§ 9.3. Основні факти геометрії Лобачевського

Геометрія Лобачевського – це сукупність всіх теорем, що доводяться на основі аксіом I-IV груп Гільберта і аксіоми паралельності Лобачевського, яка є запереченням аксіоми паралельності Евкліда.

Аксіома Лобачевського

Через точку, що не належить даній прямій, в площині, що визначається ними, можна провести не менше двох прямих, які не перетинають даної прямої.

Площина (або простір), в якій виконується аксіома Лобачевського, називається площиною (простором) Лобачевського.

Розглянемо основні наслідки, які випливають з аксіоми Лобачевського.

Теорема 1

Нехай a – довільна пряма і A – довільна точка,яка лежить зовні прямої a. Тоді в площині, що визначається точкою A і прямою a, існує нескінченна множина прямих, які проходять через точку A і не перетинають прямої a.

Доведення. За аксіомою Лобачевського існують дві прямі b,c, які проходять через точку А і не перетинають пряму a:

$b \cap a = \varnothing$; $c \cap a = \varnothing$ (рис 9.1)

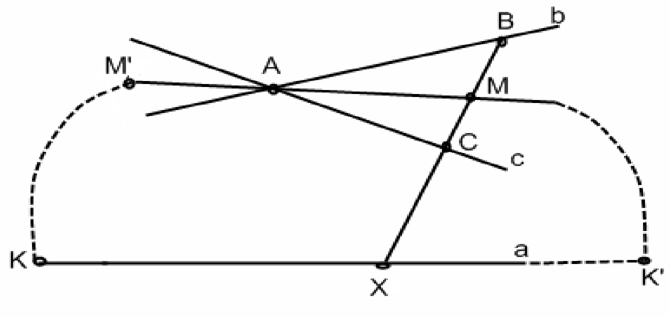


Рис. 9.1

Візьмемо $B \in b$ так, щоб точка B і пряма а лежали в різних півплощинах з граничною прямою c. Тому, взявши довільну точку $X \in a$ і провівши відрізок $[BX]$, одержимо точку перетину $C=[BX] \cap c$ – (цей факт слідує з аксіом порядку). Візьмемо довільну точку M, яка лежить між точками B, C. Покажемо, що пряма AM не перетинає пряму a.

Припустимо супротивне: $AM \cap a = K$. Точка K не належить променю [AM), так як промінь [AM) знаходиться в тій півплощині з граничною прямою c, в якій не лежить пряма a. Тому точка $K \in [AM')$, де [AM') – промінь, доповняльний до променя [AM).

Розглянемо ΔMKX. Пряма b перетинає його сторону [MK] і не перетинає сторону [MX], бо перетинає пряму (MX) в точці B. Тоді за аксіомою Паша (II.4) пряма b перетинає сторону [XK] трикутника MKX, а значить b перетинає пряму a, що суперечить умові. Отже, пряма AM не перетинає a. Так як точок M, що лежать між B і C, нескінченна множина (наслідок з аксіом I-II груп), тому і прямих, що проходять через A і не перетинають пряму a, нескінченна множина.

Теорема 2

В будь-якому трикутнику сума внутрішніх кутів менша $2d$.

Доведення. За теоремою Саккері-Лежандра $\sum\Delta \le 2d$. Якщо припустити, що $\sum\Delta = 2d$, то ми одержимо твердження, еквівалентне V постулату, а отже аксіомі паралельності Евкліда, що суперечить аксіомі паралельності Лобачевського. Отже $\sum\Delta < 2d$.

Наслідок. Сума внутрішніх кутів плоского опуклого чотирикутника менша $4d$.

Теорема 3.

Сума внутрішніх кутів трикутника не є сталою, тобто не одна і та ж для всіх трикутників, а залежить від трикутника.

Доведення. Припустимо, що сума кутів у всіх трикутників одна і та ж і рівна $\delta < 2d$.

Нехай в ΔABC проведена трансверсаль BD, що розбиває трикутник на два трикутники: ABD і BCD (рис.9.2)

Тоді $\sum\Delta ABD = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$;

$\sum\Delta DBC = \angle 5 + \angle 4 + \angle 6$.

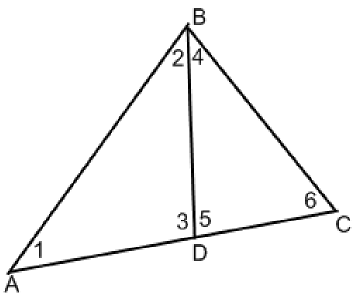


Рис. 9.2

$\sum ABC = \sum ABD + \sum DBC - (\angle 3 + \angle 5) =$

$= \sum \Delta ABD + \sum \Delta DBC - 2d$, тобто $\delta = \delta + \delta - 2d$, або $\delta = 2d$, що суперечить Т.2.

Теорема 4. Існує три типи взаємного розміщення двох прямих на площині Лобачевського: збіжні, розбіжні, паралельні.

Доведення. Візьмемо на площині пряму a і точку $A \notin a$. Проведемо $(AB) \perp a$ $(B \in a)$ і $(AC) \perp (AB)$ (рис.9.3).

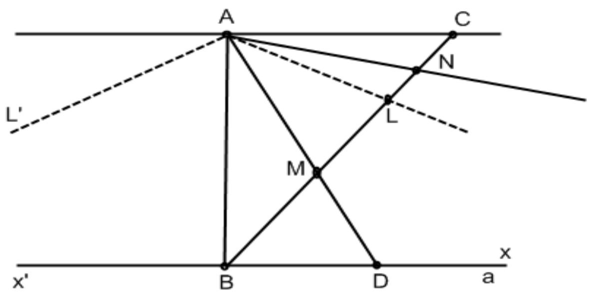


Рис. 9.3

За Т.1 існує нескінченна множина прямих, які проходять через точку A і не перетинають пряму a. Пряма AC теж не перетинає пряму a, бо, якщо припустити, що AC перетинає a, то ми б дістали суперечність з властивістю зовнішнього кута трикутника (зовнішній кут трикутника більший внутрішнього, який не суміжний з ним. Це випливає з аксіом I-III груп).

Проведемо через точку A прямі, які перетинають $[BC]$. Точки відрізка $[BC]$ розіб’ємо на два класи K_1, K_2 за таким законом:

$N \in K_2 \Leftrightarrow N \in [BC]$ і $(AN) \cap a = \varnothing$

$M \in K_1 \Leftrightarrow M \in [BC]$ і $(AM) \cap a \neq \varnothing$.

Зрозуміло,що кожна точка відрізка $[BC]$ входить тільки в один клас, причому $B \in K_1$, $C \in K_2$. Клас K_1 містить точки, відмінні від B. Справді, взявши внутрішню точку D кута BAC, що лежить на прямій а, матимемо

$[AD) \cap [BC] = M \in K_1$. Клас K_2 містить точки, відмінні від C, так як за аксіомою Лобачевського існує пряма (AN), яка не перетинає і $(AN) \neq (AC)$.

Покажемо, що розбиття точок відрізка [BC] на два класи K_1 і K_2 задовольняє всім умовам аксіоми неперервності Дедекінда. Для цього потрібно показати, що будь-яка точка M першого класу K_1, відмінна від B, лежить між B і будь-якою точкою N другого класу K_2 .

З трьох точок B,M,N відрізка [BC] можливе одне з трьох відношень: [MBN], [BNM], [BMN]. Перше неможливе,бо точка B відрізка не може лежати між своїми внутрішніми точками. Припустимо, що має місце друге відношення (рис.9.4)

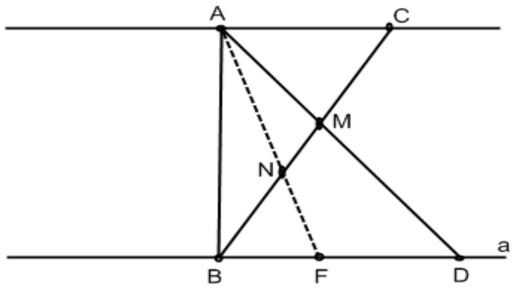


Рис. 9.4

Нехай AM∩a =D(M$\in$ K_1)

До $\Delta\ MD$ і прямої AN можемо застосувати аксіому Паша, тому AN∩[BD]=F. Але точка N $\in K_2 \rightarrow AN \cap a = Ø$.

Одержали протиріччя.

Тому залишається, що точка M$\in$ K_1 лежить між B і будь-якою точкою N другого класу. Отже, умови аксіоми Дедекінда виконуються. Тому існує така точка L$\in$[BC], що з [BML]$\rightarrow$M$\in$ K_1, [LNC] $\rightarrow$N$\in$ K_2 (*)

Сама точка L належить або першому, або другому класу. Доведемо, що L$\in$ K_2 .

Припустимо, що точка L$\in$ K_1. Тоді (AL)∩a=E, причому E$\in$[BX) (припущення, що E належить променю, доповняльному до [BX), приводить до протиріччя з теоремою про зовнішній кут трикутника) (рис.9.5).

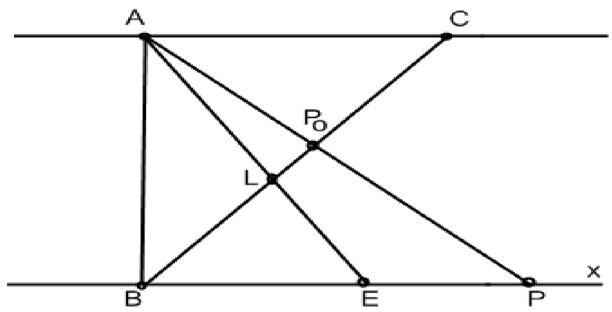


Рис. 9.5

Візьмемо точку $P \in [BX)$, таку що $[BEP]$. Тоді $AP \cap [LC] = P_0$, причому P_0 лежить між L і C, а тому з відношень (*) маємо, що точка $P_0 \in K_2$, що суперечить тому, що $AP_0 \cap a \neq \varnothing$. Звідки маємо, що $L \in K_2$.

Візьмемо пряму AL' симетричну AL відносно(AB). Прямі AL і AL' мають такі властивості:

а) вони не перетинають пряму *a*;

б) всі прямі пучка з центром в точці A, які проходять всередині однієї пари вертикальних кутів, утворених прямими (AL) і (AL'), перетинають пряму *a*, а ті, що проходять всередині другої пари, не перетинають пряму *a*. Такі прямі AL і AL' є *межовими* в пучку прямих, що проходять через точку A. Прямі (AL) і (AL'), що мають властивості а) і б), Лобачевський називає *паралельними* прямій *a*, а кут BAL - *кутом паралельності* в точці A відносно прямої *a*.

Говорять, що пряма (AL) паралельна прямій *a* в напрямі [BX), а (AL'), паралельна прямій *a* в напрямі [BX'), де [BX') - промінь, доповняльний до [BX).

Таким чином, через точку $A \in a$ проходять дві прямі, паралельні прямій *a*: по одній паралелі в кожному з двох напрямів на прямій *a*.

Прямі a і b називаються *розбіжними*, якщо вони лежать в одній площині, не перетинаються і не паралельні. Розбіжних прямих безліч. Отже, ми дістаємо таку картину (рис.9.6)

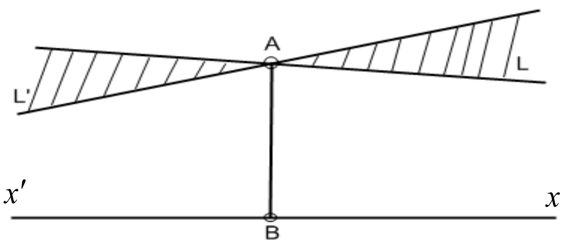


Рис. 9.6

Всі прямі, які проходять через точку A і лежать всередині заштрихованих вертикальних кутів, утворених двома межовими (паралельними) прямими (AL) і (AL'), є розбіжні,а всі прямі, які проходять через точку A і лежать всередині незаштрихованих вертикальних кутів, є збіжними.

Теорема доведена.

<u>Теорема 5</u> (четверта ознака конгруентності трикутників)

Якщо три кути трикутника ABC відповідно конгруентні трьом кутам трикутника A'B'C', то ці трикутники конгруентні.

Доведення. Покажемо, що [AB]$\cong$[A'B'] і тоді трикутники будуть конгруентні за другою ознакою конгруентності. Припустимо супротивне, тобто нехай [AB] не конгруентний [A'B'] і для означеності нехай відрізок [AB]>[A'B']. Тоді існує точка B'' відрізка[AB]: [AB'']$\cong$[A'B'] (рис.9.7)

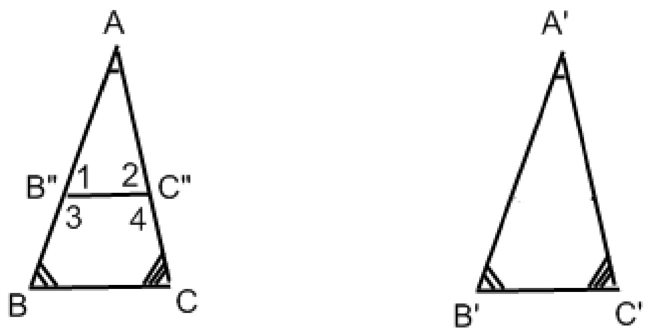


Рис. 9.7

Візьмемо точку C''$\in$[AC) так, що [AC''] $\cong$[A'C'].

Маємо: ΔAB''C''$\cong$ ΔA'B'C' (за I ознакою). Тому

$$\angle \qquad \angle \qquad (9.1)$$

Доведемо, що [BC]∩[B''C''] =Ø. Припустимо супротивне. Нехай [BC]∩[B''C''] =M.

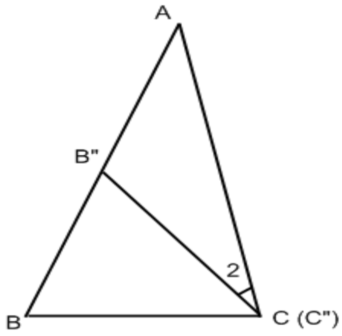


Рис. 9.8.

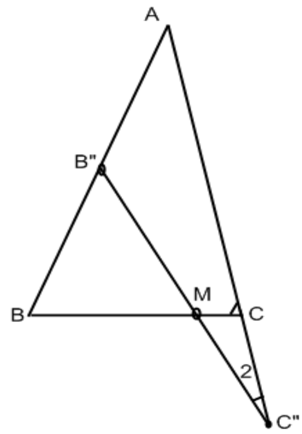


Рис. 9.9

Можливі два випадки: точка M збігається з точкою C або точка M лежить між B і C. Розглянемо кожен із них:

а) Якщо M=C (рис.9.8), то C''=C і тоді $\angle \;<\angle$, що суперечить умові (9.1).

б) Якщо припустимо, що [BMC] (рис.9.9), то в трикутнику MCC'' $\angle 2 \leq \angle$, що суперечить теоремі про зовнішній кут трикутника. Отже, [BC]∩[B''C''] =Ø.

Звідси випливає, що точка C'' лежить між A і C (рис.9.7).

Маємо $\angle + \angle = 2d$; $\angle + \angle = 2d$ (9.2)

З співвідношень (9.1), (9.2) маємо:

$\angle + \angle = 2d$; $\angle + \angle = 2d$.

А це означає,що в опуклому чотирикутнику BB''C''C сума внутрішніх кутів рівна 4d, що суперечить наслідку з теореми 2.

Таким чином, припущення, що [AB] не конгруентний [A'B'] приводить до протиріччя. А тому [AB]≅[A'B']; і ΔABC≅Δ A'B'C'.

Теорема доведена.

§ 9.4. Кут паралельності та його властивості

Нехай a – деяка пряма, і А – точка, яка не лежить на цій прямій. Нехай AP – перпендикуляр до прямої a і a' - пряма, що проходить через А і паралельна a (рис.9.10). Позначимо через α гострий кут, який пряма a' утворює з перпендикуляром AP. Кут α називається *кутом паралельності* прямої a' в точці А по відношенню до прямої a.

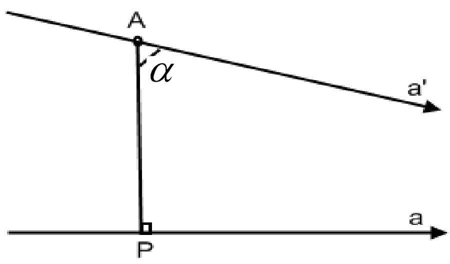


Рис. 9.10

Має місце наступна теорема.

Теорема 1

Кут паралельності в точці А по відношенню до прямої a залежить тільки від відстані точки А до прямої a.

Доведення. Нехай дані дві прямі a і a' і дві точки А і А' віддалені від прямої a і a' на одну і ту ж відстань. Через точки А, А' проводимо прямі b, b', які відповідно паралельні прямим a і a' вправо. Нехай α і α' - кути паралельності в точках А і А' відносно прямих a і a' (рис.9.11).

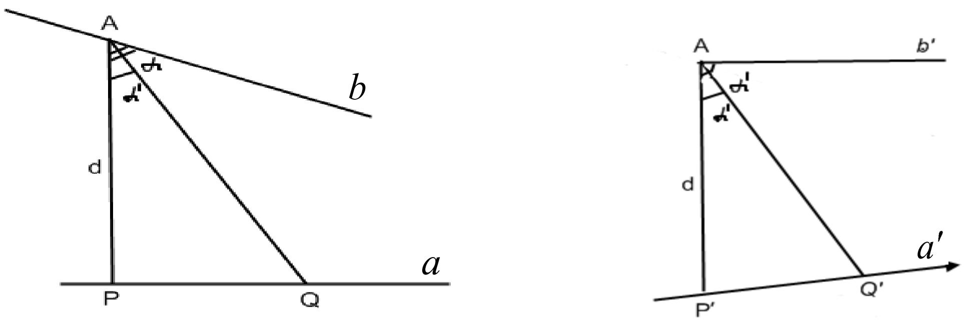


Рис. 9.11

Для доведення теореми потрібно показати, що $\alpha = \alpha'$. Будемо доводити методом від супротивного.

Припустимо, що кути не конгруентні, тобто $\alpha \neq \alpha'$. Нехай для означеності $\alpha > \alpha'$. Відкладемо від променя AP вправо кут, конгруентний α'. Тоді пряма AQ перетне пряму a в деякій точці Q. Від точки P' на прямій a' вправо відкладемо відрізок [P'Q'] $\cong$ [PQ].

Так як трикутники PAQ і P'A'Q' конгруентні, то кут, який пряма b' утворює з променем A'P' справа від нього, не конгруентний куту α'. А це неможливо, так як за аксіомою III_4 не можна по одну сторону від даного променя відкласти два різних променя під одним і тим же кутом.

Теорема доведена.

Дослідимо, як змінюється кут паралельності α зі зміною довжини перпендикуляра AP. Нехай a – дана пряма. Поставимо в деякій точці P цієї прямої перпендикуляр і відкладемо на ньому два відрізка $PM = p_1$; $PN = p_2$; $p_2 > p_1$ (рис. 9.12).

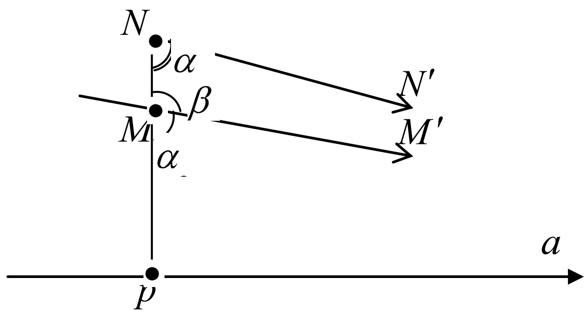


Рис. 9.12

Проведемо через M і N прямі MM', NN', паралельні в одному ж напрямі до прямої a.

Нехай α_1 і α_2 – кути паралельності відповідно в точці M і в точці N, а кут β, суміжний до α_1, так що, $\alpha_1 + \beta = 2d$. Так як $MM' \parallel NN'$, то матимемо $\alpha_2 + \beta < 2d$. Звідси $\alpha_2 < \alpha_1$. Отже, при $p_2 > p_1$ має місце нерівність $\alpha_2 < \alpha_1$. Таким чином, із зростанням p кут паралельності строго спадає.

Позначимо довжину відрізка AP через x, тоді кут паралельності α є функцією від x, яку позначають

$$\alpha = \Pi(x)$$

і називають <u>функцією Лобачевського.</u> Функція Лобачевського визначена на проміжку (0;+∞

<u>Теорема 2</u>

Функція Лобачевського $\Pi(x)$, задана на проміжку (0;+∞ , неперервна на цьому проміжку, строго спадна і

$$\lim_{x\to} \Pi(x) = \frac{\pi}{2};\ \lim_{x\to} \Pi(x) = 0.$$

Можна довести, що має місце співвідношення

$$\Pi(x) = 2arctg\, e^{-\frac{x}{R}},$$

де $R > 0$ – деяка стала (див. Ефимов Н. В. «Высшая геометрия», гл. III, §59).

Це співвідношення називається основним рівнянням Лобачевського.

Відзначимо, що рівність $\lim_{x\to} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ говорить про те, що в досить малій частині площини геометрія Лобачевського як завгодно мало відрізняється від геометрії Евкліда.

§ 9.5. Взаємне розміщення розбіжних і паралельних прямих

9.5.1. Розбіжні прямі

Дві прямі, розміщені в одній площині, які не перетинаються і не паралельні між собою, називаються *розбіжними.*

Теорема 1. Якщо прямі *а* і *в* перпендикулярні третій прямій *с*, то вони розбіжні.

Доведення. Пряма *в* (рис. 9.13) утворює з перпендикуляром ВА по обидві сторони від нього кут, рівний $\frac{\pi}{2}$. Отже, вона не паралельна прямій *а*. Пряма *в* не перетинає прямої *а*, бо в противному випадку ми б одержали суперечність з теоремою про властивість зовнішнього кута трикутника (III група аксіом).

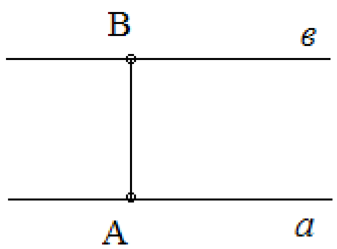


Рис 9.13

Теорема 2. Якщо прямі *а* і *в* перетнуті третьою прямою *с* і при цьому внутрішні різносторонні кути конгруентні, то прямі *а* і *в* – розбіжні.

Доведення. Нехай точка О – середина відрізка [АВ] (рис. 9.14). З точки О опустимо перпендикуляр ОК на пряму *а* і знайдемо перетин його з прямою *в* (точка М). Трикутники АОК і МОВ – конгруентні

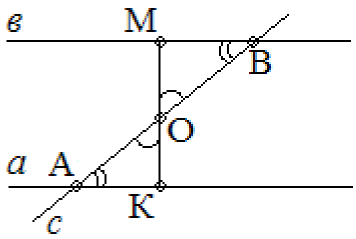


Рис. 9.14

([AO]≅[OB], ∠MBO≅∠KAO; ∠MOB≅∠AOK (як вертикальні)). Тому ∠AKO≅∠OMB. Але кут AKO – прямий, тому і ∠OMB – прямий. Прямі *а* і *в* – перпендикулярні до прямої MK і на основі теореми 1 маємо, що прямі *а* і *в* – розбіжні.

Теорема доведена.

<u>Наслідок.</u> Якщо при перетині двох прямих *а* і *в* третьою прямою відповідні кути конгруентні, то прямі *а* і *в* – розбіжні.

Для доведення теореми про взаємне розміщення розбіжних і паралельних прямих нам потрібні такі дві леми з абсолютної геометрії.

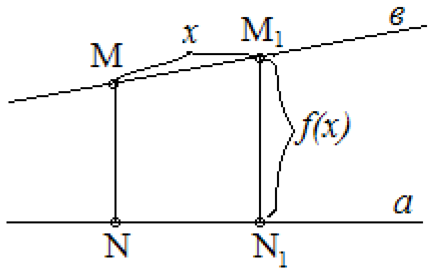


Рис. 9.15

<u>Лема 1.</u> Нехай дані прямі *а* і *в* (рис. 9.15). На прямій *в* візьмемо точку M і опустимо перпендикуляр MN на пряму *а*. Припустимо, що справа від відрізка MN знаходиться тупий кут. Нехай M_1 – довільна точка прямої *в*, яка лежить правіше точки M, і M_1N_1 – перпендикуляр до прямої *а*. Довжину відрізка MM_1 позначимо через *x*, а довжину відрізка M_1N_1 – через *f(x)*. Тоді на проміжку (0, +∞) функція *f(x)* неперервна, строго зростає і

$$\lim_{x \to} f(x) =$$

<u>Лема 2.</u> Розглянемо кут, утворений півпрямими *а* і *в* (рис. 9.16). Нехай M – довільна точка півпрямої *в* і MN – відрізок, перпендикулярний до *а*. Позначимо через *x* довжину відрізка OM, а через *f(x)* – довжину відрізка MN. Тоді на (0, +∞) функція *f(x)* є строго зростаюча, неперервна функція і

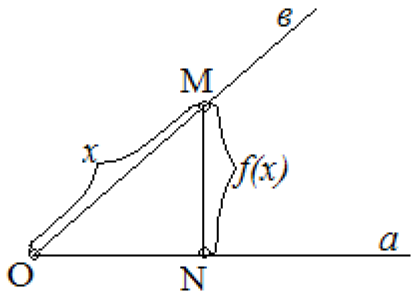


Рис. 9.16

$$\lim_{x \to} f(x) = .$$

Лема 1 є частковий випадок леми 2.

<u>Теорема 3.</u> (про взаємне розміщення розбіжних прямих)

Нехай *а* і *в* – дві розбіжні прямі. Тоді у них існує один і тільки один спільний перпендикуляр, по обидва боки від якого вони необмежено розбігаються.

Доведення. Припустимо, що спільний перпендикуляр існує. Доведемо його єдиність. Доведення проведемо методом від супротивного. Нехай у розбіжних прямих *а* і *в* є два спільних перпендикуляра *k*, *l*. Тоді прямі *а*, *в*, *k*, *l*

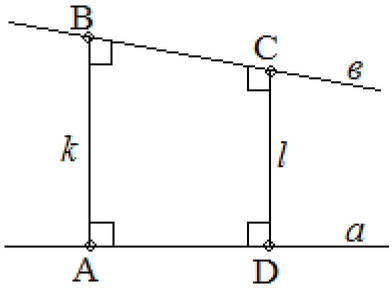


Рис. 9.17

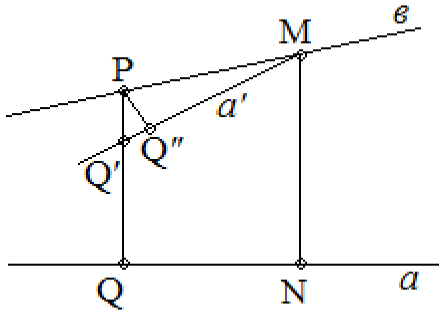


Рис. 9.18

визначають чотирикутник ABCD (рис. 9.17) з чотирма прямими кутами, що неможливо. Отже, припущення невірне. У двох розбіжних прямих може бути не більше одного спільного перпендикуляра.

Доведемо тепер, що у прямих *а*, *в* є спільний перпендикуляр. Візьмемо на прямій *в* точку М і нехай MN – перпендикуляр до прямої *а* (рис. 9.18). Не порушуючи загальності, можна вважати, що справа від прямої MN кут між прямою *в* і відрізком MN тупий. Через точку М проведемо пряму *а′*, яка паралельна прямій *а* вліво. Так як *в* – розбіжна пряма з прямою *а*, то зліва від прямої MN пряма *а′* лежить між прямими *в* і *а*. Нехай Р – довільна точка прямої *в*, яка лежить лівіше точки М. Нехай PQ і PQ″ - відповідні відрізки, перпендикулярні прямим *а* і *а′* (рис. 9.18). Точки Р і Q лежать по різні боки від прямої *а′*. Значить, відрізок PQ перетинає пряму *а′* в деякій точці Q′. В прямокутному трикутнику PQ′Q″ відрізок PQ″ - катет, а відрізок PQ′ - гіпотенуза.

Тому

$$PQ'' < PQ'$$

Далі,

$$PQ = PQ' + Q'Q''$$

Звідси

$$PQ'' < PQ$$

За лемою 2, якщо точка P віддаляється вліво від точки M вздовж прямої *в*, то відстань PQ″ необмежено зростає, а тому необмежено зростає і відстань PQ. Отже, точка P необмежено віддаляється від прямої *а*. Помінявши в побудові ролями прямі *а*, *в*, одержимо аналогічний факт для точок прямої *в* по відношенню до прямої *а*. Таким чином, вліво від перпендикуляра MN прямі *а* і *в* необмежено віддаляються одна від одної. Візьмемо тепер зліва від точки M на прямій *в* точку P_0 так, щоб довжина відрізка P_0Q_0, перпендикулярного прямій *а*, була б більша довжини відрізка MN (рис. 9.19). Застосовуючи лему 1 до точок прямих *в* і *а*, що лежать вправо від перпендикуляра MN, одержимо, що справа від MN прямі *а* і *в* необмежено віддаляються одна від одної і, крім того, існує відрізок M_1N_1 такий, що його довжина дорівнює довжині відрізка P_0Q_0.

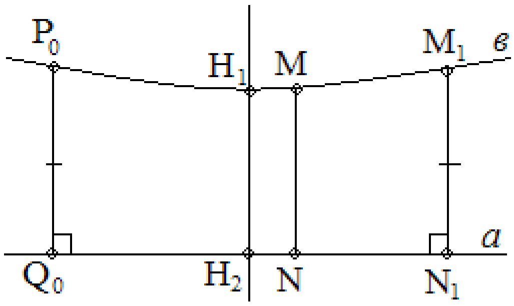


Рис. 9.19

Чотирикутник $P_0Q_0N_1M_1$ є чотирикутником Саккері. Середня лінія до основ цього чотирикутника є лінією симетрії. Тому середня лінія H_1H_2 і є шуканий спільний перпендикуляр до прямих *а* і *в*. Теорема доведена.

9.5.2. Паралельні прямі

З теореми 4 §9.3 випливає таке означення паралельних прямих.

Означення. Пряма C′C називається *паралельною* прямій B′B в напрямі B′B в точці A, якщо, по-перше, пряма C′C не перетинає пряму BB′, по-друге, C′C є межовою в пучку прямих з центром в точці A, тобто кожен промінь AE, що проходить всередині кута CAD, де D – будь-яка точка прямої BB′, перетинає промінь DB (рис. 9.20).

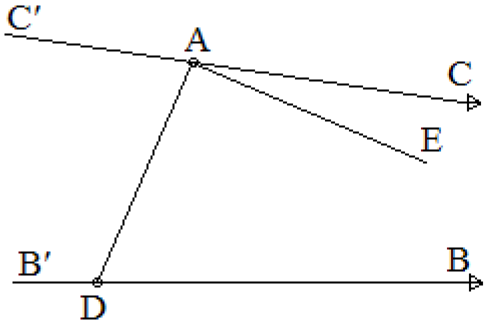


Рис. 9.20

В геометрії Лобачевского говорячи, що пряма C′C паралельна прямій BB′, необхідно також вказувати <u>в якому напрямі</u> C′C паралельна B′B, інакше, ми будемо вважати прямі C′C і B′B *орієнтованими* в напрямі паралельності і на рисунках будемо напрям вказувати стрілкою.

Можна довести такі властивості паралельних прямих:

1) Якщо пряма $BB' \parallel AA'$ в точці M, то $BB' \parallel AA'$ в будь-якій своїй точці N. Звідси випливає, що вимога вказувати, в якій точці одна пряма паралельна другій, є фактично зайвим.
2) Якщо $BB' \parallel AA'$, то і навпаки: $AA' \parallel BB'$.
3) Якщо $AA' \parallel CC'$ і $BB' \parallel CC'$, то $AA' \parallel BB'$.
4) Якщо пряма CC′ лежить між двома прямими AA′ і BB′, паралельними в деякому напрямі, не перетинає їх, то CC′ паралельна обом цим прямим в тому ж напрямі.

<u>Теорема 4</u> (про взаємне розміщення паралельних прямих)

Дві паралельні прямі необмежено зближаються в сторону паралельності і необмежено віддаляються одна від одної в протилежному напрямі.

Доведення. Нехай пряма *в* паралельна прямій *a* вправо і B – довільна точка прямої *в*. Нехай BP – перпендикуляр до прямої *a* (рис. 9.21). Зліва від прямої PB пряма *в* утворює з відрізком BP тупий кут. Це випливає з того, що пряма *в* паралельна прямій *a* вправо. Тому при необмеженому віддаленні вздовж прямої *в* вліво від точки

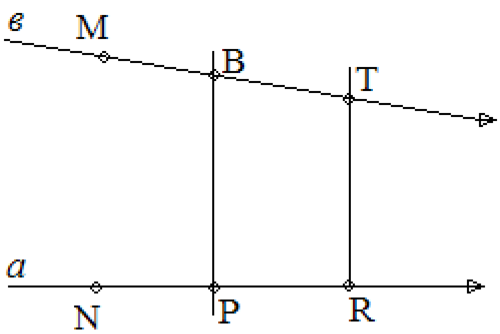


Рис. 9.21

В точка M необмежено віддаляється від прямої a. Аналогічно, при переміщенні точки N вздовж прямої a вліво від точки P вона необмежено віддаляється від прямої $в$. Отже, в напрямі, протилежному напряму паралельності, прямі a і $в$ необмежено віддаляються одна від одної.

Нехай тепер $\varepsilon > 0$ – довільне число. Не порушуючи загальності, можна вважати ε меншим, ніж довжина відрізка BP. На довільній прямій a' візьмемо точку R′ і проведемо через неї пряму, перпендикулярну прямій a'. На цьому перпендикулярі візьмемо точку T′ (рис. 9.22) так, щоб довжина R′T′ була б менша ε. Через точку T′ проведемо пряму $в'$, паралельну a' вправо. Якщо S′ - точка прямої $в'$, що лежить правіше точки T′, то застосовуючи лему 1, одержимо, що

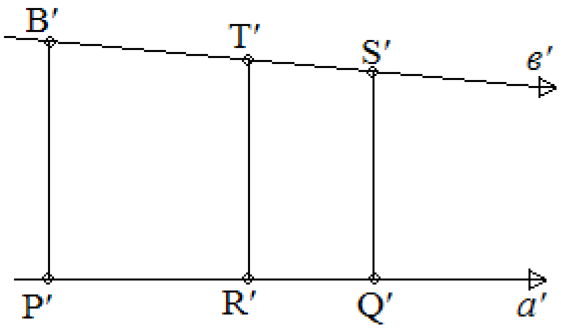


Рис. 9.22

$$S'Q' < T'R',$$

Значить, довжина відрізка S′Q′ менша ε. Таким чином, права півпряма прямої $в'$ з початком в точці T′ віддалена від прямої a' на відстань, меншу ε.

На основі леми 1 одержимо, що зліва від точки T′ існує точка B′ така, що довжини відрізків B′P′ і BP рівні. Тому ці відрізки конгруентні.

Нехай тепер R – точка прямої a, яка лежить правіше точки P і така, що $[PR] \cong [P'R']$ (рис. 9.21). Виконаємо рух на площині Лобачевского, який сумістить точку P′ з точкою P, точку R′ з точкою R і точку B′ з точкою B. Такий рух існує і єдиний (наслідки з абсолютної геометрії). При цьому русі прямі a' і $в'$ перейдуть відповідно в прямі a і $в$. Позначимо через T точку прямої $в$, яка є образом точки T′ у вказаному русі. Так як при русі довжини відрізків зберігаються, то всі точки прямої $в$, які лежать правіше перпендикуляра TR, віддалені від прямої a на відстань, меншу ε. Помінявши місцями прямі a і $в$, одержимо аналогічне твердження і для точок прямої a. Отже, в сторону паралельності прямі a і $в$ необмежено збігаються. Теорема доведена.

§ 9.6. Криві сталої кривини

9.6.1. Пучки прямих на площині Лобачевського

На площині Евкліда є дві лінії – пряма і коло, характерною особливістю яких є те, що кожна з них може без деформації ковзати сама по собі. Такі криві називаються кривими сталої кривини. Факт існування лише двох кривих сталої кривини пов'язаний з тим, що на площині Евкліда можливі лише два випадки взаємного розміщення двох прямих: дві прямі або перетинаються в одній точці, або паралельні. Звідси і слідує існування лише двох видів пучків прямих:

1)пучка прямих, що проходять через одну точку, яка називається центром пучка;

2)пучка паралельних прямих.

Ортогональні траєкторії пучка збіжних прямих є колами, а ортогональні траєкторії пучка паралельних прямих є прямі.

На площині Лобачевського дві прямі можуть або перетинатись, або бути паралельними в деякому напрямі, або розбіжними. Тому на площині Лобачевського існує три види пучків прямих:

1) пучок прямих, що перетинаються в одній точці, яка називається *центром пучка*. Такий пучок називається *еліптичним*;

2) пучок прямих, паралельних в заданому напрямі деякій прямій, що називається *віссю* пучка; такий пучок називається *параболічним*;

3) пучок розбіжних прямих – це пучок прямих, які перпендикулярні до деякої прямої, що називається *базою пучка*; такий пучок називається *гіперболічним*.

9.6.2. Січні рівного нахилу

<u>Означення</u>. *Січною рівного нахилу* до двох даних прямих називається пряма, яка при перетині з даними утворює конгруентні внутрішні односторонні кути.

Доведемо теорему, з якої випливає існування січних рівного нахилу.

Теорема 1. Нехай на площині заданий пучок орієнтованих прямих. Тоді для будь-якої пари прямих пучка через кожну точку однієї з них проходить січна рівного нахилу до обох прямих і до того ж одна.

Доведення. Розглянемо різні види пучків прямих.

1. Нехай дві прямі *a* і *b* перетинаються в точці О (рис. 9.22). Січні рівного нахилу можна одержати, відкладаючи від точки О конгруентні відрізки ОА і ОВ на променях *a* і *b*. Тоді АВ – січна рівного нахилу.

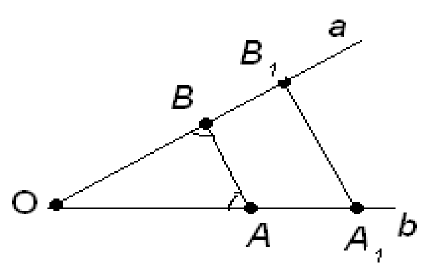


Рис.9.22

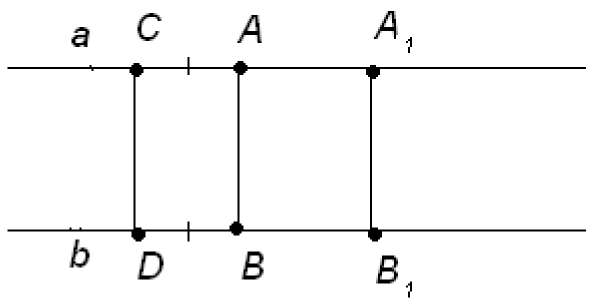


Рис.9.23

2. Нехай прямі *a* і *b* – розбіжні. Тоді вони мають єдиний спільний перпендикуляр *CD*, який і буде січною рівного нахилу (рис.9.23). Відкладаючи $[CA] \cong [DB]$, $[CA_1] \cong [DB_1]$ і т.д., одержимо січні рівного нахилу

АВ, $A_1 B_1$ і т.д.

3. Нехай прямі *a* і *b* - паралельні. Візьмемо на прямих *a* і *b* дві точки С і D і проводимо січну CD(рис 9.24)

Проведемо бісектриси кутів $C'CD$ і $D'DC$, які перетнуться в деякій точці О, яка лежить між прямими *a* і *b*. З точки О опустимо перпендикуляри ОА, ОВ на прямі *a* і *b*.

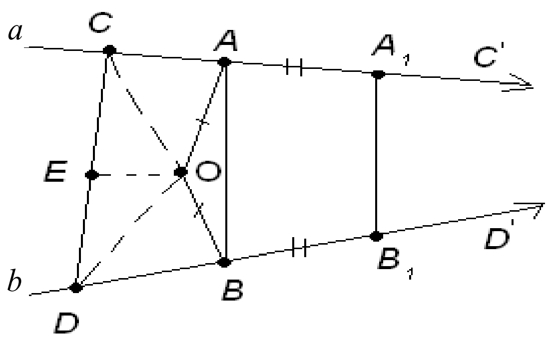


Рис.9.24

За властивістю бісектрис матимемо, що OA=OB=OE (OE – перпендикуляр до CD). Доведемо, що AB – січна рівного нахилу. Справді, трикутник OAB – рівнобедрений, отже $\angle OAB \cong \angle OBA$, а тому і $\angle CAB \cong \angle DBA$.

Якщо одна січна рівного нахилу побудована, то щоб знайти січну рівного нахилу до двох прямих *a*, *b*, що проходить через точку A_1 прямої *a*, потрібно на прямій відкласти відрізок $[BB_1] \cong [AA_1]$, обидва в сторону паралельності або обидва в протилежному напрямі. Тоді A_1B_1 — січна рівного нахилу.

З єдиності побудов січної рівного нахилу в кожному випадку і випливає її єдиність.

<u>Властивості:</u>

1)Якщо до орієнтованих прямих *a* і *b* проведені дві січні рівного нахилу *AB* і A_1B_1, то $AA_1 = BB_1$.

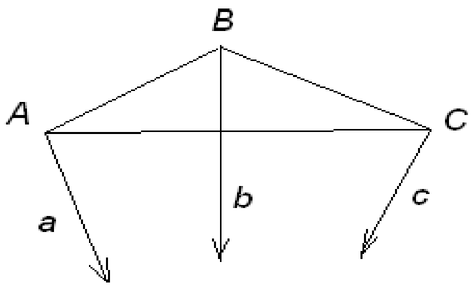


Рис.9.25

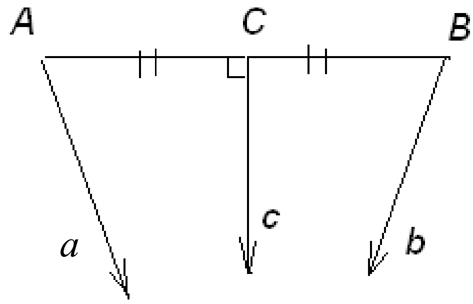


Рис.9.26

2) Якщо на площині дані три прямі *a*, *b*, *c*, які належать одному пучку і проходять відповідно через точки A, B, C, і якщо AB – січна рівного нахилу до *a* і *b*, BC – січна рівного нахилу до *b* і *c*, то AC є січна рівного нахилу до *a* і *c* (рис.9.25).

3) Якщо AB – січна рівного нахилу до паралельних прямих *a* і *b*, то перпендикуляр до відрізка AB в його середині паралельний *a* і *b* в тому ж напрямі (рис.9.26).

9.6.3. Криві сталої кривини

Означення 1. Якщо a і b — дві прямі пучка і AB – яка-небудь січна рівного нахилу, яка перетинає a і b в точках A і B, то ці точки називаються *взаємно відповідними* відносно пучка.

Візьмемо яку-небудь пряму a пучка і на ній довільну точку A. Тоді, проводячи через точку A січні рівного нахилу до всіх прямих пучка, ми на кожній прямій пучка знайдемо точку, відповідну точці A. Геометричне місце всіх таких точок визначить на площині деяку лінію. В залежності від того, якого виду пучок розглядаємо, ми одержимо різні лінії, побудовані вказаним вище способом.

Означення 2. Геометричне місце точок, відповідних деякій точці A, взятій на одній прямій пучка, називається *колом*, *орициклом* або *еквідистантою* в залежності від того, чи буде даний пучок прямих відповідно *еліптичним*, *параболічним* чи *гіперболічним*. Сама точка A також включається у відповідне геометричне місце.

Основні властивості

Теорема 1. Ніякі три точки кола, орицикла і еквідистанти, відмінної від прямої, не лежать на одній прямій.

Доведення. Припустимо, що три точки A,B,C, які належать колу або орициклу, лежать на одній прямій (рис.9.27). За означенням цих кривих AB, BC, AC є січні рівного нахилу до відповідних пар прямих пучка AA', BB', CC'.

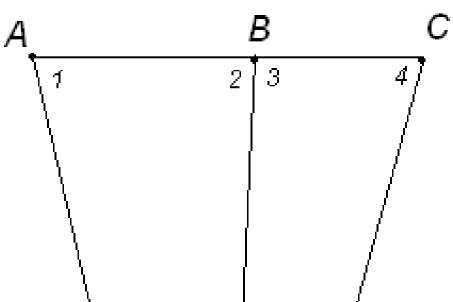


Рис.9.27

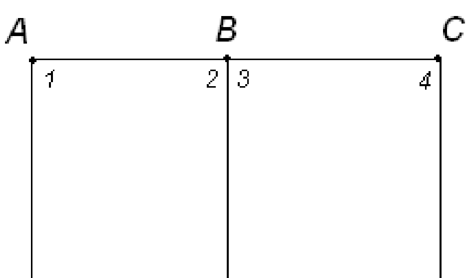


Рис.9.28

Тому $\angle 1 \cong \angle 2$; $\angle 3 \cong \angle 4$; $\angle 1 \cong \angle 4$;

Але тоді $\angle 2 \cong \angle 3$; $\angle 2+\angle 3=2d$

Отже, $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=d$, тобто всі три прямі AA', BB', CC' перпендикулярні до АС. А це означає, що прямі AA', BB', CC' – розбіжні прямі, що суперечить умові.

Припустимо тепер, що три точки А, В, С еквідистанти лежать на одній прямій (рис.9.28). Нехай DF - база гіперболічного пучка. Як і в попередньому випадку, покажемо, що

$$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=d$$

Але тоді чотирикутники Саккері ABED, BCFE мають всі кути прямі, що неможливо.

Теорема доведена.

Для гіперболічного пучка база DF є січна рівного нахилу. Щоб побудувати січну рівного нахилу, що проходить через точку А, відносно прямих пучка, потрібно від бази відкладати однакові відрізки. Звідси бачимо, що *еквідистанта є геометричне місце точок, рівновіддалених від прямої(бази пучка).*

Таким чином, в геометрії Лобачевського геометричне місце точок, рівновіддалених від даної прямої є крива – еквідистанта.

Довжина h перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки еквідистанти на її базу, називається висотою еквідистанти. Пряму, як частковий випадок еквідистанти, можна розглядати, як еквідистанту з висотою h=0.

<u>Теорема 2.</u> Нехай для даного пучка, в залежності від його виду, побудоване коло, або орицикл, або еквідистанта. Тоді кожна пряма пучка є нормаллю до відповідної кривої.

Доведення. Для кола теорема очевидна. Розглянемо випадки орицикла та еквідистанти. Будемо проводити доведення одночасно для двох кривих. Нехай А – довільна точка орицикла (рис.9.29) або еквідистанти (рис.9.30), яка лежить на прямій *a* параболічного або відповідно гіперболічного пучка.

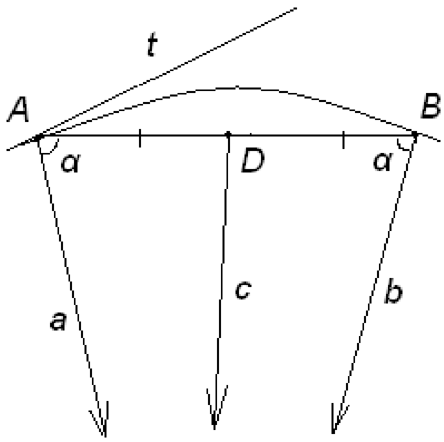


Рис.9.29

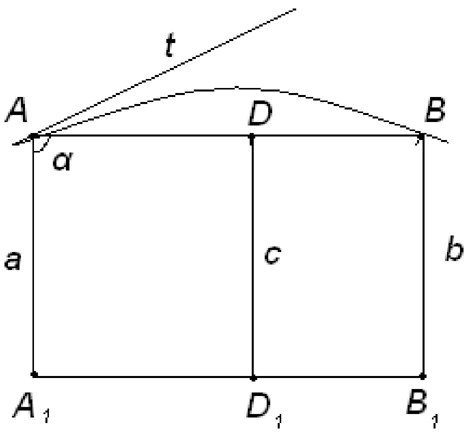


Рис.9.30

Нехай t - пряма, яка проходить через точку A перпендикулярно до a. Візьмемо довільну точку B кривої і проведемо хорду AB, що є січною рівного нахилу до a і прямої b пучка, яка проходить через точку B. Через середину хорди AB проведемо перпендикуляр c до цієї хорди. У випадку орицикла $c \parallel a, c \parallel b$, тому кут α між хордою AB і прямими a і b є кут паралельності, який відповідає відрізку AD=BD=$\frac{AB}{2}$, тобто $\alpha = \Pi(\frac{AB}{2})$, а тому $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

У випадку еквідистанти, відмінної від прямої, кути при січній рівного нахилу гострі, як кути при верхній основі чотирикутника Саккері A_1ABB_1, тобто $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Але так як a і b – розбіжні прямі, то $\alpha > \Pi(\frac{AB}{2})$. Отже, для обох кривих маємо

$$\alpha < \frac{\pi}{2} \quad , \tag{9.3}$$

причому для орицикла

$$\alpha = \Pi(\frac{AB}{2}), \tag{9.4}$$

для еквідистанти

$$\Pi(\frac{AB}{2}) < \alpha < \frac{\pi}{2} \tag{9.5}.$$

З співвідношення (9.3) слідує, що всі точки B обох кривих, відмінні від A, лежать по один бік від прямої t.

Нехай точка В необмежено наближається до А. Тоді АВ→0 і з співвідношень (9.4), (9.5) одержимо

$$\lim_{AB\to} \alpha = \lim_{AB\to} \Pi\left(\frac{AB}{2}\right) = \frac{\tau}{2}$$

А це означає, що перпендикуляр t є граничне положення січної АВ при необмеженому наближенні точки В до точки А, тобто t – дотична до кривої в точці А. А тому пряма *a* пучка є нормаль кривої. Отже, коло, орицикл, еквідистанта є ортогональними траєкторіями відповідних пучків.

Теорема доведена.

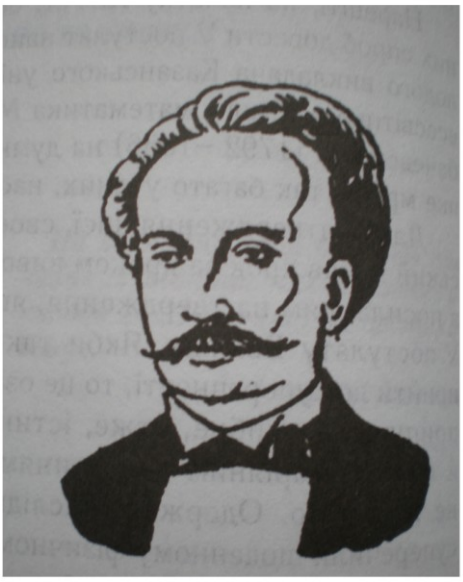
Своєрідні властивості має орицикл.

1. Орицикл симетричний відносно будь-якої своєї нормалі. Тому нормалі орицикла називаються його осями.
2. Всі орицикли конгруентні між собою. Звідси випливає, що орицикл може ковзати сам по собі без деформації, подібно до того, як це має місце для прямої і кола.

Таку властивість має і еквідистанта.

Таким чином, в геометрії Лобачевського є чотири типи ліній сталої кривини: пряма, коло, орицикл і еквідистанта.

§ 9.7. Несуперечливість геометрії Лобачевського



Еудженіо Бельтрамі

Для доведення несуперечливості геометрії Лобачевського побудуємо модель системи її аксіом. Перша модель площини Лобачевського була створена у 1868 р. італійським математиком Бельтрамі. Він показав, що в евклідовому просторі є поверхня сталої від’ємної гауссової кривини (псевдосфера), на якій в системі її геодезичних ліній реалізується планіметрія Лобачевського в малому, тобто площина Лобачевського лише частково може бути відображена на псевдосферу.


Фелікс Клейн

У 1871 р. видатний німецький математик Ф. Клейн побудував модель всієї площини Лобачевського, яку називають проективною моделлю.

Наведемо модель, яка належить французькому математику А. Пуанкаре, побудовану ним у 1882 р.

Обмежимось для простоти планіметрією Лобачевського. Будемо будувати модель планіметрії Лобачевського в планіметрії Евкліда.

Розглянемо в евклідовій площині деяку пряму p, яку будемо уявляти собі горизонтальною. Площиною Лобачевського (або Л-площиною) будемо називати верхню евклідову півплощину з межовою прямою p, причому сама пряма p виключається, а точки цієї півплощини (за винятком точок прямої p) – точками Лобачевського (або Л-точками). Прямими Лобачевського (або Л-прямими) будемо називати евклідові півкола, ортогональні до прямої p, тобто ті, що мають центри на цій прямій, а також евклідові півпрямі, перпендикулярні до прямої p, з вершинами на цій прямій і розміщені в верхній півплощині. Будемо говорити, що деяка Л-точка інцидентна з деякою Л-прямою, якщо евклідова точка в звичайному розумінні лежить на відповідному евклідовому півколі або півпрямій (рис. 9.31).


Анрі Пуанкаре

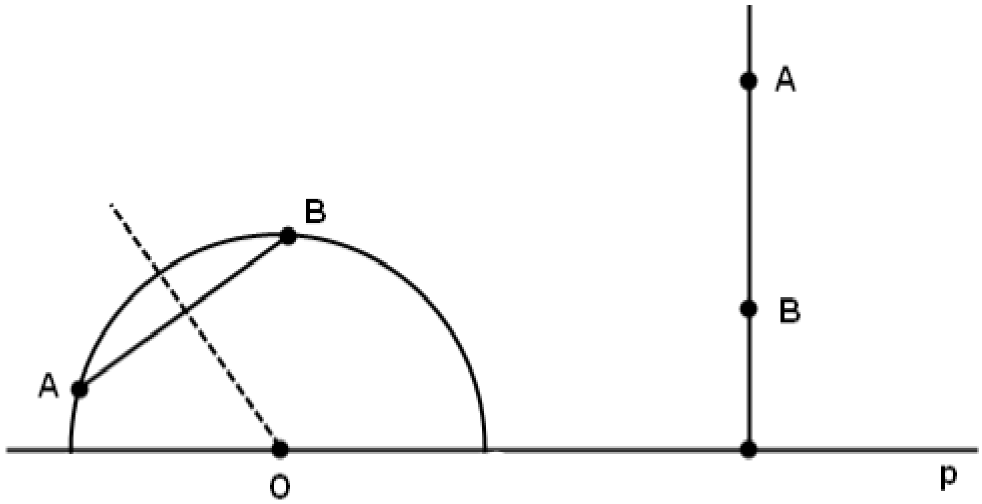


Рис. 9.31

Перевіримо виконання всіх аксіом системи аксіом планіметрії Лобачевського.

<u>I група (аксіоми інцидентності)</u>

$I_{1-2.}$ Аксіоми I_{1-2} виконуються, так як коли A і B – дві точки верхньої підплощини, то як бачимо з рис. 9.31, через них проходить або <u>єдине</u> півколо з центром O на прямій p, або <u>єдина</u> півпряма перпендикулярна до прямої p. В новому тлумаченні це і означає, що для будь-яких двох Л-точок існує єдина Л-пряма, якій ці Л-точки належать.

$I_{3-4.}$ Виконання аксіом I_3 - I_4 випливає з того, що на кожному півколі і півпрямій існує нескінченна множина точок і існують точки верхньої півплощини, які їм не належать.

<u>II група (аксіоми порядку)</u>

Дамо спочатку тлумачення відношення «лежить між» на нашій моделі. Будемо говорити, що Л-точка B лежить між <u>Л-точками A і C, якщо B лежить між точками A і C на відповідному півколі або півпрямій в звичайному евклідовому розумінні</u>.

Тоді виконання аксіом II_1 – II_3 стає очевидним, так як відповідні твердження мають місце для точок півкола і точок півпрямої. При цьому аксіома II_2 виконується саме тому, що точки прямої p не входять в число Л-точок.

Далі, звичайним чином визначається поняття Л-відрізка та його внутрішніх і зовнішніх Л-точок (через відношення «лежить між»). Перевіримо виконуваність аксіоми II_4 (аксіоми Паша). Вона також зводиться до наочного твердження евклідової геометрії: нехай ABC – криволінійний трикутник, утворений дугами півкіл, центри яких лежать на прямій p, і α – півколо з центром на прямій p, яке не проходить ні через одну з точок A, B, C. Тоді, якщо α проходить через яку-небудь точку всередині дуги AB, то воно проходить або через точку дуги AC, або через точку дуги BC (рис. 9.32).

Таким чином, перевірка аксіом I – II груп звелась до встановлення ряду тривіальних тверджень евклідової геометрії.

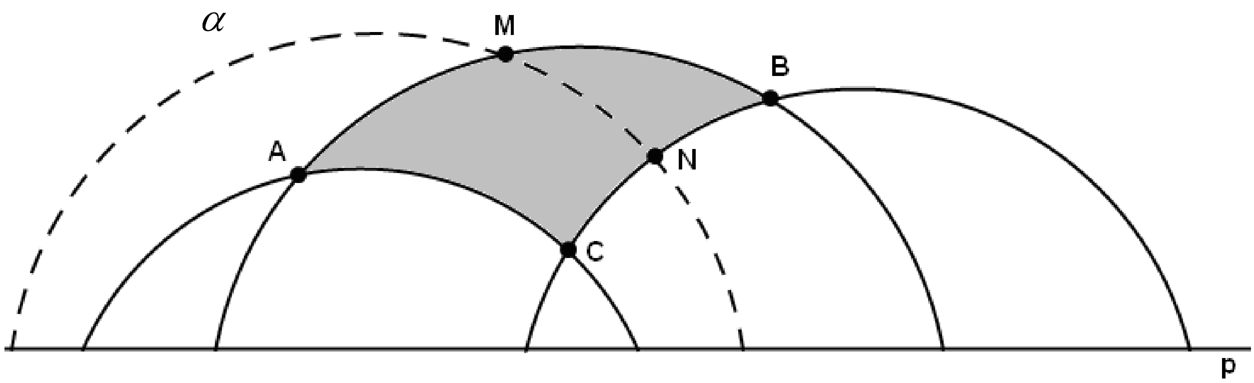


Рис. 9.32

III група (аксіоми конгруентності)

При інтерпретації понять конгруентності відрізків і кутів в цій моделі істотну роль відіграє перетворення площини, яке називається інверсією (див., напр., Бакельман И. Я. Инверсия. – М.:Наука, 1966 або підручники елементарної геометрії).

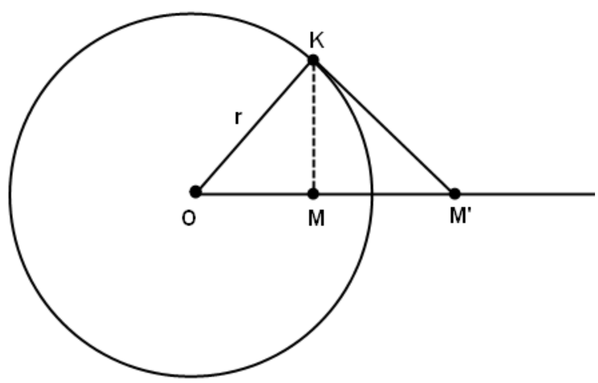


Рис. 9.33

Розглянемо основні властивості перетворення інверсії.

Дано коло з центром O радіуса r. Інверсією відносно цього кола називається таке перетворення площини, яке кожну її точку М, крім точки О, переводить в таку точку М' променя ОМ, що $|OM|\cdot|OM|'=r^2$ (рис. 9.33). Розглянемо простіші властивості інверсії:

1) Внутрішні точки кола інверсії перетворюються у зовнішні і навпаки. Точки самого кола переходять самі в себе. Перетворення, обернене для даної інверсії, є сама ця інверсія.

2) Кола, які не проходять через центр О інверсії, перетворюються в кола, що також не проходять через центр О.

3) Кола, які проходять через О, перетворюються в прямі, які не проходять через О.

4) Пряма, яка не проходить через О, перетворюється в коло, яке проходить через О. Прямі, які проходять через О, перетворюються в себе.

5) Інверсія зберігає кути, тобто є конформним перетворенням. Звідси матимемо, що паралельні прямі, які не проходять через центр інверсії, перетворюються в кола, які дотикаються одне одного в центрі інверсії, і навпаки.

Повернемось до нашої моделі. Будемо розглядати інверсії відносно кіл з центрами на прямій р. Ці перетворення точки верхньої півплощини, тобто Л-точки переводять в Л-точки. В нашій моделі вони будуть відігравати таку ж роль, як і рухи в геометрії Евкліда. Тому інверсії такого виду можна назвати Л-рухами.

Дамо інтерпретацію відношення конгруентності відрізків. <u>Два Л-відрізка АВ і CD назвемо конгруентними, якщо існує така скінченна послідовність інверсій з центрами на прямій р, в результаті яких відповідна дуга АВ одного евклідового півкола перетвориться в дугу CD другого.</u>

Перевіримо аксіоми III групи.

III_1. Аксіома III_1 виконується. Справді, нехай дані два півкола α і b з центрами на прямій р, на першому даний відрізок (дуга) АВ, а на другому зафіксована точка С. (рис. 9.34).

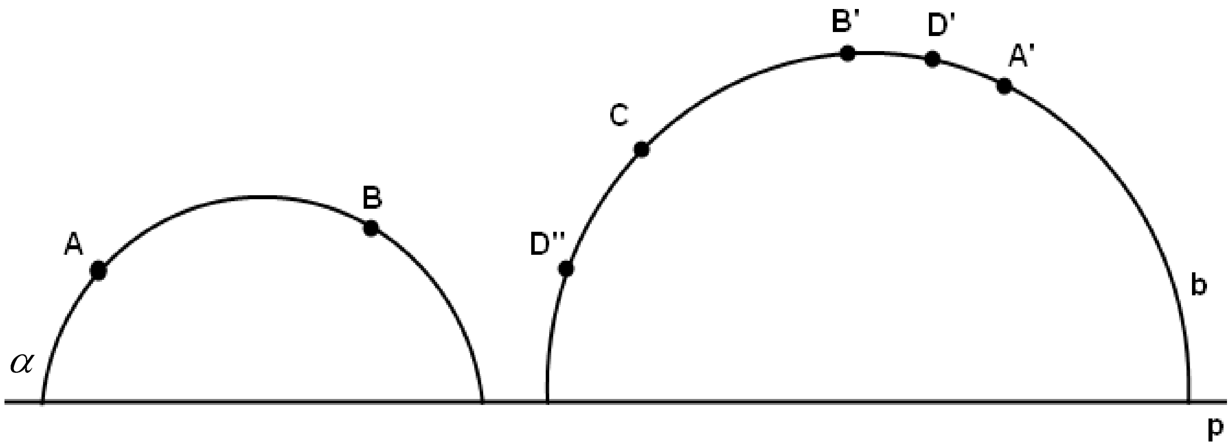


Рис. 9.34

Існує інверсія з центром на осі p, яка перетворює півколо α в півколо b. Нехай при цьому точки A, B переходять в деякі точки A', B' відповідно на півколі b. Тоді за властивістю інверсії існує інверсія з центром на осі p, яка перетворює півколо в себе, так, що або точка A' переходить в C, або B' переходить у C. В першому випадку точка B' перейде в деяку точку D' півкола b, в другому випадку точка A' перейде в деяку точку D'' півкола b. Точки D' і D'' розміщенні по різні боки від C. Це й буде означати, що Л-відрізок AB конгруентний або Л-відрізку CD' або Л-відрізку CD''.

III_2. Аксіома III_2 в нашій моделі з очевидністю виконується. Справді, співвідношення [A'B'] $\cong$ [AB] і [A''B''] $\cong$ [AB] означають, що існує серія інверсій, в результаті яких [A' B'] накладається на [AB], а інша серія інверсій, в результаті яких також [A'' B''] накладається на [AB]. Послідовність інверсій, які переводять [A'B'] на [A''B''] будується так. Спочатку серія інверсій, які переводять [A'B'] на [AB],а потім серія інверсій, обернених до тих, які перевели [A''B''] на [AB], взятих в зворотному порядку. В результаті чого [AB] перейде в [A''B''], а врешті відрізок [A'B'] буде перетворений в [A''B''], а це означає, що [A'B'] $\cong$ [A''B''].

III_3. Нехай [AC] і [A'C'] Л-відрізки, B-точка всередині відрізка [AC], а B' – внутрішня [A'C']. Потрібно показати, що в нашій інтерпретації з конгруентності відрізків [AB] $\cong$ [A'B'] і [BC] $\cong$ [B'C'] випливає [AC] $\cong$ [A'C']. Так як [AB] $\cong$ [A'B'], то повинна існувати серія інверсій, добуток яких переведе [AB] на [A'B']. При цьому перетворенні точка С відобразиться в точку С*, причому С* розміститься з того ж боку від В', з якого лежить і С'. Відрізки В'С' і В'С* лежать по один бік від точки В' і кожен з них конгруентний відрізку ВС:

$$[B'C'] \cong [BC] \text{ (за умовою)},$$

$$[B'C^*] \cong [BC] \text{ (за побудовою)}.$$

Але тоді за аксіомою III_2 $[B'C'] \cong [B'C^*]$. Звідси, з аксіоми III_1 випливає, що $C^* = C'$. А це означає, що вказана серія інверсій переведе відрізок АС на відрізок А'С', тобто $[AC] \cong [A'C']$.

Означимо конгруентність кутів так: Два Л-кути (h, k) і (h', k'), будемо називати *конгруентними*, якщо існує така послідовність інверсій з центрами на прямій p, в результаті застосування яких дуги півкіл, які зображають сторони першого Л-кута, переходять в дуги півкіл, що утворюють сторони другого Л-кута.

III_4. Аксіома III_4 має місце.

Нехай заданий Л-кут (*h, k*) з вершиною А і Л-промінь h' з вершиною A'. Користуючись властивостями інверсії, можемо знайти послідовність інверсій, в результаті яких Л-пряма *a*, що містить Л-промінь h, перейде в Л-пряму a' так, що точка А перейде в A' і Л-промінь h перейде в Л-промінь h'. При цьому Л-пряма b, що містить Л-промінь k, перейде в деяку Л-пряму b', яка проходить через точку A', а Л-промінь k перейде в Л-промінь k' Л-прямої b'.

За інтерпретацією конгруентності кутів Л-кут (*h, k*) конгруентний Л-куту (h', k'), тобто ми відклали даний кут від даного променя h'. Взявши тепер в якості кола інверсії коло a', ми відобразимо Л-промінь k' в деякий Л-промінь k', розміщений по другу сторону Л-променя h' (тобто в другій півплощині з межовою прямою a', ніж Л-промінь k') (Рис 9.35).

Аксіома III_4 вимагає ще, щоб кожен кут був конгруентний сам собі. Користуючись властивостями інверсії, можемо перетворити Л-промінь h в Л-промінь k, а Л-промінь k в Л-промінь h. А це означає, що Л-кут (*h, k*) конгруентний Л-куту (k, h). Повторивши ще раз цю послідовність інверсій, переконаємось, що Л-кут (h, k) конгруентний самому собі.

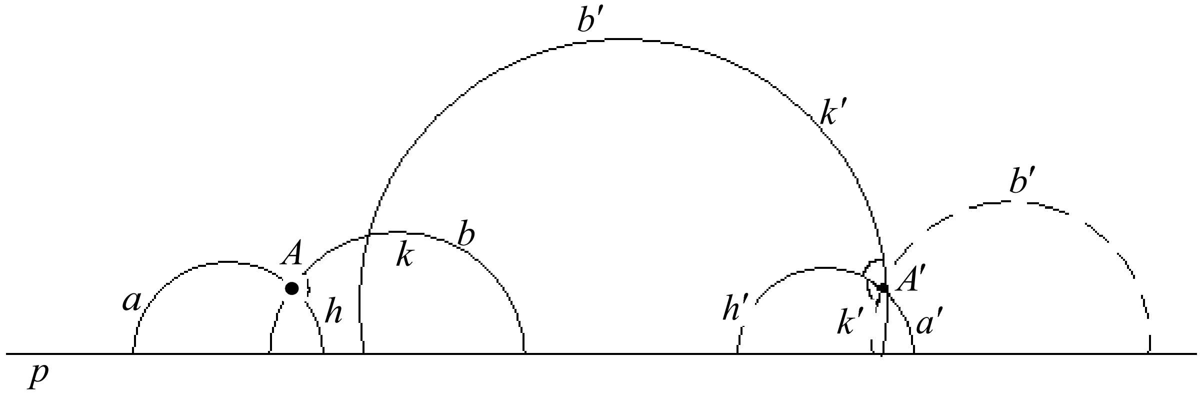


Рис.9.35

Аналогічно перевіряємо виконуваність аксіоми III_5.

IV група (аксіома неперервності)

Поняття «лежить між» для Л-точок A, B, C Л-прямої зведено в нашій моделі до поняття «лежить між» для евклідових точок A, B, C верхнього півкола з центром на осі p. Останнє ж легко звести до відношення «лежить між» для їх ортогональних проекцій A', B', C' на вісь p, якщо встановити взаємно однозначну відповідність між точками верхнього півкола та їх проекціями на p (рис. 9.36). Але для точок евклідової прямої p виконується аксіома неперервності Дедекінда. Тому властивість переноситься на точки верхнього півкола, а тим самим – на Л-точки Л-прямої.

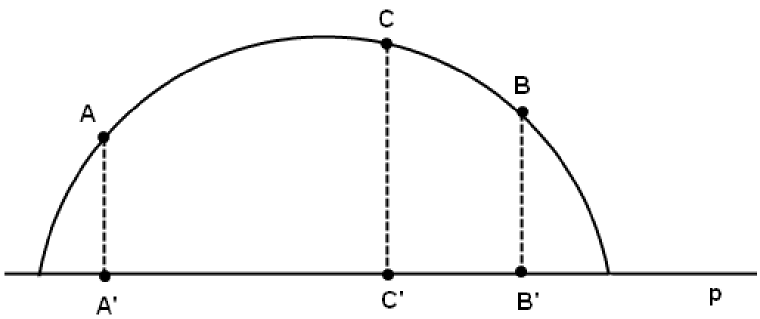


Рис. 9.36

V. Аксіома паралельності Лобачевського

Нехай дане верхнє півколо α з центром на p і точка A, яка йому не належить. Тоді зрозуміло, що існують два і тільки два верхні півкола b і c з центрами на p, які проходять через A і дотикаються півкіл в точках M і N на осі p (рис. 9.37).

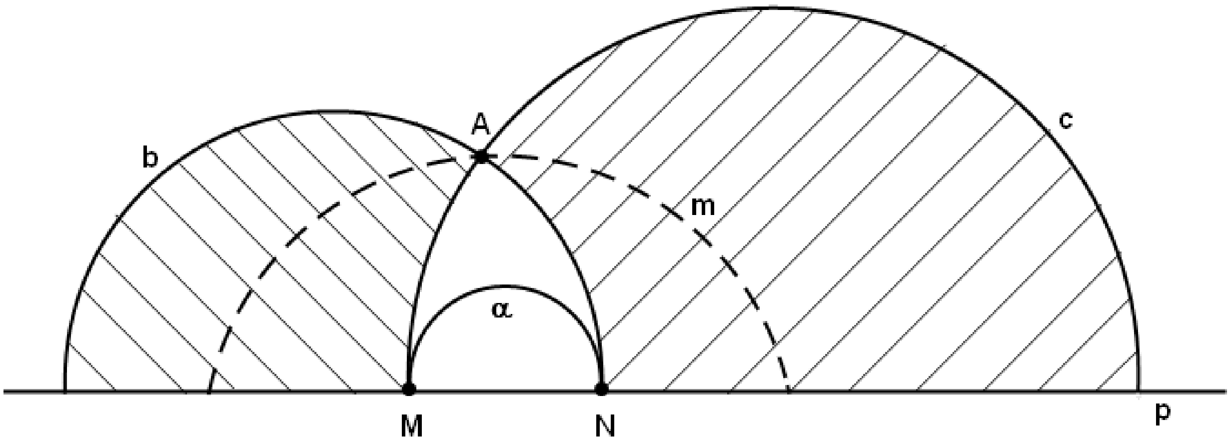


Рис. 9.37

Очевидно, що через точку A проходить нескінченна множина верхніх півкіл з центрами на p, які не мають спільних точок з α (всі вони проходять всередині заштрихованих вертикальних криволінійних кутів, утворених півколами b і c). Отже, аксіома Лобачевського виконується.

Таким чином, ми показали, що геометрія Лобачевського несуперечлива, якщо несуперечлива геометрія Евкліда. В свою чергу несуперечливість евклідової геометрії зведена до несуперечливості теорії дійсних чисел. Значить, і геометрія Лобачевського несуперечлива, якщо несуперечлива теорія дійсних чисел.

Доведення несуперечливості геометрії Лобачевського є в той же час доведенням незалежності аксіоми паралельності Евкліда від аксіом I-IV груп або незалежності еквівалентного їй V постулату Евкліда.

§ 9.8. Основні факти стереометрії Лобачевського

9.8.1. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі Лобачевського

У просторі Лобачевського паралельність і розбіжність прямих, а також прямої і площини означаються так:

Означення 1. Дві прямі в просторі називаються паралельними (розбіжними), якщо вони лежать в одній площині і в цій площині вони паралельні (розбіжні).

Означення 2. Пряма *a* називається паралельною площині α, якщо вона паралельна своїй проекції на цю площину.

Зауважимо, що через кожну пряму *a*, похилу до площини β, можна провести тільки одну площину α, перпендикулярну до даної площини β. Лінія перетину площин α і β називаються *проекцією прямої a на площину β.*

Означення 3. Пряма *a* називається розбіжною з площиною α, якщо вона розбіжна з своєю проекцією на цю площину.

З останніх означень слідує, що пряма, паралельна площині, необмежено зближається з нею в напрямі паралельності, а розбіжна з площиною пряма має з цією площиною єдиний спільний перпендикуляр, по обидва боки від якого в проектуючій площині пряма необмежено віддаляється від площини.

Взаємне розміщення прямих і площин в просторі Лобачевського характеризується за допомогою так званого *конуса паралельності*, що є аналогом поняття кута паралельності.

Нехай дана площина α і точка A, що їй не належна. Нехай AA' – перпендикуляр до α, що проектує точку A в точку A' на площині α. Нехай AB – пряма, паралельна площині α і A'B' – проекція цієї прямої на α . Тоді кут BAA' є кут паралельності в точці A прямої AB відносно прямої A'B'. Будемо обертати пряму AB навколо перпендикуляра AA'. Тоді AB опише конічну поверхню з вершиною в точці A, всі твірні якої паралельні площині α. Ця поверхня називається *конусом паралельності в точці A відносно площини α.* Таким чином, конусом паралельності в точці A відносно площини α називається геометричне місце прямих, паралельних площині α в точці A рис. (9.38).

З цього означення випливає, що будь-яка пряма, яка проходить через A і лежить всередині конуса паралельності, перетинає площину α, а кожна пряма, що проходить через точку A і лежить зовні конуса паралельності, є розбіжною з площиною α .

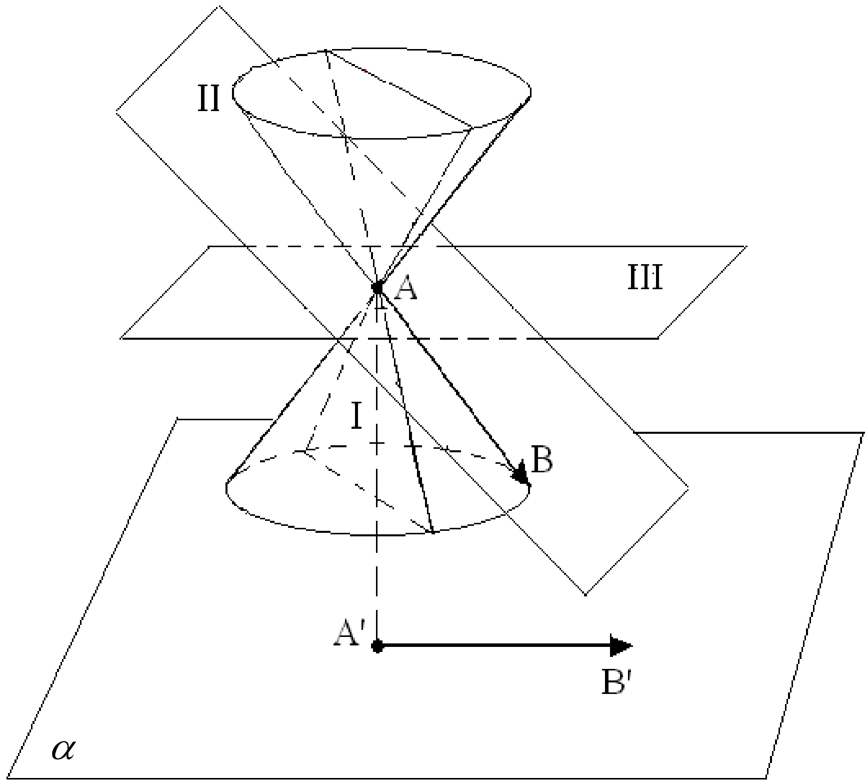


Рис. 9.38.

Конус паралельності в точці A дозволяє всі площини, що проходять через точку A, поділити на три категорії:

1) площини, які перетинають конус по двох твірних;

2) площини, які дотикаються до конуса по твірній;

3) площини, що мають з конусом лише одну спільну точку A.

Площини I-ої категорії містять прямі, які проходять через точку A і лежать всередині конуса паралельності, а тому ці площини перетинають площину α .

Площини II-ої, III-ої категорій не містять прямих, що проходять всередині конуса паралельності, а тому не можуть перетинатись з площиною α.

<u>Означення 4</u>. Площина, яка проходить через точку A, називається *збіжною* з площиною α, *паралельною* площині α, або *розбіжною* з площиною α, в залежності від того, чи ця площина буде відповідно перетинати конус паралельності в точці A по парі твірних, чи буде дотикатись до конуса по твірній, чи не буде мати з конусом спільних прямих.

Через пряму a, паралельну площині α, можна провести тільки одну площину паралельну a.

Цей факт слідує з того, що через пряму паралельну площині, можна провести лише одну площину, яка дотикається конуса паралельності по цій прямій (твірній конуса).

9.8.2. Поверхні сталої кривини

У просторі Лобачевського існує чотири типи поверхонь сталої кривини, які є аналогами прямої, кола, орицикла та еквідистанти на площині. Побудова цих поверхонь може буде здійснена за тим же планом, що і побудова кривих сталої кривини на площині.

Введемо поняття в'язки прямих, що є аналогом пучка прямих на площині.

Означення 5. *В'язкою* прямих називається сукупність всіх таких прямих в просторі, кожна пара яких лежить в одній площині. Ці площини називаються площинами в'язки.

З цього означення випливає, що в просторі Лобачевського існує лише три типи в'язок:

1.*Еліптична* – сукупність прямих, які проходять через одну точку.

2. *Параболічна* – сукупність прямих, які паралельні одна одній в деякому напрямі.

3. *Гіперболічна* – сукупність розбіжних прямих, що перпендикулярні до однієї площини, яка називається *базою* в'язки .

Ввівши поняття січної рівного нахилу до двох прямих в'язки та відповідних точок аналогічно до цих понять на площині, можемо дати таке спільне означення поверхонь постійної кривини.

Означення 6. В залежності від того, чи буде дана в'язка *еліптичною*, *параболічною* чи *гіперболічною*, геометричне місце точок, відповідних з А відносно в'язки, називається *сферою*, *орисферою* або *еквідистантною поверхнею*. Сама точка А також включається у відповідну поверхню.

Площина є частковим випадком еквідистантної поверхні.

Площина в'язки перетинає сферу по колу, орисферу – по орициклу, еквідистантну поверхню – по еквідистанті. Будь-яка площина в'язки називається діаметральною площиною відповідної поверхні. Можна довести такі твердження:

1. Нехай для даної в'язки в залежності від її типу побудована сфера, або орисфера, або еквідистантна поверхня. Тоді кожна пряма в'язки є нормаллю до відповідної поверхні.
2. Сфера, орисфера, еквідистантна поверхня є поверхнями обертання, причому за вісь обертання можна взяти будь-яку їх нормаль.
3. Всі орисфери конгруентні одна одній.

В цьому відношені орисфера споріднена з площиною, чого не можна сказати про сферу чи еквідистантну поверхню.

Має місце така важлива теорема:

На орисфері в системі орициклів має місце геометрія Евкліда.

З доведенням можна ознайомитись в [I, 14, 21].

На еквідистантній поверхні здійснюється планіметрія Лобачевського, якщо під прямою розуміти еквідистанту.

Таким чином, якщо в просторі Евкліда має місце евклідова геометрія на площині і сферична геометрія на сфері, то в просторі Лобачевського на площині реалізується геометрія Лобачевського, на сфері – сферична геометрія, на орисфері – евклідова геометрія і на еквідистантній поверхні – геометрія Лобачевського.

§ 9.9. Значення геометрії Лобачевського

1. Лобачевський довів, що V постулат Евкліда не залежить від інших аксіом, а тому є твердженням, яке не може бути доведене за допомогою їх.

Отже, Лобачевський дав розв'язання задачі, якій були присвячені величезні зусилля математиків протягом двох тисяч років.

Відкриття Лобачевського було першим в історії математики доведенням неможливості деякої побудови або виведення. Лише в другій половині XIX ст. були знайдені доведення неможливості розв'язання задач подвоєння куба, трисекції кута, квадратури круга за допомогою циркуля та лінійки, які були поставлені ще в часи Евкліда.

Проте значення геометрії Лобачевського не зводиться лише до доведення незалежності V-ого постулату. Значно важливішим результатом є доведення Лобачевським того, що *геометрія Евкліда не є єдино можливою*, а *тільки однією з можливих*.

Цей факт був першим в історії геометрії видатним досягненням, який зламав догми евклідової системи. Лобачевський поклав початок створення нових неевклідових геометрій.

2. Ідеї Лобачевського послужили джерелом розвитку важливих ідей сучасної математики. Передусім вони лягли в основу розвитку сучасного вчення про основи геометрії і привели до розробки повної системи аксіом геометрії і сучасного аксіоматичного методу в геометрії, який потім поширився в інших галузях математики.

Досить важливим результатом ідей Лобачевського є розвиток нових неевклідових геометрій. Математики поряд з тривимірним евклідовим простором і простором Лобачевського вивчають афінний, проективний простір, різні n-вимірні, ріманові, топологічні простори і т.д., кожен з яких має свою аксіоматику, свою «геометрію».

Геометрія Лобачевського була поворотним пунктом від геометрії Евкліда, яка ще оперувала наочними образами, до сучасної геометрії узагальнених просторів, яка увібрала в себе ідеї алгебри, аналізу, інших розділів математики.

3. Важко переоцінити вплив ідей Лобачевського і на теоретичну фізику. Досить сказати, що гіпотеза Лобачевського про можливу неевклідовість реального простору знайшла своє втілення в створеній А. Ейнштейном теорії відносності.

Коротку характеристику значення ідей Лобачевського дав видатний геометр В.Ф.Каган: " На сучасну геометрію, на теорію пізнання, на механіку, фізику, космологію – на всі галузі філософії і точного знання ідеї Лобачевського наклали відбиток, який не тільки ніколи не зітреться, а збереже основне значення. Лобачевський належить до числа найвеличніших геніїв-творців сучасної науки ".

Лобачевського заслужено називають Коперником і Колумбом геометрії.

Сьогодні, сама геометрія Лобачевського у вузькому розумінні цього слова, як наука аналогічна "Началам" Евкліда, в принципі вичерпана. Проте, весь комплекс ідей, пов'язаних з цією геометрією, продовжує активно розвиватись і в наші дні. Головна увага перемістилась з вивчення геометрії Лобачевського як замкнутої теорії на її дослідження у зв'язку з багаточисленними суміжними проблемами науки. Геометрія Лобачевського з точки зору рімановой геометрії є геометрією простору сталої від'ємної кривини. Геометрія просторів змінної кривини досить складна. Геометрія ж Лобачевського, навпаки, відносно проста для вивчення.

Отже, геометрія Лобачевського дає апарат дослідження просторів змінної від'ємної кривини: бачачи якийсь факт в геометрії Лобачевського, ми можемо розраховувати на те, що в якійсь мірі аналогічний факт буде мати місце і в геометрії просторів змінної від’ємної кривини.

Можна з впевненістю сказати, що геометрія Лобачевського ще довгі роки буде залишатись об’єктом дослідження багатьох поколінь геометрів.

Контрольні запитання

1. Які вчені майже одночасно прийшли до відкриття неевклідової геометрії?

2. Навести короткі відомості про життя і діяльність М. І. Лобачевського.

3. Що таке абсолютна геометрія? Хто вперше ввів термін «абсолютна геометрія»?

4. Сформулюйте аксіому Лобачевського. Що таке площина Лобачевського? Простір Лобачевського?

5. Покажіть, що на площині Лобачевського через дану точку, що не належить даній прямій, можна провести безліч прямих, які не перетинають дану пряму.

6. Які прямі на площині Лобачевського називаються паралельними даній прямій? Скільки існує таких прямих?

7. Які прямі на площині Лобачевського називаються розбіжними відносно даної прямої, а які — збіжними відносно неї?

8. Що таке кут паралельності?

9. Сформулювати властивості кута паралельності.

10. Що таке функція Лобачевського?

11. Яка аналітична формула функції Лобачевського?

12. Якою є сума внутрішніх кутів трикутника на площині Лобачевського?

13. Доведіть, що на площині Лобачевського не існує подібних, але нерівних трикутників.

14. Доведіть, що два перпендикуляри до однієї прямої розбіжні прямі.

15. Які типи пучків прямих на площині Лобачевського?

16. Що називається еквідистантою?

17. Що називається орициклом?

18. Які спільні властивості кола, еквідистанти, орицикла?

19. Які властивості взаємного розміщення розбіжних прямих?

20. Довести, що дві паралельні прямі на площині Лобачевського асимптотично зближаються в бік паралельності.

21. Охарактеризувати взаємне розміщення прямих і площин у просторі Лобачевського?

22. Що таке конус паралельності?

23. Які поверхні сталої кривини у просторі Лобачевського?

24. Яка геометрія на орисфері?

25. Які моделі площини Лобачевського?

26. Який конкретний зміст надається основним поняттям площини Лобачевського в моделі Пуанкре?

27. Доведіть несуперечливість системи аксіом планіметрії Лобачевського.

28. Яке значення геометрії Лобачевського у розвитку геометрії?

Рекомендована література: [II, 1-5,14, 23, 24], [III, 3, 8-10, 13, 22,26].

Глава 10. Еліптична геометрія Рімана

Ріман-типовий геніальний інтуїтивний талант. Вся його внутрішня настроєність і наукові інтереси вели до того напряму, який покликаний був стати панівним в математиці. Його інтереси поширювались на всю математику, фізику, філософію і фізіологію. Всюди відшукував він зв'язки між ними...

Р.Курант

Неперевершений геній Рімана був попереду свого часу і самим широким чином вплинув на майбутній розвиток математики.

Ф.Клейн

Як відомо, в геометрії Евкліда через точку, яка не належить даній прямій, можна провести тільки одну пряму, яка не перетинає даної, в геометрії Лобачевського - безліч прямих, які не перетинають даної. В еліптичній геометрії Рімана будь-які дві прямі площини перетинаються.

Щоб дістати систему аксіом геометрії Лобачевського, ми замінили аксіому паралельності Евкліда твердженням, яке заперечує її, і є аксіомою паралельності Лобачевського, а інші аксіоми залишили без змін. Так як аксіоми I-IV груп (абсолютна геометрія) сумісні лише з двома аксіомами – Евкліда і Лобачевського, то зрозуміло, що для побудови системи аксіом еліптичної геометрії необхідно внести зміни в аксіоми перших чотирьох груп Гільберта.

Розглянемо аксіоматику еліптичної геометрії на площині.

<u>I група-аксіоми інцидентності</u>.

I_1. Через кожні дві точки А і В проходить пряма.

I_2. Через дві точки А і В проходить не більше як одна пряма.

I_3. На кожній прямій існує принаймні дві точки.

I_4. Існують три точки, які не лежать на одній прямій.

I_5. Будь-які дві прямі, які лежать в одній площині, мають спільну точку.

Які ж властивості еліптичної прямої випливають з цієї групи аксіом?

Нехай в еліптичній площині дана пряма a і точка А, що не лежить на ній (рис. 10.1). Розглянемо пучок прямих, які проходять через А. За аксіомою I_5 всі прямі цього пучка перетинають a, в тому числі і пряма, перпендикулярна до прямої АР, де АР$\perp$ a. Так як за аксіомами I групи дві прямі перетинаються в єдиній точці, то між прямими пучка й точками прямої a встановлюється взаємно однозначна відповідність. Нехай пряма b перетинає пряму a в деякій точці С. За симетрією відносно АР та ж пряма b повинна перетнути a ще в точці С', яка симетрична С відносно АР. Отже, прямі a і b перетинаються в двох точках С і С', що суперечить аксіомам $I_1 - I_2$. Щоб усунути це протиріччя, ми повинні вважати, що точки С і С' збігаються в одну точку. А це означає, що пряма a *замкнена*.

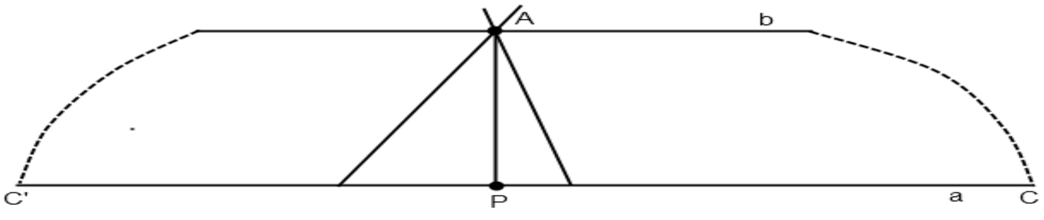


Рис. 10.1

Таким чином, еліптична пряма аналогічно колу замкнена. Із замкненості прямої слідує, що для трьох точок прямої А, В і С поняття "лежить між" втрачає певний зміст, бо кожна з них лежить між двома іншими. Щоб охарактеризувати взаємне розміщення точок на еліптичній прямій, вводиться інше основне поняття: «*поділ двох пар точок*». Наочне уявлення про це поняття дано на рис. 10.2. Нехай A, B, C, D - чотири різні точки на еліптичній прямій. Точки A і B ділять пряму на дві різні частини. Якщо точки C, D належать різним частинам, то говорять, що пара A, B розділяє пару точок C, D. Якщо ж обидві точки C і D належать одній і тій же частині прямої, то пара A, B не розділяє пари C, Д. Якщо пара A, B розділяє пару C, D, то будемо це записувати так: AB $\div$ CD.

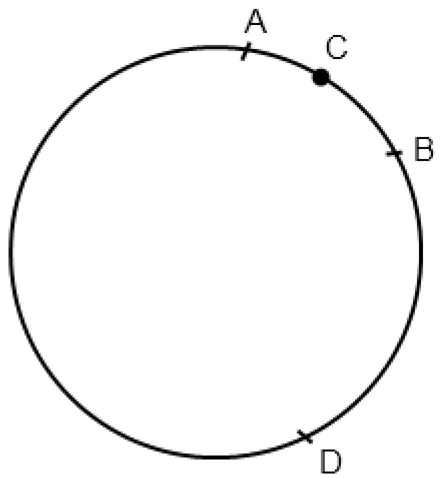


Рис. 10.2

Властивості відношення розділеності пар точок можна описати групою аксіом, яка замінює II групу аксіом Гільберта.

<u>II група-аксіоми розміщення (порядку)</u>

II_1. Якщо AB $\div$ CD, то всі чотири точки A, B, C, D – різні і належать одній прямій.

II_2. Якщо A і B – різні точки прямої, то існують на прямій дві такі точки M і N, що AB $\div$ MN.

II_3. Якщо AB $\div$ CD, то і CD $\div$ AB.

II_4. Якщо AB $\div$ CD, то AB $\div$ DC.

II_5. Якщо AB $\div$ CD, то не має місця AC $\div$ BD .

II_6. Якщо A, B, C, D – різні точки прямої, то має місце один і тільки один з поділів: або $AB \div CD$, або $AC \div BD$, або $AD \div BC$.

II_7. Якщо $AB \div CD$ і $AC \div BE$, то $AC \div DE$.

II_8. Якщо чотири прямих пучка перетинають дві які-небудь прямі відповідно в точках A, B, C, D і A_1, B_1, C_1, D_1 і якщо $AB \div CD$, то $A_1B_1 \div C_1D_1$.

Які ж характерні властивості еліптичної площини випливають з цієї групи аксіом?

На відміну від геометрії Евкліда і Лобачевського в еліптичній геометрії точка не ділить пряму на два променя, а дві точки A і B прямої визначають не один, а два взаємно доповняльних відрізка (рис. 10.2).

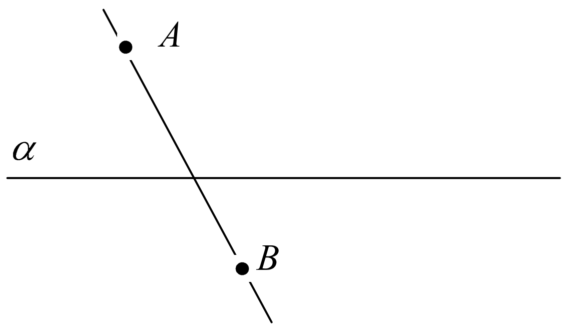


Рис.10.3

Друга відмінність полягає в тому, що пряма в еліптичній площині не ділить цю площину на дві півплощини. Справді, для будь-яких двох точок A і B, що не лежать на прямій α (рис. 10.3), пряма AB ділиться цими точками на два взаємно доповняльних відрізка, з яких один перетинає α ,а другий не перетинає. Тому не можемо твердити ні те, що точки A і B лежать по один бік від α, ні те, що A і B лежать по різні боки від α.

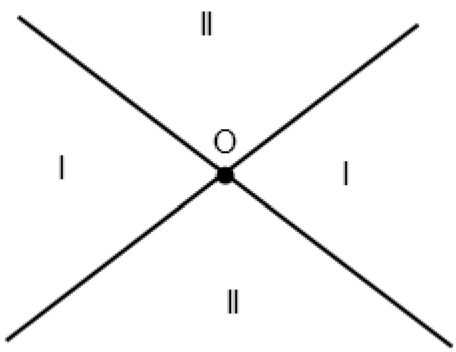


Рис. 10.4

Дві прямі розділяють площину на <u>дві частини</u>, кожна з яких утворює кут. Отже, при точці O утворюються два взаємно доповняльних кута (рис. 10.4), які називаються <u>суміжними</u> кутами. Якщо суміжні кути конгруентні, то вони називаються прямими кутами. Сума суміжних кутів рівна 2d.

Із замкненості еліптичної прямої і розділеності її двома точками на два взаємно доповняльних відрізка слідує, що три точки A, B і C еліптичної площини, які не лежать на одній прямій, визначають <u>не один</u>, а <u>чотири</u> трикутники, які утворюють всю площину(рис. 10.5).

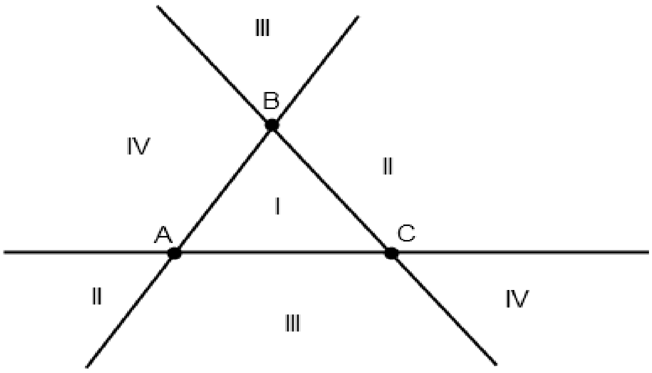


Рис. 10.5

<u>**III група-аксіоми конгруентності**</u>

Конгруентність відрізків і кутів будемо позначати, як і раніше, символом $\cong$.

III_1. Кожен відрізок конгруентний сам собі.

III_2. Якщо [AB] $\cong$ [A'B'] і [AB] $\cong$ [A"B"], то [A'B']$\cong$ [A"B"].

III_3. Якщо два відрізки конгруентні, то конгруентні також їх доповняльні відрізки.

<u>Означення 1.</u> Два конгруентні взаємно доповняльні відрізки називаються *півпрямими*, а їх кінці - *протилежними* або *взаємно ортогональними*.

III_5. Усі півпрямі конгруентні.

<u>Означення 2</u>. Якщо C - точка відрізка [AB], то відрізки $[AC]_B$ і $[BC]_A$ називаються частинами відрізка[AB]. (Позначення $[AC]_B$ - означає відрізок прямої, що не містить точки B) (рис.10.2)

III_6. Якщо відрізки [AB] і [A_1B_1] конгруентні і C – точка відрізка [AB], то існує одна і тільки одна точка C_1 відрізка [A_1B_1] така ,що частина [AC] першого відрізка конгруентна частині [A_1C_1] другого відрізка, при цьому частини [CB] і [C_1B_1] відрізків [AB] і [A_1B_1] також конгруентні.

Означення 3. Нехай на сторонах даного кута відкладені точки, протилежні його вершині; січний відрізок даного кута, що визначається ними, називається *січним полярним відрізком* цього кута.

Означення 4. Два кути називаються *конгруентними*, якщо конгруентні їх січні полярні відрізки. Кожен із конгруентних суміжних кутів називається прямим кутом .

Конгруентність трикутників визначається звичайним способом.

III_7. Якщо для двох трикутників ABC і A'B'C' мають місце співвідношення [AB] $\cong$ [A 'B'], [AC] $\cong$ [A'C'], $<$ A$\cong$A', то $<$ B $\cong$ B'.

IV група-аксіома неперервності Дедекінда.

IV_1. Нехай точки відрізка [AB] прямої α поділені на 2 класи, причому:

а) кожна точка належить одному з цих класів; точка A належить першому, B - другому класові;

б) якщо P - довільна точка першого класу, Q - другого, то завжди P є точка відрізка $[AQ]_B$.

Тоді на даному відрізку існує точка C така, що кожна точка відрізка $[AC]_B$ належить першому, а кожна точка відрізка $[CB]_A$ другому класові.

Еліптична геометрія Рімана має багато спільного з геометрією Евкліда. Так, наприклад, тут справедливі теореми про порівняльну довжину сторін трикутника, про властивості рівнобедреного трикутника; справедливі також ознаки конгруентності трикутників, причому поряд з трьома ознаками має місце четверта ознака: «Два трикутники конгруентні, якщо кути одного з них відповідно конгруентні кутам другого». Отже, в еліптичній геометрії відсутні перетворення подібності. Теореми про точку перетину бісектрис трикутника ABC і точку перетину серединних перпендикулярів доводяться так, як і в геометрії Евкліда. Перша з цих точок є центром вписаного в трикутник ABC кола, а друга-центром описаного кола. Мають місце також теореми про точку перетину медіан, точку перетину висот.

Наведемо деякі теореми еліптичної геометрії, які відрізняються від відповідних теорем евклідової і гіперболічної геометрій.

1) Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної прямої, є коло.
2) Сума кутів трикутника більша π.
3) Довжина кожної прямої рівна π, тобто еліптична пряма скінченна.
4) Зовнішній кут трикутника або менший, або рівний, або більший внутрішнього кута з ним не суміжного.
5) Периметр трикутника менший 2π.
6) Площа S трикутника ABC визначається S(Δ)=A+B+C-π (A, B, C - внутрішні кути ΔABC).
7) Площа еліптичної площини рівна *2 π.*

Щоб переконатись в несуперечливості еліптичної двовимірної геометрії, потрібно побудувати її модель в образах геометрії Евкліда.

Наведемо одну з таких моделей, в якій використовується сфера в евклідовому просторі. На цій моделі багато особливостей еліптичної геометрії мають наочне тлумачення.

Розглянемо сферу одиничного радіуса з центром в точці O в евклідовому просторі (рис. 10.6).

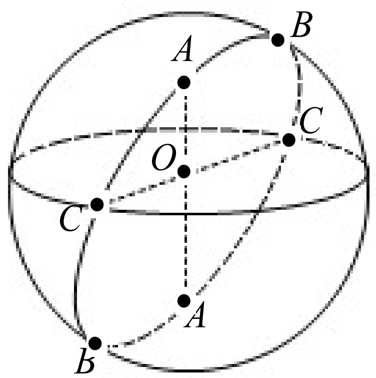


Рис. 10.6

Дамо тлумачення основних понять:

1 Еліптичною «точкою» будемо називати кожну пару діаметрально протилежних точок цієї сфери.

2. Еліптичною «прямою» будемо називати кожне велике коло сфери.

Під еліптичною площиною будемо розуміти саму сферу.

3. Будемо говорити, що «точка» належить даній «прямій», якщо дві діаметрально протилежні точки сфери лежать на даному великому колі сфери.

Легко переконатись,що всі аксіоми I групи здійснюються на цій моделі.

Справді,

1) Через дві пари діаметрально протилежних точок сфери проходить одне і тільки одне велике коло сфери. (I_{1-2})
2) На великому колі сфери існують дві пари (навіть нескінченна множина пар) діаметрально протилежних точок (I_3).
3) Існують три пари діаметрально протилежних точок сфери, які не лежать на одному великому колі (I_4).
4) Два різні кола перетинаються в єдиній парі діаметрально протилежних точок сфери (I_5).

Властивість замкненості, а також властивість скінченності «прямої» одержує на моделі наочний характер.

Легко перевіряються всі аксіоми II групи. Під «відрізком» АВ будемо розуміти будь-яку з двох пар протилежних дуг АВ великого кола, що проходить через точки А і В. На моделі ми бачимо (рис. 10.6), що «точки» А і В визначають два «відрізка»: один зображується парою протилежних дуг, які не містять кінці діаметра, а другий - парою протилежних дуг, що містять діаметрально протилежні точки С. Очевидним є і той факт, що «пряма» не ділить «площину» на дві «півплощини». Справді, які б не були «точки» А і В (рис. 10.6), які не лежать на «прямій» a, «пряма» АВ перетинає «пряму» a в єдиній «точці» С. Отже, тільки один з двох «відрізків», що визначаються на «прямій» АВ «точками» А і В, перетинає «пряму» a в «точці» С, а другий не перетинає.

Таким шляхом можна перевірити виконуваність всіх аксіом еліптичної двовимірної геометрії на цій моделі. Отже, двовимірна еліптична геометрія така ж несуперечлива, як і геометрія Евкліда.

Можна навести і ще одну модель еліптичної площини.

Множині всіх пар діаметрально протилежних точок сфери з центром в точці О можна поставити у взаємно однозначну відповідність множину всіх прямих в'язки з центром в точці О, а множині всіх великих кіл сфери - множину всіх площин тієї ж в'язки. Тому під «точкою» еліптичної площини будемо розуміти пряму в'язки, а під «прямою» - площину в'язки. Під еліптичною площиною будемо розуміти саму в'язку. Це означає, що двовимірну еліптичну геометрію Рімана можна розглядати як геометрію в'язки прямих в евклідовому тривимірному просторі.

Порівняємо між собою дві неевклідові геометрії. На перший погляд створюється враження про надзвичайно різні відмінності у властивостях гіперболічного та еліптичного просторів. Справді, на гіперболічній площині існує нескінченна множина прямих, які не перетинають дану пряму; в еліптичній площині всі прямі перетинають одна одну.

В гіперболічній площині пряма нескінченна, в еліптичній - пряма скінченна (замкнена) і довжина її дорівнює πr, де r - довжина радіуса діаметральної сфери. В гіперболічній площині сума внутрішніх кутів трикутника менша π, в еліптичній – більша π. Але якщо познайомитись (що виходить за межі нашого курсу) з тригонометрією еліптичного та гіперболічного просторів, то ми побачимо, що між ними є багато схожих закономірностей. Зрозуміло, що таке співпадання не може бути випадковим, існують внутрішні причини, які пояснюють наявність зв'язків.

В досить малих областях еліптичного, гіперболічного просторів має місце геометрія Евкліда.

Наявність трьох рівноправних, логічно бездоганних і цілком реальних геометричних систем є загальновизнаним науковим фактом. Природно виникає питання, яка ж геометрія того фізичного простору, в якому ми живемо?

Відповідь на це запитання повинна бути результатом великої спільної роботи астрономів, фізиків, математиків.

Вся тисячолітня практика застосування геометрії до землемірства, механіки, фізики, астрономії і т.д. показує, що в наших земних умовах евклідова геометрія досить точно відображає просторові відношення матеріального світу.

Проте сьогодні на наших очах здійснюються великі зміни в житті людства: людина подолала силу земного тяжіння і проникла в космічний простір і в той же час вона крок за кроком розкриває будову атомного ядра і вивчає поведінку найдрібніших часток матерії. У зв'язку з цим природно виникає питання: яка структура простору Великого Всесвіту, яка геометрія внутріатомного світу?

Сьогодні можна точно сказати, що закони чотиривимірного простору - часу не є законами евклідової геометрії, а ближче всього підходять до законів загальної геометрії Рімана.

Яке ж теоретичне і практичне значення гіперболічної та еліптичної геометрій?

Відмітимо, що терміни «гіперболічна», «еліптична» зв'язані з властивостями кривих другого порядку - гіперболи і еліпса. Гіпербола має дві асимптоти, які ми можемо розглядати, як дотичні до кривої в двох її невласних (нескінченно віддалених) точках. Пряма в гіперболічній площині також має дві невласні точки, в яких вона перетинається з абсолютом. Еліпс невласних точок не має, точно так само,як немає їх і пряма еліптичної площини. У зв'язку з цим евклідову геометрію часто називають параболічною, так як пряма евклідового простору має єдину невласну точку так само, як і крива другого порядку - парабола.

Теоретичне значення відкриття гіперболічної і еліптичної геометрій досить значне. Перш за все, воно розвіяло міф про те, що евклідова геометрія дає єдине правильне відображення структури реального простору. Воно показало,що аксіоми геометрії дають лише наближене значення про істинні властивості простору і що більш точне і більш широке вивчення Всесвіту і в просторі і в часі може дати основу для побудови геометричних систем, які краще відображають просторові відношення. Цим був підготовлений ґрунт для одного з величних відкриттів сучасної науки - спеціальної і загальної теорії відносності.

Визнання неевклідових геометрій, встановлення їх несуперечливості дало імпульс до докорінного перегляду поглядів на основні принципи математики. На основі цих досліджень знайшов собі застосування і розвиток аксіоматичний метод, за допомогою якого всі розділи математики будуються на аксіоматичній основі.

Історична довідка

Ріман Георг Фрідріх Бернхард (1826-1866)

Бернхард Ріман

Народився в селі сільського священика в м. Брезеленці провінції Ганновер. Середню освіту здобув у Ганноверській та Люксембурзькій гімназіях (1840- 1846), з 1846 року вивчав теологію і захопився фізико-математичними науками. У Геттінгені Ріман слухав лекції Гаусса, потім вчився у Берлінському університеті (1847-1849), де слухав лекції Діріхле, Якобі, Штейнера. Між ним і Діріхле зав'язалась дружба, яка тривала багато років. У 1849 році Ріман повертається до Геттінгена. Під впливом Вебера, з яким дружив, почав цікавитись питаннями математичного вивчення природи. У 1851 р. Ріман захистив докторську дисертацію з загальної теорії функцій однієї комплексної змінної. Через три роки він подав до Геттінгенського університету дві праці «Про можливість зображення функцій за допомогою тригонометричних рядів» та «Про гіпотези, що лежать в основах геометрії» і був зарахований приват-доцентом. Обидві праці опублікував Дедекінд після смерті їх автора (1868). У 1857 Ріман став екстраординарним професором Геттінгенського університету, а в 1859, після смерті Діріхле, – ординарним професором.

Помер Ріман, не доживши до 40 років, від туберкульозу в Італії, де лікувався.

Повне видання праць Рімана було здійснене у 1876 р. (в цьому заслуга в першу чергу Дедекінда).

Наукові інтереси вченого були дуже широкі, його ім'ям названо багато різних математичних тверджень і понять, зокрема теорему про алгебраїчні функції (т. Рімана-Роха), він увів так звані ріманові поверхні, ним висловлена гіпотеза про розподіл нулів дзета-функції (гіпотеза Рімана). Є метод Рімана розв’язування гіперболічних рівнянь, функції Рімана, інтеграл Рімана, узагальнені ріманові простори, ріманова геометрія. Геометричні ідеї Рімана знайшли широке застосування в теорії відносності. Його можна вважати засновником теорії диференціальних рівнянь, геометричного напрямку в теорії аналітичних функцій; йому належить глибока розробка теорії конформних відображень.

Контрольні запитання

1. У чому відмінність еліптичної геометрії Рімана від евклідової геометрії і геометрії Лобачевського?

2. Сформулюйте аксіоми інцидентності системи аксіом еліптичної геометрії.

3. Доведіть, що еліптична пряма замкнена лінія.

4. Сформулюйте аксіоми порядку еліптичної геометрії.

5. Покажіть, що еліптична пряма не ділить еліптичну площину на дві півплощини.

6. Сформулюйте аксіоми конгруентності еліптичної геометрії.

7. Наведіть деякі теореми еліптичної геометрії, які відрізняються від відповідних теорем евклідової і гіперболічної геометрії.

8. Побудувати модель еліптичної площини.

9. Навести короткі відомості про життя і діяльність Рімана.

Рекомендована література: [II, 10, 13, 23, 24], [III, 13, 16, 19, 20, 24].

Глава 11. Теорія вимірювання геометричних величин

Вимірювання величин є вихідним
пунктом усіх застосувань математики.

Анрі Лебег

Математика є наукою про вимірювання;
все ,що існує в природі, підкорюється
необхідності бути виміряним;
тому відмінність між величинами
обумовлюється відмінностями
між різними вимірностями…

М. Лобачевський

Питання, пов’язані з вимірюванням геометричних величин (відрізків, кутів, площ і об’ємів), мають велике значення і займають значну частину шкільного курсу геометрії.

Протягом багатьох століть математики цікавились лише задачею обчислення довжин, площ, об’ємів без явного перерахування правил, на яких базувались ці обчислення, і властивостей, які описують самі ці поняття.

Ця глава містить логічне обґрунтування теорії вимірювання на основі аксіоматики геометрії, викладеної в главі 5.

§ 11.1. Вимірювання відрізків

Позначимо через L множину всіх відрізків, а через множину всіх додатних чисел.

Говорять, що встановлено вимірювання відрізків, якщо визначене відображення $l:L\rightarrow R$ що задовольняє таким аксіомам:

1.Якщо $[AB]\cong[A'B']$, то $l([AB])=l([A'B'])$ (інваріантність l при русі);

2.Якщо точка B лежить між точками A, C прямої,то $l([AB])+l([BC])=l([AC])$ (адитивність функції l);

3.Існує одиничний відрізок $[PQ]$,тобто $l([PQ])=1$.

Відрізок $[PQ]$ або йому конгруентний називають лінійною одиницею.

Додатне число $l([AB])$ з вказівкою лінійної одиниці називається *мірою* або *довжиною* відрізка $[AB]$. Так, наприклад, пишуть: $l([AB]) =$ см.

Часто довжиною відрізка $[AB]$ називають число $l([AB])$, не вказуючи кожен раз лінійну одиницю.

В теорії, побудованій на основі аксіом Вейля, задача вимірювання відрізків розв'язується просто.

Розглянемо відображення $f: L \to R$ за законом:

$$f([AB]) = | \quad |, \; [\quad] \quad .$$

Доведемо,що відображення f задовольняє аксіоми 1)-3).

1) Нехай $[AB] \cong [CD]$. Значить, існує рух g, який переводить $[AB]$ в $[CD]$. Цей рух породжений деяким ортогональним перетворенням φ евклідового простору, причому $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CD}$. Так як перетворення ортогональне, то воно зберігає модуль (довжину) вектора з векторного простору V, а тому $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Таким чином,якщо $[AB] \cong [CD]$,то $f([AB]) = f([CD])$.

2) Нехай точка B лежить між точками A, C. Тоді $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$, $0 < t <$.

$$\overrightarrow{BC} = \quad - \quad = \quad .$$

Звідси маємо

$$|\overrightarrow{AB}| = | \quad |, \quad |\overrightarrow{BC}| = | \quad |.$$

Тоді

$$|\overrightarrow{AB}| + | \quad | = | \quad |.$$

Отже, $f([AB]) + \quad | = \quad |$.

3) Візьмемо вектор $\overrightarrow{a_0}$ такий,що $|\overrightarrow{a_0}| =$. Взявши точку P,знайдемо точку Q таку, що $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{a_0}$. Тоді $|\overrightarrow{PQ}| =$,а це означає,що $f([PQ]) =$.

Отже, відображення $f: L \to R$, де $f([AB]) = | \quad |$,задовольняє аксіоми 1)-3).

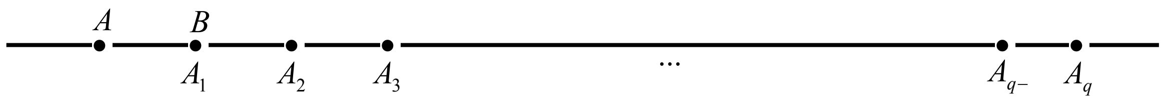
Припустимо тепер,що відображення $l: L \to R$ також задовольняє аксіоми 1)-3). Доведемо,що відображення l і f збігаються, тобто $l([AB]) = f([AB])$ для $\forall [AB] \in L$.

Візьмемо довільний відрізок $[AB]$. Можливі такі випадки:

1) $f([AB]) = 1$. Тоді вектор $\overrightarrow{AB}$ – орт і тому $[AB] \cong [OE]$. Так як відображення l задовольняє аксіоми 1)-3), то $l([AB]) = 1$.

2) $f([AB]) = \frac{1}{q}$, q – натуральне число, більше одиниці.

На прямій (AB) розглянемо точки $A_1, A_2, \dots, A_q$ такі що $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1A_2} = \dots = \overrightarrow{A_{q-1}A_q}$.



$$[AA_q] = [AA_1] + [A_1A_2] + \dots + [A_{q-1}A_q] \qquad (*)$$

Звідси $\overrightarrow{AA_q} = q\overrightarrow{AB}$. Тому $f([AA_q]) = q f([AB]) = q \cdot \frac{1}{q} = 1$. За випадком 1 $l([AA_q]) = 1$. Так як відображення l задовольняє аксіомі 2), а всі доданки в правій частині рівності (*) – конгруентні відрізки, то

$$l([AA_q]) = q\, l([AB]).$$

Звідси

$$l([AB]) = \frac{1}{q} = f([AB]).$$

3) $f([AB]) = \frac{p}{q}$, де p,q – натуральні числа. На прямій (AB) розглянемо точки $B_1, B_2, \dots, B_p = B$ такі, що

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{B_1B_2} = \dots = \overrightarrow{B_{p-1}B_p}.$$

Дістанемо:

$$[AB] = [AB_1] + [B_1B_2] + \dots + [B_{p-1}B_p], \qquad (**)$$

де доданки в правій частині – конгруентні відрізки.

Так як тепер $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{p}\overrightarrow{A_1 [illegible]}$, то $f([AB]) = \frac{1}{q}$ і за випадком 2 $l([AB]) = \frac{1}{q}$. Але з рівності (**)

$$l([A [illegible]]) = [illegible] [A_1 [illegible]].$$

Отже,

$$l([A [illegible]]) = \frac{[illegible]}{q} [illegible] [illegible].$$

4) $f([AB]) = [illegible]$, α – ірраціональне число. Побудуємо для числа α послідовність $\{u'_{[illegible]}\}$ десяткових наближень з надвишком. Якщо $u_k = [illegible] n_1 \ldots n_k$, то $u'_k = [illegible] n_1 n_2 \ldots n_k + [illegible]$.

Нехай $\overrightarrow{AQ}$ – орт вектора $\overline{AB}$. На прямій (AB) розглянемо точки B_k і $B'_{[illegible]}$ такі, що $\overrightarrow{AB_k} = [illegible]$, $\overrightarrow{AB'_k} = [illegible]$. Так як $\overrightarrow{AB} = [illegible]$ і $u_k < \alpha$, то маємо, що точка B_k лежить між A і B.

Аналогічно дістанемо, що точка B лежить між точками A і $B'_{[illegible]}$.

Тому для обох випадків маємо:

$$l([AB_k]) = [illegible] + [illegible] \qquad (\alpha$$
$$l([AB'_k]) = [illegible] + [illegible]$$

Так як $f([AB_k]) = [illegible]$, $f([AB'_k]) = [illegible]$, то за випадком 3 $l([AB_k]) = [illegible]$, $l([AB'_k]) = [illegible]$. Із співвідношень $(\alpha$ випливає, що

$$u_k < l([AB]) < [illegible].$$

Таким чином, числа α і $l([AB])$ мають одні і ті ж послідовності десяткових наближень $\{u_k\}$ і $\{u'_{[illegible]}\}$, і тому $l([AB]) = \alpha [illegible]$. Так як $[AB]$ – довільний відрізок, то $l([AB]) = [illegible] [AB]$ для $\forall [AB] \in [illegible]$. А це означає, що відображення l і f збігаються.

Таким чином, якщо $[PQ]$ – такий відрізок, що вектор $\overrightarrow{PQ}$ – орт, то існує єдине відображення f, що задовольняє аксіоми 1)-3). В цьому відображенні $f([AB]) = |[illegible]|$.

Доведено існування довжини відрізка. Звідси випливає, що система аксіом 1)-3) вимірювання відрізків в евклідововму просторі несуперечлива.

Логічне обґрунтування теорії вимірювання можна викласти також на основі аксіоматики Гільберта [II, 24].

§ 11.2. Площа многокутника. Теорема існування і єдиності

Візьмемо на площині яку-небудь фігуру F, і нехай ламана $L \subset F$ ділить фігуру $F \setminus L$ на дві частини F_1, F_2.

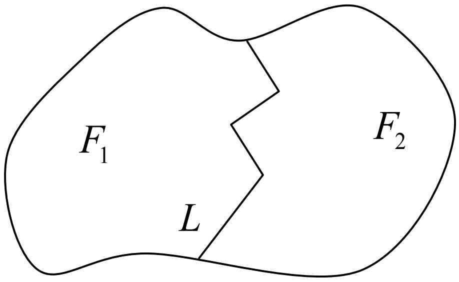


Рис.11.1

Говорять,що фігура F розкладена на фігури $F_1' = F_1 \cup L$ і $F_2' = F_2 \cup L$, а фігуру F називають сумою фігур F_1' і F_2' та записують: $F = F_1' + F_2'$ (рис.11.1).

Позначимо через $\mathcal{m}$ множину всіх многокутників на евклідовій площині. Говорять, що встановлено вимірювання площ многокутників, якщо визначене відображення *S:* $\mathcal{m} \to R_+$, що задовольняє таким аксіомам

1) Якщо $F \cong F'$, то $S(F) = S(F')$ (інваріантність при русі)

2) Якщо $F = F_1 + F_2$, то $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$ (адитивність функції *S*)

3) $S(P_0) = 1$, де P_0 – квадрат, побудований на одиничному відрізку як на стороні.

Додатне число *S(F)* називається *мірою* або *площею* многокутника *F*.

<u>Теорема 1.</u> Якщо функція *S(F)* існує,то для прямокутника *P* зі сторонами довжини *x* і *y* вона має вигляд:

$$S(P)=x \cdot y. \tag{11.1}$$

Доведення. Припустимо,що функція *S(F)* існує і розглянемо її на множині $\mathcal{m}_0$ всіх прямокутників. Тоді *S(P)* є функція від *x* і *y*,визначена для всіх $x, y \in R_+$ і набуває тільки додатні значення: $S(P) = f(x,y)$. Ця функція має такі властивості:

$$f(x,y) = f(y,x) \tag{a}$$

$$f(x_1+x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) \qquad (b)$$

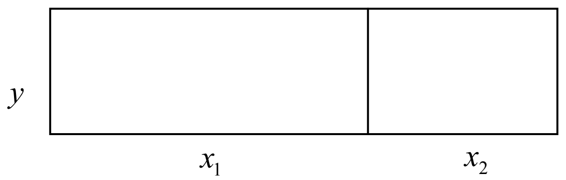


Рис.11.2

Властивість *(a)* випливає з умови 1), бо прямокутники з довжинами сторін *x, y* та *y, x* конгруентні. Властивість *(b)* випливає з умови 2) (рис.11.2).

Позначимо $f(x,y)\big|_{y=const} = g(x)$. Тоді з *(b)* слідує $g(x_1+x_2) = g(x_1) + g(x_2),\ x_1, x_2 \in R_+$.

Функція $g(x)$, яка має таку властивість, визначена на множині R_+ і набуває тільки додатних значень, виражає пряму пропорційність: $g(x) = k \cdot x$, де $k = const$. Отже,

$$f(x,y)\big|_{y=const} = kx .$$

При іншому значенні $y = const$ коефіцієнт k, взагалі кажучи, теж буде іншим. У загальному випадку потрібно вважати $k = k(y)$. Отже, $f(x,y) = k(y) \cdot x$.

Покладемо *x=1*. Тоді $f(1,y) = k(y)$. Тому

$$f(x,y) = f(1,y) \cdot x . \qquad (г)$$

З властивостей *(a)*, *(г)* випливає $f(1,y) = f(y,1) = f(1,1) \cdot y$.

Але за аксіомою 3) *f(1,1)=1*. Тому *S(P)=x·y.*

Теорема 1 доведена.

Квадрат $P_0 \,|\, S(P_0) = 1$ називається *одиничним квадратом*. Цей квадрат визначений, якщо вибраний одиничний відрізок. Домовимось під добутком двох відрізків розуміти добуток їх довжин.

Наслідки. Якщо функція *S(F)* існує,то:

1) для прямокутника *P* число *S(P)* дорівнює добутку основи на висоту (див.(11.1))

2) для трапеції – добутку її середньої лінії на висоту (рис. 11.3)

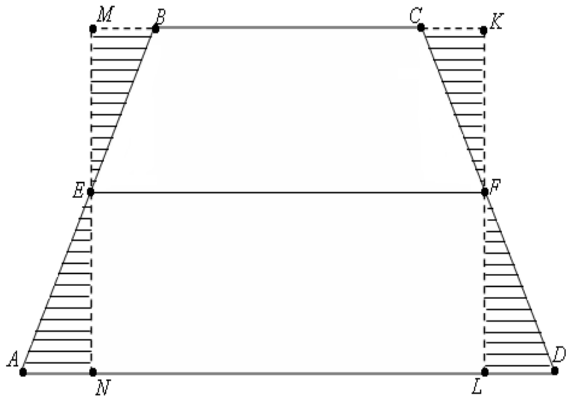


Рис.11.3

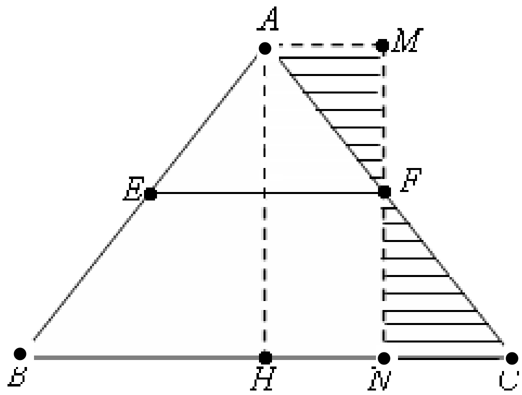


Рис.11.4

3) для трикутника – половині добутку будь-якої сторони на відповідну висоту (рис.11.4)

4) для паралелограма – добутку будь-якої сторони на відповідну висоту (рис. 11.5)

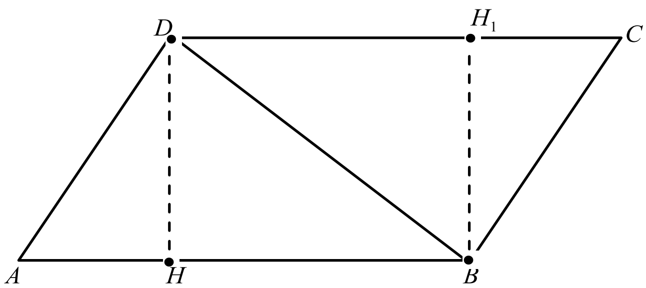


Рис.11.5

Таким чином, питання вимірювання площ зводиться до доведення існування функції *S(F)*.

Нехай $[AB]$ сторона многокутника F. Якщо M – неособлива внутрішня точка цієї сторони (рис.11.6), то існує круг $\gamma(M,\varepsilon)$ такий, що фігура $F_1 = \gamma \cap F$ є півкругом. Існує промінь $[MN)$, що задовольняє двом умовам:

1) $[MN) \perp [AB]$;

2) $[MN) \cap \gamma(M,\varepsilon) \cap F = \varnothing$.

Орт $\overrightarrow{n_1}$, що задає той же напрям, що і промінь, називається *ортом зовнішньої нормалі* многокутника *F*. Таким чином, для кожної сторони многокутника F ми можемо визначити орт зовнішньої нормалі.

Нехай многокутник F має k сторін, які ми якимось способом занумеруємо.

Позначимо через l_i довжину i-ої сторони, через $\vec{n}_i$ – орт зовнішньої нормалі цієї сторони і через M_i яку-небудь точку на прямій, що містить i-ту сторону.

Візьмемо довільну точку O у площині многокутника F і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{k} l_i \overrightarrow{OM_i} \cdot \vec{n}_i \qquad (11.2)$$

Ця сума не залежить ні від вибору точки O у площині многокутника F ні від вибору точки на прямій, що містить i-ту сторону многокутника.

Справді, якщо взяти іншу точку O', то $\overrightarrow{O'M_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_i}$, тоді

$$\sum_{i=1}^{k} l_i \overrightarrow{O'M_i} \cdot \vec{n}_i = \sum_{i=1}^{k} l_i \overrightarrow{OM_i} \cdot \vec{n}_i + \overrightarrow{O'O} \cdot \sum_{i=1}^{k} l_i \vec{n}_i.$$

Доведемо, що $\sum_{i=1}^{k} l_i \vec{n}_i = 0$. (11.3)

Спочатку розглянемо випадок $k = 3$ (рис.11.7)

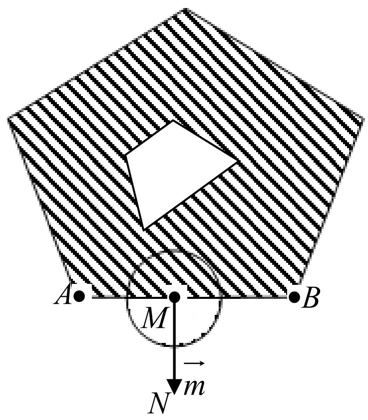


Рис.11.6

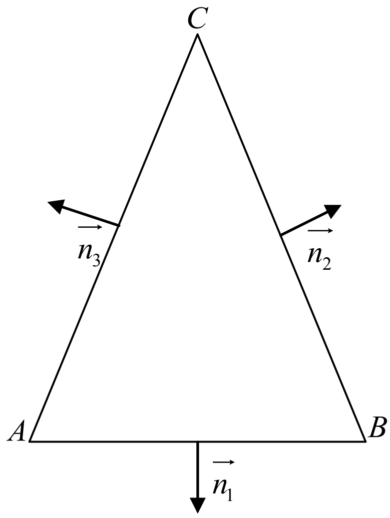


Рис.11.7

Якщо з довільної точки M відкладати напрямлені відрізки $\overrightarrow{MP} \in \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MQ} \in \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MR} \in \overrightarrow{CA}$, а потім $\overrightarrow{MP'} \in AB \cdot \vec{n}_1$, $\overrightarrow{MQ'} \in BC \cdot \vec{n}_2$, $\overrightarrow{MR'} \in CA \cdot \vec{n}_3$, то помічаємо, що при повороті площини навколо точки M на кут $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ точки P, Q, R переходять в точки P', Q', R'. Тому з рівності $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ і випливає рівність (11.3).

При $k > 3$ межа многокутника F складається з однієї або кількох замкнених ламаних. Провівши аналогічне міркування для кожної з цих замкнених ламаних, ми одержимо, що рівність (11.3) справедлива і при $k > 3$. Отже сума (11.2) не залежить від вибору точки O.

Якщо на прямій, що містить i-ту сторону многокутника F, візьмемо точку M'_i, то $\overline{OM'_i}\cdot\vec{n_i} = \overrightarrow{OM_i}\cdot\vec{n_i}$, бо $\overline{OM'_i} = \overrightarrow{OM_i} + \overline{M_iM'_i}$, але $\overline{M_iM'_i} \perp \vec{n}_i$.

<u>Теорема 2.</u> **Відображення**

$$S:\mathfrak{M}\to R_+$$

за законом

$$S(F) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} l_i\overrightarrow{OM_i}\cdot\vec{n_i}, \tag{11.4}$$

де k **– число сторін многокутника** F**, є єдиним відображенням** $\mathfrak{M}\to R_+$**, що задовольняє аксіоми 1)-3) вимірювання площ.**

Доведення.

I. Спочатку перевіримо, що відображення, що визначається формулою (11.4), дійсно задовольняє аксіоми 1)-3).

1) Нехай $F, F'\in\mathfrak{M}$ і $F\cong F'$. Існує рух g, такий, що $g(F)=F'$. Цей рух породжений деяким ортогональним перетворенням евклідового простору. Якщо $g(O)=O'$, $g(M_i)=M'_i$, то $\varphi(\overrightarrow{OM_i})=\overrightarrow{O'M'_i}$. Вектор $\varphi(\vec{n}_i)=\vec{n}'_i$ є ортом зовнішньої нормалі i-ої сторони многокутника F'. Так як рух зберігає довжину відрізка, а ортогональне перетворення зберігає скалярний добуток, то враховуючи формулу (11.4), матимемо:

$$S(F)=S(F').$$

2) Нехай $F=F_1+F_2$ і $[AB]\in F_1\cap F_2$ (рис. 11.8). При обчисленні $s(F_1)$ за формулою (11.4) ми будемо мати доданком добуток

$$\frac{1}{2}AB\cdot\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}\ \left(M\in[AB]\right), \tag{11.5}$$

а при обчисленні $S(F_2)$ так само одержимо доданком

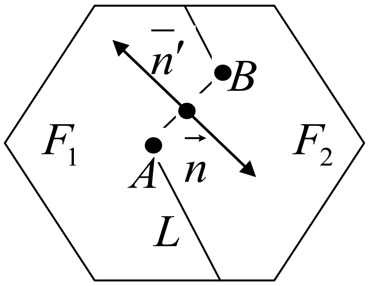


Рис.11.8

$$\frac{1}{2} A_j \cdot \overrightarrow{OM_j} \cdot \overline{n}' \tag{11.6}$$

Вектори $\vec{n}$ і $\overline{n'}$ протилежні. Отже, при складанні суми $S(F_1)+S(F_2)$ доданки (11.5) і (11.6) взаємно знищаться. Цей висновок будемо мати місце відносно будь-якого відрізка ламаної L. Звідси і випливає, що $S(F_1+F_2)=$.

3) Розглянемо квадрат $P_0 = ABCD$, сторона якого – одиничний відрізок. Виберемо точку O в центрі квадрата, а точки M_i – в серединах відповідних сторін. Тоді $l_i \overrightarrow{OM_i} = \frac{1}{2} \vec{n}_i =$ і за формулою (11.4) знаходимо: $S(P_0)=$.

Доведемо єдиність відображення *S*.

Припустимо, що деяке відображення $H : \mathcal{M} \to R_+$ теж задовольняє аксіоми 1)-3). Для будь-якого трикутника Δ за наслідком з теореми 1 одержимо:

$$H(\Delta) = S(\Delta) \tag{11.7}$$

Візьмемо довільний многокутник *F*. Його можна розкласти на скінченну множину трикутників Δ_j :

$$F = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$$

За аксіомою 2)

$$H(F) = \sum_{j=1}^{n} H(\Delta_j) \tag{11.8}$$

$$S(F) = \sum_{j=1}^{n} S(\Delta_j) \tag{11.9}$$

Із співвідношень (11.7), (11.8), (11.9) маємо, що

$$H(F) = S(F) \tag{11.10}$$

Рівність (11.10) справедлива для $\forall F \in \mathcal{M}$. Таким чином, відображення H і S співпадають: $H = S$. Єдиність відображення S доведена.

Наслідок. При будь-якому способі розкладу многокутника F на скінченну множину трикутників сума площ цих трикутників буде одна і та ж.

Доведення. Справді, за аксіомою 2) ця сума рівна площі *S(F)* многокутника *F*, яка за теоремою 2 не залежить від способу розкладу F на трикутники.

§ 11.3. Рівновеликість і рівноскладеність многокутників

Означення 1. Два многокутники називаються *рівновеликими*, якщо їх площі рівні.

Означення 2. Два многокутники F і F' називаються *рівноскладеними*, якщо їх можна розкласти на одне і те ж число відповідно конгруентних многокутників.

Записують $F \rho F'$, де через ρ позначене відношення рівноскладеності.

Властивість 1. Якщо $F \rho F'$, то $S(F) = S(F')$. Це випливає з умов 1), 2) означення площі.

На цій властивості відношення ρ заснований «метод розбиття» при обчисленні площі многокутника *F*: даний многокутник *F* розкладають на скінченну множину многокутників, таких, щоб з них можна було «скласти» многокутник F', площа якого відома. Таким способом знаходять формули для обчислення площі паралелограма, трапеції, трикутника (див. § 11.2).

Властивість 2. Не існує двох рівноскладених многокутників, таких, щоб один з них лежав всередині другого.

Справді, нехай $F \rho F'$. Припустимо, що $F \subset F'_0$, де F'_0 – внутрішність многокутника F'. Тоді $F' = F + F''$, де F'' – деякий многокутник, і значить, $S(F') > S(F)$, що суперечить властивості 1.

Властивість 3. Відношення рівновеликості є відношенням еквівалентності на множині m всіх многокутників.

Властивість 4. Відношення рівноскладеності є відношенням еквівалентності на множині m.

Доведення. Для довільного многокутника F з множини m маємо:

а) $F \rho F$;

б) Якщо $F\,\rho\,F'$, то і $F'\,\rho\,F$.

Покажемо, що відношення транзитивне.

Нехай $F,\ F',\ F' \in \mathfrak{M}$ і $F\,\rho\,F'$, $F'\,\rho\,F'$. За означенням

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i\ ,\ F' = \sum_{i=1}^{n} F_i'\ \text{, де } F_i \cong F_i'$$

$$F' = \sum_{j=1}^{m} \tilde{F}_j\ ,\ F' = \sum_{j=1}^{m} F_j'\ \text{, де } \tilde{F}_j' \cong F_j'\ .$$

Розглянемо многокутники $F_i', \tilde{F}_j' \subset F'$.

Їх перетин $F_i' \cap \tilde{F}_j'$ може бути порожньою множиною, точкою, складатись з кількох відрізків або бути многокутником. В останньому випадку позначимо цей многокутник через F_{ij}'. Так як $F_i' \subset F' = \sum_{j=1}^{m} \tilde{F}_j'$, то

$F_i' = \sum_{j=1}^{m} F_{ij}'$, але $F_i' \cong F_i$. Значить, і $F_i = \sum_{j} F_{ij}'$. Тому

$$F = \sum_{i}\sum_{j} F_{ij}'\ . \qquad (*)$$

Точно так само $\tilde{F}_j' = \sum_{i} F_{ij}'$ і так як $\tilde{F}_j' \cong F_j'$, то $F_j' = \sum_{i} F_{ij}'$. Отже,

$$F' = \sum_{j}\sum_{i} F_{ij}' \qquad (**)$$

Із співвідношень (*) і (**) випливає, що $F\ \rho\ F'$.

Природно поставити питання: чи рівновеликі многокутники рівноскладені?

Ствердну відповідь на це питання дали (майже одночасно) угорський математик Фаркаш Бойяї (1832 р.) і німецький офіцер і любитель математики Гервін (1833 р.)

Теорема Бойяї-Гервіна

Якщо многокутники рівновеликі,то вони рівноскладені.

Для доведення теореми доведемо кілька допоміжних тверджень.

<u>Лема 1</u>. Кожен трикутник рівноскладений з деяким прямокутником.

Справді, нехай AB – найбільша сторона $\Delta\ BC$, CD – висота, опущена на AB (рис. 11.9).

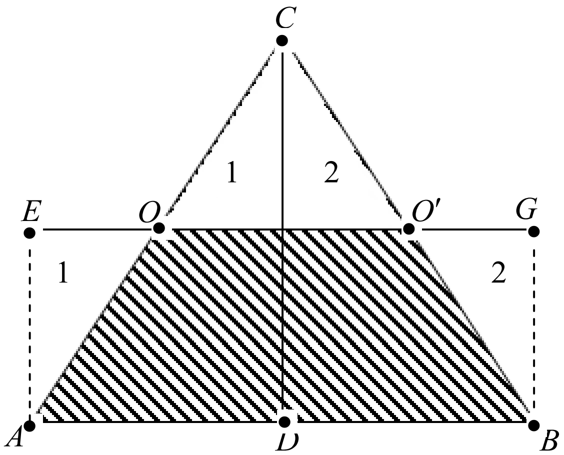


Рис.11.9

Тоді точка D знаходиться між A і B (інакше один з кутів $\angle$ або $\angle$ був би тупим і сторона AB не була б найбільшою). Через середину висоти CD проведемо пряму, паралельну AB, і опустимо на цю пряму перпендикуляри AE, BG. Тоді одержимо прямокутник $AEGB$, який рівноскладений з $\Delta\ BC$. Справді, трикутники, помічені однаковими цифрами (1,2), конгруентні між собою.

Трикутник ABC і прямокутник $AEGB$ складається із заштрихованої на рис. 11.9 трапеції і двох трикутників 1, 2.

<u>Лема 2.</u> Два паралелограми, які мають спільну основу і однакову площу, рівноскладені.

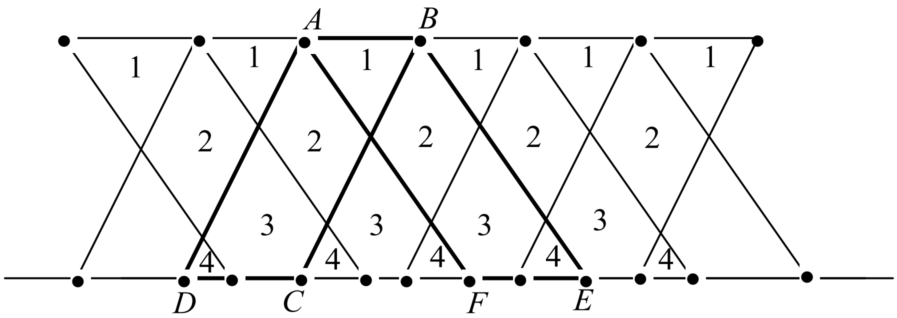


Рис.11.10

Нехай $ABCD$ і $ABEF$ – два паралелограми, що мають спільну основу AB і однакову площу. Тоді висоти цих паралелограмів однакові, тобто відрізки DC і FE розміщені на одній прямій. На прямій AB відкладемо послідовно відрізки, конгруентні відрізку AB, і через кожну точку поділу проведемо прямі, паралельні відрізкам AD і AF. Тоді смуга між паралельними прямими AB і DE розіб’ється на ряд многокутників (рис.11.10). Кожен з цих многокутників при зсуві на відрізок, конгруентний AB, суміщається з іншими конгруентним йому многокутником. Конгруентні многокутники на рис.11.10 відмічені однаковими цифрами. Кожен з паралелограмів $ABCD, AB\ldots$ містить одну частину, помічену цифрою 1, одну частину, помічену цифрою 2, цифрою 3 і т.д. Отже, ці паралелограми рівноскладені.

<u>Лема 3.</u> Два рівновеликі прямокутники рівноскладені.

Доведення. Нехай $ABCD$ і $EFGH$ – два рівновеликі прямокутники. З чотирьох відрізків AB, BC, EF, FG виберемо найбільший. Нехай це буде, наприклад, відрізок AB.

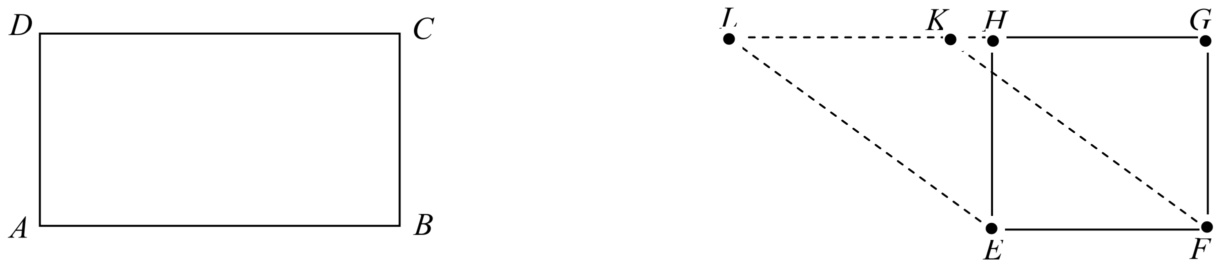


Рис.11.11

З точки E радіусом AB проведемо коло, яке перетне промінь GH в точці L $([LE] \cong [AB])$. Відкладемо $[LK] \cong [EF]$ і побудуємо паралелограм $ELKF$ (рис. 11.11). Цей паралелограм рівновеликий прямокутнику $EFGH$ і прямокутнику $ABCD$. З леми 2 слідує,що паралелограми $EFGH$ і $EFLK$ –рівноскладені. Але паралелограми $ABCD$ і $EFLK$ також мають однакову сторону $[AB] \cong [EF]$. Тому (лема 2) вони рівноскладені. З властивості транзитивності відношення рівноскладеності випливає, що прямокутники $ABCD$ і $EFGH$ –рівноскладені.

<u>Лема 4.</u> Кожен многокутник рівноскладений з деяким прямокутником.

Доведення. Кожен многокутник можна розбити на скінченне число трикутників. Позначимо їх цифрами 1,2,3,…(рис.11.12). Візьмемо тепер довільний відрізок AB і проведемо перпендикуляри AC і BD до цього відрізка (рис.11.13). Проведемо A_1B_1, паралельний AB так, щоб площа прямокутника ABB_1A_1 була рівна площі трикутника 1. Тоді трикутник 1 і прямокутник (I) рівноскладені. Справді, трикутник 1 рівноскладений з деяким прямокутником (лема 1), який в свою чергу рівноскладений з прямокутником I (лема 3); тому за властивістю транзитивності, трикутник 1 і прямокутник I рівноскладені. Далі, побудуємо відрізок A_2B_2, паралельний AB, так, щоб прямокутник (II) був рівновеликий трикутнику 2. Тоді трикутник 2 рівноскладений з прямокутником II. Потім побудуємо прямокутник III, рівноскладений з трикутником 3 і т.д. Всі прямокутники I, II, ... утворять разом один прямокутник, який за побудовою рівноскладений з даним многокутником.

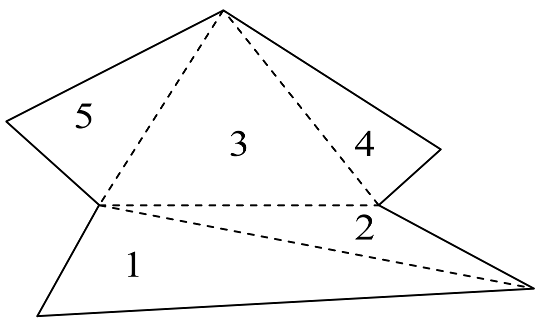


Рис.11.12

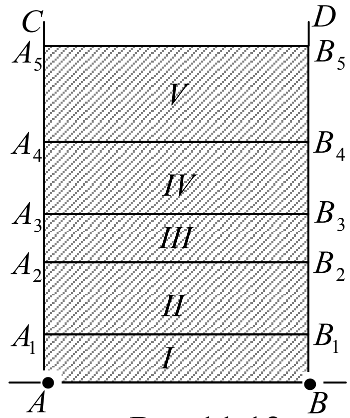


Рис.11.13

Доведемо тепер теорему Бойяї-Гервіна. За лемою 4, кожен з многокутників рівноскладений з деяким прямокутником. Одержані два прямокутники мають однакову площу, і, значить, за лемою 3 вони рівноскладені. Отже, за властивістю транзитивності два даних многокутники рівноскладені.

Доведена теорема Бойяї-Гервіна показує, що відношення рівновеликості та рівноскладеності рівносильні.

Це відкриває ряд можливостей для подальшого дослідження. Зокрема, виникає питання: чи не можна накласти якісь додаткові умови на число або розміщення тих частин, з яких складаються рівновеликі многокутники?

Чудовий результат був одержаний у 1951 р. швейцарськими математиками Г. Хадвігером і П. Глюром. Вони встановили, що в теоремі Бойяї-Гервіна можна ще додатково вимагати щоб частини, на які розбивається один з двох рівновеликих многокутників, і конгруентні їм частини другого многокутника мали відповідно паралельні сторони.

Про дослідження,пов'язані з цією проблемою можна ознайомитись в [II, 9].

§ 11.4. Теорія об'ємів (огляд)

Поняття про об'єм многогранника в евклідовій геометрії вводиться таким же шляхом, як і поняття площі многокутника.

Позначимо через $\mathfrak{m}$ множину всіх многогранників. Говорять, що встановлено вимірювання об'ємів многогранників, якщо визначене відображення

$$V : \mathfrak{m} \to R_+ ,$$

яке задовольняє таким аксіомам:

1) Якщо $F \cong F'$, то $V(F) = \quad F'$ (інваріантність при русі)

2) Якщо $F = \quad ' \vdash \quad '$, то $V(F) = \qquad \vdash$ (адитивність функції V)

3) $V(P_0) =$, де P_0 – куб, ребром якого є одиничний відрізок.

Додатне число *V(F)* називається *мірою* або *об'ємом* многогранника *F*.

Зауважимо, що розклад многогранника *F* на многогранники F' і F' проводиться за допомогою якої-небудь многогранної поверхні $G \subset F$.

<u>Теорема 1.</u> Якщо функція *V(F)* існує, то для прямокутного паралелепіпеда *P* з вимірами *x*, *y*, *z*, вона повинна мати вигляд:

$$V(P)=xyz.$$

Для того, щоб довести, що *V(F)* існує, потрібно визначити орт зовнішньої нормалі грані многогранника *F* аналогічно тому, як це було зроблено в попередньому параграфі для випадку многокутника.

Нехай многогранник *F* має k граней, які ми якось занумеруємо. Позначимо через S_i площу *i*-ої грані, через $\vec{n}_i$ – орт зовнішньої нормалі цієї грані і через M_i - яку-небудь точку в площині, що містить *i*-ту грань.

Візьмемо довільну точку *O* в просторі і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \overrightarrow{OM}_i \cdot \vec{n}_i$$

Можна довести, що ця сума не залежить ні від вибору точки *O* в просторі, ні від вибору точки в площині *i*-ї грані.

Має місце теорема, аналогічна теоремі 2, § 11.2.

Теорема 2. Відображення $V : \mathcal{M} \to R_+$ за правилом:

$$V(F)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{k} \quad ,$$

де k – число граней многогранника F, є єдиним відображенням $\mathcal{M} \to R_+$, що задовольняє аксіоми 1)-3) вимірювання об'ємів.

Наслідок. При будь-якому способі розкладу многогранника F на скінченну множину тетраедрів сума об'ємів цих тетраедрів буде одна і та ж.

Два многогранники називаються *рівновеликими*, якщо їх об'єми рівні.

Рівновеликість є відношення еквівалентності на множені $\mathcal{M}$ всіх многогранників. Два многогранники F і F' називаються рівноскладеними, якщо їх можна розкласти на одне і те ж число відповідно конгруентних многогранників.

Відношення рівноскладеності також є відношенням еквівалентності на множині $\mathcal{M}$ всіх многогранників.

Виникає природне питання: чи можна, маючи формулу для обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда, визначити об'єм будь-якого многогранника лише за допомогою розкладання? При обчисленні об'ємів просторових фігур в деяких випадках застосовують метод розкладання. Наприклад, для обчислення об'єму похилої призми, потім будь-якої призми можна з успіхом користуватись методом розкладання. Для обчислення ж об'єму піраміди доводиться використовувати метод границь. Чим це пояснити?

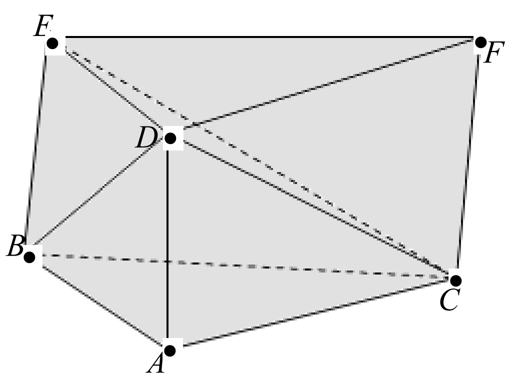


Рис.11.14

Нехай $ABCD$ – трикутна піраміда. Побудуємо похилу трикутну призму $ABCDEF$ з основою ABC і бічним ребром AD (рис.11.14). Цю призму можна розбити на три трикутні піраміди $ABCD$, $BCDE$, $CDEF$. Ці піраміди мають рівні основи і рівні висоти. Отже, потрібно довести, що дві піраміди, які мають рівні основи і рівні висоти, рівновеликі.

Саме це твердження доводиться за допомогою методу границь. Чи можна довести це твердження без застосування методу границь, на основі лише методу розбиття?

Інакше, чи будь-які два рівновеликі тетраедри рівноскладені?

Ця проблема відома під назвою третьої проблеми Гільберта: серед 23 важливих проблем математики вона була названа відомим німецьким математиком Д. Гільбертом у 1900 р. на Другому Міжнародному конгресі математиків у Парижі.

М. Ден, учень Гільберта, у 1901 р. показав, що існують многогранники, які мають рівні об’єми,але не рівноскладені. Зокрема куб і правильний тетраедр однакового об’єму не рівноскладені. Доведення М. Дена досить складні, вони були удосконалені В. Ф. Каганом. І тому теорема Дена тепер носить назву Дена-Кагана.

Ден у 1900 р. довів таку теорему: Якщо два многогранники з двогранними кутами $\alpha \qquad =$ рівноскладені, то існують цілі додатні числа n^i, m^t і таке ціле число c, що

$$n_i\alpha - \quad = \; .$$

Ця теорема виражає необхідні умови рівноскладеності двох рівновеликих многогранників.

У 1965 р. французький математик Сідлер довів, що ці умови Дена є також і достатніми.

Ряд цікавих нових результатів в теорії рівноскладеності був одержаний швейцарськими геометрами, зокрема Г. Хадвігером. З дослідженнями в цьому напрямі можна ознайомитись в [II, 9].

Контрольні запитання

1. Що таке довжина відрізка?

2. Навести схематичне розв’язання задачі вимірювання відрізків на основі аксіоми Вейля.

3. Що таке площа многокутника?

4. Сформулювати теорему існування і єдиності площі многокутника.

5. Які многокутники називаються рівновеликими? Рівноскладеними?

6. Показати, що відношення рівновеликості та рівноскладеності є відношенням еквівалентності.

7. Сформулювати теорему Бойяї-Гервіна. Наведіть схему її доведення.

8. Що таке об’єм многогранника?

9. В чому відмінність задачі вимірювання об’ємів многогранників від задачі вимірювання площ многокутників?

10. В чому суть теореми Дена?

Рекомендована література: [II, 3, 4, 9, 24].

Література

I. Про аксіоматичний метод

1. Аксиоматика и аксиоматический метод [Текст]: Словарь юного математика. - М: Педагогика, 1985, С. 10-13.
2. Бескин Н. М. Аксиоматический метод [Текст] // Н. М. Бескин // Матем. в школе. - 1993. - №3. - С. 25-29, №4. - С. 48-54.
3. Вечтомов Е. М. Философия математики: монография [Текст] / Е. М. Вечтомов. - Киров: Изд-во ВятГУ, 2004. - 192 с.
4. Молодший В. Н. Очерки по философским вопросам математики. [Текст] / В. Н. Молодший. - М.: Просвещение, 1969.
5. Семенович О. Ф. Геометрія. Аксіоматичний метод [Текст] / О. Ф. Семенович. - К.: Рад. школа, 1976.
6. Столл Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. / Пер. с анг. / Р. Столл. - М.: Просвещение, 1968.
7. Успенский В. А. Теорема Геделя о неполноте. [Текст] / В. А. Успенский. - М.: Наука, 1982.

II. Основи геометрії та обґрунтування евклідової геометрії

1. Александров А. Д. Основания геометрии [Текст] / А. Д. Александров. - М.: Наука, 1987.
2. Атанасян Л. С. Основания геометрии [Текст] / Л. С. Атанасян. - М.: Угпедгиз, 1960.
3. Атанасян Л. С. Геометрия, ч. II [Текст]: пособие / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. - М.: Просвещение, 1987. - 352 с.
4. Базылев В. Т. Геометрия, ч. 2 [Текст]: пособие / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев. - М.: Просвещение, 1975. - 367 с.
5. Бахвалов С. В. Основания геометрии [Текст]: пособие / С. В. Бахвалов, В. П. Иваницкая. - М.: Высшая школа, 1972. - 280 с.
6. Бахман Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии [Текст] / Ф. Бахман. - М.: Наука, 1969.
7. Болтянский В. Г. Векторное изложение геометрии [Текст] /

В. Г. Болтянский, М. Б. Волович, А. Д. Семушкин. - М.: Просвещение, 1982.

8. Болтянский В. Г. Векторы и их применение в геометрии [Текст] / В. Г. Болтянский, И. М. Яглом. - Энц. элем. мат. кн.IV. - М.: ГИТМЛ, 1963. - С. 292-369.
9. Болтянский В. Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры [Текст] / В. Г. Болтянский. - М.: ГТТИ, 1956.
10. Боровик В. Н. Курс вищої геометрії [Текст]: навч. посібник / В. Н. Боровик, В. П. Яковець. - Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. - 464 с.
11. Ван дер Ванден Б. Л. Пробуждающаяся наука / Перев. с голлан. [Текст] / Б. Л. Ван дер Ванден. - М.: Физматгиз, 1959.
12. Гильберт Д. Основания геометрии / Перев. с нем. [Текст] / Д. Гильберт. - М-Л.: Госттехиздат, 1948.
13. Егоров И. П. Геометрия [Текст] / И. П. Егоров. - М.: Просвещение, 1979. - 256 с.
14. Ефимов Н. В. Высшая геометрия, изд. 4 [Текст] / Н. В. Ефимов. - М.: Физматгиз, 1961. - 580 с.
15. Игошин В. И. Десять лекций по геометрии [Текст] / В. И. Игошин. – Саратов: Изд-во ООО «Изд. центр «Наука», 2010. – 176 с.
16. Каган В. Ф. Основания геометрии. [Текст] / В. Ф. Каган, ч. I. - М-Л.: Гостехиздат, 1949, ч. II, 1956.
17. Каган В. Ф. Очерки по геометрии. [Текст] / В. Ф. Каган. - М.: Изд. МГУ, 1963.
18. Погорелов А. В. Основания геометрии [Текст] / А. В. Погорелов. - М.: Наука, 1968. - 152 с.
19. Погорелов А. В. Геометрия: уч. Пособие для вузов [Текст] А. В. Погорелов. - М.: Наука, 1984. - 288 с.
20. Погорелов А. В. Элементарная геометрии [Текст] / А. В. Погорелов. - М.: Наука, 1972.

21. Рашевский П. К. Геометрия и ее аксиоматика [Текст] / П. К. Рашевский // Сб. Матем. просвещение, вып. 5. - М.: Физматгиз, 1960, С. 73-98.
22. Розенфельд Б. А. Аксиомы и основные понятия геометрии [Текст] / Б. А. Розенфельд // Энциклопедия элемент. матем., кн IV. - М.: Физматгиз, 1963., С. 9-48.
23. Смогоржевський О. С. Основи геометрії [Текст] / О. С. Смогоржевський. - К.: Рад. школа, 1953. - 298 с.
24. Трайнин Я. Л. Основания геометрии [Текст] / Я. Л. Трайнин. - М.: Учпедгиз, 1961. - 328 с.

III. Про геометрію Лобачевського та інші неевклідові геоеметрії

1. Александров П. С. Что такое неевклидовая геометрия [Текст] / П. С. Александров. - М.: Учпедгиз, 1950.
2. Александров П. С. Н. И. Лобачевский [Текст] / П. С. Александров // Квант, 1976, №2.
3. Атанасян Л. С. Геометрия Лобачевского: Кн. для учащихся [Текст] / Л. С. Атанаясн. - М.: Просвещение, 2001. - 336 с.
4. Беляев Е. А. Философские и методологические проблемы математики [Текст] / Е. А. Беляев, В. Я. Перминов. - М.: Изд-во МГУ, 1981. - 216 с.
5. Бойяи Я. Appendix [Текст] / Я. Бойяи. - М-Л.: Гостехиздат, 1950.
6. Гиндикин С. Г. Волшебный мир Анри Пуанкаре [Текст] / С. Г. Гиндикин // Квант, 1976, №3.
7. Делоне Б. Н. Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского [Текст] / Б. Н. Делоне. - М.: Изд-во АНСССР, 1953.
8. Каган В. Ф. Н. И. Лобачевский [Текст] / В. Ф. Каган. - М-П.: Изд-во АНСССР, 1944. - 384 с.
9. Кадомцев С. Б. Геометрия Лобачевского и физика [Текст] / С. Б. Кадомцев. - М.: Знание, 1984. - 64 с.
10. Колесников М. С. Лобачевский [Текст] / М. С. Колесников. - М. Серия

ЖЗЛ, 1965.
11. Кутузов В. В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии [Текст] / В. В. Кутузов. - М.: Учпедгиз, 1950.
12. Лаптев Б. Л. Н. И. Лобачевский и его геометрия: пособие для учащихся [Текст] / Б. Л. Лаптев. - М.: Просвещение, 1976.
13. Ливанова А. М. Три судьбы (Повесть о великом открытии) [Текст] / А. М. Ливанова. - М.: Знание, 1975.
14. Норден А. П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского [Текст] / А. П. Норден. - М.: Гостехиздат, 1953.
15. Норден А. П. Великое открытие Лобачевского [Текст] / А. П. Норден // Квант, 1976, №2.
16. Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию его идей [Текст]: к 100-летию со дня смерти Лобачевского. - М.: ГИТТЛ, 1956. - 528 с.
17. Рабинович В. Л. Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского на основании аксиом школьного курса геометрии [Текст] / В. Л. Рабинович // Матем. в школе, 1977, №1.
18. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства [Текст] / Б. А. Розенфельд. - М.: Наука, 1969.
19. Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии [Текст] / Б. А. Розенфельд. - М.: Наука, 1976.
20. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии [Текст] / Б. А. Розенфельд, И. М. Яглом. // Энциклопедия элем. матем, кн. V. - М.: Наука, 1966, С. 393-475.
21. Силин А. В. Открываем неевклидову геометрию [Текст] / А. В. Силин, Н. А. Шмакова. - М.: Знание, 1988.
22. Смородинский Я. А. Геометрия Лобачевского и теория относительности [Текст] / Я. А. Смородинский, Е. Л. Сурков. - М.: Наука, 1971.
23. Смородинский Я. Лобачевский и физика [Текст] / Я. Смородинский //

Квант, 1976, №2.
24. Фетисов А. И. Очерки по евклидовой и неевклидовой геометрии [Текст] /А. И. Фетисов. - М.: Просвещение, 1965. - 236 с.
25. Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского [Текст] / П. А. Широков. - М.: Наука, 1983.
26. Ширшов А. Модель Кэли-Клейна геометрии Лобачевского [Текст] / А. Ширшов // Квант, 1976, №3.

IV. Аксіоматичний підхід до викладання геометрії в школі

1. Абрамов А. М. Логические основы курса планиметрии [Текст] / А. М. Абрамов // Матем. в шк., 1974, №5, С. 51-62.
2. Александров А. Д. Геометрия для 8-9 классов: учеб. пособ. для учахщихся школ и классов с углубленным изучением математики [Текст] / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. - М.: Просвещение, 1991. - 464 с.
3. Александров А. Д. Геометрия для 10-11 классов с углубленным изучением математики [Текст] / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. - М.: Просвещение, 1992. - 464 с.
4. Атанасян Л. С. Основания школьного курса планиметрии [Текст] / Л. С.Атанасян. - М.: Прометей, 1989.
5. Атанасян Л. С. Основания школьного курса стереометрии [Текст] / Л. С.Атанасян. - М.: Прометей, 1992.
6. Болтянский В. Г. О преподаваниии стереометрии на основе векторной аксиоматики [Текст] / В. Г. Болтянский, Н. Я. Шилин // Матем. в школе, 1975, №2, С. 48-57.
7. Болтянский В. Г. Векторное обоснование геометрии [Текст] / В. Г. Болтянский, И. М. Яглом // Сб. «Новое в школьной матем.». - М.: Знание, 1972, С.64-92.
8. Глейзер Г. И. История матем. в школе (IX-XI кл.) [Текст] / Г. И. Глейзер. - М.: Просвещение, 1983. - 352 с.
9. Левин В. И. Некоторые вопросы преподав. матем. в средней школе

[Текст] /В. И. Левин // Сб. На путях обновления школьного курса матем. - М.: Просвещение, 1978, С. 20-25.

10. Малько Л. Т. Из опыта построения курса геометрии на основе системы аксиом Вейля [Текст] / Л. Т. Малько // Матем. в шк., 1973, №4, С 54-57.
11. Мантуров О. В. Об аксиоматическом методе в школьном курсе геометрии [Текст] / О. В. Мантуров, М. А. Исаева // Матем. в школе, 1988, №4, С. 38-41.
12. Моиз Э. Э. Геометрия. Перевод с англ. И. А. Вайнштейна. Под ред. И. М. Яглома [Текст] / Э. Э. Моиз, Ф. Л. Даунс. - М.: Просвещение, 1972. - 622 с.
13. Погорєлов О. В. Геометрія: Підручник для 7-11 кл. середньої школи [Текст] / О. В. Погорєлов. - К.: Освіта, 1993. - 351 с.
14. Серве В. Аксиоматика и элементарная геометрия [Текст] / В. Серве // Матем. в школе, 1967, №6, С.45-55.
15. Шоке Г. Геометрия [Текст] / Г. Шоке. - М. Мир, 1960.

V. Історія математики

1. Боголюбов А. Н. Математики. Механики: Библиограф. справочник [Текст] / А. Н. Боголюбов. - К.: Наук. Думка, 1983.
2. Болтянский В. Г. Третья проблема Гильберта / В. Г. Болтянский. - М.: Наука, 1977. - 208 с.
3. Бородін О. І. Біографічний словник діячів у галузі математики [Текст] / О. І. Бородін, А. С. Бугай. - К.: Рад. школа, 1973. - 552 с.
4. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия [Текст] / Г. Вилейтнер. - М.: Физматгиз, 1960.
5. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: в 3-х т. - М.: Наука, 1970-1972.
6. История отечественной математики: в 4-х т. - К.: Наукова думка, 1966-1970.
7. Клейн Ф. Лекции о развитиии математики в XIX столетии [Текст] / Ф. Клейн. - М.: Наука, 1989.

8. Колмогоров А. Н. Математика в ее историческом развитии [Текст] / А. Н. Колмогоров. - М.: Наука, 1991.
9. Кольман Э. История математики в древности [Текст] / Э. Кольман. - М.: ГИФМЛ, 1961. - 236 с.
10. Констанс. Рид. Гильберт / Перев. с анг. [Текст] / Констанс. Рид. - М.: Наука, 1977. - 368 с.
11. Конфорович А. Г. Колумби математики [Текст] / А. Г. Конфорович. - К.: Рад. школа, 1982. - 222 с.
12. Очерки по истории математики / Под ред. Б. В. Гнеденко. - М.: Изд-во МГУ, 1997.
13. Проблемы Гильберта / Сборник; под общей ред. П. С. Александрова. - М.: Наука, 1969. - 240 с.
14. Рыбников К. А. История математики [Текст] / К. А. Рыбников. - М.: Изд-во МГУ, 1974.
15. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики [Текст] / Д. Я. Стройк. - М.: Наука, 1984. - 288 с.
16. Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия / Под ред. А. П. Юшкевича. - М.: Просвещение, 1976.

Додатки

Короткий словник імен

А

Александров Павло Сергійович (1896-1982) – відомий російський математик, тополог і геометр.

Анаксимандр (610-543 до н. е) – старогрецький філософ, послідовник Фалеса.

Аполлоній Пергський (262-190 до н. е.) – великий старогрецький філософ, енциклопедист античної мудрості.

Архімед (бл. 287-212 до н.е) – знаменитий старогрецький математик,фізик,механік.

Ахмес (бл. 2000 до н. е.) – єгипетський жрець, вчений писар фараона Рауса, який написав папірус, що зберігається тепер в Британському музеї (Папірус Рінда).

Б

Бартельс Йоган Мартін Християн (1769-1856) – німецький математик, професор Казанського університету, вчитель М. І. Лобачевського.

Бахман Фрідріх – німецький геометр XX ст.,автор побудови геометрії на основі поняття симетрії.

Бекон Френсіс (1561-1626) – англійський філософ-матереаліст.

Біркгоф Джордж Давід (1984-1944) – видатний американський математик.

Бойяї Фаркаш (1775-1856) – угорський математик.

Бойяї Янош (1802-1860) – видатний угорський математик,син Фаркаша Бойяї, автор праці «Аппендикс» з неевклідової геометрії.

Больцано Бернард(1781-1848) – знаменитий чеський математик, філософ, логік.

В

Вайлаті Джіованні (1863-1909) – італійський математик і логік, автор дослідження з аксіоматики евклідової геометрії.

Валліс Джон (1616-1703) – знаменитий англійський математик, професор геометрії Оксфордського університету.

Ван дер Варден (1903-1985) – німецький математик.

Вейєрштрасс Карл (1815-1897) – знаменитий німецький математик.

Вейль Герман (1885-1955) – видатний німецький математик.

Г

Гаусс Карл Фрідріх (1777-1855) – видатний німецький математик,астроном,фізик і геодезист.

Гіппократ Хіоський (бл.450-430 до н. е) – старогрецький геометр, жив в Афінах.

Гедель Курт (1906-1978) – австрійський математик,автор праць з теорії множин і матем.логіки.

Геродот (485-425 до н.е) – старогрецький історик.

Гервін П. – німецький офіцер, займався математикою.

Гільберт Давид (1862-1943) – видатний німецький математик.

Глюр Жан Пьєр – швейцарський математик XX ст.

Д

Дедекінд Юліус Вільгельм Ріхард (1831-1916) – видатний німецький математик, обґрунтував теорію дійсних чисел.

Демокріт (бл.460 -370 до н.е) – великий грецький філософ, автор 70 творів з різних питань природознавств, математики, філософії.

Ден Макс (1878-1952) – німецький математик, учень Д.Гільберта, автор праць з геометрії, теорії груп і топології.

Діоген Лаерцій (IIIст.н.е) – старогрецький історик, філософ.

Е

Евдокс Кнідський (бл.408-бл.355 до н .е) - визначний старогрецький математик і астроном, автор праць з теорії пропорцій, методу «вичерпування».

Евклід (ІІІст.до.н.е) - видатний старогрецький математик, автор праці з геометрії «Начала» та ін.

Ератосфен Кіренський(бл.276-194 до н. е) – визначний старогрецький вчений, розробив спосіб знаходження простих чисел.

З

Зенон Елейський (бл. 450до н. е) – старогрецький філософ-метафізик, автор апорій (заперечень) руху.

К

Каган Веніамін Федорович(1869-1953) – російський математик, популяризатор наукової спадщини Лобачевського, автор аксіоматики евклідової геометрії, засновник тензорно-диференціально-геометричної школи в СРСР.

Кантор Георг (1845-1918) – німецький математик, творець теорії нескінчених множин, сформулював т. зв. аксіому неперервності.

Кеплер Йоган (1571-1630) – відомий німецький астроном і математик, який відкрив закони руху планет.

Клайн Морріс (1908-1992) – американський математик, популяризатор науки.

Клейн Фелікс (1849-1925) – німецький математик, автор Ерлангенської програми,довів несуперечливість геометрії Лобачевського.

Кованцов Микола Іванович (1924-1988) – український геометр, засновник Київської школи з лінійчатої диференціальної геометрії.

Колмогоров Андрій Миколайович (1903-1992) – один з найавторитетніших математиків ХХ ст..

Коші Огюстен Луї (1789-1857) – видатний французький математик.

Крилов Олексій Миколайович (1863-1945)- видатний російський математик, механік і кораблебудівник.

Курант Ріхард (1888-1972) – німецький математик, учень Гільберта.

Л

Ламберт Йоган Генріх (1728-1777) – німецький математик, фізик, астроном і філософ, займався проблемою V постулату, вперше довів ірраціональність числа π.

Лаплас П’єр Сімон (1749-1827)- французький математик,фізик і астроном.

Лебег Анрі Луї(1875-1941)- видатний французький математик,створив теорію міри.

Лежандр Андре Марі(1752-1833) – французький математик,автор підручника «Начала геометрії», працював над розв’язанням проблеми V-го постулату.

Лейбніц Готфрід Вільгельм(16461716)- геніальний німецький математик,фізик і філософ.

Леонардо да Вінчі(1452-1519)- видатний італ. художник,вчений епохи Відродження.

Лобачевський Микола Іванович(1792-1856) - видатний російський вчений,творець неевклідової геометрії.

Локк Джон(1632-1704)- англійський філософ-матеріаліст.

М

Менехм (бл. 360 до н.е)- старогрецький математик, учень Евдокса, відкрив три типи конічних перерізів.

Н

Насиреддін Тусі Мухамед(1201_1274)- азербайджанський астроном, математик, займався розв’язанням проблеми V постулату.

О

Осиповський Тимофій Федорович (1765-1832) - російський математик і філософ, учитель Остроградського.

Остроградський Михайло Васильович (1801-1862) – видатний математик, один із засновників Петербурзької математичної школи.

П

Паш Моріц (1843-1930) – німецький математик,один з перших з дослідників аксіоматичних основ геометрії,розробив групу аксіом порядку.

Пеано Джузеппе (1858-1932) – італійський математик, автор аксіоматики арифметики, працював над створенням аксіоматики геометрії Евкліда.

Пієрі Маріо(1860-1913) – італійський математик, учень Пеано, автор однієї з перших аксіоматик евклідової геометрії.

Піфагор Самоський (бл.580-500 до н. е) – видатний давньогрецький математик і філософ.

Платон (427-347 до н. е) – давньогрецький філософ,учень Сократа,вчитель Арістотеля.

Погорєлов Олексій Васильович(1919-2007) – видатний геометр XX ст., автор підручника з геометрії для школи та багатьох вузівських підручників.

Посидоній(135-50 до н. е) – давньогрецький математик і астроном, учитель Ціцерона, намагався довести V постулат Евкліда.

Прокл Діадох (410-485) – грецький філософ, коментатор «Начал Евкліда», намагався довести V постулат.

Пуанкаре Анрі (1854-1912) – французький математик, фізик, астроном і філософ, автор понад 1000 праць з різних галузей математики.

Р

Ріман Георг Фрідріх Бернхард (1826-1866) – видатний німецький математик, провісник багатьох важливих відкриттів сучасної математики, основоположник ріманової геометрії.

С

Саккері Джованні Джіроламо (1667-1733) – італійський математик і логік, працював над проблемою V постулату Евкліда.

Ф

Фалес Мілетський (640-548 до н. е) – давньогрецький учений, математик, астроном, фізик, філософ, родоначальник грецької математики (Мілетської школи)

Февдій Магнезійський (IV ст.. до н.е) – давньогрецький учений, математик платонівської школи.

Фреше Рене Моріс (1878-1972) – французький математик-тополог.

Х

Хадвігер Гуго (1908-1979) – швейцарський математик.

Хізс Томас (1861-1940) – американський математик.

Ш

Шур Фрідріх(1875-1947) – німецький математик, автор аксіом руху.

Етимолого-тлумачний словник

Термін	Етимологія	Значення
Аксіома	гр.$'\alpha\xi\acute{\iota}\ \omega\mu\alpha$ (axioma) – буквально перевага, авторитет, у переносному розумінні означає те, що внаслідок свого авторитету не підлягає сумніву, незаперечне	Вперше цей термін застосував Арістотель. У сучасній математиці: твердження, що приймається без доведення і розглядається як вихідне при побудові тієї чи іншої математичної теорії.
Аналогія	гр.$'\alpha\upsilon\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\ \iota$ – пропорція, схожість, відповідність	спосіб міркування, при якому певні властивості одного предмета або явища переносяться на інший предмет (явище) на тій основі, що для цих предметів вже є втановленими деякі спільні властивості.
Афінний	лат. affinis – той, що знаходиться у спорідненні по дружині	Афінне перетворення — перетворення, при якому зберігається паралельність і просте відношення трьох точок однієї прямої. Термін ввів Л. Ейлер.
Адитивність величини	лат. additivus – доданий	Числові функції $f(x)$ визначені на множині, для елементів якої визначене додавання, що задовольняє умові [illegible]

Асоціативний	лат. associare – поєднання	сполучний. Термін ввів англійський математик Гамільтон у 1843 р.
Бінарне	лат. binarius – подвійний	двійкове
Вектор	лат. vector – «той, що несе», «несучий»	напрямлений відрізок. Термін у 1845 р. ввів ірландський математик У. Гамільтон (1805-1865). Основи векторного числення розробив також німецький математик Г. Грассман у 1844 р. Позначення для вектора $\vec{a}$ ввів О. Коші у 1853 р.
Відрізок	лат. segmentun – сегмент, відрізок	позначається [AB] — множина всіх точок прямої, які лежать між двома даними точками A, B. Термін використовував Евклід.
Геометрія	гр. geω – земля, $\mu e\tau\rho e\upsilon$ – вимірювання;	дослівно означає «землемірство». Математична дисципліна, що вивчає просторові форми і відношення між ними.
Дедукція	лат. deductio – вивід	умовивід від загального до часткового
Дистрибутивний	лат. distributus – розподіл, розподілення	розподільний. Ввів французький математик Сервуа у 1814 р.
Еквівалентність	лат. aequs – рівний, valens – той, що має	рівносильність, рівнозначність

	силу, значення	
Ізоморфний	гр. *ἰζω ω 'φ* – рівноморфний, рівно видний, «ізо» - рівне, «морфе» - вид, форма	взаємооднозначний у відображенні двох множин при збереженні їхніх структурних властивостей.
Інволюція	лат. involutio – згортання	перетворення точок площини (простору), повторне застосування якого дає тотожне перетворення. Приклади: осьова і центральна симетрії, інверсія, полярне перетворення.
Інваріант	лат. invariants – незмінний	величина, співвідношення, властивість, які пов’язані з якимось математичним об’єктом і не змінюється при певних перетвореннях
Інверсія	лат. inversio – перестановка, перетворення	Інверсія відносно кола є круговим перетворенням, яке кола переводить в кола або прямі. Вчення про кругові перетворення на площині вперше було побудоване Мебіусом у 1855 р.
Індукція	лат. inductio – виведення	логічний прийом, який полягає в переході від окремих часткових випадків до загального висновку.
Інцидентність	ЭЄ	термін, що вживається в геометрії для вираження таких понять, як «лежить на ...» або «проходить через ...». Для

		позначення застосовують знак ЭЄ: А ЭЄ a (точка А інцидентна прямій a або пряма a інидентна точці А).
Ірраціональні числа	лат. irrationalis – не доступне розуму, несумірність	числа, які не можна представити у вигляді $\frac{p}{q}$, де p і q — взаємнопрості числа $(q \neq 1)$. Строга теорія розроблена Дедекіндом у другій половині XIX ст.
Комутативний	лат. commutare – змінювати, представляти	переставний. Термін введений французьким математиком Сервуа у 1814 р.
Конгруентність	лат. congrneus – співпадання	одне з основних відношень між основними поняттями при аксіоматичному обґрунтуванні геометрії за схемою Гільберта.
Математика	гр. *μαθηματικός* від *μάθημα* – «матема» знання, наука	сукупна назва, багатьох наук, основними з яких є арифметика, геометрія, математичний аналіз та ін. Слово виникло в школі Піфагора (V ст. до н. е.)
Метрика	гр. *μετρου* – метр	спосіб задання відстані між двома точками або визначення міри кута в тій чи іншій геометричній системі.
Означення		розкриття змісту цього поняття.

математичного поняття		При цьому розкриття суті поняття може бути здійснено різними способами: 1) генетично — коли вказується спосіб утворення даного поняття; 2) зведенням даного поняття до понять, які раніше відомі, частіше всього через поняття роду і виду; 3) аксіоматично — коли означення поняття дається неявно, в аксіомах.
Орт	гр. $o'\rho\tau o'\varsigma$ – «ортос» - прямий, вертикальний	одиничний вектор.
Паралельні прямі	гр. $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda o\zeta$ – той, що йде поруч, «проведена поруч»	прямі, що не мають спільних точок. Слово почало вживатися як математичний термін в школі Піфагора.
Пряма лінія	лат. linia, linum – льон, льняна нитка, поняття прямої є абстракцією від нятягнутої льняної нитки	одна з основних фігур, властивості якої описуються аксіомами.
Площина	лат. planum – рівне місце	одна з основних фігур, властивості якої описуються аксіомами.
Постулат	лат. postulatum – вимога	те ж, що аксіома.
Силогізм	гр. $\sigma\nu\lambda\lambda'$, від $\sigma\nu\lambda\lambda o\gamma\iota\mu\alpha$ –	дедуктивний логічний умовивід.

	міркую, роблю висновок; лат. syllogismos	
Симетрія	гр. $\sigma\upsilon\mu\mu\acute{\iota}$ – гармонія, співрозмірність	взаємнооднозначна, а також інволютивна відповідність точок площини або простору.
Скаляр	лат. scale – шкала, східці, синонім слова «число»	Сучасне значення поняття «скаляр» ввів ірландський математик У. Гамільтон (1805-1865) .
Теорема	гр. *τεορεμα* – дослівно видовище, демонстрація, утворилось від дієслова «теорео» - розглядаю або обдумую	математичне твердження, істинність або хибність якого встановлюється за допомогою доведення на основі раніше встановлених тверджень. Термін застосував Арістотель у ІІІ ст. до н. е.
Точка	лат. punktum, від нього термін point	Ці слова походять від слова лат. pungo «вколюю». Одна з основних геометричних фігур.
Транзитивність	лат. transitivus – перехідний	властивість величин, яка полягає в тому, що коли перша величина порівняна з другою, а друга з третьою, то перша величина порівняна з третьою.
Планіметрія	лат. planum – площина, гр. *μετρεω* - вимірюю	частина геометрії, в якій вивчаються властивості фігур на площині. Термін виник в середні віки.

Стереометрія	гр. $\sigma\tau\varepsilon\rho\varpi\zeta$ – просторовий, твердий, гр. $\mu e \tau\rho e \upsilon$ - вимірюю	розділ геометрії, в якому вивчають просторові фігури. Ввів термін Платон.

Математичні знаки

Позначення	Пояснення
+, –	додавання і віднімання ввів Й. Відман у 1489 р.
×	знак множення ввів у 1631 р. У. Оутред. Щоб не сплутати × з x Г. Лейбніц у 1693 р. ввів для множення знак «.»; «:» (двокрапку) (ділення) теж ввів Г. Лейбніц
=	знак рівності ввів у 1557 р. англійський лікар і математик Роберт Рекорд
> (<)	знаки більше і менше ввів Т. Гарріот у 1631 р.
≥ ≤	знаки введені французьким фізиком і математиком П'єром Буге (1698-1758)
Δ	трикутник вперше ввів Папп Александрійський (ІІІ ст. до н. е.), у Герона (І ст. н. е.) - ∇
⊥	перпендикулярність ввів П. Орігон у 1634 р.
~	подібний (повернута латинська буква s — перша буква в слові similis, що означає подібність), введений знак Г. Лейбніцем у 1679 р.
∠	кут (П. Орігон, 1634 р.)
‖	паралельність (У. Оутред, 1677 р.)
∈	знак належності ($A \in$) (Д. Пеано)
∈ ⊈	не належить
~	еквівалентність двох множин (Д. Пеано)
⊂, ⊃	знак включення ($M_1 \subset M_2$ означає, що M_1 є підмножиною M_2) (Д. Пеано)
∪	об'єднання ($M_1 \cup M_2$) множин (Д. Пеано)
$\vec{a}$	знак вектора, ввів О. Коші (1853 р.)
∞	знак нескінченності ввів англійський математик Дж. Валліс у 1655 р.

$\lvert x \rvert$	знак модуля (абсолютної величини) увів німецький математик К. Вейєрштрасс у 1841 р.

Індивідуальні завдання з курсу «Основи геометрії»

1. Математика стародавньої Греції. Піфагорійська школа (математика і нумерологія, пропорції і прогресії, несумірні відрізки)

Література:

1. Кольман Э. История математики в древности. – М: ГИФМЛ, 1961. - гл. III, С. 82-94.

2. Конфорович А. Г. Колумби матем. – К: Рад. шк., 1982. – 223 с.

3. Каган В. Ф. Очерки по геометрии. – М.: Изд-во Московского у-та, 1963. – С. 354-374.

2. Математика стародавньої Греції. Дослідження Демокріта, Гіппія Елідського, Гіппократа Хіоського, Архіта Таренського, Теодора Кіренського, Евдокса Кнідського

Література:

1. Кольман Э. История математики в древности. – М: Гос. изд. ф-м. лит, 1961. – гл. III, С. 96-116.

2. Конфорович А. Г. Колумби матем. – К: Рад. шк., 1982. – 223 с.

3. Каган В. Ф. Очерки по геометрии. – М.: Изд-во Московского у-та, 1963. – С. 354-374.

3. Проблема п'ятого постулату та її розв'язання

Література:

1. Трайнин Я. Л. Основания геометрии. – М: Учпедгиз, 1961. – гл. I, §2, п.5, §3 С. 39-46.

2. Бахвалов С. В., Иваницкая В. П. Основания геометрии. – М: Изд-во «Высшая школа», 1972. – гл. I, §5, С. 21-38.

4. Математика в елліністичних країнах. Дослідження Архімеда

Література:

1. Кольман Э. История математики в древности. – М: Гос. изд. ф-м. лит, 1961. – гл. IV, С. 149-167.
2. Конфорович А. Г. Колумби матем. – К: Рад. шк., 1982. – 223 с.
3. Каган В. Ф. Очерки по геометрии. – М.: Изд-во Московского у-та, 1963. – С. 197-238.

5. Математика в елліністичних країнах. Дослідження Аполлонія Пергського

Література:

1. Кольман Э. История математики в древности. – М: Гос. изд. ф-м. лит, 1961. – гл. IV, С. 171-176.
2. Конфорович А. Г. Колумби матем. – К: Рад. шк., 1982. – 223 с.
3. Каган В. Ф. Очерки по геометрии. – М.: Изд-во Московского у-та, 1963. – С. 197-238.

6. Математика в країнах Римської імперії. Менелай, Птолемей, Герон, Папп, Гіпатія, Прокл

Література:

1. Кольман Э. История математики в древности. – М: Гос. изд. ф-м. лит, 1961. – гл. V, С. 180-220.
2. Каган В. Ф. Очерки по геометрии. – М.: Изд-во Московского у-та, 1963. – С. 197-238.

7. «Начала» Евкліда – видатний твір грецької математики

Література:

1. Кольман Э. История математики в древности. – М: Гос. изд. ф-м. лит, 1961. – гл. IV, С. 124-148.

2. Бахвалов С. В., Иваницкая В. П. Основания геометрии. – М: Изд-во «Высшая школа», 1972. – гл. I, С. 16-28.

3. Конфорович А. Г. Колумби матем. – К: Рад. шк. 1982. – 223 с.

4. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії: навч. посіб. - Суми: ВТД «Унів. кн.», 2004, р. I, §§3-4, С. 18-21.

8. Задачі подвоєння куба, трисекції кута, квадратури круга

Література:

1. Савелов А. А. Плоские кривие. – М.: Гос. изд ф-м. лит., 1960.

2. ЭЭМ, кн. IV. Геометрия. – М: Гос. изд-во ф-м. лит., 1963, С. 220-227.

9. Дослідження Саккері, Ламберта і Лежандра у розв'язанні проблеми п'ятого постулату Евкліда

Література:

1. Бахвалов С. В., Иваницкая В. П. Основания геометрии. – М: Изд-во «Высшая школа», 1972, гл. I, С. 28-37.

2. Трайнин Я. Л. Основания геометрии. – М: Учпедгиз, 1961. – 326 с.

3. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії: навч. посіб. - Суми: ВТД «Унів. кн.», 2004, р. I, §6 С. 25-29.

10. Доведення еквівалентності деяких тверджень п'ятому постулату Евкліда

Література:

1. Трайнин Я. Л. Основания геометрии. –М: Учпедгиз, 1961. – гл I, §5 С. 59-63.

2. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії: навч. посіб. - Суми: ВТД «Унів. кн.», 2004, р. I, §5, С. 21–25.

11. Несуперечливість, незалежність і повнота системи аксіом Гільберта евклідової геометрії

Література:

1. Бахвалов С. В., Иваницкая В. П. Основания геометрии. – М: Изд-во «Высшая школа», 1972, гл. 7, С. 258-277.

2. Трайнин Я. Л. Основания геометрии. – М: Учпедгиз, 1961, гл. V, §4-6, С. 267-291.

12. Логічні основи шкільного курсу геометрії

Література:

1. Абрамов А. М. Логические основы курса планиметрии // Матем. в шк.., 1974, №5.

2. Мантуров О. В., Исаева М. А. Об аксиоматическом методе в школьном курсе геом. // Матем. в школе, 1988, №3, С. 38-41.

3. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії: навч. посіб. - Суми: ВТД «Унів. кн.», 2004, р. 7, С. 129-142.

13. Метричні способи побудови евклідової геометрії

Література:

1. Семенович О. Ф. Геометрія. Аксіоматичний метод. – К: Рад. школа, 1976.

2. Погорелов А. В. Основания геометрии. – М: Наука, 1968.

3. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії: навч. посіб. - Суми: ВТД «Унів. кн.», 2004, р. 4, С. 73-84.

14. Доведення метричних теорем в системі аксіом Вейля евклідової геометрії

Література:

1. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия, ч.2. – М: Просвещение, 1975, р. IV, гл. 1, §§7-8, С. 180-192.

15. Вимірювання відрізків

Література:

1. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия, ч.2. – М: Просвещение, 1975, гл. IV, §14 С. 215-220.

2. Трайнин Я. Л. Основания геометрии. – М: Учпедгиз, 1961, гл. IV, §1 С. 217-227.

3. Егоров И. П. Геометрия. - М.: Просвещение, 1979, гл. IV, §1, С.92-95.

16. Вимірювання площ простих многокутників

Література:

1. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия, ч.2. – М: Просвещение, 1975, гл. IV, §14 С. 215-220.

2. ЭЭМ, кн. V. Геометрия. – М: Гос. изд-во ф-м. лит., 1966, С. 7-30.

3. Егоров И. П. Геометрия. - М.: Просвещение, 1979, гл. IV, §2-3, С. 95-106.

17. Рівноскладеність многокутників

Література:

1. Болтянский В. Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры. – М: ГИТЛ, 1956.

2. ЭЭМ, кн. V. Геометрия. – М: Гос. Изд-во ф-м. лит., 1966, С. 142-165.

3. Каган В. Ф. Очерки по геометрии. – М. Изд-во Московского универ., 1963. – С. 156-190.

18. Рівноскладеність многогранників

Література:

1. Болтянский В. Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры. – М: ГИТЛ, 1956.

2. ЭЭМ, кн. V. Геометрия. – М: Гос. Изд-во ф-м. лит., 1966, С. 265-180.

19. Псевдоевклідова геометрія

Література:

1. ЭЭМ, кн. V. Геометрия. – М: Гос. Изд-во ф-м. лит., 1966, С. 420-439.

2. Яглом И. М., Ашкинузе Г. Идеи и методы афинной и проективной геометрии. – М: Учпедгиз, 1963.

3. Кованцов М. І. Проективна геометрія. - К.: Вища школа, 1969, р. 8, §6 С. 304-311.

20. Вимірювання об'ємів простих многогранників

Література:

1. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия, ч.2. - М.: Просвещение, 1975, г. IV, §17, С. 223-226.

2. ЭЭМ, кн. V. Геометрия. – М: Гос. Изд-во ф-м. лит., 1966, С. 65-86.

21. Аналітична геометрія гіперболічної площини

Література:

1. Смогоржевський О. С. Основи геом. – К: Рад. школа, 1947, р. 2 §4, С. 123-145.

2. Каган В.Ф. Основания геом. Ч І. М-JI: Гостехиздат, 1949.

22. Інтерпретація Пуанкаре площини Лобачевського

Література:

1. Каган В.Ф. Основания геом. Ч І. М-Л: Гостехиздат, 1949.

2. Смогоржевський О. С. Основи геом. – К: Рад. школа, 1947, р.3, §2 С 171-183.

3. ЭЭМ, кн. V. Геометрия. – М: Гос. Изд-во ф-м. лит., 1966, ст. 460-465.

4. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії: навч. посіб. - Суми: ВТД «Унів. кн.», 2004, р. 5, §32 С. 100-104.

23. Елементи тригонометрії в площині Лобачевського

Література:

1. Смогоржевський О. С. Основи геом. – К: Рад. школа, 1947, р.2, §3, С 108-123.

24. Інтерпретація Бельтрамі геометрії Лобачевського

Література:

1. Трайнин Я. Л. Основания геометрии. – М: Учпедгиз, 1961, гл. V, §7, С. 296-302.
2. Смогоржевський О. С. Основи геом. – К: Рад. школа, 1947, р. III, §3, С. 183-202.

25. Геометричні побудови на площині Лобачевського

Література:

1. Смогоржевський О. С. Основи геом. – К: Рад. Школа, 1947, р. IV, §§2-4, С. 205-213.
2. Каган В.Ф. Основания геом. Ч I. М-Л: Гостехиздат, 1949.

26. Геометрія Лобачевського і фізика

Література:

1. Кадомцев С. Б. Геометрия Лобачевского и физика. – М: Знание, 1984. – 64 с.
2. Смородинский Я. А., Сурков Е. Л. Геометрия Лобачевського и теория относительности. – М: Знание, 1971.

27. Сфера, орисфера, еквідистантна поверхня та геометрії на них

Література:

1. Трайнин Я. Л. Основания геометрии. – М: Учпедгиз, 1961, гл. II, §10, С. 109-117.
2. Ефимов Н. В. Высшая геометрия, изд. 4-е. – М: Физматгиз, 1961.

3. Атанасян Л.С. Геометрия Лобачевского: Кн. для учахщихся. - М.: Просвещение, 2001, ч. II, гл. III С. 247-266.

28. Коло, еквідистанта, орицикл, їх властивості. Модель Келі-Клейна

Література:

1. Ковавнцов М. І. Проективна геом. – К: Вища шк., 1969, р. 9, §4, С. 324-329.

2. Трайнин Я. Л. Основания геометрии. – М: Учпедгиз 1961, гл. II, §8, С. 99-105.

29. Елементи стереометрії Лобачевського

Література:

1. Трайнин Я. Л. Основания геометрии. – М: Учпедгиз 1961, гл. II, §9, С. 105-109

2. Каган В.Ф. Основания геом. Ч І. М-Л: Гостехиздат, 1949.

3. Атанасян Л.С. Геометрия Лобачевского: Кн. для учахщихся. - М.: Просвещение, 2001, ч. II, гл. 1-2 С. 218-245.

30. Геометрія і мистецтво

Література:

1. Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи. – К: Вища школа, 1978. – 264 с.

2. Пидоу Д. Геометрия и искусство. – К: Вищ. щк., 1979. – 254 с.

3. Ілляшенко В. Я. Геометрія і мистецтво. // Педагогічний пошук, №1 (41), 2004.

31. Еліптична геометрія Рімана

Література:

1. Трайнин Я. Л. Основания геометрии. – М: Учпедгиз 1972.

2. ЭЭМ, кн. V. Геометрия. – М: Гос. Изд-во ф-м. лит., 1966, С. 404-420.

3. Смогоржевський О. С. Основи геом. – К: Рад. школа, 1947,р.5, §§1-6.

4. Егоров И. П. Геометрия. - М.: Просвещение, 1979, гл. VI, §2, С.140-146.

5. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії: навч. посіб. - Суми: ВТД «Унів. кн.», 2004, р. 6, §33, 35.

32. Криві постійної кривини на площині Лобачевського

Література:

1. Трайнин Я. Л. Основания геометрии. – М: Учпедгиз 1972, гл. 2, §§7–8.

2. Смогоржевський О. С. Основи геом. – К: Рад. школа, 1947, р. 2, §1-2.

3. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії: навч. посіб. - Суми: ВТД «Унів. кн.», 2004, р. 2, §14-15 С. 46-51.

4. Атанасян Л.С. Геометрия Лобачевского: Кн. для учахщихся. - М.: Просвещение, 2001, ч. I, гл. IV С. 82-107.

33. Моделі еліптичної площини

Література:

1. ЭЭМ, кн. V. Геометрия. – М: Гос. Изд-во ф-м. лит., 1966, ст. 404-417.

2. Смогоржевський О. С. Основи геом. – К: Рад. школа, 1947, р.6 §§1-2.

3. Боровик В. Н., Яковець В. П. Курс вищої геометрії: навч. посіб. - Суми: ВТД «Учнів. кн.», 2004, р. 6, §35 С. 120-124.

34. Евклідова геометрія в параболічній сітці сфер

Література:

1. Фетисов А. И. Очерки по евклидовой и неевклидовой геометрии. – М: Просвещение, 1965, гл. 8, С. 113-130.

35. Еліптична геометрія Рімана в еліптичній сітці сфер

Література:

1. Фетисов А. И. Очерки по евклидовой и неевклидовой геометрии. – М: Просвещение, 1965, гл. 11, с. 176-199.

36. Провісники нової математики. Рене Декарт, Блез Паскаль

Література:

1. Конфорович А. Г. Колумби матем. – К: Рад.шк. 1982. – 223 с.

37. Математика Київської Русі

Література:

1. История отечественной матем. т.I. – К: Наукова думка, 1966, гл. II, С. 52-72.

38. Математика древніх східних слов'ян

Література:

1. История отечественной матем. т.I. – К: Наукова думка, 1966.

39. Математика періоду створення руської централізованої держави (XIV-XVI ст.)

Література:

1. История отечественной матем. т.I. – К: Наукова думка, 1966, г. III, С. 72-85.

40. Математика в Україні в XIV-XVII ст

Література:

1. История отечественной матем. т.I.-К: Наукова думка, 1966, г. IV, С. 85-104.

41. Дослідження з історії вітчизняної математики

Література:

1. История отечественной матем. т.IV, кн. 2. – К: Наукова думка, 1966, гл. VII, С. 475-487.

42. Д. Гільберт – видатний математик-енциклопедист

Література:

1. Бородін О. І., Бугай А. С. Біогр. словник діячів у галузі матем. – К: Рад. шкл., 1973.

2. Гильберт Д. Основания геометрии. – М.: Гостехиздат, 1948.

3. Констанс Рид. Гильберт / Перев. с англ. - М.: Наука, 1977. - 368 с.

43. Геометричні ідеї Рімана та їх подальший розвиток

Література:

1. Каган В. Ф. Очерки по геометрии. – М.: Изд-во Московского универ., 1963. – с. 437-516.

44. Відкриття Лобачевського та його місце в історії геометрії

Література:

1. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей. – М.: Гос. изд-во технико-теорет. литер., 1956. – с. 11-24.

45. Геометричні проблеми Гільберта

Література:

1. Проблемы Гильберта. – М.: Наука, 1969.

46. Каган В. Ф. – видатний геометр

Література:

1. Каган В. Ф. Очерки по геометрии. – М. Изд. МГУ, 1963.

47. Третя проблема Гільберта та її розв'язання

Література:

2. Проблемы Гильберта. Сб. под общей ред. П. С. Александрова. - М.: Наука, 1969. - 240 с.
3. Болтянский В. Г. Третья проблема Гильберта. - М.: Наука, 1977. - 208 с.

48. Геометрія Лобачевського в системі Вейля

Література:

1. Егоров И. П. Геометрия. - М.: Просвещение, 1979, гл. VI, §3 С. 146-166.
2. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия, ч.II. - М.:Просвещение, 1975, р.4, гл. V, §22 С. 246-256.

49. Еліптична геометрія в схемі Вейля

Література:

1. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия, ч.II. - М.:Просвещение, 1975, р.4, гл. V, §21 С. 242-246.