{1, \log(t)\}$, $0 < r < l$, а β – фіксоване дійсне число.

Для $1 \leq p, \theta \leq \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови $1-4$, простір $B^\Omega_{p,\theta}$ визначається наступним чином:

$$B^\Omega_{p,\theta} = \{f \in L_p(\pi_d): \ \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \overset{df}{=} \|f\|_p + |f|_{b^\Omega_{p,\theta}} \leq \infty\},$$

де напівнорма $|f|_{B^\Omega_{p,\theta}}$ визначається співвідношенням

$$|f|_{b^\Omega_{p,\theta}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Визначимо норму в просторі $B^\Omega_{p,\theta}$ наступним чином

$$\|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} := \|f\|_p + |f|_{B^\Omega_{p,\theta}}, \quad 1 \leq p, \theta \leq \infty.$$

Якщо $\Omega(t) = t^r$, то класи $B^\Omega_{p,\theta}$ співпадають з класами О.В. Бєсова $B^r_{p,\theta}$ [3] і, зокрема, при $\theta = \infty$ та $\Omega(t) = t^r$ $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, де H^r_p — класи, введені С.М. Нікольським [4]. Таким чином, класи $B^\Omega_{p,\theta}$ є узагальненням (за гладкісним параметром) відомих класів Нікольського – Бєсова. З точки зору теорем вкладення, ці класи розглядалися в роботах М.Л. Гольдмана [5] і Г.А. Калябіна [6]. Пізніше їх апроксимативні характеристики досліджувались в роботах Li Yongping та Xu Guiqiao [7], Xu Guiqiao [8], С.А. Стасюка [9], С.П. Войтенка [10], [11] та інших.

В наступних міркуваннях ми будемо використовувати порядкові співвідношення. Запис $A \asymp B$ означає двосторонню нерівність між виразами A і B, тобто $C_3B \leq A \leq C_4B$, де C_3, $C_4 > 0$— сталі, значення яких можуть бути різними в різних місцях. Також, якщо $A \leq C_5B$, $C_5 > 0$, та $A \geq C_6B$, $C_6 > 0$, будемо писати $A \ll B$ і $A \gg B$ відповідно. Із контексту буде зрозуміло, від яких параметрів ці сталі не залежать. Ми не будемо акцентувати на цьому увагу щоразу при використанні символів "$\asymp$", "$\ll$", "$\gg$".

Зауважимо, що зі збільшенням параметра θ простори $B^{\Omega}_{p,\theta}$ розширюються, тобто при $1 \le \theta \le \theta' \le \infty$ мають місце вкладення

$$B^{\Omega}_{p,1} \subset B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta'} \subset B^{\Omega}_{p,\infty} = H^{\Omega}_{p}. \tag{2}$$

При доведенні теореми нам буде зручніше користуватись еквівалентним (з точністю до абсолютних сталих) означенням норм у просторах $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Позначимо через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kt.$$

Тоді багатовимірне ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, означимо згідно з формулою

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Нехай $\mathbf{V}_m$ — оператор, який задає згортку функцій $f \in L_p(\pi_d)$ з багатовимірним ядром $V_m(x)$:

$$\mathbf{V}_m f \stackrel{\mathrm{df}}{=} f * V_m = V_m(f, x).$$

Таким чином, $V_m(f, x)$ — кратна сума Валле Пуссена функції f.

Для $f \in L_p(\pi_d)$ покладемо

$$\Phi_0(f, x) = V_1(f, x),\ \Phi_s(f, x) = V_{2^s}(f, x) - V_{2^{s-1}}(f, x),\ \ s \in \mathbb{N}.$$

В прийнятих позначеннях (з точністю до абсолютних сталих) простори $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, можна означити наступним чином (див, наприклад, [8]):

$$\begin{aligned} B^{\Omega}_{p,\theta} &= \left\{ f : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\|\Phi_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta} \le \infty \right\}, 1 \le \theta < \infty, \\ B^{\Omega}_{p,\infty} &= \left\{ f : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{s} \frac{\|\Phi_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \le \infty \right\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Зазначимо, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентні (з точністю до абсолютних сталих) означення норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, використовуючи в (3) замість $\|\Phi_s(f,\cdot)\|_p$ норми відповідних "блоків"ряду Фур'є функції f.

Для $f \in L_p(\pi_d)$ і $s \in \mathbb{Z}_+$ введемо позначення

$$f_0(x) = \widehat{f}(0),\ f_s(x) = \sum_{\substack{2^{s-1} \le \max |k_j| < 2^s \\ j=\overline{1,d}}} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},\ s = 1, 2, \ldots,$$

де $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$, а

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції f. Тоді при $1 < p < \infty$ будемо мати

$$B^{\Omega}_{p,\theta}=\left\{f:\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}=\left(\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\|f_s(\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}\right)^{\theta}\right)^{1/\theta}\leq\infty\right\}, 1\leq\theta<\infty,$$
$$B^{\Omega}_{p,\infty}=\left\{f:\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}}=\sup_s\frac{\|f_s(\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}\leq\infty\right\}. \tag{4}$$

Надалі, для одиничної кулі в просторі $B^{\Omega}_{p,\theta}$ будемо використовувати те ж позначення, що і для самого простору $B^{\Omega}_{p,\theta}$, тобто

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \{f \in B^{\Omega}_{p,\theta} \ : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \leq 1\}.$$

Тепер дамо означення апроксимативної характеристики, яку будемо досліджувати.

Нехай Φ — центрально-симетрична множина банахового простору $\mathcal{X}$ і $\mathcal{L}_m$ — довільний підпростір в $\mathcal{X}$ розмірності m. Тоді величина

$$d_m(\Phi, \mathcal{X}) := \inf_{\mathcal{L}_m}\sup_{f\in\Phi}\inf_{u\in\mathcal{L}_m}\|f-u\|_{\mathcal{X}}, \tag{5}$$

називається колмогоровським поперечником. Нагадаємо, що поперечник $d_m(\Phi, \mathcal{X})$ був введений в 1936 р. А.М. Колмогоровим [12].

Також будемо вважати, що

$$d_0(\Phi, \mathcal{X}) = \sup_{f\in\Phi}\|f\|_{\mathcal{X}}.$$

На даний час для різного роду класів функцій, як однієї так і багатьох змінних, відомі не лише порядкові оцінки колмогоровських поперечників, але й в деяких важливих випадках їх точні значення. З відповідними результатами можна ознайомитися в широко відомих книгах [13 — 18].

Далі нам знадобляться деякі допоміжні означення та твердження.

Нехай

$$C^d(N) = \left\{k = (k_1, ..., k_d), |k_j| \leq N, k_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{1, d}\right\}.$$

Позначимо через $T(C^d(N))_q$ підмножину функцій з

$$T(C^d(N)) = \left\{t : t(x) = \sum_{k\in C^d(N)} c_k e^{i(k,x)}\right\},$$

які задовольняють умову $\|t\|_q \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$.

Теорема А. *Нехай* $t \in T(C^d(2^n))$. *Тоді при* $1 \leq q \leq p \leq \infty$ *має місце співвідношення*

$$\|t\|_p \leq 2^{nd(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\|t\|_q. \tag{6}$$

Нерівність (6) була встановлена С.М. Нікольським [4] і отримала назву "нерівності різних метрик". У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [19].

Має місце наступне твердження.

Теорема Б [14, С. 122]. *Нехай* $m,\ n \in \mathbb{N}$ *такі, що* $m \asymp 2^{nd}$ *і* $m < 2^{nd+1}$. *Тоді справедлива порядкова оцінка*

$$d_m(T(C^d(2^n))_2, L_\infty) \ll \big(2^{nd}/m\big)^{1/2}\big(\log(e2^{nd}/m)\big)^{1/2}. \tag{7}$$

Лема А [8]. Нехай $1 \le p < q \le \infty$ і $\Omega(t)/t^\alpha$ при $\alpha > d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ майже зростає. Тоді $B^\Omega_{p,\theta} \subset B^{\Omega_1}_{q,\theta}$, де $\Omega_1(t) = \Omega(t)/t^{d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$ і

$$\|f\|_{B^{\Omega_1}_{q,\theta}} \ll \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}}.$$

Також нами будуть використовуватись оцінки наступних апроксимативних характеристик.

Якщо $F \subset L_p(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, — деякий функціональний клас, то позначимо

$$E_{2^n}(F)_q = \sup_{f\in F} \inf_{t\in T(C^d(2^n))} \|f - t\|_q.$$

При доведенні оцінок зверху величин $d_m(B^\Omega_{p,\theta}, L_q)$ будемо користуватись результатом, одержаним у роботі [9].

Теорема В. *Нехай* $1 \le p,\ q,\ \theta \le \infty$, *а функція* $\Omega(t) \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > d\big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\big)_+$. *Тоді*

$$E_{2^n}(B^\Omega_{p,\theta})_q \asymp \Omega(2^{-n})2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}, \tag{8}$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Для отримання оцінок знизу будуть використовуватись оцінки білінійних наближень функцій з класів $B^\Omega_{p,\theta}$ [20].

Дамо означення відповідної апроксимативної характеристики.

Нехай $L_q(\pi_{2d})$, $q = (q_1, q_2)$, позначає множину функцій $f(x, y)$, $x, y \in \pi_d$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x, y)\|_{q_1,q_2} = \big\|\|f(\cdot, y)\|_{q_1}\big\|_{q_2},$$

де норма обчислюється спочатку у просторі $L_{q_1}(\pi_d)$ по змінній $x \in \pi_d$, а потім по змінній $y \in \pi_d$ у просторі $L_{q_2}(\pi_d)$. Для $f \in L_q(\pi_{2d})$ означимо величину

$$\tau_m(f)_{q_1,q_2} = \inf_{u_i(x),v_i(y)} \Big\|f(x, y) - \sum_{i=1}^m u_i(x)v_i(y)\Big\|_{q_1,q_2},$$

де $u_i \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_i \in L_{q_2}(\pi_d)$, яка називається найкращим білінійним наближенням функції $f(x, y)$. Зауважимо, що $\tau_0(f)_{q_1,q_2} := \|f(x, y)\|_{q_1,q_2}$.

1. Основні результати. В цьому розділі сформулюємо отримані результати, а також дамо деякі коментарі.

Справедливе твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p,\ q,\ \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \alpha(p,q)$, *де*

$$\alpha(p,q) = \begin{cases} d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+, & \begin{matrix} 1 \le p \le q \le 2 \quad \text{або} \\ 2 \le q \le p \le \infty; \end{matrix} \\ \max\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\}, & \begin{matrix} 2 \le p \le q \le \infty \quad \text{або} \\ 1 \le p < 2 < q \le \infty. \end{matrix} \end{cases}$$

Тоді для $m \in \mathbb{N}$ *справедливі порядкові співвідношення*

$$d_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \begin{cases} \Omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 \le p \le q \le 2, \\ \Omega(m^{-\frac{1}{d}}), & \begin{matrix} 2 \le p \le q \le \infty \quad \text{або} \\ 2 \le q \le p \le \infty, \end{matrix} \\ \Omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 \le p < 2 < q \le \infty. \end{cases} \tag{9}$$

Доведення. Спочатку отримаємо в (9) оцінки зверху. У випадках $1 \le p \le q \le 2$ і $2 \le q \le p \le \infty$ шукані оцінки поперечників $d_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ випливають з оцінок найкращого наближення функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\infty} = H^{\Omega}_p$ у просторі L_q, наведених у теоремі B. Тому при умові, що число $n \in \mathbb{N}$ задовольняє співвідношення $m \asymp 2^{nd}$, маємо

$$d_m(H^{\Omega}_p, L_q) \ll E_{2^n}(H^{\Omega}_p)_q \asymp \Omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+} \asymp \Omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}.$$

Тепер розглянемо випадок, коли $p = 2$ і $q = \infty$, тобто знайдемо оцінку зверху колмогоровського поперечника $d_m(H^{\Omega}_2, L_\infty)$. Нехай $n = [\alpha] + 1$ і

$$m_1 = (2^{n+1} - 1)^d \asymp 2^{nd},$$

$$m_s = [m_1 \cdot 2^{-\rho(s-n)}],\ s = n+1, \dots,$$

де $\rho > 0$ — деяке число, яке нижче буде уточнено, і $[c]$ — ціла частина числа $c \in \mathbb{R}$. Нехай $m = C(\rho) 2^{nd}$, де $C(\rho) > 0$ — достатньо велика константа. Тоді покладемо

$$m_0 := m_1 + \sum_{s=n+1}^{\infty} m_s$$

і отримаємо

$$m_0 = m_1 + \sum_{s=n+1}^{\infty} m_s \ll 2^{d(n+1)} + \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{nd} \cdot 2^{-\rho(s-n)} = 2^{d(n+1)} + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{nd-\rho j} \ll 2^{d(n+1)} + 2^{nd-\rho} \ll m.$$

Зрозуміло також, що існує $\lambda = \lambda(\rho) > 1$ таке, що $m_s = 0$ при $s > s_0 := [\lambda n] + 1$ і $m_s \ge 1$ при $n + 1 \le s \le s_0$.

Позначимо через $S_{2^n}(f, \cdot)$ кратну суму Фур'є функції $f \in L_1$

$$S_{2^n}(f) = \sum_{k \in C^d(2^n)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

яку природно назвати кубічною сумою Фур'є функції f.

Оскільки для функції $f \in H_2^\Omega$ має місце представлення

$$f = S_{2^n-1}(f) + \sum_{s=n+1}^{\infty} f_s,$$

а також справедливі порядкові співвідношення

$$\|f_s\|_2 \ll \Omega(2^{-s}),$$

$$\|f_s\|_2 \asymp \|\Phi_s(f)\|_2,$$

то, згідно вибору чисел m і n, можемо записати наступну оцінку

$$d_m(H_2^\Omega, L_\infty) \ll \sum_{s=n+1}^{s_0} \Omega(2^{-s}) d_{m_s}(T(C^d(2^s))_2, L_\infty) + \sum_{s=s_0+1}^{\infty} \Omega(2^{-s}) d_0(T(C^d(2^s))_2, L_\infty). \quad (10)$$

Далі для оцінки першого доданку правої частини (10) застосуємо терему Б. Продовжимо оцінку

$$d_m(H_2^\Omega, L_\infty) \ll \sum_{s=n+1}^{s_0} \Omega(2^{-s}) \left(\frac{2^{sd}}{2^{nd-\rho(s-n)}}\right)^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} \frac{e2^{sd}}{2^{nd-\rho(s-n)}} +$$

$$+ \sum_{s=s_0+1}^{\infty} 2^{\frac{sd}{2}} \Omega(2^{-s}) = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \quad (11)$$

Оцінимо спочатку величину $\mathcal{I}_1$. Оскільки функція $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{d}{2}$, то, вибравши ρ так, що $\alpha - \frac{d}{2} - \rho > 0$, матимемо

$$\mathcal{I}_1 \ll \sum_{s=n+1}^{s_0} \frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-\alpha s} 2^{\frac{sd}{2} - \frac{nd}{2} + \frac{\rho}{2}(s-n)} \ln^{\frac{1}{2}} \frac{e2^{sd}}{2^{nd-\rho(s-n)}} \ll$$

$$\ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-\frac{nd}{2} - \frac{\rho n}{2}} \sum_{s=n+1}^{s_0} 2^{-s(\alpha - \frac{d}{2} - \frac{\rho}{2})} \ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-\frac{nd}{2} - \frac{\rho n}{2}} 2^{-n(\alpha - \frac{d}{2} - \frac{\rho}{2})} = \Omega(2^{-n}) \asymp \Omega(m^{-\frac{1}{d}}). \quad (12)$$

Для оцінки величини $\mathcal{I}_2$ можемо записати:

$$\mathcal{I}_2 = \sum_{s=s_0+1}^{\infty} \frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-s(\alpha - \frac{d}{2})} \ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=s_0+1}^{\infty} 2^{-s(\alpha - \frac{d}{2})} = \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=[\lambda n]+2}^{\infty} 2^{-s(\alpha - \frac{d}{2})}$$

$$\ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-([\lambda n]+1)(\alpha - \frac{d}{2})} \ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{\alpha n} = \Omega(2^{-n}). \quad (13)$$

Приймаючи до уваги (12) та (13), з (11) будемо мати

$$d_m(H_2^\Omega, L_\infty) \ll \Omega(m^{-\frac{1}{d}}).$$

Звідси у випадку $2 \le p < q \le \infty$ отримаємо

$$d_m(B_{p,\theta}^\Omega, L_q) \ll d_m(H_2^\Omega, L_\infty) \ll \Omega(m^{-\frac{1}{d}}). \quad (14)$$

При $1 \le p < 2 < q \le \infty$, згідно леми A, справедливе вкладення

$$B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega_1}_{2,\theta},$$

де $\Omega_1(t) = \Omega(t)/t^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}$. Тому з (14) можемо записати

$$d_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \ll d_m(B^{\Omega_1}_{2,\theta}, L_\infty) \asymp \Omega_1(m^{-\frac{1}{d}}) = \Omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Отже, оцінки зверху в теоремі 1 доведені.

Оцінки знизу в (9) отримаємо, скориставшись оцінками найкращих білінійних наближень функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$. З цією метою проведемо деякі попередні міркування (див., наприклад, [13, с. 85])

Нехай F — деякий клас функцій і $f(x)$ — фіксована функція з F. Позначимо через F_f множину, що складається з функцій виду $f(x-y)$, які отримуються з $f(x)$ зсувом аргументу $x \in \pi_d$ на довільний вектор $y \in \pi_d$, тобто

$$F_f = \big\{ f(x-y),\ y \in \pi_d, f \in F \big\}.$$

Тоді, з одного боку, згідно визначення колмогоровського поперечника, можемо записати

$$d_m(F_f, L_q) = \inf_{u_i(x)} \sup_{y \in \pi_d} \inf_{v_i(y)} \Big\| f(\cdot - y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(\cdot) v_i(y) \Big\|_q \le \inf_{\substack{u_i(x),\ v_i(y) \\ i=\overline{1,m}}} \sup_{y \in \pi_d} \Big\| f(\cdot - y) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} u_i(\cdot) v_i(y) \Big\|_q = \inf_{\substack{u_i(x),\ v_i(y) \\ i=\overline{1,m}}} \Big\| f(x-y) - \sum_{i=1}^{m} u_i(x) v_i(y) \Big\|_{q,\infty} = \tau_m(f(x-y))_{q,\infty}. \tag{15}$$

З іншого боку, справедлива також нерівність

$$\tau_m(f(x-y))_{q,\infty} \le d_m(F_f, L_q). \tag{16}$$

Отже, відповідно до (15) і (16) має місце рівність

$$\tau_m(f(x-y))_{q,\infty} = d_m(F_f, L_q). \tag{17}$$

Тепер, оскільки $F_f \subset F$, то згідно (17) можемо записати

$$\tau_m(f(x-y))_{q,\infty} \ll d_m(F, L_q), \quad f \in F. \tag{18}$$

Таким чином, для функціонального класу F, інваріантного відносно зсуву аргумента функції $f \in F$, величини $\tau_m(f(x-y))_{q,\infty}$, $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, можуть слугувати оцінками знизу для поперечників $d_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$.

Далі скористаємось відомими оцінками стосовно найкращих білінійних наближень відповідних функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які отримані в роботі [20].

Нехай спочатку має місце випадок $1 \le p \le q \le 2$. Розглянемо функцію

$$f_1(x) = C_7 \Omega(2^{-n}) 2^{-nd(1-\frac{1}{p})} V_{2^{n+2}}(x), \quad C_7 > 0.$$

В [20] було встановлено, що з відповідною сталою $C_7 > 0$ $f_1 \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ і крім цього

$$\tau_m(f_1(x-y))_{q,\infty} \gg \Omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Таким чином, згідно (18) для $1 \leq p \leq q \leq 2$ отримаємо

$$d_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \gg \tau_m(f_1(x-y))_{q,\infty} \gg \Omega(m^{-\frac{1}{d}})m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Оцінки знизу для поперечників $d_m(B^r_{p,\theta}, L_q)$ для інших співвідношень між параметрами p і q встановлюються аналогічно, з використанням оцінок білінійних наближень відповідних функцій, які розглянуті в роботі [20].

Теорема доведена.

Зауваження. Якщо $\Omega(t) = t^r$, $r > 0$, то при певних додаткових обмеженнях на параметр r з (9) отримаємо відповідні оцінки для колмогоровських поперечників $d_m(B^r_{p,\theta}, L_q)$, які встановлені в [21].

На завершення відзначимо наступне.

Раніше в роботі [8] були встановлені оцінки колмогоровських поперечників для $d_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$, які містяться в теоремі 1, але для більш вузького (а в деяких випадках для іншого) спектру гладкісного параметру α.

Крім цього слід зазничити, що при встановленні оцінок поперечників в теоремі 1 (як зверху, так і знизу) нами застосовувались методи, що принципово відрізняються від тих, які використовувались у роботі [8].

Литература

1. Бернштейн С.Н. Конструктивная теория функций (1931–1953): Собрание сочинений / С.Н. Бернштейн. — М.: Изд. АН СССР. — 1954. — Т.2 — 626 с.

2. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483–522.

3. *Бесов О.В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. — 1959. — **126**, №6. — С. 1163–1165.

4. *Никольский С.М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1951. — **38**. — С. 244–278.

5. *Гольдман М.Л.* Теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского – Бесова с модулями непрерывности общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1984. — **170**. — С. 84–106.

6. *Калябин Г.А.* Теоремы вложения для обобщенных пространств Бесова и Лиувилля // Докл. АН СССР. — 1977. — **232**, №6. — С. 1245–1248.

7. *Li Yongping, Xu Guiqiao.* The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // J. Complexity. — 2002. — **18**, №4. — P. 815–832.

8. *Xu Guiqiao.* The n-wigths for a generalized periodic Besov classes // Acta Math. Sci. — 2005. — **25B**, №4. — P. 663–671.

9. *Стасюк С.А.* Приближение классов $B^{\omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами со спектром в кубических областях // Мат. студiї. — 2011. — **35**, №1. — С. 66–73.

10. *Войтенко С.П.* Найкращi M-members тригонометричнi наближення класiв $B^{\Omega}_{p,\theta}$ перiодичних функцiй багатьох змiнних // Укр. мат. журн. — 2009. —**61**, №9. — С. 1189–1199.

11. *Войтенко С.П.* Найкращi ортогональнi тригонометричнi наближення класiв $B^{\Omega}_{p,\theta}$ перiодичних функцiй багатьох змiнних // Укр. мат. журн. — 2009. —**61**, 11. — С. 1473–1484.

12. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annaherung von Functionen einer gegeben Functionenclasse // Ann. Math. — 1936. — V. 37. — С. 107–111.

13. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1–112.

14. *Temlyakov V.N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. — 419 p.

15. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука, 1976. — 320 с.

16. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.

17. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. — Изд-во Моск. ун–та, 1976. — 307 с.

18. *Тихомиров В.М.* Теория приближений. — М.: ВИНИТИ, 1987. — С. 103–260. — (Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фунд. направления; Т. 14).

19. *Jakson D.* Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — V. 39. — P. 889–906.

20. *Соліч К.В.* Білінійні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2010. — **7**, №1. — С. 325–337.

21. *Романюк А.С.* Билинейные приближения и колмогоровские поперечники периодических классов Бесова // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2009. — **6**, №1. — С. 222–236.