Завдання для самостійного виконання

1. Дослідити на сумісність та визначеність систему лінійних рівнянь. Якщо система сумісна і визначена, знайти розв'язок матричним способом, методом Гауса та за формулами Крамера.
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -9; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -13; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

2. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність та визначеність, в разі сумісності знайти загальний розв'язок.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8; \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 12; \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$$

3. Розв'язати матричне рівняння: $BXA = B^2$, де
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Площа трикутника $S_{\triangle ABC} = 3$, де $A(3;1)$, $B(1,-3)$, а третя вершина C лежить на осі ординат. Знайти координати третьої вершини трикутника.

5. Написати загальне рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1,3)$ і

   а). паралельна прямій $4x - 5y + 2 = 0$;

   б). перпендикулярно до прямої $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1}$.

6. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M_1(\frac{3\sqrt{3}}{2}; -1)$ та $M_2(-1; \frac{4\sqrt{2}}{3})$.

7. Записати канонічне рівняння прямої

$$L: \begin{cases} 2x + y - z - 9 = 0; \\ 7x + 8y - 2z - 36 = 0. \end{cases}$$

Записати рівняння площини π, яка проходить через точку $M_0(1, 2, 3)$ і пряму L. Написати рівняння площини π_1, яка проходить через точку $A(3, 2, 1)$ і перпендикулярно до прямої L. Знайти точку перетину прямої L і площини π_1. Записати рівняння площини π_2 паралельної до площини π_1, яка віддалена від неї на відстані 5 одиниць.

8. У векторному просторі R_3 дано два базиси $B_1 = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$ та $B_2 = \{\overrightarrow{e_1}'; \overrightarrow{e_2}'; \overrightarrow{e_3}'\}$. Знайти $[\overrightarrow{x}]_{\{\overrightarrow{e_i}'\}}$, якщо $[\overrightarrow{x}]_{\{\overrightarrow{e_i}\}} = (2; 3; -1)$;
$\overrightarrow{e_1} = (0; 1; 1)$; $\overrightarrow{e_2} = (2; 1; 1)$; $\overrightarrow{e_3} = (1; 0; 1)$;
$\overrightarrow{e_1}' = (1; 2; 3)$; $\overrightarrow{e_2}' = (2; 1; 2)$; $\overrightarrow{e_3}' = (0; 1; 1)$.

9. Встановити чи буде ізоморфізмом відображення $\varphi : M_2 \to R_4$, де $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $R_4 = \{(2a; c; b; d+a) : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

10. Ортогоналізувати систему векторів
$\overrightarrow{a_1} = (2; -1; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 2; 0)$.