М. Є. Коренков, П. Й. Миронюк, Ю. І. Харкевич, І. П. Головенко

Многозначні аналітичні функції

(спецкурс)

Луцьк – 2013

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

М. Є. Коренков, П. Й. Миронюк, Ю. І. Харкевич, І. П. Головенко

Многозначні аналітичні функції
(спецкурс)

Луцьк – 2013

УДК 517.9 (075.8)
ББК 22.162я73
К 66

Рекомендовано до друку вченою радою Волинського державного університету імені Лесі Українки (протокол №1 від 25 вересня 2003 року).

Рецензенти:

Середа В. Ю., професор кафедри вищої математики Луцького технічного університету, кандидат фізико-математичних наук;

Філозоф Л. І., завідуючий кафедрою математичного аналізу Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки, кандидат фізико-математичних наук.

Коренков М. Є., Миронюк П. Й., Харкевич Ю. І., Головенко І. П.
К 66 Многозначні аналітичні функції (спецкурс) – Луцьк: Волинська обласна друкарня, 2013. – 72 с.
ISBN 978-966-361-215-7

Розглянуто основні положення теорії многозначних аналітичних функцій. Досліджено питання про виділення однозначних віток (гілок) таких функцій.

УДК 517.9 (075.8)
ББК 22.162я73

ISBN 978-966-361-215-7

Передмова

В комплексному аналізі (на відміну від дійсного аналізу) широко використовуються многозначні аналітичні функції, оскільки розв'язання багатьох задач із теорії мероморфних функцій, теорії диференціальних рівнянь і т. і. потребують дослідження саме таких функцій. Многозначні аналітичні функції часто виникають як обернені функції до однозначних регулярних функцій. Однак використання многозначних аналітичних функцій буває пов'язане з певними труднощами, які стосуються виділення однозначних віток (гілок) таких функцій – питання, що дещо штучно викладене в підручниках з комплексного аналізу.

В даному спецкурсі розглянуто строгу теорію многозначних аналітичних функцій, викладену на основі аналітичного продовження елемента вздовж кривої, вказано алгоритм виділення однозначних віток таких функцій в однозв'язній та многозв'язній областях, вивчено дії над такими функціями, досліджено властивості основних елементарних многозначних функцій, наведено багато різних прикладів.

Спецкурс може бути рекомендований студентам старших курсів математичної спеціальності університету, зокрема при написанні ними дипломних та магістерських робіт. Він може стимулювати самостійні дослідження студентів з питань комплексного аналізу та інших розділів математики.

§ 1. Гомотопні криві та неперервність функції на кривій.

Криві Γ_0, Γ_1 із спільним початком і кінцем, називаються гомотопними в області $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ (і пишуть $\Gamma_0 \approx \Gamma_1$ в $\mathcal{D}$, якщо криву Γ_0 можна неперервно деформувати в криву Γ_1, залишаючись в $\mathcal{D}$ (див. рис.1).

Замкнута крива Γ називається гомотопною нулю в області $\mathcal{D}$ (і пишуть $\Gamma \approx 0$ в $\mathcal{D}$), якщо її можна неперервно деформувати в точку, залишаючись в $\mathcal{D}$.

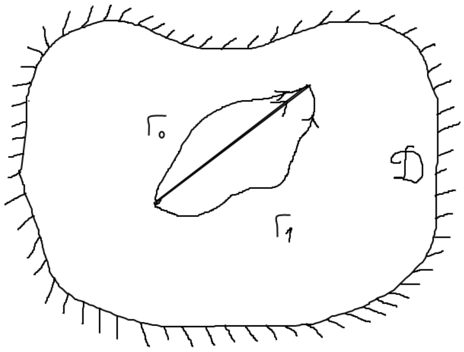

Рис. 1.

Можна показати справедливість наступних тверджень:

1. В однозв'язній області дві криві із спільним початком і кінцем гомотопні між собою, а кожна замкнута крива гомотопна нулю.
2. Якщо криві $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ і $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 \cdot \tilde{\Gamma}_2$ лежать в області $\mathcal{D}$ і $\Gamma_1 \approx \tilde{\Gamma}_1$ в $\mathcal{D}$, $\Gamma_2 \approx \tilde{\Gamma}_2$ в $\mathcal{D}$, то $\Gamma \approx \tilde{\Gamma}$ в $\mathcal{D}$. Тут $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ означає таку криву Γ, що $[\Gamma_1 \cdot \Gamma_2] = [\Gamma_1] \cup [\Gamma_2]$ і початок кривої Γ_2 співпадає із кінцем кривої Γ_1. Аналогічне тлумачення для позначення $\tilde{\Gamma}_1 \cdot \tilde{\Gamma}_2$.

3. Крива $\Gamma \cdot \Gamma^{-1}$ гомотопна нулю в кожній області $\mathcal{D}$, коли $[\Gamma] \subset \mathcal{D}$. Тут Γ^{-1} – крива така, що $[\Gamma] = [\Gamma^{-1}]$ і протилежно зорієнтована по відношенню до кривої Γ.

Якщо задано криву $\Gamma = (z = \delta(t);\ \alpha \le t \le \beta)$ і поряд з неперервною функцією $z = \delta(t)$, $t \in [\alpha;\ \beta]$, задано ще комплекснозначну функцію $w = \Psi(t)$, $t \in [\alpha;\ \beta]$, то $\Psi(t)$ можна розглядати як функцію визначену на кривій Γ, оскільки при цьому кожній точці $z_t = \delta(t)$ кривої Γ (яка однозначно задається значенням параметра t) ставиться у відповідність комплексне число w, $w = \Psi(t)$. Таким чином, функція визначена на кривій Γ, якщо задано пару функцій

$$z = \delta(t), w = \Psi(t), (\alpha \le t \le \beta) \quad (1)$$

перша з яких неперервна на $[\alpha;\ \beta]$.

Якщо Γ – жорданова незамкнута крива (без точок самоперетину), то співвідношення (1) задають однозначну функцію $w = f(z)$, $z \in [\Gamma]$, точок площини, визначену на носієві [Γ] кривої Γ таку, що $w = f(\delta(t)) \equiv \Psi(t), \alpha \le t \le \beta$.

В загальному випадку співвідношення (1) також задають функцію $w = f(z)$, $z \in [\Gamma]$, але, можливо, неоднозначну як функцію точок z площини: якщо крива Г має самоперетин тобто $\delta(t_1) = \delta(t_2)$, де $t_1 \neq t_2$, то в точці $z = \delta(t_1) = \delta(t_2)$ функція $f(z)$ може мати два різних значення. Однак і в цьому випадку замість запису (1) для зручності пишуть $w = f(z) = f(\delta(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$.

Вказана вище функція $w = f(z)$, яка задається співвідношенням (1), називається неперервною на кривій Г, якщо функція $w=\Psi(t)$ неперервна на [α; β] і $\Psi(\alpha) = \Psi(\beta)$ у випадку, коли крива Г замкнута.

Можна показати справедливість наступних тверджень:

1. Якщо функція f(z) неперервна в області $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, то вона неперервна на кожній кривій Г такій, що $[\Gamma] \subset \mathcal{D}$.
2. Якщо функція f(z) визначена в області $\mathcal{D}$ і вона неперервна на кожній кривій Г, $[\Gamma] \subset \mathcal{D}$, то ця функція неперервна в області $\mathcal{D}$.

§ 2. Приріст аргумента вздовж кривої і його властивості.

Якщо крива $\Gamma = (z = \gamma(t);\ \alpha \leq t \leq \beta)$ не проходить через точку $z = 0$, то кут повороту вектора $z = \gamma(t)$ при русі точки z від початкової до кінцевої точки цієї кривої називається приростом аргумента z вздовж кривої Г і позначається $\Delta_\Gamma\, Arg\, z$, тобто

$$\Delta_\Gamma\, Arg\, z := [arg\, \gamma(\beta)] - [arg\, \gamma(\alpha)],$$

де $[arg\, \gamma(\alpha)]$ – фіксоване значення аргумента точки $\gamma(\alpha)$ і $[arg\, \gamma(\beta)]$ – таке значення аргумента точки $\gamma(\beta)$ в яке переходить перше значення при неперервному русі точки $z = \gamma(t)$ вздовж кривої Г.

Як відомо, формули

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \quad (1)$$

де x, y – прямокутні декартові координати точки z площини, $z = x + iy$, і r та φ – її полярні координати, встановлюють взаємно однозначну відповідність між областю $\mathcal{D}_0 = \mathbb{C}\backslash]-\infty;0]$ із z-площини із системою координат X0Yта півсмугою $P = \{(r,\varphi)|0 < r < +\infty;\ -\pi < \varphi < \pi\}$ площини із системою координат r0φ (див. рис. 2.).

Якщо полярний кут φ в області $\mathcal{D}_0$ будемо відраховувати від додатного променя, то він буде змінюватися в межах $-\pi < \varphi < \pi$ і кожній точці z,

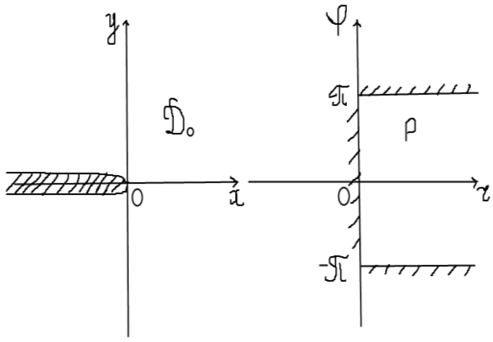

Рис. 2.

$z = x + iy$, відповідатиме лише одне значення φ, $\varphi = \varphi(z)$. Отже, в області $\mathcal{D}_0$ задана однозначна і неперервна функція $\varphi(z)$, яка є нескінченно диференційованою по змінних x, y в $\mathcal{D}_0$. Такий висновок випливає із відомої теореми з математичного аналізу, оскільки відображення півсмуги P, здійснюване системою функцій (1), взаємно однозначне, нескінченно диференційоване в P, з якобіаном

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r > 0$$

Як випливає із співвідношень (1):

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \quad (2)$$

Функція $\varphi = \varphi(z)$ однозначно задається формулами (2), оскільки $-\pi < \varphi < \pi$. В кожній точці z, z$\in\mathcal{D}_0$, значення

$\varphi(z)$ співпадає із одним значенням многозначної функції $Arg\, z$. Тому функція $\varphi(z)$ називається однозначною неперервною віткою (гілкою) $Arg\, z$. Будемо позначати цю вітку $\varphi(z) = arg\, z$.

В області $\mathcal{D}_0$ існує нескінченна сукупність неперервних віток $\varphi_k(z)$ многозначної функції $Arg\, z$. Всі вони задаються формулами

$$\varphi_k(z) = \varphi(z) + 2k\pi, \quad z \in \mathcal{D}_0 \ (k \in \mathbf{R}).$$

Можна показати, що $arg\, z = arctg\frac{y}{x}$ при $x > 0$, $y \in \mathbf{R}$, і $arg\, z = \pi + arctg\frac{y}{x}$ при $x < 0$, $y > 0$, а також $arg\, z = -\pi + arctg\frac{y}{x}$ при $x < 0$, $y < 0$, окрім того $arg\, z = \frac{\pi}{2} sign\, y$ при $x = 0$.

Виведемо тепер формулу для обчислення приросту $\Delta_\Gamma Arg\, z$ аргумента вздовж кривої Г. Із формули (1) випливає,що

$$dx = cos\, \varphi\, dr - r\, sin\, \varphi\, d\varphi,$$

$$dy = sin\, \varphi\, dr + r\, cos\, \varphi\, d\varphi,$$

звідки випливає

$$rd\varphi = -\sin\varphi\, dx + \cos\varphi\, dy.$$

Отже,

$$d\varphi = dArg\, z = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

Оскільки

$$\int_\Gamma dArg\, z = \Delta_\Gamma\, Arg\, z,$$

то приходимо до формули

$$\Delta_\Gamma\, Arg\, z = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad (3)$$

яку можна записати у вигляді

$$\Delta_\Gamma\, Arg\, z = Im\left(\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta}\right), \quad (4)$$

оскільки

$$Im\frac{dz}{z} = Im\frac{dx + idy}{x + iy} = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

Вкажемо властивості приросту аргумента.

1. Якщо криві Γ_1, Γ_2 гомотопні в області $\mathcal{D} := \mathbb{C}\setminus\{0\}$, то

$$\Delta_{\Gamma_1}\, Arg\, z = \Delta_{\Gamma_2}\, Arg\, z. \quad (5)$$

◁ Виходячи із рівності (5), позначимо $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Оскільки ці функції і всі їх частинні похідні першого порядку неперервні в області $\mathcal{D}$, причому, як легко перевірити, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, $(x,y) \in \mathcal{D}$, то враховуючи гомотопність кривих Γ_1, Γ_2 в $\mathcal{D}$ і спираючись на відому теорему з математичного аналізу, дістаємо

$$\int_{\Gamma_1} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_{\Gamma_2} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

тобто в силу (3) справедливе (5).▷

2. Якщо замкнута крива Γ гомотопна нулю в області $\mathcal{D} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то $\Delta_\Gamma \, Arg\, z = 0$.

   ◁ Справедливість цього твердження випливає з попередньої властивості.▷

3. Якщо крива Γ не проходить через точку $z = 0$, то

$$\Delta_\Gamma \, Arg\, z = -\Delta_{\Gamma^{-1}} \, Arg\, z.$$

4. Якщо крива Γ така, що $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ і вона не проходить через точку $z = 0$, то

$$\Delta_{\Gamma_1\Gamma_2}\, Arg\, z = \Delta_{\Gamma_1}\, Arg\, z + \Delta_{\Gamma_2}\, Arg\, z.$$

◁ Справедливість властивостей 3,4 випливає із формули (4) і відповідних властивостей інтегралів.▷

Зупинимось на неперервних вітках (гілках) многозначної функції $Arg\, z$.

Якщо $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$, є однозв'язна область така, що $0 \notin \mathcal{D}$, $\infty \notin \mathcal{D}$, і z_0 – фіксована точка із $\mathcal{D}$, $z_0 \in \mathcal{D}$, і $(arg\, z_0)$ – одне із значень $Arg\, z$ в точці z_0, то розглянемо функцію

$$(arg\, z) = (arg\, z_0) + \Delta_\Gamma\, Arg\, \zeta \quad (z \in \mathcal{D}) \quad (6)$$

де Г – довільна крива, $[\Gamma] \subset \mathcal{D}$, з початком в точці z_0 і кінцем в точці z. Оскільки в області $\mathcal{D}$ будь-які дві криві, що не проходять через точку $z = 0$ і мають спільні початок і кінець, гомотопні, то приріст $\Delta_\Gamma\, Arg\, \zeta$, згідно з властивістю 1, не залежить від кривої із вказаними властивостями. Отже, функція $(arg\, z)$, яка задана формулою (6), однозначна в $\mathcal{D}$. Окрім того ця функція неперервна в $\mathcal{D}$, оскільки її можна записати у вигляді

$$(arg\, z) = (arg\, z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathcal{D} \qquad (7)$$

Отже, функція $(arg\,z)$ є однозначною неперервною віткою (гілкою) многозначної функції $Arg\,z$ в області $\mathcal{D}$.

Очевидно, кожна із функцій

$$(arg\,z)_k = (arg\,z_0) + \Delta_\Gamma\, Arg\,\zeta + 2k\pi, \quad z\in\mathcal{D}\,(k\in\mathbb{Z}), \quad (8)$$

є також однозначною віткою многозначної функції $Arg\,z$ в області $\mathcal{D}$, тобто $Arg\,z$ розпадається в області $\mathcal{D}$ на однозначні і неперервні вітки (гілки) виду (8). Звідси випливає, що неперервна вітка функції $Arg\,z$ в області $\mathcal{D}$ повністю визначається своїм значенням в одній точці z_0, $z_0\in\mathcal{D}$.

§ 3. Поняття аналітичної функції.

Нагадаємо деякі важливі поняття.

Означення. Функція F: $\mathcal{D}\to\mathbb{C}$, $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$, яка регулярна в області $\mathcal{D}$, називається аналітичним продовженням функції f: $E\to\mathbb{C}$ із множини E, $E\subset\mathcal{D}$, в область $\mathcal{D}$, якщо $F(z)\equiv f(z)$ при $z\in E$.

Важливою властивістю аналітичного продовження є його єдиність, яка випливає із відомого принципу єдиності регулярної функції і формулюється наступним чином: якщо множина E має граничну точку a так, що $a \in \mathcal{D}$, то вказане вище аналітичне продовження єдине, якщо воно взагалі існує, тобто при заданій функції f: E→ℂ може існувати єдина регулярна в області $\mathcal{D}$ функція F: $\mathcal{D}$→ℂ така, що $F(z) \equiv f(z)$ при $z \in$E.

Зокрема, якщо E – носій кривої Г, [Г]⊂$\mathcal{D}$, або E – під область області $\mathcal{D}$, E⊂$\mathcal{D}$, то існує не більше одного аналітичного продовження функції f в область $\mathcal{D}$.

Якщо дано дві області $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D}_1 \subset \mathbb{C}$ такі, що $\mathcal{D}_{01} = \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1 \neq \varnothing$ і цей перетин є областю, і дано регулярні функції f_0: $\mathcal{D}_0 \to \mathbb{C}$, f_1: $\mathcal{D}_1 \to \mathbb{C}$ такі, що $f_1(z) \equiv f_0(z)$ ($z \in \mathcal{D}_{01}$), то функція f_1 називається безпосереднім аналітичним продовженням функції f_0 із області $\mathcal{D}_0$ в область $\mathcal{D}_1$ (через область $\mathcal{D}_{01}$). При цьому функція f_0 називається безпосереднім аналітичним продовженням функції f_1.

Як випливає із принципу єдиності регулярної функції, вказане аналітичне продовження є єдиним.

Якщо дано ланцюг областей $\mathcal{D}_j$ $(j = \overline{0,n})$ таких, що

$\mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_{j+1} \neq \varnothing$ $(j = \overline{0, n-1})$, ці перетини є областями і існують функції f_j $(j = \overline{0, n})$ такі, що кожна наступна функція f_{j+1} є безпосереднім аналітичним продовженням функції f_j із області $\mathcal{D}_j$ в область $\mathcal{D}_{j+1}$ (тобто всі функції f_j регулярні в областях $\mathcal{D}_j$ і $f_j(z) \equiv f_{j+1}(z)$, $(z \in \mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_{j+1})$, то функція f_n називається аналітичним продовженням функції f_0 вздовж ланцюга областей $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_{n-1}$. Таке аналітичне продовження також є єдиним.

Зазначимо, що отриманий набір $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ регулярних функцій задає деяку, взагалі кажучи многозначну, функцію F, значення якої обчислюється за формулою $F(z) = f_j(z)$ при $z \in \mathcal{D}_j$. Многозначність функції F може трапитися внаслідок того, що ланцюг областей $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ може замкнутися: тобто область $\mathcal{D}_0$ може перетнутися з областю $\mathcal{D}_n$, а значення функцій f_0 та f_n не обов'язково співпадають в $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_n$. Така ситуація може трапитися вже на першому кроці, коли $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1$ складається із більш як одної області.

Многозначна (взагалі кажучи) функція F за побудовою «складена» або «склеєна» із однозначних елементів – регулярних функцій $f_0, f_1, \ldots, f_n$.

Аналітичною функцією F називається набір таких елементів, які отримані із вихідного елемента f_0 шляхом аналітичного продовження по всіх ланцюгах областей, по яких таке продовження можливе.

Таким чином аналітична функція склеєна із регулярних елементів, які інакше називаються регулярними вітками (гілками) її.

Важливо зазначити, що за вихідними елементом аналітична функція будується однозначно.

Більш зручним поняттям чим поняття аналітичного продовження вздовж ланцюга областей, є поняття аналітичного продовження вздовж кривої.

Елементом в точці z_0, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, називається функція f, яка регулярна в деякому околі цієї точки. Два елементи називаються еквівалентними, якщо вони задані в одній і тій же самій точці і співпадають в деякому її околі. Відношення еквівалентності елементів є транзитивним. В подальшому кожен елемент будемо розглядати з точністю до еквівалентності.

Нехай задано криву $\Gamma = (z = \gamma(t);\ \alpha \leq t \leq \beta)$.

Означення. Нехай на вказаній вище кривій Г задано неперервну функцію $\varphi(z)$ і в кожній точці z кривої Г задано елемент $f_z(z)$ і цей елемент співпадає із функцію $\varphi(z)$ на деякій ланці (дузі) кривої Г, що містить точку z. Тоді елемент $f_z(z)$ в кінцевій точці z, кривої Г називається аналітичним продовженням вздовж кривої Г елемента $f_{z_0}(z)$, заданого в початковій точці z_0 цієї кривої. При цьому говорять також, що елемент $f_{z_0}(z)$ аналітично продовжений вздовж кривої Г, або що цей елемент допускає аналітичне продовження вздовж цієї кривої.

Зауваження. Можна показати справедливість наступних тверджень. Якщо елемент $f_{z_0}(z)$ можна аналітично продовжити вздовж кривої Г, то його можна аналітично продовжити вздовж деякого ланцюга областей, що покривають Г, а також вздовж кожної кривої Г′ , достатньо близької до кривої Г і яка має спільні кінці із Г. Навпаки, якщо даний елемент $f_{z_0}(z)$ можна аналітично продовжити вздовж ланцюга областей, то його можна аналітично продовжити вздовж кожної кривої, носій якої включається в цей ланцюг.

Справедливе також твердження: аналітичне продовження даного елемента $f_{z_0}(z)$, заданого в початковій точці z_0 кривої Г, єдине, якщо воно можливе, тобто при заданому елементі $f_{z_0}(z)$ існує єдина неперервна на кривій Г функція $\varphi(z)$ і єдиний (з точністю до еквівалентності елементів) набір елементів $f_z(z)$, які задовольняють попереднє означення.

Означення. Нехай в точці z_0, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, задано елемент $f(z)$, тоді сукупність елементів, які виникають в результаті аналітичного продовження елемента $f(z)$ по всіх кривих з початком в точці z_0, по яких таке продовження можливе (вважаємо, що елемент $f(z)$ входить в цю сукупність), називається аналітичною функцією, а множина всіх вказаних кривих називається множиною допустимих кривих.

Сформульоване означення введене К. Вейєрштрассом.

Дві аналітичні функції за означенням вважаються рівними тоді і лише тоді, коли їх вихідні елементи еквівалентні. Очевидно, існує лише одна аналітична функція, що породжена елементом $f(z)$. Цей елемент називається ростком аналітичної функції. Еквівалентні елементи породжують одну і ту ж саму аналітичну функцію. Множина значень, які приймає аналітична функція F в точці z, співпадає з множиною всіх тих значень, які приймають всі її елементи в цій точці.

Виявляється, що аналітичне продовження елемента можна здійснити на основі перерозкладу степеневих рядів. Якщо ряд

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n, z \in K_0, \quad (1)$$

має радіус збіжності R_0, $0 < R_0 < +\infty$, то функція $f_0(z)$ регулярна в крузі $K_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R_0\}$ і тому вона є елементом в точці a. Взявши точку b, $b \neq a$, із K_0 розкладемо функцію $f_0(z)$ в ряд за степенями $z - b$. Оскільки

$$(z-a)^n = [(z-b)+(b-a)]^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (b-a)^{n-k}(z-b)^k,$$

то підставляючи в (1) замість $(z-a)^n$ його значення і згрупувавши всі доданки, які містять однакові елементи $z-b$, отримаємо ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-b)^n. \quad (2)$$

Якщо R_1 є радіус збіжності ряду (2) і $К_1 = \{z \in \mathbb{C} | |z - -b| < R_1\}$ є його круг збіжності, то $R_1 \geq R_0 - |b-a|$. Якщо $R_1 = R_0 - |b-a|$, то і аналітичне продовження не можна здійснити. Якщо же $R_1 > R_0 - |b-a|$, то круг $К_1$ не включається в $К_0$. Згідно з принципом єдності регулярної функції
$f_1(z) \equiv f_0(z), \quad (z \in К_0 \cap К_1).$

Отже, функція $f_1(z)$ є безпосереднім аналітичним продовженням функції $f_0(z)$ із круга $К_0$ в круг $К_1$. Припустимо, що існує набір елементів (сум степеневих рядів) $f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z)$ таких, що елемент $f_j(z)$ є безпосереднім аналітичним продовженням елемента $f_{j-1}(z)$ $(j = \overline{1, n})$. Нехай $К_0, К_1, \ldots, К_n$ є круги збіжності відповідних рядів з центрами в точках $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Тоді елемент $f_n(z)$ є аналітичним продовженням елемента $f_0(z)$ вздовж ланцюга кругів $К_0, К_1, \ldots, К_n$.

Зазначимо, що аналітичне продовження з допомогою перерозкладання степеневих рядів малоефективне, хоча наведений вище метод вказує алгоритм аналітичного продовження. При аналітичному продовженні конкретних функцій зручніше використовувати інші прийоми. Головний із них базується на інтегральному представленні даної функції.

§ 4. Логарифмічна функція.

Відоме поняття функції $ln\,x, x > 0$. Виявилося, що логарифмічну функцію $Ln\,z$ комплексної змінної z можна отримати, як аналітичне продовження функції $\ln x, x > 0$.

Виходячи з відомого розкладу

$$\ln x = \ln[1 + (x-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n, \quad (0 < x < 2),$$

розглянемо функцію

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n, \quad z \in K_1(1), \quad (1)$$

де вказаний ряд, як легко перевірити, збігається в крузі $K_1(1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| < 1\}$. Функція $f_0(z)$, як сума степеневого ряду, регулярна в крузі $K_1(1)$ і вона є єдиним аналітичним продовженням функції $\ln x, x > 0$ із інтервала $]0; 2[$ в круг $K_1(1)$.

Позначимо через $Ln\, z$ аналітичну функцію, яка породжена елементом $f_0(z)$ заданим в точці $z = 1$.

З'ясуємо питання, по яких кривих елемент $f_0(z)$ можна аналітично продовжити, а також знайдемо ефективні формули для обчислення значень функції $Ln\, z$. Ці питання можна з'ясувати з допомогою перерозкладання степеневого ряду (1). Однак більш зручно скористатися інтегральним представленням функції $f_0(z)$, виходячи із відомої рівності

$$ln\,x = \int\limits_1^x \frac{dt}{t}, x > 0.$$

Теорема. Для функції $f_0(z)$, заданої рівністю (1), справедлива формула

$$f_0(z) = \int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, z \in K_1(1), \quad (2)$$

де інтеграл береться по будь-якій кривій з початком в точці $z = 1$, носій якої включається в $K_1(1)$. Елемент $f_0(z)$ можна аналітично продовжити по кожній кривій Г з початком в точці $z = 1$ і яка не проходить через точку $z = 0$. Значення логарифмічної функції в точці z, $z \neq 0$, задаються формулою

$$Ln\,z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \quad (3)$$

де інтеграл береться по довільній кривій Γ_z, що сполучає точки 1 і z, $0 \notin [\Gamma_z]$.

Доведення. Функція $f_0(z)$ із лівої частини рівності (2), як вже відмічалося, регулярна в $K_1(1)$. Функція із правої частини цієї рівності також регулярна в $K_1(1)$, як інтеграл із змінною верхньою межею, що розглядається в однозв'язній області. Вказані дві функції співпадають на інтервалі $]0;2[$. Тому, згідно із принципом єдиності регулярної функції, вони співпадають і в $\text{К}_1(1)$, тобто справедливе (2).

Зафіксувавши криву γ з початком в точці $\mathrm{z}=1$, $0\notin[\gamma]$, розглянемо інтеграл

$$w(z):=\int\limits_{\gamma_z}\frac{d\zeta}{\zeta},z\in\gamma,$$

який береться по дузі γ_z кривої γ, яка сполучає точки 1 та z і являє собою функцію, що визначена на кривій γ. Зафіксувавши точку $z_0\in\gamma$, розглянемо функцію

$$f(z)=\int\limits_{\gamma_{z_0}}\frac{d\zeta}{\zeta}+\int\limits_{z_0}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta}=w(z_0)+\int\limits_{z_0}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta},\left(z\in\text{К}_{|z_0|}(z_0)\right),\quad(4)$$

де $\text{К}_{|z_0|}(z_0)\coloneqq\{\mathrm{z}\in\mathbb{C}\,|\,|\mathrm{z}-z_0|<|z_0|\}$, другий інтеграл береться по довільній кривій, носій якої включається в $\text{К}_{|z_0|}(z_0)$ і яка сполучає точки z_0 і z, $z\in\text{К}_{|z_0|}(z_0)$. Оскільки інтеграл правої частини рівності (4) являє собою регулярну в $\text{К}_{|z_0|}(z_0)$ функцію, то функція $f(z)$ є елемент в точці z_0

кривої γ. Елемент в початковій точці $z = 1$ співпадає із вихідним елементом $f_0(z)$ логарифмічної функції. Якщо $\tilde{\gamma}_0$ - деяка дуга кривої γ, що містить точку z_0 і $[\tilde{\gamma}_0] \subset K_{|z_0|}(z_0)$, то із (4) при $z \in \tilde{\gamma}_0$ дістаємо

$$w(z) = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta} = w(z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta}, (z \in \tilde{\gamma}_0), \quad (5)$$

де останнє інтегрування проводиться по частині кривої $\tilde{\gamma}_0$. Оскільки криві, по яких беруться інтеграли в (4) і (5) можна вибрати однаковими, то $f(z) \equiv w(z)$ при $z \in \tilde{\gamma}_0$. А це означає, що елемент $f(z)$ в точці z_0 співпадає із значенням функції $w(z)$, визначеної на кривій γ, в точці z, $z \in \tilde{\gamma}_0$. Теорему доведено.

<u>Зауваження 1.</u> При доведенні теореми показано, що функція $f(z)$, $z \in K_{|z_0|}(z_0)$, яка задається рівністю (4) і інтегрування в її правій частині проводиться по довільній кривій, що сполучає точки z_0, z із $K_{|z_0|}(z_0)$ і носій якої включається в $K_{|z_0|}(z_0)$, є елементом в точці z_0 логарифмічної функції $\mathrm{Ln}\, z$.

<u>Означення.</u> Якщо $f(z)$ – елемент в точці z_0 із області $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}\subset\overline{\mathbb{C}}$, який допускає аналітичне продовження по всіх кривих Γ, таких що $[\Gamma]\subset\mathcal{D}$, то в результаті такого продовження отримуємо сукупність елементів, яка називається аналітичною в області $\mathcal{D}$ функцією.

Із попередньої теореми і цього означення випливає наступне твердження: логарифмічна функція $\operatorname{Ln} z$ аналітична в області $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Вкажемо основні властивості функції $\operatorname{Ln} z$. Як відмічено в попередній теоремі, всі значення логарифмічної функції $\operatorname{Ln} z$ в точці z, $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, обчислюється за формулою

$$Ln\, z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (3)$$

де інтеграл береться по довільній кривій Γ_z, $[\Gamma_z]\subset\mathbb{C}\backslash\{0\}$ з початком в точці 1.

Покладаючи в цьому інтегралі $\zeta = re^{i\varphi}$, $|\zeta| = r$ і враховуючи те, що $d\zeta = e^{i\varphi}dr + ire^{i\varphi}d\varphi$, $\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{dr}{r} + id\varphi$, дістаємо

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\Gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\Gamma_z} \frac{dr}{r} + i \int_{\Gamma_z} d\varphi = ln|z| + i\Delta_{\Gamma_z} Arg\, \zeta,$$

де $\Delta_{\Gamma_z} Arg\, \zeta$ - приріст аргумента вздовж кривої Γ_z. При обчисленні інтегралів $\int_{\Gamma_z} \frac{dr}{r}$, $\int_{\Gamma_z} d\varphi$ враховано вираження підінтегральних функцій через прямокутні декартові координати x, y точки z. Отримано формулу

$$Ln\, z = ln|z| + i\Delta_{\Gamma_z} Arg\, \zeta, \quad (7)$$

яка є основною для функції $Ln\, z$.

Зауваження 2. Як випливає із формул (6), (7) значення $Ln\, z$ залежить не лише від точки z, $z \neq 0$, але і від кривої Γ_z, по якій береться інтеграл (6) і яка сполучає точки 1 і z і не проходить через точку 0. Тому це значення варто було б записувати у вигляді $(Ln\, z)_{\Gamma_z}$ або $(\Gamma_z)\, Ln\, z$. Однак для спрощення запису будемо використовувати позначення $\mathrm{Ln}\, z$, вказуючи кожного разу, по якій кривій вихідний елемент аналітично продовжено. Як випливає із зауваження 1 та формули (6), справедлива рівність

$$\frac{d}{dz}(Ln\, z) = \frac{1}{z}, \quad (8)$$

яку розуміють так, що похідна від кожного елемента функції $\mathrm{Ln}\, z$ рівна $\frac{1}{z}$.

Із формули (7) зокрема випливає, що всі значення функції $\mathrm{Ln}\, z$ в точці z задаються формулою $(z \neq 0)$

$$Ln\, z = ln|z| + iArg\, z, \quad (9)$$

де $Arg\, z$ - многозначна функція: $Arg\, z = (arg\, z)_0 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, де $(arg\, z)_0$ – деяке фіксоване значення аргумента. Це тому, що для кривої Γ_z з початком в точці 1 і кінцем в точці z справедливе $\Delta_{\Gamma_z} Arg\, \zeta = Arg\, z$. Якщо $z = re^{i\varphi}$, то формула (9) набуває вигляду

$$Ln\left(re^{i\varphi}\right) = ln\, r + i(\varphi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}, \quad (10)$$

де $ln\, r$ – дійсне число.

Отже, $Ln\, z$ – нескінченнозначна функція, яка в кожній точці z $(z \neq 0, z \neq \infty)$ приймає нескінченну сукупність значень. Справедлива рівність $Re(Ln\, z) = ln|z|$, тобто дійсна частина функції $Ln\, z$ є однозначною.

Із формули (9) випливає, що

$$exp(Ln\, z) = z,\ (z \in \mathbb{C}\{0\}) \qquad (11)$$

тобто функція $Ln\, z$ є оберненою до функції $exp\ \zeta$.

Із формули (9) випливає також, що будь-які два значення логарифма в точці z_0, $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, відрізняються на доданок $2k\pi$, де k – певне ціле число. Звідси випливає наступна важлива властивість логарифма: якщо $f_1(z), f_2(z)$ – два елементи логарифмічної функції в точці z_0, то $f_1(z) - f_2(z) \equiv 2k\pi i$ в деякому околі точки z_0, де k – певне ціле число. До такого висновку можна також прийти, враховуючи зауваження 1.

Отже, довільний елемент логарифмічної функції в довільній точці z_0, $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, повністю визначається заданням свого значення в точці z_0. Зазначимо, що довільна аналітична функція не володіє такою властивістю.

Якщо $f(z)$ – елемент функції $Ln\, z$ в точці z_0, $z_0 \neq 0$, такий, що $f(z_0) = (ln\, z_0)$, де $(ln\, z_0)$ – фіксоване значення логарифма в точці z_0, то

$$f(z) = (\ln z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n {z_0}^n} (z - z_0)^n, |z - z_0| < |z_0|. \quad (12)$$

Справді, на основі ряду Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

і враховуючи те, що в силу (8) $f'(z) = \frac{1}{z}$ в деякому околі точки z_0 і, отже, $f^{(n)}(z_0) = (-1)^{n-1}(n-1)!/{z_0}^n$ (n=1,2,…), дістаємо (12). Легко переконуємося в тому, що радіус збіжності ряду (12) рівний $|z_0|$.

Виявляється, що формулу (7) можна поширити і на той випадок, коли вихідне значення логарифма задане в точці відмінній від 1. Нехай в точці z_0 задано значення логарифмічної функції $(\ln z_0)$ і задана крива γ, що з’єднує точки z_0 і z. Нехай $[\ln z]$ значення логарифмічної функції в точці z, що отримується в результаті аналітичного продовження фіксованого елемента в точці z_0 вздовж кривої γ, а $(\ln z_0)$ – значення в точці z_0 результату аналітичного продовження вихідного елемента вздовж кривої Γ_{z_0}. Тоді в силу (7)

$$[\ln z] = \ln|z| + i\Delta_{\Gamma_{z_0}} Arg\, \zeta + i\Delta_\gamma Arg\, \zeta,$$

$$(\ln z_0) = \ln|z_0| + i\Delta_\Gamma Arg\, \zeta.$$

Отже, справедлива формула

$$[\ln z] = (\ln z_0) + \ln\left|\frac{z}{z_0}\right| + i\Delta_\gamma Arg\, \zeta, \quad (13)$$

яку можна записати у вигляді

$$[\ln z] = \ln|z| + i\left[Im(\ln z_0) + \Delta_\gamma Arg\, \zeta\right]. \quad (14)$$

§ 5. Характер неоднозначності логарифмічної функції.

Якщо функція $F(z)$ аналітична в проколотому околі точки a, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, неоднозначна в цьому околі і в самій точці a вона не є аналітичною, то точка a називається ізольованою точкою розгалуження функції $F(z)$.

<u>Приклад.</u> Точки 0 та ∞ є ізольовані точки розгалуження функції $Ln\, z$.

Можна дати інше означення точки розгалуження, що еквівалентне попередньому. Нехай функція $F(z)$ аналітична в кільці $U_r(a) := \{z \in |0 < |z-a| < r\}$ і $f_0(z)$ – фіксований елемент цієї функції в точці z_0, $z_0 \in U_r(a)$. Аналітично продовжимо $f_0(z)$ вздовж кола $\Gamma_{|z_0-a|}(a) := \{z \in \big||z-a| = |z_0-a|\big|\}$, початок і кінець якого в точці z_0. При цьому будемо говорити, що здійснюємо обхід навколо точки a в додатному або від'ємному напрямі в залежності від орієнтації вказаного кола. Якщо елемент $f_1(z)$, отриманий в результаті вказаного аналітичного продовження, не співпадає із вихідним елементом $f_0(z)$ в точці z_0, то точка a називається ізольованою точкою розгалуження функції $F(z)$.

Взявши точку z_0, $z_0 \neq 0, z_0 \neq \infty$, і елемент $f_0(z)$ логарифмічної функції $Ln\, z$ в цій точці і здійснено обхід навколо точки $z = 0$ в додатному напрямі. Якщо $f_1(z)$ – отриманий в результаті аналітичного продовження елемент, то згідно із формулою (13), §4, дістанемо $f_1(z) = f_0(z) + +2\pi i$.

Отже, функція $Ln\,z$ володіє властивістю: при обході навколо точки $z=0$ в додатному напрямі елемент $f_0(z)$ в точці z_0, $z_0 \neq 0$, переходить в елемент $f_1(z)=f_0(z)+2\pi i$, що записують у вигляді

$$(ln\,z) \rightarrow (ln\,z)+2\pi i, \quad (1)$$

(де $(ln\,z)$ – фіксований елемент $Ln\,z$ в точці z_0) тобто елемент логарифма отримує приріст $2\pi i$.

При обході навколо точки $z=0$ у від'ємному напрямі

$$(ln\,z) \rightarrow (ln\,z)-2\pi i. \quad (2)$$

Функція $Ln\,z$, як і кожна многозначна аналітична функція, «складена» (або «склеєна») із однозначних аналітичних функцій, а саме, із своїх елементів. Кожен елемент логарифма називається однозначною або регулярною віткою (гілкою) логарифма. Аналогічно, однозначною віткою (гілкою) довільної многозначної аналітичної функції називається будь-який її елемент. Можна по-різному вибирати елементи, із яких «склеєна» аналітична функція.

Із формулу (13) попереднього параграфа і властивостей аргумента випливає наступна властивість логарифма: якщо криві γ_1, γ_2 такі, що $[\gamma_1]\subset G$, $[\gamma_2]\subset G$, гомотопні в області $G := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ і вони з'єднують точки a і b із G і $f(z)$ – довільний елемент логарифма в точці a, то при аналітичному продовженні цього елемента вздовж кривих γ_1, γ_2 отримуємо один і той же самий елемент в точці b. Це тому, що для гомотопних кривих γ_1, γ_2 виконується $\Delta_{\gamma_1} Arg\, \zeta = \Delta_{\gamma_2} Arg\, \zeta$. Далі залишається застосувати формулу (13) попереднього параграфа.

Якщо $\mathcal{D}$ – довільна однозв'язна область, що не містить точок 0 і ∞, $(ln\, z_0)$ – фіксоване значення логарифма в точці z_0, $z_0 \in \mathcal{D}$, то аналітично продовживши елемент $f(z)$ логарифма в точці z_0, такий, що $f(z_0) = (ln\, z_0)$, по всіх кривих, які виходять із точки z_0 і носії якщо включаються в $\mathcal{D}$, отримаємо однозначну в області $\mathcal{D}$ функцію, як це випливає з попередньої властивості і того факту, що в однозв'язній області будь-які криві із спільними початком і кінцем гомотопні. Отримана однозначна аналітична функція називається регулярною віткою (гілкою) логарифма виділеною в області $\mathcal{D}$. Вибравши в точці z_0 інше значення логарифма, отримаєм іншу регулярну вітку (гілку) логарифма, виділену в області $\mathcal{D}$.

Якщо в якості області $\mathcal{D}$ взяти площину розрізану по від'ємному променю, тобто $\mathcal{D} := \mathbb{C}\backslash]-\infty; 0]$, то функція $Ln\, z$ розпадається в цій області на нескінченну сукупність однозначних віток (гілок) виду

$$f_k(z) = ln|z| + i\, arg\, z + 2k\pi i,\ z \in \mathcal{D}\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3)$$

де $arg\, z$ – головне значення аргумента числа z,

$-\pi < arg\, z \leq \pi$.

Зазначимо, що можна і по-іншому «розрізати» логарифм не регулярні вітки. А саме, в якості області $\mathcal{D}$ можна взяти площину з розрізом по будь-якій жордановій кривій γ, що сполучає точки 0 і ∞. Вибір розрізу диктується конкретною задачею.

Оскільки функція $z = exp\, w$ конформно і взаємно однозначно відображає смугу $P := \{w \in \mathbb{C} | -\infty < Re\, w < +\infty, 0 < Im\, w < a\}$ ширини a, $0 < a \leq 2\pi$ із w – площини, на сектор $S := \{z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} | \rho > 0, 0 < \theta < a\}$, із z-площини, то обернена функція $w = (ln\, z)$, $w \in S$, взаємно однозначно і конформно відображає сектор S на смугу P. Оскільки сектор S є однозв'язна область, що не містить точок 0 і ∞, то в S функція $w = Ln\, z$ розпадається на однозначні вітки. Відображення S на P здійснюється однією із таких віток логарифма, яку ми позначили через $(ln\, z)$; її можна задати одним із способів:

1) $0 < Im\big((ln\, z)\big) < 2\pi$ в секторі S;

2) $(ln\, 1) = 0$ (тобто задається значення вітки на межі сектора S).

Зазначимо, що однозначна вітка $f_0(z)$ логарифма, яка задається формулою (3) при $k = 0$, взаємно однозначно і конформно відображає $\mathcal{D} = \mathbb{C} \backslash]-\infty; 0]$ на смугу

$\tilde{P} := \{w \in \mathbb{C} | -\pi < Im\, w < \pi\, , -\infty < Re\, w < +\infty\}$.

Інші вітки логарифма відображають сектор S на інші смуги. Зокрема, якщо $f_k(z)$ – вітка логарифма в секторі S, що задана формулою (3), то функція $f_k(z)$ взаємно однозначно і конформно відображає сектор S на смугу

$P_k := \{w \in \mathbb{C} | 2k\pi < Im\, w < 2k\pi + a\,, -\infty < Re\, w < +\infty\}$.

§ 6. Операції над аналітичними функціями.

Нехай елементи $f(z), g(z)$, задані в точці z_0 і нехай $F(z), G(z)$ – аналітичні функції, які породжені цими елементами. Тоді функції $f(z) \pm g(z), f(z) \cdot g(z)$, $f(z)/g(z)$ є також елементами в точці z_0 (у випадку частки вимагається, щоб $g(z_0) \neq 0$). Вказані елементи породжують аналітичні функції, які позначимо відповідно символами $F(z) \pm G(z), F(z) \cdot G(z), F(z)/G(z)$.

Символом $F'(z)$ позначимо аналітичну функцію, яка породжена елементом $f'(z)$ в точці z_0.

За означенням, всі вказані операції над аналітичними функціями знову приводять до аналітичних функцій.

Теорема 1. Якщо, вказані вище, функції $F(z), G(z)$ аналітичні в області $\mathcal{D}$, то $F(z) \pm G(z), F(z) \cdot G(z)$,

$F(z)/G(z), F'(z), G'(z)$ (у випадку частки вимагається $G(z) \neq 0$) є також аналітичні функції в області $\mathcal{D}$.

Доведення. Нехай $f(z)$ та $g(z)$ – вихідні елементи в точці $z_0 \in \mathcal{D}$ аналітичних функцій $F(z), G(z)$ і Г – довільна крива з початком z_0 така, що $[\Gamma] \subset \mathcal{D}$. Продовживши аналітично елементи $f(z), g(z)$ вздовж кривої Г, отримаємо в кожній точці ζ цієї кривої елементи $f_\zeta(z), g_\zeta(z)$, сума яких $h_\zeta(z) = f_\zeta(z) + g_\zeta(z)$ є регулярна в точці ζ. Отже, елемент $h(z) = f(z) + g(z)$ в точці z_0 аналітично продовжений вздовж кривої Г. Таким чином $F(z) + G(z)$ є аналітична функція в області $\mathcal{D}$. Аналогічно можна показати аналітичність всіх інших функцій, вказаних в теоремі.

Приклад 1. Функції $Ln^2 z$ $(0 < |z| < +\infty)$, $zLn\, z$ $(0 < |z| < \infty)$, $z + Ln\, z$ $(0 < |z| < \infty)$ аналітичні в області $\mathcal{D} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а функція $\frac{Ln\, z+1}{Ln\, z-1}$ $(z \neq 0, z \neq e, z \neq \infty)$ аналітична в області $\widetilde{\mathcal{D}} := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, e, \infty\}$.

Приклад 2. Розглянемо аналітичну функцію $F(z) = = zLn\,z$, де вихідний елемент логарифма $(ln\,z)$ заданий в точці $z = 1$ умовою $(ln\,1) = 0$. Дослідимо характер неоднозначності цієї функції. Якщо γ є коло

$\gamma = \{z\in||z| = 1\}$ з початком $z = 1$, додатньо зорієнтоване, то при обході навколо точки $z = 0$ по цьому колу (тобто при аналітичному продовженні вихідного елемента $f_0(z)$ функції $F(z)$ вздовж кола γ) отримаємо

$(ln\,z) \to (ln\,z) + 2\pi i$, так що $f_0(z) \to f(z) + 2\pi iz$. Отже, точка $z = 0$ є точкою розгалуження аналітичної функції $F(z)$. Після n обходів точки $z = 0$ по вказаному колу отримаємо $f_0(z) \to f(z) + 2\pi izn$. Точка $z = \infty$ є також точкою розгалуження аналітичної функції $F(z)$, оскільки обхід навколо точки $z = 0$ в додатному напрямі – це обхід навколо точки $z = \infty$ у від'ємному напрямі.

Нехай аналітичні функції $F(z)$ та $G(z)$ породжені елементом $f(z)$ та $g(z)$, заданими в точках z_0 та w_0,

$w_0 = f(z_0)$, відповідно. Тоді суперпозицію $G(F(z))$ вказаних функцій називається аналітична функція, яка породжена елементом $g\big(f(z)\big)$.

Теорема 2. Якщо вказані вище функції такі, що $F(z)$ аналітична в області $\mathcal{D}$ і її значення належать області $\widetilde{\mathcal{D}}$ в якій аналітична функція $G(w)$, то суперпозиція $G(F(z))$ цих аналітичних функцій є функція, що аналітична в області $\mathcal{D}$.

Доведення. Якщо γ – довільна крива з початком в точці z_0, $z_0 \in \mathcal{D}$, така, що $[\gamma] \subset \mathcal{D}$, то продовживши аналітично елемент $f(z)$ вздовж γ, отримаємо в кожній точці ζ цієї кривої елемент $f_\zeta(z)$ і функцію $w(z)$ визначену і неперервну на кривій γ таку, що $w(z) = f_z(z)$. Ця функція відображає криву γ на криву $\tilde{\gamma}$, $[\tilde{\gamma}] \subset \widetilde{\mathcal{D}}$, з початком в точці $w_0 = f(z_0)$. Згідно з умовами теореми, елемент $g(w)$ аналітичної функції $G(w)$ можна аналітично продовжити вздовж кривої $\tilde{\gamma}$. Таке продовження дасть елемент $g_w(w)$ в кожній точці w кривої $\tilde{\gamma}$. Якщо $w \in \tilde{\gamma}$, $w = f_z(z)$, то функція

$g_w(f_z(z)) = h_z(z)$ регулярна в точці $\zeta \in \gamma$, і тому є елементом в цій точці. Отже, вихідний елемент $g(f(z))$ аналітично продовжений вздовж кривої γ тобто $G(F(z))$ аналітична функція в області $\mathcal{D}$. Теорему доведено.

Приклад 3. Функція $Ln(z-a)$, $a = const \in \mathbb{C}$, аналітична в області $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, як суперпозиція регулярної функції $w = z - a$, $z \in \mathcal{D}$, і аналітичної функції $Ln\, w$,

$w \in \mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Приклад 4. Функція $\frac{Ln\, z+1}{Ln\, z-1}$ аналітична в області $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{1, -1\}$, як суперпозиція регулярної функції $w = \frac{z-1}{z+1}$, $z \in \mathcal{D}$, і аналітичної функції $Ln\, w$, $w \in \widetilde{\mathcal{D}} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Зазначимо, що для функції із прикладу 2 мають місце тотожності: $exp(Ln(z-a)) = z - a$, $Re\,(Ln(z-a)) = ln|z-a|$, справедливі при $z \neq a, z \neq \infty$.

Зауваження 1. Варто зазначити, що формула $F(z) = Ln(z-a)$ ще не задає аналітичну функцію, оскільки, згідно з означенням аналітичної функції, необхідно вказати її вихідний елемент. Це пов'язано з тим, що формула може задавати не одну, а кілька аналітичних функцій, якщо не вказано вихідний елемент. В цьому переконаємось на наступному прикладі.

<u>Приклад 5.</u> Формула $F(z) = Ln(exp\, z)$ задає нескінченну сукупність аналітичних, а точніше регулярних функцій. Справді, $Ln(exp\, z) = ln|exp\, z| + i\, Arg(exp\, z) = ln|e^{Re\, z}| + i(Im\, z + 2k\pi) = Re\, z + i\, Im\, z + 2k\pi i = z + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Отже, вказана формула задає нескінченну сукупність регулярних функцій виду $F_k(z) = z + 2k\pi i$, $z \in \mathbb{C}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, що переконує в справедливості твердження із попереднього зауваження.

§ 7. Степенева функція.

При дійсних x, $x > 0$, і при фіксованому α, $\alpha \in \mathbb{R}$, справедлива формула $x^{\alpha} = e^{ln\, x}$. Поширимо цю формулу на комплексні значення x і комплексне фіксоване значення α. Покладемо за означенням,

$$z^{\alpha} = exp(\alpha\, Ln\, z)\, , z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

В якості вихідного елемента степеневої функції z^{α} візьмемо елемент $g_0(z) = exp\big(\alpha\, f_0(z)\big)$ в точці $z = 1$, де $f_0(z)$ – вихідний елемент логарифмічної функції $Ln\, z$ в цій точці, тобто $f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$, $|z-1| < 1$.

Записавши ряд Тейлора для функції $g_0(z)$ і ,

$$g_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{{g_0}^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k,$$

і враховуючи те, що $\frac{d^k}{dz^k} g_0(z) = k!\, \mathrm{C}_{\alpha}^{\mathrm{k}}$, при $k = z_0$, дістаємо розклад

$$g_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}_{\alpha}^{\mathrm{k}}\,(z-1)^k, |z-1| < 1, \quad (2)$$

де $\mathrm{C}_{\alpha}^{\mathrm{k}} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\mathrm{k}+1)}{k!}$.

<u>Теорема 1.</u> Степенева функція z^{α} аналітична в області $\mathcal{D} := \mathbb{C} \backslash \{0\}$.

<u>Доведення.</u> Функція $Ln\, z$ аналітична в $\mathcal{D}$ і такою ж є функція $\alpha\, Ln\, z$. Оскільки функція $exp\, w$ регулярна в $\mathbb{C}$, то в силу формули (1) і враховуючи теорему 2 із попереднього параграфа, можемо стверджувати аналітичність функції z^{α} в $\mathcal{D}$, як суперпозиції двох аналітичних функцій. Теорему доведено.

Зауваження 1. Із рівності $g_0(z) = exp\big(\alpha\, f_0(z)\big)$ і того факту, що $f_0'(z) = \frac{1}{z}$ випливає, що $g_0'(z) = exp\big(\alpha\, f_0(z)\big)\frac{\alpha}{z}$. Тому, враховуючи (1), приходимо до формули

$$\frac{d}{dz}(z^{\alpha}) = \alpha z^{\alpha-1}, \quad (3)$$

яку варто розуміти як рівність

$$\frac{d}{dz}(z^{\alpha}) = \frac{\alpha z^{\alpha}}{z}, \quad (4)$$

де значення z^{α} в обох її частинах однакові.

Із відомих формул для функції $Ln\, z$ і співвідношення (1) випливають основні формули для степеневої функції z^{α} та її властивості.

1. Якщо крива γ з’єднує точки z_0 і z_1 причому $0 \notin [\gamma]$, $\infty \notin [\gamma]$, і в точці z_0 задано елемент $f(z)$ аналітичної функції z^{α} такий, що $f_0(z) = (z_0^{\alpha})$, де (z_0^{α}) – одне із значень степеневої функції z^{α} в точці z_0, то аналітично

продовживши елемент вздовж кривої γ, отримаємо в точці z_1 значення $[z_1^\alpha]$ цієї степеневої функції, яке обчислюється за формулою

$$[z_1^\alpha] = (z_0^\alpha)\, exp\left(\alpha\, ln\left|\frac{z_1}{z_0}\right| + i\alpha\Delta_\gamma\, Arg\, z\right). \quad (5)$$

Справді, якщо $(ln\, z_0)$ – фіксоване значення логарифма в точці z_0, а $[ln\, z_1]$ – значення логарифма в z_1, яке отримується в результаті аналітичного продовження вздовж кривої γ, то, як випливає із формули (13), §4, справедлива рівність.

$$[ln\, z_1] = (ln\, z_0) + ln\left|\frac{z_1}{z_0}\right| + i\Delta_\gamma\, Arg\, z.$$

Звертаючись до рівності (1), дістаємо

$$[z_1^\alpha] = exp(\alpha[ln\, z_1]) =$$
$$= exp\big(\alpha(ln\, z_0)\big)\, exp\left(\alpha\, ln\left|\frac{z_1}{z_0}\right| + i\alpha\Delta_\gamma\, Arg\, z\right)$$
$$= (z_0^\alpha)\, exp\left(\alpha\, ln\left|\frac{z_1}{z_0}\right| + i\alpha\Delta_\gamma\, Arg\, z\right)$$

тобто справедливе (5).

Більш прості формули для степеневої функції z^{α} можна отримати у випадку дійсного показника α, $\alpha \in \mathbb{R}$. Такий випадок і є найбільш важливим для застосувань.

2. Будь-який елемент функції z^{α} в кожній точці $z_0, z_0 \neq 0, z_0 \neq \infty$, повністю визначається заданям свого значення в цій точці. Довільні два елементи $f_1(z), f_2(z)$ функції z^{α} в кожній вказаній вище точці z_0, пов'язані тотожністю

$$f_2(z) \equiv f_1(z)\, exp(i2\pi k\alpha), \quad (6)$$

де k – деяке ціле число.

Сформульована властивість випливає із формули (1) і відповідної властивості функції $Ln\, z$.

3. Всі значення функції z^{α} при $\alpha \in \mathbb{R}$ в точці $z = re^{i\varphi}$ задаються формулою

$$z^{\alpha} = \left(re^{i\varphi}\right)^{\alpha} = r^{\alpha} \cdot exp(i(\varphi + 2k\pi)\alpha), \quad (7)$$

де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Справді в силу формули (1), дістаємо

$$\left(re^{i\varphi}\right)^{\alpha} = exp\left[\alpha\, Ln\left(re^{i\varphi}\right)\right] =$$
$$= exp\left[\alpha\left(ln\, r + i(\varphi + 2k\pi)\right)\right] =$$
$$= exp(\alpha\, ln\, r) exp\left(i\alpha(\varphi + 2k\pi)\right) =$$
$$= r^{\alpha} \cdot exp\left(i\alpha(\varphi + 2k\pi)\right).$$

Із формули (7) зокрема випливає, що при $\alpha \in \mathbb{R}$ $|z^{\alpha}|$ є однозначна функція причому $|z^{\alpha}| = |z|^{\alpha}$.

4. Якщо в точці $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ задано значення $(z_0^{\alpha}) = r_0^{\alpha} e^{i\alpha\varphi_0}$ степеневої функції $z^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$, $[z_1]^{\alpha}$ – значення цієї функції в точці z_1, яке отримується в результаті аналітичного продовження вздовж кривої γ, яка сполучає точки z_0 і z_1, то справедлива формула

$$[z_1^{\alpha}] = |z_1|^{\alpha}\, exp\left(i\alpha\left(\varphi_0 + i\alpha\Delta_{\gamma}\, Arg\, z\right)\right). \quad (8)$$

Справді, в силу рівності (5), дістаємо

$$[z_1^{\alpha}] = (z_0)^{\alpha}\, exp\left(\alpha\, ln\left|\frac{z_1}{z_0}\right| + i\alpha\Delta_{\gamma}\, Arg\, z\right)$$
$$= r_0^{\alpha} e^{i\alpha\varphi_0} \exp\left(\alpha\, ln|z_1| - \alpha \ln r_0 +\right.$$
$$\left. + i\alpha\Delta_{\gamma}\, Arg\, z\right) =$$
$$= |z_1|^{\alpha}\, exp\left(i\alpha\varphi_0 + i\alpha\Delta_{\gamma}\, Arg\, z\right).$$

Із формули (8) зокрема випливає, що при вказаному аналітичному продовженні

$\Delta_\gamma\, Arg\, z^\alpha = \alpha\Delta_\gamma\, Arg\, z \quad (9).$

5. Всі значення аналітичної функції $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}, n\in\mathbb{N}, n \geq 2,$ в точці $z = re^{i\varphi}, r \neq 0,$ обчислюється за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\, exp\left(\frac{i(\varphi+2k\pi)}{n}\right) (k = \overline{0, n-1}), \quad (10)$$

яка випливає із співвідношення (7) при $\alpha = \frac{1}{n}, k\in\mathbb{Z}$ і при врахуванні того факту, що при $k = n, n+1, \ldots$ значення задані формулою (7) повторюють значення вказані в формулі (10).

Отже, аналітична функція $\sqrt[n]{z}$ є n - значною в області $\mathcal{D} := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ тобто в кожній точці z із $\mathcal{D}$ вона має рівно n різних значень, що знаходяться за формулою (10).

Із формули (10) випливає тотожність

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n \equiv z \quad (11)$$

тобто функція $\sqrt[n]{z}$ є правою оберненою функцією до функції $z = w^n$.

Зокрема всі значення функції $\sqrt{z}$ в точці $z = re^{i\varphi}$ обчислюється за формулою $\sqrt{z} = \sqrt{re^{i\varphi}} = \pm\sqrt{r}\, exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right)$ тобто ця аналітична функція є двохзначною в області $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Зауваження 2. Як випливає із формули (1), степенева функція z^{α} при $\alpha \in \mathbb{C}\backslash \mathbb{R}$ є нескінченнозначною в області $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

6. Якщо $f(z)$ – елемент степеневої функції z^{α} в точці $z_0, z_0 \neq 0$, такий, що $f(z_0) = (z_0^{\alpha})$, то справедливий розклад

$$f(z) = (z_0^{\alpha}) \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}_{\alpha}^{\mathrm{k}} \frac{(z - z_0)^{\mathrm{k}}}{{z_0}^{\mathrm{k}}} \quad (|z - z_0| < |z_0|). \quad (12)$$

Справді, записавши ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

і враховуючи те, що в силу формули (4) $f'(z) = \frac{\alpha z^{\alpha}}{z}$,

$f^{(k)}(z) = k!\,\mathrm{C}_{\alpha}^{\mathrm{k}} z^{\alpha} z^{-k}$, дістаємо (12). Легко показати, що ряд (12) має радіус збіжності $|z_0|$.

З'ясуємо тепер питання про характер неоднозначності степеневої функції.

7. Якщо $f(z)$ – елемент функції z^{α} в точці z_0, $z_0 \neq 0$, $z_0 \neq \infty$, то при обході навколо точки $z = 0$ в додатному напрямі цей елемент перемножиться на $exp(i2\pi\alpha)$, тобто

$f(z) \to exp(i2\pi\alpha) f(z)$. (13)

а при обході у від'ємному напрямі перемножиться на $exp(-i2\pi\alpha)$, тобто

$f(z) \to exp(-i2\pi\alpha) f(z)$. (14)

Вказані твердження випливають із означення степеневої функції та співвідношення (1), (2) §5.

Раніше було введено поняття точки розгалуження аналітичної функції. Із співвідношення (13), (14) випливає, що точки $z = 0$, $z = \infty$ є точками розгалуження степеневої функції z^{α}, якщо α не є цілим числом.

Означення. Якщо функція $F(z)$ аналітична в кільці $U_\rho := \{z \in |0 < |z-a| < \rho\}$ і не є аналітичною в точці a, причому в кожній точці його є рівно n, $n \geq 2$, різних елементів функції $F(z)$, то точка a називається ізольованою точкою розгалуження порядку n функції $F(z)$.

Аналогічно вводиться порядок ізольованої точки розгалуження $a = \infty$.

Якщо n скінченне, то точка a називається алгебраїчною точкою розгалуження. Якщо ж $n = \infty$, то a називається точкою розгалуження нескінченного порядку або інакше логарифмічною точкою розгалуження.

Зауваження 3. Можна показати, що коли в деякій точці вказаного кільця $U_\rho(a)$ аналітична в цьому кільці функція $F(z)$ має рівно n різних елементів, то в будь-якій іншій точці із $U_\rho(a)$ функція $F(z)$ також має рівно n різних елементів (випадок $n = \infty$ також допускається).

Приклад 1. Точки 0, ∞ є точками розгалуження порядку n аналітичної функції $\sqrt[n]{z}$. Справді, якщо $f_0(z)$ є який-небудь елемент цієї функції в точці z_0, $z_0 \neq 0$, $z_0 \neq \infty$, то всі різні елементи в цій точці мають вигляд

$$f_k(z) = f_0(z)\, exp\left(\frac{i2\pi k}{n}\right) \qquad (k = \overline{0, n-1}).$$

Приклад 2. Аналітична функція $F(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$ має дві точки розгалуження другого порядку, а саме $z = \pm 1$. Точка $z = \infty$ не є точкою розгалуження. Справді,

$$F(z) = \sqrt{G(z)}, G(z) = \frac{1-{}^1\!/_z}{1+{}^1\!/_z}.$$

Функція $G(z)$ регулярна в точці $z = \infty$ і $G(\infty) = 1 \neq 0$; згідно з теоремою 2 із §4, функція $F(z)$ аналітична в області $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{C}} \backslash \{1, -1\}$.

В §5 було показано, що в кожній однозв'язній області, яка не містить точок 0, ∞, функція $Ln\, z$ розпадається на регулярні вітки (гілки). Оскільки $z^\alpha = \exp(\alpha\, Ln\, z)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, то в кожній такій області степенева функція z^α також розпадається на регулярні вітки (гілки). Будь-які дві вітки функції z^{α} відрізняються множником $exp(i2k\pi\alpha)$, де $k \in \mathbb{Z}$.

В секторі $S = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} | r > 0, 0 < \varphi < \beta \leq 2\pi\}$ степенева функція z^{α} розпадається на регулярні вітки. Одна із таких віток (при дійсному α) задається формулою

$$f_0(z) = |z|^{\alpha}\, exp(i\alpha\, arg_0\, z)\,, z \in S. \quad (15)$$

Тут $arg_0\, z$ є таке значення аргумента, що $0 < arg_0\, z \leq 2\pi$. Інші вітки мають вигляд

$$f_k(z) = exp(i2k\pi\alpha) f_0(z),\ z \in S\ (k \in \mathbb{Z}). \quad (16)$$

Зокрема функція $\sqrt{z}$ розпадається в секторі S на дві вітки: $f_0(z) = \sqrt{|z|}\, exp(\frac{i\, arg_0\, z}{2}),\ f_1(z) \equiv -f_0(z)$.

Якщо $\alpha > 0,\ 0 < \alpha\beta \leq 2\pi$, то вітка $w = f_0(z)$ функції z^{α} ($\alpha \in \mathbb{R}$), що задана рівністю (15), взаємно однозначно відображає сектор $\tilde{S} = \{z \in \mathbb{C} | 0 < arg_0\, z < \beta\}$ із z – площини на сектор $\hat{S} = \{w \in \mathbb{C} | 0 < arg_0\, w < \alpha\beta\}$ із w – площини, тобто змінює радіанну міру сектор S в α раз.

Справді із формули (7), даного параграфа, випливає, що при $w = \rho e^{i\varphi}, z = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \beta$, буде $\rho = r^{\alpha}, \psi = \alpha\varphi$ і $0 < \psi < \alpha\beta$. Отже, точки w заповнять сектор $\hat{S}$.

§ 8. Первісна аналітичної функції. Обернені тригонометричні функції.

Якщо аналітично функція $F(z)$ породжена елементом $f_0(z)$ в точці z_0, $z_0 \neq \infty$, то в достатньо малому крузі $K_r(z_0) = \{z \in | |z - z_0| < r\}$ функція

$$g_0(z) = \int_{z_0}^{z} f_0(\zeta)\, d\zeta, \quad z \in K_r(z_0), \qquad (1)$$

де інтеграл береться по кривих, носії яких включаються в $K_r(z_0)$ і сполучають точки z_0 і z, регулярна в $K_r(z_0)$.

Аналітична функція $G(z)$, яка породжена елементом $g_0(z)$, що задається формулою (1), називається первісною аналітичної функції $F(z)$ і це записують у вигляді

$$G(z) = \int_{z_0}^{z} F(\zeta)\, d\zeta. \qquad (2)$$

<u>Теорема 1.</u> Якщо функція $F(z)$ аналітична в області $\mathcal{D}$, то її первісна $G(z)$ також аналітична в $\mathcal{D}$.

<u>Доведення.</u> Нехай крива γ така, що $[\gamma]\subset\mathcal{D}$, і вона має початок z_0. Взявши точку ζ кривої γ, позначимо через γ_ζ – дугу (ланку) кривої γ, яка з'єднує точки z_0 і ζ. Нехай $f(z)$ – елемент в точці ζ аналітичної функції $F(z)$, отриманий із вихідного елемента $f_0(z)$ шляхом аналітичного продовження вздовж дуги γ_ζ. Розглянемо достатньо малий круг K з центром в точці ζ і покладемо

$$g(z) := \int_{\gamma_\zeta} F \; {}^{\zeta}_{0}$$

де останній інтеграл береться по довільній кривій, носій якої включається в K і яка сполучає точки z і ζ. Очевидно, функція $g(z)$ регулярна в крузі K, тобто вона є елементом в точці ζ і якщо $\zeta = z_0$, то $g(z) = g_0(z)$. Таким чином, в кожній точці ζ кривої γ побудовано елемент; узгодженість таких елементів перевіряється так, як і при доведенні теореми із §4. Тому елемент $g_0(z)$ аналітично продовжений вздовж кривої γ, так що породжена ним функція $G(z)$ аналітична в області $\mathcal{D}$. Теорему доведено.

Зазначимо, що при вказаних вище умовах $G'(z) = F(z)$.

Окрім того, якщо $G_1(z)$, $G_2(z)$ – первісні однієї і тієї ж аналітичної функції $F(z)$, то $G_1(z) - G_2(z) \equiv const$.

При дійсних x функція $arctg\, x$ допускає представлення

$$arctg\, x = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Оскільки функція $(1+z^2)^{-1}$ регулярна в області $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$, то функція $g_0(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$,

$z \in K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$, (*) є елементом. Аналітичну функцію, яка породжена елементом $g_0(z)$ позначимо $arctg\, z$, тобто

$$arctg\, z = \int\limits_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$$

Ця функція, згідно із попередньою теоремою аналітична в області $\mathcal{D}$. Для її елемента $g_0(z)$ справедливе

$$g_0(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{1}{2}\int_0^z \left(\frac{1}{1-i\zeta} + \frac{1}{1+i\zeta}\right) d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2i} ln(1+iz) - \frac{1}{2i} ln(1-iz) =$$

$$= \frac{1}{2i} ln \frac{1+iz}{1-iz}, \quad z \in K_1(0),$$

де в правій частині знаходиться головне значення логарифма, $ln\,\zeta = ln|\zeta| + i\,arg\,\zeta$. Отже, справедлива рівність

$$arctg\,z = \frac{1}{2i} Ln \frac{1+iz}{1-iz} \qquad (z \in \mathcal{D}) \qquad (3)$$

яка дає вираження аналітичної функції $arctg\,z$ через логарифмічну функцію. Із співвідношення

$$arctg\,z = \frac{1}{2i} Ln \frac{i+z^{-1}}{z^{-1}-i}$$

випливає, що функція $arctg\,z$ аналітична і в точці $z=\infty$, тобто вона аналітична в області $\overline{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{C}} \backslash \{i, -i\}$.

Аналітична функція $arctg\, z$ обернена до функції $tg\, w$, тобто $tg(arctg\, z) = z \quad (z\in\mathbb{C}, z \neq \pm i, z \neq \infty)$, оскільки $tg(arctg\, x) = x$ при $x\in\mathbb{R}$.

Якщо $f_0(z)$ – такий елемент арктангенса в точці $z = 0$, що $f_0(0) = 0$, то

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \qquad (|z| < 1).$$

Із співвідношення (*) отримуємо рівність

$$\frac{d}{dz}(arctg\, z) = \frac{1}{1+z^2},$$

яка фактично стверджує, що похідна від кожного елемента арктангенса рівна $\frac{1}{1+z^2}$.

При дійсних значеннях x, $x\in[1,-1]$, функція $arcsin\, x$ допускає представлення

$$arcsin\, x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \qquad (4)$$

Аналітично продовжимо цю функцію на комплексні значення аргумента. Функція $F(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ аналітична в області $\mathbb{C}\backslash\{1,-1\}$ і точки $z_1=-1, z_2=1$ є точками розгалуження її. Тоді, згідно із попередньою теоремою, функція

$$arcsin\, z := \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

є також аналітичною в області $\mathbb{C}\backslash\{1,-1\}$, як первісна аналітичної функції $F(z)$. Тут інтеграл береться на довільній кривій з початком $z=0$, яке не проходить через точки $-1, 1$.

Вихідний елемент $f_0(z)$ функції $arcsin\, z$ в точці $z=0$ задамо за допомогою ряду

$$f_0(z) = (arcsin\, z) := z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} z^{2n+1},$$

$$(|z|<1) \quad (5)$$

або з допомогою інтегрального представлення

$$f_0(z) = (arcsin\, z) := \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad z \in D, \quad (6)$$

де ('), інтеграл береться по довільній кривій з початком $z = 0$ носій якої включається в $\mathcal{D}$, і де вибрано ту вітку кореня, для якої $\sqrt{1-\zeta^2} = 1$, при $\zeta = 0$.

Оскільки для функції $w = arcsin\,x$, $x \in [-1, 1]$ справедливе $sin\,w = x$, то в силу останнього співвідношення має місце рівність

$$sin\,w = z, \text{ де } w = arcsin\,z \qquad (z \in \mathcal{D}).$$

Оскільки $\sin w = \frac{1}{2i}(exp\,iw - exp(-iw))$, то розв'язавши рівняння $exp(iw) - exp(-iw) = 2iz$ відносно w, дістаємо

$$arcsin\,z = -i\,Ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right). \qquad (7)$$

Ми отримали формулу вираження аналітичної функції $arcsin\,z$ через логарифм і корінь квадратний.

Виходячи із формули (7), можна переконатися в тому, що точки $z_1 = -1, z_2 = 1$ є для функції $arcsin\,z$

ізольованими точками розгалуження порядку 2, а точка $z=\infty$ є точкою розгалуження нескінченного порядку.

Аналогічно вводяться аналітичні функції $arccos\, z$, $arcsh\, z$, $arcch\, z$.

§ 9. Регулярні вітки (гілки) аналітичної функції.

Переконаємося спочатку в тому, що поняття однозначної аналітичної функції і поняття регулярної функції рівносильні. Справді, якщо $F(z)$ – регулярна функція в області $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$, то в кожній точці ζ із $\mathcal{D}$ задано елемент $f_\zeta(z)$, роль якого виконує сама функція $F(z)$. Фіксуючи точку z_0, $z_0\in\mathcal{D}$, і елемент $f_{z_0}(z)$ в цій точці, приходимо до висновку, що цей елемент очевидним чином допускає аналітичне продовження вздовж довільної кривої γ, $[\gamma]\subset\mathcal{D}$, яка сполучає точки z_0 і z, $z\in\mathcal{D}$. Тут в якості елемента в кінцевій точці z кривої Г можна взяти саму функцію $F(z)$.

Якщо функція $F(z)$ аналітична в області $\mathcal{D}$ і однозначна в цій області, то вона регулярна в $\mathcal{D}$. Справді, в околі кожної точки із $\mathcal{D}$ значення функції $F(z)$ співпадають із значеннями деякого (і причому єдиного) елемента, так що функція $F(z)$ регулярна в кожній точці області $\mathcal{D}$.

Можна довести наступне твердження, яке відіграє важливу роль в теорії многозначних аналітичних функцій.

__**Теорема про монодромію.**__ Якщо $\mathcal{D}$ – однозв'язна область, $\mathcal{D}\subset\overline{\mathbb{C}}$, і елемент $f(z)$ в точці z_0, $z_0\in\mathcal{D}$, допускає аналітичне продовження по всіх кривих Г, $[\Gamma]\subset\mathcal{D}$, з початком в точці z_0, то аналітична функція $F(z)$, яка виникає в результаті аналітичного продовження елемента $f(z)$ по всіх вказаних кривих, регулярна в області $\mathcal{D}$.

В умовах сформульованої теореми елемент $f(z)$ породжує аналітичну в області $\mathcal{D}$ функцію. Тому попередня теорема допускає наступне формулювання:

Функція, що аналітична в однозв'язній області $\mathcal{D}\subset\overline{\mathbb{C}}$, регулярна в області $\mathcal{D}$.

Справедливе також наступне твердження, яке має також назву теореми про монодромію.

__**Теорема про монодромію**__ (друге формулювання).

Нехай елемент $f(z)$, заданий в точці z_0 із області $\mathcal{D}$ (яка може бути і неоднозв'язною), допускає аналітичне продовження по кожній кривій Г, $[\Gamma]\subset\mathcal{D}$, з початком в точці z_0. Якщо криві Γ_1, Γ_2, що виходять із точки z_0, $[\Gamma_1]\subset\mathcal{D}$, $[\Gamma_2]\subset\mathcal{D}$, гомотопні в області $\mathcal{D}$, то аналітичне продовження елемента $f(z)$ вздовж кривих Γ_1, Γ_2 приводить до одного і того ж елемента.

Регулярною віткою (гілкою) аналітичної функції вважається будь-який її елемент.

Теорема про монодромію дає можливість сформулювати простий і зручний алгоритм, з допомогою якого многозначну аналітичну функцію можна «розрізати» на її регулярні вітки. Зміст цього алгоритму розкриває наступна процедура. Якщо функція $F(z)$ аналітична в скінченнозв'язній області $\mathcal{D}$, то проведемо розрізи, які перетворюють $\mathcal{D}$ в однозв'язну область $\widetilde{\mathcal{D}}$. Фіксуючи елемент $f_0(z)$ в точці z_0, $z_0\in\widetilde{\mathcal{D}}$, можемо стверджувати (згідно з теоремою про монодромію), що цей елемент породжує регулярну в області $\widetilde{\mathcal{D}}$ функцію $F_0(z)$, яка є регулярною віткою аналітичної функції $F(z)$, виділеною в області $\widetilde{\mathcal{D}}$. Різні елементи в точці z_0 породжують різні регулярні вітки аналітичної функції $F(z)$. Отже, в області $\widetilde{\mathcal{D}}$ аналітична функція $F(z)$ розпадається на регулярні вітки. Оскільки розрізи, що перетворюють $\mathcal{D}$ в однозв'язну область, можна здійснювати по-різному, то по-різному аналітичну функцію $F(z)$ можна «розрізати» на її регулярні вітки.

Покажемо застосування вказаного алгоритма.

Як відомо, функція $Ln\, z$ аналітична в області $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Здійснивши розріз комплексної площини $\mathbb{C}$ вздовж довільної жорданової кривої γ, що сполучає точки 0 і ∞, отримаємо однозв'язну область $\widetilde{\mathcal{D}}$. Оскільки елемент $f(z)$ в точці z_0 функції $Ln\, z$ допускає аналітичне продовження по будь-якій кривій Γ, [Γ]$\subset \widetilde{\mathcal{D}}$, з початком z_0 і $\widetilde{\mathcal{D}}$ – однозв'язна область то за теоремою про монодромію цей елемент породжує регулярну в області $\widetilde{\mathcal{D}}$ вітку логарифмічної функції. В області $\widetilde{\mathcal{D}}$ функція $Ln\, z$ розпадається на зчисленну сукупність регулярних віток.

Якщо $f_1(z), f_2(z)$ – дві регулярні вітки логарифма, то $f_1(z) - f_2(z) \equiv 2k\pi i,\ z \in \widetilde{\mathcal{D}}$, де k – певне ціле число.

Аналогічно, степенева функція z^α розпадається в області $\widetilde{\mathcal{D}}$ на регулярні вітки. Якщо α - ірраціональне дійсне число або $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, то степенева функція має зчисленну сукупність регулярних віток.

Якщо ж $\alpha = {}^p/_q$, де p, q – взаємно прості цілі числа, $q \geq 1$, то ця функція має q різних регулярних віток. Зокрема, функція $\sqrt[n]{z}$ розпадається в $\widetilde{\mathcal{D}}$ на n різних регулярних віток.

Якщо $f_1(z), f_2(z)$ – дві регулярні вітки степеневої функції z^α в області $\widetilde{\mathcal{D}}$, то, як відомо, $f_2(z) = f_1(z) \exp(2\pi i\alpha k)$, де k – певне ціле число.

<u>**Приклад 1.**</u> Якщо $\widetilde{\mathcal{D}}$ – є комплексна площина розрізана по спіралі $z = \frac{t}{\pi} e^{it},\ 0 \leq t < +\infty$, і $f(z)$ – регулярна вітка логарифма, виділена в області $\widetilde{\mathcal{D}}$, така, що $f(1) = 0$, то згідно з відомою формулою,

$f(z) = ln|z| + i\Delta_\Gamma \, Arg\, \zeta,$

де Γ – довільна крива, $[\Gamma] \subset \widetilde{\mathcal{D}}$, що сполучає точки 1 і z, $z \in \widetilde{\mathcal{D}}$.

Згідно із відомою формулою, функція $f(z)$ розкладається в степеневий ряд виду

$$f(z) = f(3) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (z-3)^n}{n \cdot 3^n}, \quad (|z-3| < 1)$$

де $f(3) = ln\, 3 + 2\pi i$, $ln\, 3 > 0$.

Приклад 2. В області $\mathcal{D} = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ неможливо виділити регулярні вітки функції $Ln\, z$, $\sqrt[n]{z}$ $(n > 1)$, оскільки при обході точки $z = 0$ кожен елемент таких функцій перейде в інший елемент, відмінний від попереднього.

Приклад 3. Якщо $\mathcal{D}_\alpha$ – площина із розрізом по променю $z = re^{i\alpha}$, $0 \leq r < +\infty$, де $0 < \alpha < 2\pi$, то згідно з теоремою про монодромію, функція $\sqrt{z}$ розпадається в області $\mathcal{D}_\alpha$ на дві регулярні вітки. Якщо першу із них $f_{\alpha 1}(z)$ задати умовою $f_{\alpha 1}(1) = 1$, то вона матиме вигляд

$f_{\alpha 1}(z) = \sqrt{|z|}\, exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right)$, $z \in \mathcal{D}_\alpha$, де $\varphi = \Delta_\gamma\, Arg\, \zeta$, і γ – довільна крива, $[\gamma] \subset \mathcal{D}_\alpha$, що сполучає точки 1 і z.

Друга вітка $f_{\alpha 2}(z) = -f_{\alpha 2}(z)$, $z \in \mathcal{D}_\alpha$.

§ 10. Регулярні вітки аналітичних функцій, заданих формулою.

Виявляється, що вирази вигляду $Ln\, f(z)$, $\sqrt{f(z)}$, $\left(f(z)\right)^\alpha$, де $f(z)$ – регулярна функція, взагалі кажучи,самі по собі ще не задають аналітичні функції, оскільки для цього необхідно ще вказати вихідні елементи. Формула $F(z) = Ln\, f(z)$ задає аналітичну функцію, якщо в силу властивостей логарифма, задати одне значення цього виразу в деякій точці. Формула
$F(z) = Ln\, f(z)\, , F(z_0) = w_0,$

де w_0 – одне із значень $Ln\, f(z_0)$, повністю визначає функцією $F(z)$. Те ж саме можна сказати про вирази $\sqrt{f(z)}$, $\left(f(z)\right)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. Якщо $f(z)$ – регулярна функція в однозв'язній області $\mathcal{D}$ і $f(z) \neq 0$ при $z \in \mathcal{D}$, то функції

$$F(z) = Ln\, f(z), \qquad F(z_0) = w_0, \qquad \left(exp\, w_0 = f(z_0)\right),$$

$$\Phi(z) = \sqrt{f(z)}, \qquad \Phi(z) = \widetilde{w}_0, \qquad \left(\widetilde{w}_0{}^2 = f(z_0)\right),$$

де $z_0 \in \mathcal{D}$, регулярні в області $\mathcal{D}$.

Доведення. Функція $F(z)$ аналітична в області $\mathcal{D}$, як суперпозиція двох аналітичних функцій. Згідно із теоремою про монодромію, ця функція є регулярною в області $\mathcal{D}$, однозначно задаючись співвідношеннями $exp\left(F(z)\right) = f(z)$, $F(z_0) = w_0$, та вимогою регулярності функції f. Значення цієї функції обчислюється за формулою

$$F(z) = ln|f(z)| + i\left[Im\, w_0 + \Delta_\gamma\, Arg\, f(\zeta)\right], \quad (1)$$

де γ – довільна крива, $[\gamma] \subset \mathcal{D}$, що з'єднує точки z_0 і z із $\mathcal{D}$.

Аналогічні міркування проводяться для функції $\Phi(z)$.

Розглянемо функціональні співвідношення для логарифмічної і степеневої функцій.

Якщо функції $f_1(z), f_2(z)$ регулярні і відмінні від нуля в однозв'язній області $\mathcal{D}$, то згідно з попередньою теоремою, функції

$$F_1(z) = Ln\, f_1(z), \quad F_1(z_0) = w_1,$$

$$F_2(z) = Ln\, f_2(z), \quad F_2(z_0) = w_2,$$

$$F_0(z) = Ln\big(f_1(z) \cdot f_2(z)\big), \quad F_0(z_0) = w_0.$$

де $z_0 \in \mathcal{D}$, регулярні в області $\mathcal{D}$.

Теорема 2. Якщо, вказані вище числа w_0, w_1, w_2, пов'язані рівністю $w_0 = w_1 + w_2$, то

$$F_0(z) \equiv F_1(z) + F_2(z), \quad (2)$$

де $z \in \mathcal{D}$.

Доведення. Функція $F(z) = F_1(z) + F_2(z)$, $z \in \mathcal{D}$, регулярна в області $\mathcal{D}$, причому $exp\big(F(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)\big)$, $F(z_0) = w_1 + w_2 = w_0$. Згідно з попередньою теоремою, вказані умови визначають єдину регулярну в області $\mathcal{D}$ функцію. Оскільки функція $F_0(z)$ також задовольняє всі ці умови, тобто

$$exp\big(F_0(z)\big) = f_1(z) \cdot f_2(z), \qquad F_0(z_0) = w_0,$$

то $F(z) \equiv F_0(z)$, $z \in \mathcal{D}$. Теорему доведено.

Формально рівність (2) можна записати у вигляді

$$Ln\left(f_1(z) \cdot f_2(z)\right) = Ln\, f_1(z) + Ln\, f_2(z), \qquad (3)$$

де $z \in \mathcal{D}$, точний зміст останньої рівності вказаний в теоремі 2.

Аналогічно до (3) можна довести рівності ($z \in \mathcal{D}$):

$$Ln\, \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = Ln\, f_1(z) - Ln\, f_2(z), \qquad (4.1)$$

$$\sqrt{f_1(z) \cdot f_2(z)} = \sqrt{f_1(z)} \cdot \sqrt{f_2(z)}, \qquad (4.2)$$

$$\sqrt{\frac{f_1(z)}{f_2(z)}} = \frac{\sqrt{f_1(z)}}{\sqrt{f_2(z)}}, \qquad (4.3)$$

$$\left(f_1(z) \cdot f_2(z)\right)^{\alpha} = \left(f_1(z)\right)^{\alpha} \cdot \left(f_2(z)\right)^{\alpha}. \qquad (4.4)$$

де функції $f_1(z), f_2(z)$ регулярні і відмінні від нуля в однозв'язній області $\mathcal{D}$. Точний зміст останніх чотирьох рівностей полягає в тому, що в обох сторонах їх знаходяться регулярні в $\mathcal{D}$ функції і значення лівої і правої частин співпадають в $\mathcal{D}$, якщо вони співпадають в деякій точці z_0, $z_0 \in \mathcal{D}$.

Розглянемо зокрема другу із цих рівностей. Її варто розуміти, як рівність $F_0(z) = F_1(z) \cdot F_2(z)$, $z \in \mathcal{D}$, де

$$F_0(z) = \sqrt{f_1(z) \cdot f_2(z)}, \qquad F_0(z_0) = w_0;$$

$$F_j(z) = \sqrt{f_j(z)}, \qquad F_j(z_0) = w_j \quad (j = \overline{1,2}),$$

і виконується умова $w_0 = w_1 \cdot w_2$.

Із попередніх формул (3), (4) випливають відповідні формули для приростів добутку і частки регулярних функцій.

<u>Теорема 3.</u> *Якщо, функції $f_1(z), f_2(z)$ регулярні і відмінні від нуля в області $\mathcal{D}$ (довільній) і Г – довільна крива, [Г]⊂$\mathcal{D}$, то справедливі рівності*

$$\Delta_\Gamma Arg\left(f_1(z) \cdot f_2(z)\right) = \Delta_\Gamma Arg\, f_1(z) + \Delta_\Gamma Arg\, f_2(z), \qquad (5)$$

$$\Delta_\Gamma Arg\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right) = \Delta_\Gamma Arg\, f_1(z) - \Delta_\Gamma Arg\, f_2(z). \qquad (6)$$

<u>Доведення.</u> Нехай область $\mathcal{D}$ однозв'язна і крива Г сполучає точки z_0 і z із $\mathcal{D}$ і нехай $F_j(z)$ $(j = \overline{0,2})$ – функції із теореми (2). Тоді при $z \in \mathcal{D}$ маємо

$$F_j(z) = ln|f_j(z)| + i[Im\, w_j + \Delta_\Gamma Arg\, f_j(z)], \quad (j = \overline{1,2}),$$

$$F_0(z) = ln|f_1(z) \cdot f_2(z)| + i\left[Im\, w_0 + \Delta_\Gamma\, Arg\left(f_1(z) \cdot f_2(z)\right)\right].$$

Підставляючи ці вирази в (2) і враховуючи рівність $w_0 = w_1 + w_2$, отримуємо (5). Випадок неоднозв'язної області $\mathcal{D}$ зводиться до вже розглянутого випадку. Аналогічно доводиться рівність (6).

Оскільки рівність двох аналітичних функцій – це рівність їх вихідних елементів, то формули виду (2), (3) залишаються в силі і для аналітичних функцій.

Розглянемо той простіший випадок, коли функції $f_1(z), f_2(z)$ регулярні і відмінні від нуля в області $\mathcal{D}$ (довільній). Зафіксувавши точку z_0, $z_0 \in \mathcal{D}$, можемо стверджувати, згідно з теоремою 1, що в деякому її околі U є регулярними функції

$$g_j(z) = \sqrt{f_j(z)}, \qquad g_j(z_0) = w_j \qquad (j = \overline{1,2}),$$

$$g_0(z) = \sqrt{f_1(z) \cdot f_2(z)}, \qquad g_0(z_0) = w_0.$$

Якщо числа w_j такі, що $w_0 = w_1 \cdot w_2$, то вже по доведеному

$$g_0(z) = g_1(z) \cdot g_2(z), \;\; z \in U. \qquad (7)$$

Якщо $F_j(z)$ – аналітична функція, породжена елементом $g_j(z)$, заданим в точці z_0 $(j = \overline{1,2})$, то в силу (7)

$$F_0(z) = F_1(z) \cdot F_2(z), \qquad (8)$$

де рівність розглядається в розумінні рівності аналітичних функцій. Коротко рівність (8) записують у вигляді

$$\sqrt{f_1(z) \cdot f_2(z)} = \sqrt{f_1(z)} \cdot \sqrt{f_2(z)}.$$

Такий зміст попередньої рівності, вказаний вище. Аналогічно тлумачаться інші рівності (3), (4).

§ 11. Регулярні вітки аналітичних функцій в неоднозв'язних областях. Приклади.

Нехай $f(z)$ – фіксований елемент в точці z_0, $z_0 \in \mathcal{D}$, аналітичної в області $\mathcal{D}$ (довільній) функції $F(z)$ і γ замкнута крива $[\gamma] \subset \mathcal{D}$, з початком в точці z_0. Аналітично продовживши елемент $f(z)$ вздовж кривої γ, отримаємо елемент $g(z)$ в точці z_0. Цю процедуру коротко будемо тлумачити так: при обході кривої γ

$$f(z) \to g(z).$$

<u>Теорема 1.</u> Якщо при обході по кожній кривій γ, вказаній вище, справедливе $f(z) \to f(z)$, то $f(z)$ породжує регулярну в області $\mathcal{D}$ вітку аналітичної функції $F(z)$. Іншими словами, існує регулярна в області $\mathcal{D}$ функція $F_0(z)$ така, що $F_0(z) \equiv f(z)$ в околі точки z_0.

Якщо при обході по деякій замкнутій кривій γ справедливе $f(z) \to g(z)$, де $g(z) \neq f(z)$, то аналітична функція $F(z)$ не допускає виділення регулярної в $\mathcal{D}$ вітки.

Така процедура виділення регулярних віток в загальному випадку. Стосовно аналітичних функцій $\sqrt{f(z)}$, $Ln\, f(z)$, $\left(f(z)\right)^{\alpha}$, де $f(z)$ – регулярна в деякій області $\mathcal{D}$ функція, вказану процедуру можна значно спростити, оскільки кожний елемент вказаних функцій в довільній точці повністю задається своїм значенням в цій точці.

<u>Теорема 2.</u> Нехай $f(z)$ – регулярна і відмінна від нуля в області $\mathcal{D}$ (довільній) функція і нехай $F(z) = Ln\, f(z)$ – аналітична функція, яка породжена елементом $F_0(z)$, заданим в точці z_0, $z_0 \in \mathcal{D}$. Якщо всі значення $F(z_0)$, отримані в результаті обходів по всіх замкнутих кривих γ, $[\gamma]\subset\mathcal{D}$, з початком z_0, співпадають із $F_0(z_0)$, то аналітична функція $F(z)$ регулярна в області $\mathcal{D}$. Те ж саме можна стверджувати стосовно аналітичної функції $(f(z))^{\alpha}$.

<u>Доведення.</u> Якщо γ – довільна замкнута крива, $[\gamma]\subset\mathcal{D}$, з початком z_0, то $F_0(z) \to F_1(z)$ при обході вздовж γ, де $F_1(z)$ – елемент в точці z_0. Оскільки $F_1(z_0) = F_0(z_0)$, згідно з умовами теореми, і кожний елемент функції $F(z) = Ln\, f(z)$ в точці z_0 однозначно визначається заданням свого значення в цій точці, то $F_1(z) \equiv F_0(z)$. В силу теореми 1 елемент $F_0(z)$ породжує регулярну в області $\mathcal{D}$ функцію. Аналогічно міркуємо при розгляді аналітичної функції $(f(z))^{\alpha}$. Теорему доведено.

Проілюструємо розглянуті теоретичні положення рядом прикладів.

<u>Приклад 1.</u> Переконаємося в тому, що аналітична функція $F(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ розпадається в області

$\mathcal{D}_0 := \mathbb{C}\backslash(]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[)$ на дві регулярні вітки. Справді, оскільки $z^2-1 \neq 0$ в $\mathcal{D}_0$, то функція $F(z)$ аналітична в $\mathcal{D}_0$, як суперпозиція двох аналітичних функцій. Оскільки $\mathcal{D}_0$ – однозв'язна область, то регулярна вітка функції $F(z)$ повністю визначається заданням її значення в деякій точці z_0,

$z_0 \in \mathcal{D}_0$:

$F_0(z) = \sqrt{z^2-1}, \qquad F_0(z_0) = w_0,$

де ${w_0}^2 = {z_0}^2 - 1$ (тобто w_0 – одне із значень $\sqrt{{z_0}^2-1}$). Регулярних в $\mathcal{D}_0$ віток функції $F(z)$ рівно дві. Друга вітка $F_1(z)$ задається тотожністю $F_1(z) \equiv -F(z)$, ($z \in \mathcal{D}_0$).

Міркуючи аналогічно, переконуємося в тому, що аналітична функція $G(z) = Ln\,\frac{z-1}{z+1}$ також розпадається в області $\mathcal{D}_0$ на регулярні вітки. Таких віток зчислена сукупність і кожна вітка однозначно визначається заданням свого значення в деякій точці z_0 оз $\mathcal{D}_0$. Зокрема всі вітки $G_k(z)$ функції $G(z)$ в області $\mathcal{D}_0$ можна описати наступними формулами:

$$G_0(z) = Ln\,\frac{z-1}{z+1}, \qquad G_0(z) = \pi i$$

$$G_k(z) = G_0(z) + 2k\pi i, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

де $z \in \mathcal{D}_0$.

<u>Приклад 2.</u> Покажемо, що аналітична функція $F(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ в неоднозв'язній області $\mathcal{D} := \mathbb{C} \backslash [-1, 1]$ розпадається також на дві регулярні вітки. Справді, якщо $F_0(z)$ – вихідний елемент цієї функції заданий в точці z_0, $z_0 \in \mathcal{D}_0$, і γ – замкнута жорданова крива, $[\gamma] \subset \mathcal{D}$, з початком z_0, то значення $F(z_0)$, яке отримується при обході вздовж γ, рівне

$$F(z_0) = F_0(z_0) \cdot e^{\frac{i\varphi}{2}},$$

де $\varphi = \Delta_\Gamma\, Arg\,(z^2 - 1)$. Оскільки $z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$, то $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$,

де $\varphi_1 = \Delta_\Gamma\, Arg\,(z - 1)$, $\varphi_2 = \Delta_\Gamma\, Arg\,(z + 1)$.

Якщо відрізок $[-1, 1]$ не знаходиться у внутрішності кривої γ, то $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, так що $F(z_0) = F_0(z_0)$.

Якщо відрізок $[-1,1]$ знаходиться у внутрішності кривої γ і ця крива позитивно зорієнтована, то $\varphi_1 = \varphi_2 = 2\pi$, так що $\varphi = 4\pi$ і знову $F(z_0) = F_0(z_0)$. При негативній орієнтації кривої γ дістанемо $\varphi = -4\pi$ і тому знову $F(z_0) = F_0(z_0)$.

Отже, доведемо, що функція

$$f_0(z) = \sqrt{z^2 - 1},\ z \in \mathcal{D};\ f_0(z_0) = w_0, \qquad (1)$$

де w_0 – одне із значень кореня $\sqrt{z^2 - 1}$, регулярна в області $\mathcal{D}$. Аналогічно, функція

$$f_1(z) = \sqrt{z^2 - 1},\ z \in \mathcal{D};\ f_1(z_0) = -w_0,$$

також регулярна в $\mathcal{D}$ і $f_1(z) \equiv -f_0(z)$, $z \in \mathcal{D}$, так що функція $\sqrt{z^2 - 1}$ також розпадається в області $\mathcal{D}$ на дві регулярні вітки.

Виявляється, що можна і іншим способом переконатися в тому, що функція $F(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ розпадається в області $\mathcal{D}$ на дві регулярні вітки.

Запишемо функцію $F(z)$ у вигляді

$$F(z) = z \cdot G(z), \quad G(z) = \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}.$$

Функція $G(z)$ задана умовою $G_0(z_0) = {F_0(z_0)}/{z_0}$, де $F(z_0), G(z_0)$ – вихідні елементи функцій $F(z), G(z)$ в точці z_0, $z_0 \in \mathcal{D}$. Функція z регулярна в області $\mathcal{D}$. Функція $G(z)$ аналітична в однозв'язній області $\widetilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}} \backslash [-1, 1]$. За теоремою про монодромію функція $G(z)$ регулярна в області $\widetilde{\mathcal{D}}$ і, отже, в області $\mathcal{D}$. Таким чином, функція

$$F(z) = z \cdot G(z), \quad z \in \mathcal{D}; \quad F(z_0) = F_0(z_0),$$

регулярна в області $\mathcal{D}$.

Відмітимо, що значення регулярної вітки (1) функції $F(z) = \sqrt{z^2 - 1}$, виділеної в області $\mathcal{D} := \mathbb{C} \backslash [-1, 1]$ можна обчислювати за формулою

$$f_0(z) = \left|\sqrt{z^2 - 1}\right| exp[(\varphi_1 + \varphi_2)i],$$

де $\varphi_1 = \Delta_\Gamma\, Arg\,(z - 1), \varphi_2 = \Delta_\Gamma\, Arg\,(z + 1)$ і Γ – довільна крива, $[\Gamma] \subset \mathcal{D}$, що з'єднує точки z_0 і z із $\mathcal{D}$.

Приклад 3. Покажемо, що при дійсних $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, аналітична функція $F(z) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha}$ розпадається в області $\mathcal{D} := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ на регулярні вітки. Справді, якщо $F_0(z)$ – вихідний елемент функції $F(z)$ заданий в точці z_0, $z_0 \in \mathcal{D}$, і γ – замкнута жорданова крива, $[\gamma] \subset \mathcal{D}$, з початком z_0, $z_0 \in \mathcal{D}$, то значення $F(z_0)$, яке отримане в результаті обходу по кривій γ, рівне

$$F(z_0) = F_0(z_0)\, exp(i\alpha\varphi)$$

де $\varphi = \Delta_\gamma\, Arg\, \frac{1-z}{z+1}$.

Як і вище, легко показуємо, що $\varphi = 0$, так що $F(z_0) = F_0(z_0)$ і, отже, функція

$$f(z) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\alpha}, z \in \mathcal{D}; \quad f(z_0) = F_0(z_0),$$

регулярна в області $\mathcal{D}$. Дві різні регулярні вітки функції $F(z)$ відрізняються множником $exp(i2\pi\alpha k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 4. Покажемо, що аналітична функція

$F(z) = \sqrt[n]{P_n(z)}$, де $P_n(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$, $a_n \neq 0$, є алгебраїчний многочлен степеня n з попарно різними його нулями $z_1, z_2, \dots, z_n$ такими, що $|z_k| < R$ $(k = \overline{1, n})$, розпадається на n регулярних віток в області $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}=\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$.

Справді, якщо $F_0(z)$ є елемент функції $F(z)$, заданий в точці z_0, $z_0 \in \mathcal{D}$, і γ – замкнута жорданова крива, $[\gamma] \subset \mathcal{D}$, з початком z_0, то значення $F(z_0)$, яке отримане в результаті обходу по кривій γ, рівне

$$F(z_0) = F_0(z_0)\, exp\left(\frac{i\varphi}{n}\right), \qquad \varphi = \Delta_\gamma\, Arg\, P_n(z),$$

де $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n,\ \varphi_j = \Delta_\gamma\, Arg\left(z - z_j\right), (j = \overline{1, n})$.

Якщо внутрішність кривої γ включається в область $\mathcal{D}$, то всі $\varphi_j = 0$ і $F(z_0) = F_0(z_0)$. Якщо круг $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ включається у внутрішність кривої γ, і крива γ зорієнтована проти руху годинникової стрілки (позитивно), то всі $\varphi_j = 2\pi$, так що $\frac{\varphi}{n} = 2\pi$ і знову $F(z_0) = F_0(z_0)$. Тому згідно з теоремою 2 функція $F(z)$ розпадається в області $\mathcal{D}$ на регулярні вітки. Якщо $f_0(z)$ – одна із таких віток, то всі інші регулярні вітки набувають вигляду

$$f_k(z) = f_0(z)\, exp\left(\frac{i2\pi k}{n}\right), z \in \mathcal{D}; (k = 1,2, \dots , n-1).$$

Поставлене вище завдання можна розв'язати і іншим способом. Записавши функцію $F(z)$ у вигляді

$$F(z) = z \cdot G(z), G(z) = \sqrt[n]{a\left(1-\frac{z_1}{z}\right)\left(1-\frac{z_2}{z}\right) \dots \left(1-\frac{z_n}{z}\right)},$$

де $z_0 \cdot G(z_0) = F_0(z_0)$, можемо стверджувати, що функція $G(z)$ аналітична в однозв'язній області $\widetilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \{\infty\}$. За теоремою про монодромію функція $G(z)$ регулярна в області $\widetilde{\mathcal{D}}$ і, внаслідок $\widetilde{\mathcal{D}} \supseteq \mathcal{D}$, вона регулярна в $\mathcal{D}$.

Література

1. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982. – 487 с.
2. Евграфов М. А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1968. – 471 с.
3. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ.ч. 1. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Навчальне видання

Микола Євгенович Коренков

Павло Йосипович Миронюк

Юрій Іліодорович Харкевич

Ірина Петрівна Головенко

Многозначні аналітичні функції (спецкурс)

Редактор – **Л. І. Філозоф**