Жуковська Тетяна – аспірантка II року навчання
механіко-математичного факультету
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент О. Г. Ганюшкін

Твірні ідемпотенти деяких напівгруп

Вступ. До середини XX ст. теорія напівгруп сформувалась у самостійну гілку сучасної алгебри з багатою проблематикою, різноманітними методами і тісними зв’язками з різними областями математики. При дослідженні різного роду напівгруп стандартною задачею є пошук їх систем твірних. *Системою твірних* напівгрупи S називається підмножина A напівгрупи S, якщо кожен елемент з S можна подати у вигляді скінченного добутку елементів з A. Система твірних може бути незвідною (якщо жодна її власна підмножина не є системою твірних), може складатися з ідемпотентів (ідемпотент – це елемент кільця, напівгрупи, групоїда, рівний своєму квадрату), елементів дефекту 1, тощо.

Одними з перших досліджень в цьому напрямку є відомі роботи [2] та [3], які присвячені системам твірних з ідемпотентів у напівгрупах перетворень. Серед останніх робіт, присвячених подібним питанням, можна відмітити роботу [1].

Актуальність дослідження. Починаючи з другої половини минулого століття все частіше з’являються наукові роботи присвячені напівгрупам, проте проблема опису системи твірних напівгруп перетворень, узгоджених з деяким частковим порядком, лишається відкритою. Таким чином, проведення досліджень в цьому напрямку є важливою і актуальною задачею на даний час.

Мета дослідження. Метою роботи є вивчення будови систем твірних напівгруп тих перетворень булеану даної множини, які певним чином узгоджені із відношенням включення.

Результати дослідження. Наведемо деякі означення, які необхідні для формулювання основних результатів.

Розглядаємо напівгрупи перетворень булеану B_n скінченної $n-$елементної множини, узгоджених з відношенням включення.

Нехай M – множина із частковим порядком $\leq$ на ній. Перетворення α множини M називається *стискуючим* (*з пониженням порядку*), якщо $\alpha(x) \leq x$ для всіх $x \in dom(\alpha)$. Множину таких перетворень позначимо через $F(M)$. Перетворення α називається *монотонним* (*зі збереженням порядку*), якщо для довільних $x, y \in dom(\alpha)$ із $x \leq y$ випливає $\alpha(x) \leq \alpha(y)$. Позначимо множину цих перетворень $O(M)$. Також розглядаємо множину *стискуючих перетворень зі збереженням порядку*, тобто $C(M) = F(M) \bigcap O(M)$.

Перетворення α будемо брати з однієї з трьох наступних напівгруп: $T(B_n)$ – симетричної (повної) напівгрупи всіх скрізь визначених перетворень множини B_n; $PT(B_n)$ – напівгрупи всіх часткових перетворень множини B_n та $IS(B_n)$ – інверсної симетричної напівгрупи всіх часткових ін'єктивних перетворень множини B_n.

Таким чином, ми одержали дев'ять напівгруп перетворень множини B_n, узгоджених із відношенням включення на B_n: $F(B_n)$, $PF(B_n)$, $IF(B_n)$, $O(B_n)$, $PO(B_n)$, $IO(B_n)$, $C(B_n)$, $PC(B_n)$, $IC(B_n)$. Через $J(S)$ позначимо множину ідемпотентів дефекту 1 напівгрупи перетворень S.

Справедливі наступні твердження:

Теорема 1. Повна напівгрупа стискуючих перетворень $F(B_n)$ породжується множиною $J(F(B_n))$, причому $|J(F(B_n))| = 3^n - 2^n$.

Теорема 2. Напівгрупа всіх часткових стискуючих перетворень $PF(B_n)$ породжується множиною $J(PF(B_n))$, причому $|J(PF(B_n))| = 3^n$.

Теорема 3. Жодна з напівгруп $IF(B_n)$, $IO(B_n)$, $IC(B_n)$ не породжується ідемпотентами.

Теорема 4. Повна напівгрупа монотонних перетворень $O(B_n)$ та напівгрупа всіх часткових монотонних перетворень $PO(B_n)$ при $n \geq 2$ не породжуються ідемпотентами.

Теорема 5. Повна напівгрупа стискуючих перетворень зі збереженням порядку $C(B_n)$ та напівгрупа всіх часткових стискуючих перетворень зі збереженням порядку $PC(B_n)$ при $n \geq 3$ не породжуються ідемпотентами.

Висновки. Наведені твердження можуть бути використані при подальших дослідженнях напівгруп перетворень та їх систем твірних.

Література

1. Ayik G., Ayik H., Howie J. On factorizations and generators in transformation semigroups / G. Aysk, H. Aysk, J. Howie // Semigroup Forum, 2005. – V. 70. – № 2. – P. 225-237.
2. Howie J. M. Idempotent generators in finite full transformation semigroups / J. M. Howie // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1978. – V. 81A. – P. 318-323.
3. Howie J. M. The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation semigroup / J. M. Howie // J. London Math. Soc., 1966. – V. 41. – P. 707-716.