А.М.Падалко, Н. Й. Падалко, Ю.І. Харкевич

Диференціальні рівняння

Луцьк 2012

ББК 22.18я73

УДК 519.8

П-13

Рекомендовано до друку вченою Радою Волинського національного університету імені Лесі Українки (Протокол № від . .2012)

Рецензенти:

Дутчак Б. І.,зав.каф. вищої математики Луцького національного технічного університету, кандидат технічних. наук, доцент.

Ковальчук І.Р., декан математичного факультету Волинського національного університету імені Лесі Українки, кандидат .фіз.- мат. наук, доцент.

А.**М. Падалко, Н. Й. Падалко**

Диференціальні рівняння**:** Навчальний посібник.-Луцьк: ВНУ імені Лесі Українки, 2012.- с.

У методичній розробці розкрито основні поняття і методологічні принципи теорії інтегральних рівнянь.

Для студентів вищих навчальних закладів математичного та фізичного факультетів.

Редакційно-видавничий відділ „Вежа”

Волинського національного університету

імені Лесі Українки

ISBN 978-966-7597-70-2

ЗМІСТ

ВСТУП

Диференціальні та інтегральні рівняння, методиїхдослідження широко використовуються в різноманітнихгалузяхсучасної науки і техніки. Тому теорія диференціальних та інтегральних рівнянь як навчальна дисципліна посідає чільне місце в системі підготовки фахівців спеціальностей ,,Математика", ,,Фізика" та ,,Інформатика".

Пропонованийпосібник сформовано у відповідності до програм, затвердженихматематичним факультетом Волинського національного університету імені Лесі Українки, а також на основікурсівлекцій, якіавторивпродовжбагатьохроків читали на фізичному та математичному факультетах Волинського національного університету імені Лесі Українки.

Методичний посібник присвячений висвітленню основних понять і розкриттю методологічних принципів теорії диференціальних рівнянь, покликаний сформувати у студентів цілісне уявлення про предмет і методи теорії диференціальних рівнянь; допомогти опанувати основні поняття і методи інтегрування таких рівнянь та виробити вміння застосовувати теорію диференціальних рівнянь в практичних задачах.

Мета посібника – допомогти студентам засвоїти математичний апарат, необхідний для дослідження диференціальних рівнянь, підготувати їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Головна увага акцентується на висвітленні алгоритмічного аспекту при ознайомленні з основними поняттями,твердженнямита методами теоріїдиференціальних рівнянь. Вагоме місце в посібникузаймає значна кількість розв'язаних задач, які ілюструють теорію та кожен з методів розв'язання.

Для контролю і самоконтролю знань в посібнику передбачені завдання до самостійної та індивідуальної роботи.

Розділ 1. Диференціальні рівняння першого порядку

1.1. Рівняння з відокремлюваними змінними

Якщо в диференціальному рівнянні

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ можна подати у вигляді добутку двох множників, з яких один залежить тільки від y, а другий – тільки від x, то рівняння матиме вигляд

$$f_1(x)F_1(y)dx+f_2(x)F_2(y)dy=0, \qquad (1)$$

яке звуть *рівнянням з відокремлюваними змінними*. Помноживши його обидві частини на $\mu(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{1}{F_1(y)f_2(x)}$, дістанемо

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{F_2(y)}{F_1(y)}dy=0 \qquad (2)$$

Його загальним інтегралом буде $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{F_2(y)}{F_1(y)}dy=C.$

Поділивши на $F_1(y)f_2(x)$, ми відкидаємо розв'язки рівнянь $F_1(y)=0, f_2(x)=0$; через це втрачаємо деякі розв'язки рівняння(1).

Приклад. Знайтизагальнийрозв'зокрівняння

$$x(y^2+1)dx+y(x^2-1)dy=0.$$

Розв'язання.

$$\frac{xdx}{x^2-1}+\frac{ydy}{y^2+1}=0;$$

$$\frac{ydy}{y^2+1}=-\frac{xdx}{x^2-1}.$$

Інтегруємоотриманурівність:

$$\int\frac{ydy}{y^2+1}=-\int\frac{xdx}{x^2-1}+C,$$

$$\frac{1}{2}ln|y^2+1|=-\frac{1}{2}ln|x^2-1|+\frac{1}{2}lnC,$$

$$ln|y^2+1| = ln\left|\frac{C}{x^2-1}\right|.$$

У цьому прикладі доцільно було довільну сталу С замінити на $\frac{1}{2}lnC$.

Далі отримуємо $y^2+1=\frac{C}{x^2-1}$, звідки загальний розв’язокнабере вигляду

$$y = \pm\sqrt{\frac{C}{x^2-1}-1}.$$

Вправи

У кожномуваріантізнайтизагальний інтегралдиференціальногорівняння:

1.1. $y^2dx - 2xy\,dy = 4y\,dy - dx.$
1.2. $\sqrt{9-y^2}dx - 4dy = x^2dy.$
1.3. $ydy + \sqrt{y^2+4}dx = 2x^2ydy.$
1.4. $y^2dx - x\,dy = 2\,dy - 4\,dx.$
1.5. $x^2dy = 2x\sqrt{y^2+4}dx - dy.$
1.6. $\sqrt{9-y^2}dx - 2\,dy = x\,dy.$
1.7. $2xy^2dx - dy = x^2dy - 8xdx.$
1.8. $dy = \sqrt{y^2+4}dx - x\,dy.$
1.9. $2x\sqrt{4-y^2}dx - dy = x^2dy.$
1.10. $x^2\,dy = \sqrt{y^2+1}dx + 8y\,dy.$
1.11. $y^2dx - 2ydy = 2xydy - 4\,dx.$
1.12. $9\,dy = \sqrt{4-y^2}dx - x^2dy.$
1.13. $2x^2ydy = \sqrt{y^2+1}dx + 8ydy.$
1.14. $9\,dx - x\,dy = dy - y^2dx.$
1.15. $2x\sqrt{y^2+1}dx = x^2\,dy = 4\,dy.$
1.16. $dy = \sqrt{4-y^2}dx - x\,dy.$
1.17. $18xdx - x^2dy = d\,dy - 2xy^2dx.$
1.18. $\sqrt{y^2+1}dx - 2\,dy = x\,dy.$
1.19. $4\,dy = 2x\sqrt{9-y^2}dx - x^2dy.$
1.20. $\sqrt{y^2+4}dx - 9\,dy = x^2dy.$
1.21. $dy - 2xy\,dx = 4x\,dx - x^2dy.$

1.22. $4\,dx = \sqrt{9-x^2}dy - y^2dx.$
1.23. $2xy^2dx = \sqrt{x^2+4}dy + xdx.$
1.24. $4\,dy - y\,dx = 2\,dx - x^2dy.$
1.25. $dx = 2y\sqrt{x^2+4}dy - y^2dx.$
1.26. $2\,dx = \sqrt{9-x^2}dy - y\,dx.$
1.27. $8ydy - dx = y^2dx - 2x^2ydy.$
1.28. $\sqrt{x^2+4}dy - dx = y\,dx.$
1.29. $dx = 2y\sqrt{4-x^2}dy - y^2dx.$
1.30. $-y^2dx + \sqrt{x^2+1}dy = 4\,dx.$

1.2.Однорідні рівняння та звідні до них

Диференціальне рівняння

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$(3)

називається однорідним, якщо $M(x,y)$ та $N(x,y)$однорідні функції одного й того ж виміру. Функція $f(x,y)$називається однорідною з виміром m (m-будь-яке дійсне число), якщо вона справджує тотожність (при будь-якому t):

$f(tx,ty)\equiv t^m f(x,y).$

Заміною $y=ux$(або $x=ty$), $dy=xdu+udx$однорідне рівняння (3) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

До однорідних рівнянь зводяться ще так звані узагальнено-однорідні рівняння. Рівняння типу (3) називається *узагальнено однорідним*, якщо прийнявши в ньому y з виміром α,а x з виміром 1(тоді dy буде мати вимір$\alpha - 1$, а dx - 0), можна дібрати число α так, щоб рівняння стало однорідним. Заміною $y=z^\alpha$такірівняннязводяться до однорідних.

Приклад. Розв'язати рівняння $xy' = y + tg\,\frac{y}{x}$.

Розв'язання. Шляхом ділення рівняння на змінну x отримуємо однорідне диференціальне рівняння (похідна залежить від відношення $\frac{y}{x}$):

$$y' = \frac{y}{x} + tg\,\frac{y}{x}.$$

Робимо заміну: $y = u \cdot x;\quad y' = u'x;\quad u = \frac{y}{x}$

Підставляємоцізначенняузаданерівняннявровз’язуємоотриманедиференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'x + u = tgu; x\frac{du}{dx} = tgu;$$

$\int \frac{dx}{x} = \int ctgudu + C; \ln|x| = \ln|sinu| + \ln C;$

$x = Csinu; x = Csin\frac{y}{x};$

Отримали загальний інтеграл рівняння

Звідси$sin\frac{y}{x} = \frac{x}{C} = C_1x; y = xarcsin(C_1x)$- загальний розв’зок.

Вправи

У кожномуваріантізнайтизагальний інтегралдиференціальногорівняння:

2.1. $(2x - y)dy = (4x + 2y)dx.$
2.2. $(x^2 + 2xy + 3y^2)dx = 2x(x + y)dy.$
2.3. $(6y^3 + 2x^2y)dx = (5xy^2 + x^3)dy.$
2.4. $2xy' = 2y + x\, tg\frac{2y}{x}.$
2.5. $(x + 3y)dx = (3x - y)dy.$
2.6. $(4x^2 + 4xy + 3y^2)dx = (4x^2 + 2xy)dy.$
2.7. $(6y^3 + 4x^2y)dx = (5xy^2 + 2x^3)dy.$
2.8. $xy' = y + (2x + y)(\ln(2x + y) - \ln x).$
2.9. $(6x - y)dy = (9x + 6y)dx.$
2.10. $(2x^2 + 4xy)dy = (x^2 + 2xy + 5y^2)dx.$
2.11. $6y(x^2 + y^2)dx = (5xy^2 + 3x^3)dy.$
2.12. $xy' = \sqrt{9x^2 - y^2} + y.$
2.13. $(5x - y)dy = (x + 5y)dx.$
2.14. $(4x^2 + 5xy + 3y^2)dx = (6x^2 + 2xy)dy.$
2.15. $2x^2y' = y^2 + 5xy + 2x^2.$
2.16. $(4x + 4y)dx = (4x - y)dy.$
2.17. $(3x^2 + 2xy)dy = (x^2 + 3xy + 3y^2)dx.$
2.18. $x(3y^2 + x^2)dy = (4y^3 + 2x^2y)dx.$
2.19. $3xy' = 3y + x\, tg\frac{3y}{x}.$
2.20. $(6x - y)dy = (x + 6y)dx.$
2.21. $(4x^2 + 4xy + 5y^2)dx = 4x(x + y)dy.$
2.22. $x(3y^2 + 2x^2)dy = 4y(y^2 + x^2)dx.$

2.23. $xy' = y + (x + 2y)(\ln(x + 2y) - \ln x)$.
2.24. $(9x + 3y)dx = (3x - y)dy$.
2.25. $(3x^2 + 4xy)dy = (x^2 + 3xy + 5y^2)dx$.
2.26. $3x(y^2 + x^2)dy = (4y^3 + 6x^2y)dx$.
2.27. $xy' = \sqrt{4x^2 - y^2} + y$.
2.28. $(4x - y)dy = (x + 4y)dx$.
2.29. $(4x^2 + 6xy + 5y^2)dx = (6x^2 + 4xy)dy$.
2.30. $4x^2y' = y^2 + 9xy + 6x^2$.

У кожномуваріантізнайтизагальний інтегралдиференціальногорівняння(вказівка: зробити замінуневідомоїфункції***y*(*x*)=*xz*(*x*)**):

2.31. $(x^2 + 4)(xdy - ydx) = x\sqrt{y^2 + x^2}dx$.
2.32. $(1 + x)(xdy - ydx) = x\sqrt{y^2 + 4x^3}dx$.
2.33. $(9 + x^2)(xdy - ydx) = x\sqrt{4x^2 - y^2}dx$.
2.34. $x(2x + y)dx = \sqrt{9 - x^2}(xdy - ydx)$.
2.35. $x\sqrt{9x^2 - y^2}dx = (4 + x^2)(xdy - ydx)$.
2.36. $x\sqrt{y^2 + 4x^2}dx = (x^2 + 9)(xdy - ydx)$.
2.37. $(1 + x)(xdy - ydx) = x\sqrt{4x^2 - y^2}dx$.
2.38. $2x^2(4x^2 - y^2)dx = (x^2 + 1)(xdy - ydx)$.
2.39. $2x^2\sqrt{y^2 + x^2}dx = (4 + x^2)(xdy - ydx)$.
2.40. $(9x^2 + y^2)dx = (x + 1)(x\,dy - y\,dx)$
2.41. $(4 + x^2)(x\,dy - y\,dx) = 2x^2\sqrt{9x^2 - y^2}$.
2.42. $2x(y^2 + 4x^2)dx = (x^2 + 1)(x\,dy - y\,dx)$.
2.43. $x^2\sqrt{y^2 + 4x^2}dx = y(2x^2 - 1)(x\,dy - y\,dx)$.
2.44. $(4x^2 + y^2)dx = \sqrt{9 - x^2}(x\,dy - y\,dx)$.
2.45. $x(y^2 + 4x^2)dx = 2y(x + 1)(x\,dy - y\,dx)$.
2.46. $(4 + x^2)(x\,dy - y\,dx) = x(2x + y)dx$.
2.47. $(1 + x^2)(x\,dy - y\,dx) = 2x^2(2x + y)dx$.
2.48. $2y(x^2 - 4)(xdy - ydx) = x^2\sqrt{y^2 + x^2}dx$.
2.49. $x(x^2 + y^2)dx = 2y\sqrt{x^2 + 4}(x\,dy - y\,dx)$.
2.50. $\sqrt{x^2 + 1}(x\,dy - y\,dx) = (4x^2 + y^2)dx$.
2.51. $2x(x^2 + y^2)dx = (4 + x^2)(x\,dy - y\,dx)$.
2.52. $(1 + x^2)(x\,dy - y\,dx) = 2x^2\sqrt{y^2 + 4x^2}dx$.
2.53. $x\sqrt{y^2 + x^2}dx = (x + 2)(x\,dy - y\,dx)$.

2.54. $x(x^2+y^2)dx = 2y\sqrt{4-x^2}(xdy-ydx)$.

2.55. $x(x^2+y^2)dx = 2y(x+2)(x\,dy-y\,dx)$.

2.56. $2y(4+x^2)(x\,dy-y\,dx) = x(x^2+y^2)$.

2.57. $x\sqrt{9x^2-y^2}dx = (x+2)(x\,dy-y\,dx)$.

2.58. $(y^2+4x^2)dx = (x+2)(xdy-ydx)$.

2.59. $\sqrt{x^2+4}(x\,dy-y\,dx) = x(x+y)dx$.

2.60. $x(2y^2-x^2)dx = \sqrt{x^2+4}(x\,dy-y\,dx)$.

1.3.Лінійні рівняння та рівняння, що зводяться до них

Диференціальне рівняння першого порядку називається *лінійним*, якщо шукана функція та її похідна містяться в рівнянні в першому степені.

Його канонічна форма

$$\frac{dy}{dx}+P(x)=Q(x)$$

Існує кілька способів розв’язання цього рівняння. Найчастіше вживають спосіб *варіації довільної сталої* чи *метод функції Ейлера*.

Приклад. Проінтегрувати рівняння$y''+y=x$

Розв’язання. Загальним розв’язком$y_0=y_0(x)$відповідного однорідного рівняння є $y_0=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)$.

Нехай тепер $C_1=C_1(x), C_2=C_2(x)$.З системи

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos(x)+C_2'(x)\sin(x)=0, \\ -C_1'(x)\sin(x)+C_2'(x)\cos(x)=x. \end{cases}$$

Знаходимо $C_1'(x)=-xsin(x), C_2'=xcos(x),$ а отже, $C_1(x)=xcosx-sinx+C_1, C_2(x)=xsinx+\cos(x)+C_2,$

$$y=(xcos(x)-\sin(x)+C_1)\cos(x)+(xsin(x)+\cos(x)+C_2)\sin(x) =>$$

$$y=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)+x$$

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$

називається рівняння Бернуллі. Заміною $=y^{n-1}$ воно зводиться до лінійного рівняння.

1. Поділимо ліву і праву частини на y^n

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)}{y^{n-1}} = Q(x).$$

2. Зробимо заміну

$$w = \frac{1}{y^{n-1}}$$

$$w' = \frac{(1-n)}{y^n} y'$$

3. Розв'язуємо диференціальне рівняння

$$\frac{w'}{1-n} + P(x)w = Q(x)$$

Його можна розв'язати за допомогою інтегровного множника

$$M(x) = e^{(1-n)\int P(x)dx}.$$

Приклад.

$$y' - \frac{2y}{x} = -x^2 y^2$$

Розв'язання.

Поділимо на y^2

$$y' y^{-2} - \frac{2}{x} y^{-1} = -x^2$$

Заміна змінних

$$w = \frac{1}{y} w' = \frac{-y'}{y^2}.$$

$$w' + \frac{2}{x} w = x^2$$

$$M(x) = e^{2\int \frac{1}{x}dx} = x^2.$$

Помножимо на $M(x)$,

$$w' x^2 + 2xw = x^4,$$

$$\int (wx^2)' dx = \int x^4 dx$$

$$wx^2 = \frac{1}{5} x^5 + C$$

$$\frac{1}{y} x^2 = \frac{1}{5} x^5 + C$$

Результат

$$y = \frac{x^2}{\frac{1}{5} x^5 + C}$$

Вправи

У кожномуваріантізнайтирозв'язокзадачізпочатковою умовою:

3.1. $y' - \frac{1}{x} y = xe^x, \quad y(1) = e.$

3.2. $y' = \operatorname{ctg} x \cdot y = \sin x \cdot \cos x\,,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

3.3. $y' - \frac{4}{x} y = x^4 \cos x\,,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^4}{16}.$

3.4. $y' - \frac{1}{x \ln x} y = \frac{\ln x}{x},\ y(e) = 0.$

3.5. $y' - \frac{1}{2\sqrt{9-x^2} \arcsin\frac{x}{3}} y = \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}, y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$

3.6. $y' - \frac{1}{x} y = 2xe^{2x},\ y(1) = e^2.$

3.7. $y' - 3\operatorname{tg} x \cdot y = 3\operatorname{tg}^2 x,\ \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

3.8. $y' - \frac{3}{x} y = x^3 \cos x\,,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8}.$

3.9. $y' - \frac{1}{x \ln x} y = \frac{2\ln^2 x}{x},\ \ y(e) = 0.$

3.10. $y' - \frac{1}{2\sqrt{16-x^2 \arcsin\frac{x}{4}}} y = \frac{1}{2\sqrt{16-x^2} \arcsin\frac{x}{4}} y = \frac{1}{2\sqrt{16-x^2}},\ \ y(2) = \frac{\pi}{4}.$

3.11. $y' - \frac{1}{x} y = 3xe^{3x},\ \ y(1) = 1.$

3.12. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 2\sin^2 x \cdot \cos x\ ,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

3.13. $y' - \frac{1}{x} y = x,\ y(1) = 1.$

3.14. $y' - \frac{1}{x \ln x} y,\ \ y(1) = 1.$

3.15. $y' - \frac{1}{2(1+x^2)\operatorname{arctg} x} y = \frac{1}{2(1+x^2)},\ \ y(1) = \frac{\pi}{4}.$

3.16. $y' - \frac{1}{x} y = x^2 e^x,\ y(1) = e.$

3.17. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 3\sin^3 x \cdot \cos x\,,\ \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

3.18. $y' - \frac{2}{x} y = x^2 \cos x\,,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$

3.19. $y' - \frac{1}{x \ln x} y = \frac{4\ln^2 x}{x},\ y(e) = 0.$

3.20. $y' - \frac{1}{(4+x^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{2}} y = \frac{1}{4+x^2},\ \ y(2) = \frac{\pi}{4}.$

3.21. $y' - \frac{1}{x} y = 2x^2 e^{2x},\ \ y(1) = e^2.$

3.22. $y' - 2\operatorname{tg} x \cdot y = 2\operatorname{tg} x,\ \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

3.23. $y' - \frac{1}{x} y = x \cos x,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ .$

3.24. $y' - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2} \arcsin x} y = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},\ \ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$

3.25. $y' - \frac{3}{2(9+x^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{3}} y = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, \;\; y(3) = \frac{\pi}{4}.$

3.26. $y' - \frac{1}{x} y = 3x^2 x^{3x}, \;\; y(1) = e^x.$

3.27. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 4\sin^4 x \cdot \cos x, \;\; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

3.28. $y' - \frac{1}{x} y = 2x^2, \;\; y(1) = 1.$

3.29. $y' - \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}} y = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}, \;\; y(1) = \frac{\pi}{3}.$

3.30. $y' - \frac{2}{(16+x^2)\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}} y = \frac{2}{16+x^2}, \;\; y(4) = \frac{\pi}{4}.$

У кожномуваріантізнайтизагальний розв'язокдиференціальногорівнянняБернуллі:

3.31. $y' - y\operatorname{tg} x = y^{-2}\operatorname{tg}^2 x.$

3.32. $xy' - y = x^3 e^{2x} y^{-1}.$

3.33. $y' \operatorname{tg} x - y = y^{-1}\sin^4 x.$

3.34. $xy' - 4y = x^{-3} y \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x.$

3.35. $y' x \ln x - y = y^{-1}\ln^4 x.$

3.36. $y' - 2y\operatorname{tg} x = 2y^{-2}\operatorname{tg}^5 x.$

3.37. $xy' - y = 2x^3 e^{4x} y^{-1}.$

3.38. $y' - 3y\operatorname{tg} x = 3y^3\operatorname{ctg}^7 x.$

3.39. $xy' - 3y = x^{-2} y^2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x.$

3.40. $y' x \ln x - y = 2y^{-1}\ln^6 x.$

3.41. $y' - 3y\operatorname{tg} x = 3y^{-2}\operatorname{tg}^8 x.$

3.42. $xy' - y = 3x^3 e^{6x} y^{-1}.$

3.43. $y'\operatorname{tg} x - y = 2y^{-1}\sin^6 x.$

3.44. $xy' - y = x^6 y^{-2}.$

3.45. $y' x \ln x - y = 3y^{-1}\ln^8 x.$

3.46. $y' - 5y\operatorname{tg} x = 5y^3\operatorname{ctg}^{11} x.$

3.47. $xy' - y = x^5 e^{2x} y^{-1}.$

3.48. $y'\operatorname{tg} x - y = 3y^{-1}\sin^8 x.$

3.49. $xy' - 2y = x^{-1} y^2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x.$

3.50. $y' x \ln x - y = 4y^{-1}\ln^{10} x.$

3.51. $y' - 4y\operatorname{tg} x = 4y^2\operatorname{ctg}^5 x.$

3.52. $xy' - y = 2x^5 e^{4x} y^{-1}.$

3.53. $y' - 2y\operatorname{tg} x = 2y^3\operatorname{ctg}^5 x.$

3.54. $xy' - y = y^2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x.$

3.55. $y' x \ln x - y = 5y^2\ln^{-6} x.$

3.56. $y' - y\operatorname{tg} x - y = 4y^{-1}\sin^{10} x.$

3.57. $xy' - y = 3x^5 e^{6x} y^{-1}$.

3.58. $y' \operatorname{tg} x - y = 4y^{-1} \sin^{10} x$.

3.59. $xy' - y = 2x^9 y^{-2}$.

3.60. $y' x \ln x - y = 6y^2 \ln^{-7} x$.

1.4.Рівняння в повних диференціалах

Якщо ліва частина рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (4.1)$$

є повний диференціал якоїсь функції $U(x,y)$, тобто

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy \equiv M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

то рівняння (4.1)називається *рівнянням у повних диференціалах.*

Воно буде таким тоді и тільки тоді, коли $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Якщоця умова виконана, функцію $U(x,y)$, як це видно з наведеного далі прикладу, знайти дуже просто.

Приклад. Проінтегрувати диференціальне рівняння

$(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2 y)dy = 0$.

Розв'язання.Маємо $\frac{\partial M}{\partial y} = -6xy$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -6xy$. Отже, згадана вище умова виконана. Функцію $U(x,y)$ шукаємо серед функцій $U(x,y) = \int (x^3 - 3xy^2)dx + \varphi(y) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \varphi(y)$,де $\varphi(y)$ – довільна диференційовна функція змінної y. Її потрібно дібрати так, щоб виконувалась рівність

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y^3 - 3x^2 y.$$

Через те що

$$U(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \varphi(y),$$

матимемо:

$$-3x^2 y + \varphi'(y) \equiv y^3 - 3x^2 y.$$

Звідси $\varphi'(y) \equiv y^3$, $\varphi(y) \equiv \frac{y^4}{4} + C_1$, і, отже,

$$U(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} + C_1.$$

Загальний інтеграл рівняння буде $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = C$.

(Знайдену функцію $U(x,y)$ прирівнюємо довільній сталій).

Вправи

У кожномуваріантізнайтизагальнийінтегралдиференціальногорівняння:

4.1. $(3x^2 + 2xy^6)dx + (3y^2 + 6x^2y^5)dy = 0$.

4.2. $(3x^2 + y^2 + 3x^2y^5)dx + (2xy + 5x^3y^4)dy = 0$.

4.3. $(2xy + y^2 + 4x^3y^4)dx + (x^2 + 2xy + 4x^4y^3)dy = 0.$
4.4. $(y^2 + 5x^4y^3)dx + (2xy + 3y^2 + 3x^5y^2)dy = 0.$
4.5. $(2xy + 6x^5y^2)dx + (x^2 + 3y^2 + 2x^6y)dy = 0.$
4.6. $(3x^2 + y^2 + 2xy^6)dx + (2xy + 6x^2y^5)dy = 0.$
4.7. $(3x^2 + 2xy + 3x^2y^5)dx + (x^2 + 5x^3y^4)dy = 0.$
4.8. $(2xy + 4x^3y^4)dx + (x^2 + 3y^2 + 4x^4y^3)dy = 0.$
4.9. $(3x^2 + 5x^4y^3)dx + (3y^2 + 3x^5y^2)dy = 0.$
4.10. $(y^2 + 6x^5y^2)dx + (2xy + 3y^2 + 2x^6y)dy = 0.$
4.11. $(3x^2 + 2xy + 2xy^6)dx + (x^2 + 6x^2y^5)dy = 0.$
4.12. $(2xy + y^2 + 3x^2y^5)dx + (x^2 + 2xy + 5x^3y^4)dy = 0.$
4.13. $(y^2 + 4x^3y^4)dx + (2xy + 3y^2 + 4x^4y^3)dy = 0.$
4.14. $(3x^2 + 2y^2 + 5x^4y^3)dx + (2xy + 3x^5y^2)dy = 0.$
4.15. $(3x^2 + 2xy + 6x^5y^2)dx + (x^2 + 2x^6y)dy = 0.$
4.16. $(2xy + y^2 + 2xy^6)dx + (x^2 + 2xy + 6x^2y^5)dy = 0.$
4.17. $(2xy + 3x^2y^5)dx + (x^2 + 3y^2 + 5x^3y^4)dy = 0.$
4.18. $(3x^2 + 4x^3y^4)dx + (3y^2 + 4x^4y^3)dy = 0.$
4.19. $(3x^2 + 2xy + 5x^4y^3)dx + (x^2 + 3x^5y^2)dy = 0.$
4.20. $(2xy + y^2 + 6x^5y^2)dx + (x^2 + 2xy + 2x^6y)dy = 0.$
4.21. $2(xy + xy^6)dx + (x^2 + 3y^2 + 6x^2y^5)dy = 0.$
4.22. $(y^2 + 3x^2y^5)dx + (2xy + 3y^2 + 5x^3y^4)dy = 0.$
4.23. $(3x^2 + y^2 + 4x^3y^4)dx + (2xy + 4x^4y^3)dy = 0.$
4.24. $(2xy + y^2 + 5x^4y^3)dx + (x^2 + 2xy + 3x^5y^2)dy = 0.$
4.25. $(3x^2 + 6x^5y^2)dx + (3y^2 + 2x^6y)dy = 0.$
4.26. $(y^2 + 2xy^6)dx + (2xy + 3y^2 + 6x^2y^5)dy = 0.$
4.27. $3x^2(1 + y^5)dx + y^2(3 + 5x^3y^2)dy = 0.$
4.28. $(3x^2 + 2xy + 4x^3y^4)dx + (x^2 + 4x^4y^3)dy = 0.$
4.29. $(2xy + 5x^4y^3)dx + (x^2 + 3y^2 + 3x^5y^2)dy = 0.$
4.30. $(3x^2 + y^2 + 6x^5y^2)dx + (2xy + 2x^6y)dy = 0.$

1.5. Інтегрувальний множник

Коли вираз $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ не є повним диференціалом, то постає питання: чи не можна знайти таку функцію $\mu(x,y)$, щоб, помноживши на неї ліву частину рівності

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, (5.1)

перетворити її в повний диференціал? Таке припущення має підставу. Справді, вираз $ydx - xdy$ не є повний диференціал $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial N}{\partial x} = -1\right)$, але досить його, помножити на $\mu_1(x,y)=\frac{1}{xy}$ чи $\mu_2(x,y)=\frac{1}{y^2}$ і він стає повним диференціалом функції $U(x,y)=\frac{x}{y}+C$.

Функцію $\mu(x,y)$ називають *інтегрувальним множником.* В деяких випадках $\mu(x,y)$ можна знайти. Будь-яке диференціальне рівняння першого порядку, що має загальний інтеграл, має безліч інтегрувальних множників. Якщо $\mu(x,y)$ є така функція, то

$$\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy\equiv dU(x,y)=0.$$

$U(x,y)=C$ є загальним інтегралом рівняння (5.1). За ознакою повного диференціала $\frac{\partial(M\mu)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$, або ж

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\quad(5.2)$$

Останнє називається рівнянням інтегрувального множника. Можна легко зінтегрувати це рівняння з частинними похідними, тобто знайти функцію $\mu(x,y)$ в таких випадках.

1. Відомо, що рівняння (5.1) має інтегрувальний множник, який залежить тільки від *x*:

$$\mu=\mu(x).$$

Тоді (22) набирає вигляду $\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}=0\right)$:

$$N\frac{d\mu}{dx}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\quad\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

Для існування $\mu(x)$ права частина останньої рівності мусить бути функцією тільки від *x;* в цьому випадку $\ln\mu(x)$ знаходять за допомогою квадратури.

2. Інтегрувальний множник є функцією тільки від *y:*

$\mu=\mu(y)$. Тоді з (5.2) дістанемо $\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}=0\right)$:

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

(Права частина повинна залежати тільки від *y).*

3. Інтегрувальний множник є функцією від даної функції $\omega(x,y):\mu=\mu(\omega(x,y))$. В цьому

випадку рівняння (5.2) можна подати у вигляді

$$N\frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dx}-M\frac{d\mu}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dy}=\mu(\omega)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

або $\frac{\mu'}{\mu}=\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}$, якщо $N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}\neq 0$

Для існування інтегрувального множника необхідно й досить, щоб права частина останньої рівності була функцією тільки від ω:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}=\varphi(\omega).$$

Коли так, то

$$\mu = e^{\int \varphi(\omega)d\omega} = \psi[\omega(x,y)].$$

Якщо форма $\mu(x,y)$ не вказана, можна застосувати спосіб, який вжито в наступному прикладі.

Приклад. Проінтегрувати $(x^3+xy^2-y)dx+(y^3+x^2y+x)dy=0$.

Розв'язання. Розіб'ємо ліву частину на такі дві групи, щоб інтегрувальний множник для кожної знаходився просто, безпосередньо. Отже, дістанемо

$$[x(x^2+y^2)dx+y(x^2+y^2)dy]+[xdy-ydx]=0.$$

Для першої групи очевидно $\mu=\dfrac{1}{x^2+y^2}$, а інтегралом рівняння $xdx+ydy=0$ буде

$$\Phi_1(x,y)\equiv\frac{x^2+y^2}{2}=C.$$

Тому найзагальніший вигляд інтегрувального множника для цієї групи буде такий:

$$\mu_1=\frac{1}{x^2+y^2}\varphi_1(x^2+y^2),$$

де φ_1 – довільна функція. Для другої групи інтегрувальним множником є $\mu_2=\dfrac{1}{xy}$ (може бути також $\dfrac{1}{x^2}$ та $\dfrac{1}{y^2}$) і загальний інтеграл рівняння $\dfrac{dy}{y}-\dfrac{dx}{x}=0$ буде $\Phi_2(x,y)\equiv\dfrac{y}{x}=C$. Отже, $\mu_2=\dfrac{1}{xy}\varphi_2\left(\dfrac{y}{x}\right)$ де φ_2 - довільна функція.

Тепер, користуючись довільністю функцій φ_1 та φ_2, треба дібрати їх так, щоб виконувалась тотожність:

$$\frac{1}{x^2+y^2}\varphi_1(x^2+y^2)\equiv\frac{1}{xy}\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)$$

Якщо покладемо $\varphi_1(x^2+y^2)=1$, а $\varphi_2\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{y}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$, то знайдемо шукану тотожність

$$\mu=\mu_1=\mu_2=\frac{1}{x^2+y^2},$$

Помноживши дане рівняння на $\mu=\dfrac{1}{x^2+y^2}$, дістанемо рівняння

$$\left(x-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(y+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0,$$

ліва частина якого є повний диференціал. Отже,

$$U(x,y)=\int\left(x-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\varphi(y).$$

Але $\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}+\varphi'(y)$ мусить дорівнювати тотожно коефіцієнтові при dy:

$$\frac{x}{x^2+y^2}+\varphi'(y)\equiv y+\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Звідси $\varphi'(y)=y$, $\varphi(y)=\frac{y^2}{2}+C$.

Остаточно

$$U(x,y)=x^2+y^2-2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=C_1.$$

Вправи

У кожномуваріантізнайтизагальнийінтегралдиференціальногорівняння:

5.1. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{3x^2}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^3}{y^2}\right)dy=0.$

5.2. $(\operatorname{tg}y+\cos(x+y))dx+\left(\frac{x}{\cos^2 y}+\cos(x+y)\right)dy=0.$

5.3. $\frac{(2x-y)dx+(2y+x)dy}{x^2+y^2}=0$

5.4. $\left(2x+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0.$

5.5. $\left(y\cos x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(\sin x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$

5.6. $(\sin y+y\sin x)dx+(x\cos y-\cos x)dy=0.$

5.7. $\left(\frac{y}{\cos^2(xy)}-\frac{2x}{y}\right)dx+\left(\frac{x}{\cos^2(xy)}+\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0.$

5.8. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^4}}+\frac{2}{x}\right)dx+\left(\frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}-\frac{2}{y}\right)dy=0.$

5.9. $\left(-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}\right)dy=0.$

5.10. $(\ln(1+y^2)-\sin(x+y))dx+\left(\frac{2xy}{1+y^2}-\sin(x+y)\right)dy=0.$

5.11. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0.$

5.12. $(3x^2\operatorname{tg}y+\cos(x+y))dx+\left(\frac{x^3}{\cos^2 y}+\cos(x+y)\right)dy=0.$

5.13. $\frac{(2x-3y)dx+(3x+2y)dy}{x^2+y^2}=0.$

5.14. $\left(4x^3+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0.$

5.15. $\left(3y\sin^2 x\cos x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(\sin^3 x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$

5.16. $(3x^2\sin y+y\sin x)dx+(x^3\cos y-\cos x)dy=0.$

5.17. $\left(\frac{y}{\cos^2(xy)}-\frac{6x^5}{y}\right)dx+\left(\frac{x}{\cos^2(xy)}+\frac{2x^6}{y^2}\right)dy=0.$

5.18. $\left(\frac{x}{(x^2+y^4)^{5/6}}+\frac{6}{x}\right)dx+\left(\frac{2y^3}{(x^2+y^4)^{5/6}}-\frac{2}{y}\right)dy=0.$

5.19. $\left(-\frac{3y}{x^2}\cos\frac{3y}{x}+\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\right)dx+\left(\frac{3}{x}\cos\frac{3y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}\right)dy=0.$

5.20. $(\ln(1+y^6)-\sin(x+y))dx+\left(\frac{6xy^5}{1+y^6}-\sin(x+y)\right)dy=0.$

5.21. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y^2}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{2x}{y^3}\right)dy=0.$

5.22. $(\operatorname{tg} y+2\cos(2x+y))dx+\left(\frac{x}{\cos^2 y}+\cos(2x+y)\right)dy=0.$

5.23. $\frac{(4x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+y^2}=0.$

5.24. $\left(2x+ye^{x/y}\right)dx+e^{x/y}(2y-x)dy=0.$

5.25. $\left(y^2\cos x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(2y\sin x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$

5.26. $(\sin y+y^2\sin x)dx+(x\cos y-2y\cos x)dy=0.$

5.27. $\left(\frac{y^2}{\cos^2(xy^2)}-\frac{2x}{y}\right)dx+\left(\frac{2xy}{\cos^2(xy^2)}+\frac{2x^2}{y^2}\right)dy=0.$

5.28. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^6}}+\frac{2}{x}\right)dx+\left(\frac{3y^5}{\sqrt{x^2+y^6}}-\frac{4}{y}\right)dy=0.$

5.29. $\left(-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{2}{y}\sin\frac{2x}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{2x}{y^2}\sin\frac{2x}{y}\right)dy=0.$

5.30. $(\ln(1+y^2)-2\sin(2x+y))dx+\left(\frac{2xy}{1+y^2}-\sin(2x+y)\right)dy=0.$

1.6. Рівняння першого порядку не розв'язані відносно похідної

Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку, не розв'язаного відносно похідної y', такий:

$$F(x,y,y')=0. \quad (6.1)$$

Важливим випадком цих рівнянь є той, коли F — многочлен степеня n відносно похідної:

$$P_0(x,y)y'^n+P_1(x,y)y'^{n-1}+\ldots+P_{n-1}(x,y)y'+P_n(x,y)=0. \quad (6.2)$$

Рівняння типу (6.2) звуть рівнянням *першого порядку n*-гостепеня. Згідно з основною теоремою вищої алгебри рівняння (40) для кожної пари вартостей (x,y) в розглядуваній області має n коренів. Обмежуючись тільки дійсними коренями, (ми вивчаємо диференціальні рівняння в дійсній області), дістанемо k рівнянь першого порядку:

$$\frac{dy}{dx}=f_i(x,y),\ (i=1,2,\ldots,k;k\le n). \quad (6.3)$$

Якщо кожне з рівнянь (6.3) має загальний інтеграл, то їх сукупність

$$\varphi_i(x,y)=C,\ (i=1,2,\ldots,k;k\le n)$$

звуть *загальним інтегралом* рівняння (6.2) і часто подають у вигляді

$$[\varphi_1(x,y)-C][\varphi_2(x,y)-C]\cdots[\varphi_n(x,y)-C]=0.$$

Приклад. Проінтегрувати диференціальне рівняння $y'^3-(x^2+xy+y^2)y'^2+xy(x^2+xy+y^2)y'-x^3y^3=0$.

Розв’язання

Різницю між першим та останнім членом розкладемо на множники:

$$(y'-xy)(y'^2+xyy'+x^2y^2).$$

Тоді ліву частину цього рівняння можна подати у вигляді

$$(y'-xy)(y'^2+xyy'+x^2y^2)-y'(x^2+xy+y^2)(y'-xy)=(y'-xy)(y'-x^2)(y'-y^2).$$

Отже,

$$(y'-xy)(y'-x^2)(y'-y^2)=0.$$

Таким чином, дістали три диференціальних рівняння

$$\frac{dy}{dx}=xy,\ \frac{dy}{dx}=x^2,\ \frac{dy}{dx}=y^2.$$

Зінтегруємо їх:

$$\frac{dy}{y}=xdx,\ \ln y=\frac{x^2}{2}+\ln C,\ y-Ce^{\frac{x^2}{2}}=0;$$

$$dy=x^2dx,\ y=\frac{x^3}{3}+C,\ y-\frac{x^3}{3}-C=0;$$

$$\frac{dy}{y^2}=dx,\ -\frac{1}{y}=x+C,\ y+\frac{1}{x+C}=0.$$

А тому загальний інтеграл цього рівняння буде

$$\varphi(x,y,C)\equiv\left(y-Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)\left(y-\frac{x^3}{3}-C\right)\left(y+\frac{1}{x+C}\right)=0.$$

Якщо рівняння (6.1) не можна розв'язати відносно y', то іноді його інтегрування, запровадивши параметр, вдається звести до інтегрування рівняння, розв'язаного відносно похідної.

Справді, нехай (6.1) допускає параметричне представлення

$$x=\varphi(u,\upsilon),\ y=\psi(u,\upsilon),\ y'=\chi(u,\upsilon),$$

так, що $F(\varphi(u,\upsilon),\psi(u,\upsilon),X(u,\upsilon)) \equiv 0$ при всіх значеннях u та υ. Тоді, використовуючи параметричне представлення рівняння (6.1) та основне співвідношення $dy = y'dx$, дістанемо диференціальне рівняння, розв'язане відносно похідної

$$\frac{d\upsilon}{du} = f(u,\upsilon). \quad (6.1_1)$$

В тому випадку, коли останнє має загальний розв'язок

$$\upsilon = \omega(u,C),$$

загальний розв'язок рівняння (6.1) дістанемо в параметричній формі:

$$x = \varphi(u,\omega(u,C)),$$

$$y = \psi(u,\omega(u,C)).$$

Практичне застосування викладеного методу пов'язане з певними труднощами; по-перше, не існує правила, як параметризувати будь-яке рівняння вигляду (6.1), а по-друге, не завжди рівняння (6.1_1) зводиться до квадратур. Але коли рівняння (6.1) розв'язане відносно x чи відносно y, параметричне представлення його можна завжди дати.

Приклад. Проінтегрувати диференціальне рівняння. $xy'^2 + yy' - y^4 = 0$.

Розв’язання

Розв'яжемо рівняння відносно x:

$$x = \frac{y^4 - yy'}{y'^2}.$$

Візьмемо за параметри y та $y' = t$. Тоді параметричне представлення даного рівняння буде

$$x = \frac{y^4 - yt}{t^2},$$

$$y = y,$$

$$y' = t.$$

Знайдемо dx:

$$dx = \frac{4y^3 - t}{t^2}dy + \frac{ty - 2y^4}{t^3}dt.$$

Тепер використаємо основне співвідношення $dy = y'dx$:

$$\frac{dy}{y} = \frac{4y^3 - t}{t^2}dy + \frac{ty - 2y^4}{t^3}dt.$$

Остаточно

$$\frac{4y^3 - t}{t^2}dy + \frac{ty - 2y^4}{t^3}dt = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними, його загальний інтеграл $y^2 = Ct$.

Загальний розв'язок рівняння в параметричній формі є

$$x = \frac{y^4 - Ct}{t^2},$$

$$y^2 = Ct.$$

Тут параметр можна виключити. Отже, загальний інтеграл буде

$$y(C^2 - x) = C.$$

Приклад. Проінтегрувати диференціальне рівняння. $(xy' + a)^2 - 2ay + x^2 = 0$, $a \neq 0$.

Розв’язання

Розв'яжемо рівняння відносно y:

$$2ay = (xy' + a)^2 + x^2.$$

Візьмемо за параметри x та $y' = t$. Тоді

$$x = x,$$

$$2ay = (xt + a)^2 + x^2,$$

$$y' = t.$$

Знайшовши dy й використавши співвідношення $dy = t\,dx$, дістанемо

$$2atdx = 2(xt + a)(tdx + xdt) + 2xdx.$$

Останнє, після спрощень, можна подати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} + \frac{t}{t^2 + 1}x = -\frac{a}{t^2 + 1}.$$

Це — лінійне рівняння. Його загальний розв'язок

$$x = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}\left[C - a\ln(t + \sqrt{t^2 + 1})\right].$$

Загальний розв'язок рівняння (в параметричній формі)

$$x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\left[C - a\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right],$$

$$2ay = (xt+a)^2 + x^2.$$

Якщо $F(x, y, y')$ є лінійна функція відносно x та відносно y, тобто рівняння має вигляд

$$F(x, y, y') \equiv P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0,$$

то запровадженням параметра воно завжди зведеться до лінійного, а, отже, й до квадратур. Таке рівняння зветься *рівнянням Лагранжа*.

Приклад. Проінтегрувати диференціальне рівняння. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$.

Розв'язання

Це рівняння Лагранжа. Розв'язуємо його відносно y:

$$y = \frac{xy'}{2} + \frac{2x}{y'}.$$

Запроваджуємо параметри x та $y' = p$; отже $dy = pdx$. Тоді

$$x = x,$$

$$y = \frac{px}{2} + \frac{2x}{p},$$

$$y' = p.$$

Тепер досить виразити x через параметр p, і будемо мати загальний розв'язок даного рівняння у параметричній формі. Знаходимо dy, і, пам'ятаючи, що $dy = pdx$, дістанемо

$$pdx = \frac{1}{2}xdp + \frac{1}{2}pdx + 2\frac{dx}{p} - \frac{2x}{p^2}dp.$$

Звідси

$$\frac{4-p^2}{2p}dx - \frac{(4-p^2)x}{2p^2}dp = 0,$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dp}{p} = 0, \; x = Cp.$$

Отже, $x = Cp$,

$y = \frac{px}{2} + \frac{2x}{p}$ - загальний розв’язок в параметричній формі.

Тут легко вилучити параметр:

$$y = \frac{x^2}{2X} + 2C, \text{або}\ y = C_1 x^2 + \frac{1}{C_1}.$$

Рівняння вигляду $F(x, y') = 0$ та $F(y, y') = 0$, тобто неповні рівняння зводяться до квадратур, якщо їх можна розв'язати відносно одного з аргументів.

Приклад.Проінтегрувати диференціальне рівняння. $x = \ln y' + \sin y'$

Розв’язання

Рівняння вже розв'язане відносно x. Запровадимо параметр $y' = p$; вираз для x через параметр буде:

$$x = \ln p + \sin p.$$

Для того щоб виразити y через цей же параметр, використаємо співвідношення $dy = pdx$. Тоді

$$dx = \frac{dp}{p} + \cos pdp$$

і

$$dy = dp + p\cos pdp.$$

Звідси

$$y = \int (dp + p\cos pdp),$$

$$y = p + \cos p + p\sin p + C.$$

Загальний розв'язок:

$$x = \ln p + \sin p,$$

$$y = p(\sin p + 1) + \cos p + C.$$

Приклад.Проінтегрувати диференціальне рівняння. $y = y'^2 e^{y'}$.

Розв’язання

Рівняння розв'язане відносно y. Запровадимо параметр $p = \frac{dy}{dx}$. Вираз для y через цей параметр знайдемо безпосередньо з даного рівняння:

$$y = p^2 e^p.$$

Щоб виразити через цей параметр x, використаємо співвідношення $\frac{dy}{dx} = p$, звідки $dx = \frac{dy}{p}$; з виразу для y знайдемо $dy = (2p + p^2)e^p dp$. Отже, $dx = (p + 2)e^p dp$; звідси

$$x = 2e^p + pe^p - e^p + C$$

або

$$x = e^p(p + 1) + C.$$

Загальний розв'язок даного рівняння в параметричній формі:

$$x = e^p(p + 1) + C,$$

$$y = p^2 e^p.$$

Приклад Проінтегрувати диференціальне рівняння. $y\sqrt{a^2 - y'^2} = y'$

Розв’язання

Тут можна було б взяти за параметр y', але доцільніше покласти $y' = a\sin\varphi$. З цього рівняння знайдемо вираз y через φ:

$$y\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\varphi} = a\sin\varphi \quad y = \operatorname{tg}\varphi$$

Таким чином, рівняння_можна подати у параметричному вигляді

$$y = \operatorname{tg}\varphi$$

$$y' = a\sin\varphi$$

Знайдемо вираз для x через φ:

$$dy = y'dx,\ dy = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},\ dx = \frac{dy}{y'},$$

$$dx = \frac{d\varphi}{a\sin\varphi\cos^2\varphi}$$

Звідси

$$x = \frac{1}{a}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos^2\varphi} + C = \frac{1}{a}\left(\sec\varphi + \ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) + C.$$

Загальний розв'язок цього рівняння в параметричній формі

$$x = \frac{1}{a}\left(\sec\varphi + \ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) + C,$$

$$y = \ \mathrm{g}\,\varphi$$

Приклад. Проінтегрувати диференціальне рівняння. $x(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = a.$

Розв'язання

Запровадимо параметр $y' = p = \ \mathrm{g}\,\theta$. Тоді $x\sec^3\theta = a,\quad x = a\cos^3\theta$. Отже, необхідно виразити через цей параметр ще й y. Маємо

$$dy = pdx,\ \ dy = \ \mathrm{g}\,\theta dx.$$

Але

$$dx = -\ a\cos^2\theta\sin\theta d\theta,$$

отже,

$$dy = -\ a\mathrm{tg}\,\theta\cos^2\theta\sin\theta d\theta,$$

$$dy = -\ a\sin^2\theta\cos\theta d\theta,$$

а тому

$$y = -\ \ \sin^3\theta + C.$$

В параметричній формі загальний розв'язок має вигляд

$$x = a\cos^3\theta,$$

$$y = -\ \ \sin^3\theta + C.$$

Вилучивши параметр θ (це тут можливо), дістанемо

$$x^{\frac{2}{3}} + \ y - C)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Це рівняння сім'ї астроїд.

Рівняння вигляду $F(x, y') = 0$ та $F(y, y') = 0$ інтегруються в квадратурах і тоді, коли допускають параметричне представлення.

Приклад. Проінтегрувати диференціальне рівняння. $x^3 + y'^3 = axy'$

Розв'язання

Легко перевірити, що параметричне представлення цього рівняння буде

$$x = \frac{at}{1+\ ^3},$$

$$y' = \frac{at^2}{1+\ ^3}.$$

Знайдемо dx:

$$dx = a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}dt,$$

а тоді

$$dy = a^2\frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}dt.$$

Звідси

$$y = \frac{a^2(4t^3+1)}{6(1+t^3)^2} + C.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння в параметричній формі:

$$x = \frac{at}{1+t^3},$$

$$y = \frac{a^2(4t^3+1)}{6(1+t^3)^2} + C.$$

Коли рівняння (6.1) має вигляд $F(y') = 0$, а його коренями є дійсні сталі $a_k\,(k = 1,2,3,...)$, то тоді

$$y' = a_k,\ y = a_k x + C,\ a_k = \frac{y-C}{x}.$$

Оскільки

$$F(a_k) \equiv 0,$$

$F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$ — загальний інтеграл рівняння.

Приклад. Проінтегрувати диференціальне рівняння. $y'^3 - 3y'^2 + 2 = 0$.

Розв’язання

Загальний інтеграл цього рівняння є

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + 2 = 0.$$

У кожномуваріантіпроінтегруватидиференціальнерівнянняКлеро

6.1. $y = xy' - e^{y'} + y'$.
6.2. $3y = 3xy' - (y')^3 + 3y'$.
6.3. $y = xy' - \ln y' + 2y'$.
6.4. $2y = 2xy' - (y')^2 + 6y'$.

6.5. $y = xy' - e^{3y'} + 2y'$.

6.6. $y = xy' - e^{2y'} + y'$.

6.7. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 3y'$.

6.8. $y = xy' - 2\ln y' + 2y'$.

6.9. $y = xy' - (y')^2 + 3y'$.

6.10. $y = xy' - e^{4y'} + 2y'$.

6.11. $y = xy' - e^{y'} + 2y'$.

6.12. $3y = 3xy' - (y')^3 + 6y'$.

6.13. $y = xy' - \ln y' + y'$.

6.14. $2y = 2xy' - (y')^2 + 4y'$.

6.15. $y = xy' - e^{3y'} + y'$.

6.16. $y = xy' - e^{2y'} + 2y'$.

6.17. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 6y$.

6.18. $y = xy' - 2\ln y' + y'$.

6.19. $y = x' - (y')^2 + 2y'$.

6.20. $y = xy' - e^{4y'} + y'$.

6.21. $y = xy' - e^{y'} + 3y'$.

6.22. $3y = 3xy' - (y')^3 + 9y'$.

6.23. $y = xy' - \ln y' + 3y'$.

6.24. $2y = 2xy' - (y')^2 + 2y'$.

6.25. $y = xy' - e^{3y'} + 3y'$.

6.26. $y = xy' - e^{2y'} + 3y'$.

6.27. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 9y'$.

6.28. $y = xy' - 2\ln y' + 3y'$.

6.29. $y = xy' - (y')^2 + y'$.

6.30. $y = xy' - e^{4y'} + 3y'$.

Розділ 2. Диференціальні рівняння вищих порядків

2.1. Загальні питання

До диференціальних рівнянь вищих порядків приводить цілий ряд задач.

Диференціальне рівняння *n-го* порядку в загальному виді записують так:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (2.1)$$

Тут $F(u, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ — функція, неперервна разом із своїми частинними похідними

$$F'_{u_0}, F'_{u_1}, \ldots, F'_{u_n}$$

в деякої області D точок $(u, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ $(n+2)$ - вимірного простору.

Якщо рівняння (2.1) можна розв'язати відносно *n*-ї похідної, то його записують так:

$$y^{n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (2.2)$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція y від x і n незалежних сталих,

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \qquad (2.3)$$

яка задовольняє задане диференціальне рівняння при довільних значеннях $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Знаходження частинного розв'язку рівняння (2.1), (2.2) при початкових умовах

$$y_{|x=} = \qquad = \qquad = \qquad (2.4)$$

де $x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ — задані числа, є задачею Коші.

ТЕОРЕМА *(про існування розв'язку)* *Диференціальне рівняння виду (2.2) має єдиний розв'язок, що задовольняє початкові умови (2.4), коли права частина рівняння (2.2) є неперервною функцією змінних x, y, y', ..., y^{n-1},*

частинні похідні цієї функції по y, y', y'', ... , y^{n-1} обмежені в області D.

Якщо розглядати рівняння другого порядку $y'' = f(x, y, y')$ то для нього матимемо такі початкові умови: $y = y_0, y' = y'_0$ при $x = x_0$, де x_0, y_0, y'_0 — задані числа.

Геометричний зміст початкових умов такий: через задану точку площини (x_0, y_0) із заданим тангенсом кута нахилу дотичної y'_0 проходить єдина крива. Звідси, якщо задавати різні значення y'_0 при сталих x_0 і y_0, то дістанемо нескінченну множину інтегральних кривих з різними кутами нахилу, які проходять через задану точку.

У подальшому розглядатимемо тільки деякі типи диференціальних рівнянь n-го порядку, $n \geq 2$, які допускають зниження порядку, а також лінійні диференціальні рівняння n-го порядку.

Слід зазначити, що для рівнянь вищого порядку поряд а задачею Коші розглядають ще так звані граничні задачі, або крайові.

2.2. Рівняння, що допускають зниження порядку

Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$

1. Диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(x) \tag{2.5}$$

де $f(x)$ — неперервна функція на відрізку $I=[a;b]$, інтегрується в квадратурах. Справді, запишемо його у вигляді

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x),$$

або

$$d(y^{(n-1)}) = f(x)dx$$

Тоді

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1$$

де x_0 — довільне фіксоване значення $x (x_0, x \in \quad)$, а C_1 стала інтегрування.

Інтегруючи аналогічно далі, дістанемо

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx + C_1(x - x_0) + C_2;$$

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdxdx + C_1\frac{(x-x_0)^2}{2!} + C_2\frac{x-x_0}{1!} + C_3; \ldots$$

і, нарешті,

$$y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x}}_{n} f(x)\underbrace{dx\ldots dx}_{n} + C_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}\frac{x-x_0}{1!} + C_n \qquad (2.6)$$

Якщо взяти x_0= 0 і замінити

$C_1\dfrac{1}{(n-1)!}$ на C_1, $\quad C_2\dfrac{1}{(n-2)!}$ на C_2 і т. д.,

то загальний розв'язок (2.6) матиме вигляд

$$y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x}}_{n} f(x)\underbrace{dx\ldots dx}_{n} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n \qquad (2.7)$$

2.3. Рівняння, яке не містить невідомої функції і кількох послідовних похідних

$$F(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \ldots, y^{(n)}) = \quad \le \quad \le \qquad (2.8)$$

за допомогою заміни $y^{(m)} = \iota$, *де u* — нова невідома функція, зводиться до рівняння (*n*— *m)*-го порядку

$$F(x, u, u' \qquad) = \qquad (2.9)$$

Якщо рівняння (2.9) інтегрується в квадратурах, то, повертаючись до змінної ***y,*** дістанемо

$$y^{(m)} = \varphi \; x, C_1, ..., C_{n- \iota})$$

або

$$\Phi(x, y^{(m)}, C_1, ..., C_{n-m}) = \;)$$

це є рівняння типу (2.10).

П р и к л а д . Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = \quad \overline{\; - \quad}$$

Розв'язання. Нехай*y'=p.* Тоді *y'' = p'.* Отже, маємо рівняння

$$p' = \;\sqrt{1- \;^2}$$

розв'язок якого

$$p = \;\mathrm{in}(ax + \; _1)$$

Загальним розв'язком заданого рівняння є

$$p = \frac{1}{a}\cos(ax + \; _1) + \; _2$$

Зауваження. Аналогічно інтегрується рівняння

$$y^{(n)} = \qquad , \qquad (2.11)$$

якщо виконати заміну $y^{(n-1)} = \upsilon, y^{(n)} = \upsilon'$.

2.4. Рівняння n-го порядку, яке не містить явно незалежну змінну

$$F(y, y' \quad = \qquad (2.12)$$

за допомогою заміни

$$y' = \qquad (2.13)$$

де*p=p(y)* — нова невідома функція,*y* — нова незалежна змінна, зводиться до рівняння порядку, меншого на одиницю.

Справді, оскільки

$$y'' = \frac{\quad}{dx} = \frac{\quad}{dy} \cdot \frac{\quad}{dx} =$$

$$y''' = \frac{\quad}{dx} = \frac{\quad}{dy} \cdot \frac{\quad}{dx} = \quad +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \qquad (2.14)$$

$$y^{(n)} = \quad \ldots, p^{(n-}$$

$$(p^{(k)} = \frac{d^k}{dy} \quad = \quad -$$

то в результаті підстановки (2.13), (2.14) у (2.12) дістанемо рівняння *(n—1)*-го порядку відносно нової невідомої функції р:

$$F(y, p, p' \quad = \qquad (2.15)$$

Якщо відомо загальний інтеграл рівняння (2.15)

$$\Phi_1(y, p, C_1, C_2, \ldots, C_{n-} =$$

, то співвідношення

$$\Phi_1(y, y' \quad , C_{n-} = \qquad (2.16)$$

е диференціальним рівнянням першого порядку.

Загальний інтеграл рівняння (2.16) $\Phi(x, y, C_1, ..., C_{n-}) =$, де $C_1, ..., C_{n-}$ — довільні сталі, буде загальним інтегралом рівняння (2.12).

П р и к л а д . Знайти загальний розв'язок рівняння

$$yy'' =$$

Ровв'язування, Нехай $y'=p$, тоді $y'' = \frac{\,'}{dx}$. Отже,

$$yp\frac{dp}{dy} =$$

Це рівняння першого порядку, його загальним розв'язком в функція

$$y = C_2 e^{C_1 x}$$

2.5. Однорідні рівняння вищих порядків

1. Рівняння

$$F(x, y, y' \quad) = \qquad (2.17)$$

є однорідним відносно $y, y' .. y^{(n)}$, якщо виконується умова

$$F(x, \lambda \quad \lambda\,' \quad) = \quad '$$

$$\lambda = \quad \neq$$

Маємо $y = e^{\int u dx}$ або

$$\left(\int u' dx\right)' = (\ln y)'$$

$$u = \frac{\,'}{y} \qquad (2.18)$$

Підставивши (2.18) в (2.17), дістанемо

$$y^{(m)}F(x,1,u,u^2+ \qquad =$$

Скоротивши на $y^{(m)}$, матимемо диференціальне рівняння (n—1)-го порядку відносно функції ***u:***

$$F(x,1,u,u^2+u',...., g(u,u',...u^{(n-\ )})) = \ )$$

Якщо знайдено загальний розв'язок

$$u=\varphi\ x, C_1,..., C_{n-}\ )$$

рівняння (2.19), то, використавши (2.18), дістанемо загальний розв'язок рівняння (2.17):

$$y=e^{\int\varphi\ x, C_1,...,C_{n-1})dx}$$

де $C_1,....C_n$ — довільністалі.

П р и к л а д . Розв'язатирівняння

$$x^2yy' - \ y-xy')^2 = \ )$$

Розв'язання. Це однорідне рівняння другого степеня відносно y, y', y'. Виконавши заміну (2,18), дістанемо рівняння першого порядку

$$x^2(u'+ \quad - \ - \quad = \quad \text{або}\, u'+\frac{2}{x} = \frac{1}{x^2}$$

Звідки

$$u=\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x}$$

і згідно з (2.35)

$$y= \qquad = \quad -$$

В кожному варіантізнайти загальний розв’язок диференціального рівняння.

10.1. $xy''' = y'' + 2$.

10.2. $x^3y''' + 3x^2y'' = 2\cos\ln x$.

10.3. $(x^2 - x)y''' = (2 - x)y''$.

10.4. $xy''' - 2y'' = 4$.

10.5. $y'''(2\ln x + 3)x = 2y''$.

10.6. $\mathrm{tg}x \cdot y''' + 2y'' = 0$.

10.7. $y''' = \frac{3}{x}y'' + 12x$.

10.8. $y''' + 3(y'')^2\sqrt{1 - 2x} = 0$.

10.9. $\mathrm{tg}\, 3x \cdot y''' = 6y''$.

10.10. $x^3y''' + 3x^2y'' = 8\sin\ln x$.

10.11. $xy''' - y'' = 12x^2$.

10.12. $y''' = 6(y'')^2\sqrt{x + 1}$.

10.13. $(2x^2 - x)y''' = 2(1 - x)y''$.

10.14. $y''' - \frac{2}{x}y'' = 6$.

10.15. $\mathrm{tg}x \cdot y''' = y''$.

10.16.$y''' = (y'')^2\sqrt{6x + 5}$.

10.17. $xy''' - 3y'' = 12x$.

10.18. $\mathrm{tg}\, 3x \cdot y''' = 3y''$.

10.19. $x^3y''' + 3x^2y'' = 4\cos\ln x$.

10.20. $\mathrm{tg}\, 2x \cdot y''' + 4y'' = 0$.

10.21. $y''' = \frac{y''}{x} + 40x^2$.

10.22. $y''' = 3(y'')^2\sqrt{2x + 7}$.

10.23. $(x^2 - 2x)y''' = (4 - x)y''$.

10.24. $xy''' = 2y'' + 20x^3$.

10.25. $\operatorname{tg} 3x \cdot y''' + 6y'' = 0$.

10.26. $y''' = 2(y'')^2\sqrt{3x+4}$.

10.27. $xy''' - 6 = 3y''$.

10.28. $x^3y''' + 3x^2y'' = 6\sin\ln x$.

10.29. $\operatorname{tg} 2x \cdot y''' = 4y''$.

10.30. $y''' + (y'')^2\sqrt{1-x} = 0$.

В кожномуваріантізнайти розв'язокзадачі з початковимиумовами.

11.1. $y'' = 8(1+3y)(1+y), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 8$.

11.2. $y'' + y'^2 = 2e^{-y},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.

11.3. $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

11.4. $2yy''\ln y = {y'}^2(1 + 2\ln y), \quad y(0) = e,\ \ y'(0) = e$.

11.5. $y'' = 16y(y-1)(2y-1), \quad y(0) = \frac{1}{2},\ y'(0) = 1$.

11.6. $y^2y'' + y' = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

11.7. $4y'' = \sin 4y\,, \quad y(0) = \frac{\pi}{4},\ y'(0) = \frac{1}{2}$.

11.8. $y^6y'' + 5y' = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = \frac{1}{32}$.

11.9. $y'' = 2(1+4y+3y^2), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

11.10. $y'' + y'^2 = 8e^{-y}, \quad y(0) = 2\ln 2\,,\ y'(0) = 2$.

11.11. $y'' = \frac{4\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = \frac{\pi}{6},\ y'(0) = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

11.12. $3yy''\ln y = {y'}^2(2 + 3\ln y), \quad y(0) = e,\ y'(0) = e$.

11.13. $y'' = 81y(2y-1)(4y-1), \quad y(0) = \frac{1}{3},\ y'(0) = 1$.

11.14. $y^3y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

11.15. $y'' = \sin 4y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4},\ \ y'(0) = 1$.

11.16. $y^8y'' + 7y' = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{128}$.

11.17. $y'' = 8(1 + 4y + 3y^2), \quad y(0) = 3, y'(0) = 16\sqrt{3}$.

11.18. $y'' + y'^2 = 8e^{-y}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 4$.

11.19. $y'' = \frac{9\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 3$.

11.20. $2yy'' \ln y = {y'}^2(1 + 2\ln y), \quad y(1) = e, y'(1) = e$.

11.21. $y'' = 256y(3y - 1)(6y - 1), \quad y(0) = \frac{1}{4}, y'(0) = 1$.

11.22. $y^4 y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$.

11.23. $y'' = 4\sin 4y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}, y'(0) = 2$.

11.24. $y^7 y'' + 6y' = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{64}$.

11.25. $y'' = 2(1 + y)(1 + 3y), \quad y(0) = 1, y'(0) = 4$.

11.26. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}, \quad y(0) = 2\ln 2, y'(0) = 1$.

11.27. $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = \frac{\pi}{6}, y'(0) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

11.28. $3yy'' \ln y = {y'}^2(2 + 3\ln y), \quad y(1) = e, y'(1) = e$.

11.29. $y'' = 64y(y - 1)(2y - 1), \quad y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = 2$.

11.30. $y^5 y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$.

В кожному варіантізнайти загальний розв’язок диференціального рівняння.

12.1. $xyy'' - 2x{y'}^2 = 3yy'$.

12.2. $x^2{y'}^2 + y^2 = x^2yy'' + 2xyy'$.

12.3. $e^{2x}(2yy' + yy'') = 8\sin 2 \cdot y^2 + e^{2x}{y'}^2$

12.4. $xyy'' + 3x{y'}^2 = 4yy'$.

12.5. $3xyy' + x^2yy'' = 2y^2 + x^2{y'}^2$.

12.6. $5x{y'}^2 = 7yy' - xyy''$.

12.7. $x^2{y'}^2 = x^2yy'' - xyy' + 2y^2$.

12.8. $e^x yy'' - 30\cos 3x \cdot y^2 = e^x\left({y'}^2 - yy'\right)$.

12.9. $2yy' + xyy'' = 4x{y'}^2$.

12.10. $x^2yy'' + 3y^2 = x^2{y'}^2 + 2xyy'$.

12.11. $xyy'' = 2x{y'}^2 + 2yy'$.

12.12. $x^2y'^2 - 2xyy' = x^2yy'' - 2y^2.$

12.13. $e^{2x}\left(2yy' - y'^2\right) = 145\sin 5x \cdot y^2 - e^{2x}yy''.$

12.14. $3xy'^2 = 5yy' - xyy''.$

12.15. $x^2yy'' = x^2y'^2 - 3xyy' + 4y^2.$

12.16. $xyy'' + 5xy'^2 = 8yy'.$

12.17. $x^2yy'' + 4y^2 = xyy' + x^2y'^2.$

12.18. $e^xyy' - 10\cos 2x \cdot y^2 = e^x\left(y'^2 - yy''\right).$

12.19. $xyy'' - 4xy'^2 = -3yy'.$

12.20. $x^2y'^2 - 6y^2 = x^2yy'' - 2xyy'.$

12.21. $2xy'^2 = yy' + xyy''.$

12.22. $2xyy' + x^2yy'' = 5y^2 + x^2y'^2.$

12.23. $e^{2x}\left(yy'' - y'^2\right) = 39\sin 3x \cdot y^2 - 2e^{2x}yy'.$

12.24. $xyy'' = 6yy' - 3xy'^2.$

12.25. $x^2y'^2 + 6y^2 = 3xyy' + x^2yy''.$

12.26. $9yy' = 5xy'^2 + xy''.$

12.27. $x^2yy'' - xyy' = x^2y'^2 - 8y^2.$

12.28. $130\cos 5x \cdot y^2 + e^xy'^2 = e^x(yy'' + yy').$

12.29. $4xy'^2 = 4yy' + xyy''.$

12.30. $2xyy' + x2 \quad y'^2 = 9y^2 + x^2yy''.$

Розділ3. Диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

3.1. Основні поняття

Нехай задано лінійне однорідне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + p_1y^{(n- \ )} + p_2y^{(n- \ )} + \ .. + p_{n-}\ y' + p_ny = \ ) \qquad (4.1)$$

де коефіцієнти $p_i = \ ,..., n$ — сталі.

Щоб розв'язати це рівняння, треба знайти яку-небудь його фундаментальну систему розв'язків

$$y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x) \qquad (4.1)$$

Тоді загальним розв'язком рівняння (4.1) буде функція

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \qquad (4.2)$$

де $C_1, \ldots, C_n$ —довільні сталі.

Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді

$$y = e^{kx} \qquad (4.3)$$

де k — стале. Тоді

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2 e^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^n e^{kx}$$

Якщо підставимо значення похідних і функцію в (4,1), матимемо

$$L[e^{kx}] = e^{kx}(k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_{n-1} k + p_n) = 0$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_{n-1} k + p_n = 0 \qquad (4.4)$$

Таким чином, якщо k — корінь алгебраїчного рівняння (4.4), то функція (4.3) — розв'язок рівняння (4.1), і навпаки.

Рівняння (4.4) називають *характеристичним рівнянням*, яке відповідає диференціальному рівнянню (4.1) із сталими коефіцієнтами.

Очевидно, що характеристичне рівняння дістанемо, коли в рівнянні (4.1) замінимо похідні різних порядків відповідними степенями й. Рівняння (4.4), як відомо, має n коренів, з урахуванням кратності кожного з них, а тому різних коренів може бути не більше ніж $k \leq n$. Розглянемо можливі випадки.

3.2. Випадок простих коренів

Нехай корені рівняння (4.4) $k_1, k_2, \ldots, k_n$ різні. Тоді n функцій

$$e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}$$

є частинними розв'язками рівняння (4.1) і причому лінійно незалежними, тобто матимемо фундаментальну систему розв'язків рівняння (4.1). Тоді загальним розв'язком є функція

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x} \tag{4.5}$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ — довільні сталі.

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 3k + 2 = 0,$$

звідки $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є функція

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

2. Розв'язати рівняння

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0$$

має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$

Загальним розв'язком є функція:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

Розглянемо випадок комплексних коренів характеристичного рівняння (4.4), наприклад $k_1 = \alpha + i\beta$, тоді дістанемо розв'язок

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}$$

Відомо, що коли алгебраїчне рівняння а дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь $k_1 = \alpha + i\beta$, то воно має і спряжений з ним корінь $k_2 = \alpha - i\beta$. Отже, матимемо ще такий розв'язок:

$$y_1 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

Скориставшись формулами Ейлера

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$$

знайдемо

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

Згідно з теоремою 7 зробимо висновок, що комплексному кореню $k_1 = \alpha + i\beta$ відповідають два дійсних розв'язки рівняння (4.1):

$$y_{11} = e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ і } y_{12} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

причому вони лінійно незалежні. Спряжений корінь $k_2 = \alpha - i\beta$ також дає два дійсних розв'язки, але вони такі самі (з точністю до знака), що й y_{11}, y_{12}.

Отже, кожній парі спряжених комплексних коренів характеристичного рівняння відповідає два дійсних частинних розв'язки рівняння (4.1):

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$y'' + \;\; y' + \;\; y = 0$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 + \;\; k + \;\; = 0$$

Звідси

$$k_1 = -1 + 2i,\ k_2 = -1 - 2i;\ \ a = -1,\ \beta = 2$$

Загальним розв'язком є функція

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

2. Розв'язати рівняння

$$y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^3 - 5k^2 + 7k - 3y = 0$$

має корені $k_1 = 1,\ k_2 = 2 + 3i;\ k_3 = 2 - 3i$. Отже, загальним розв'язком в функція

$$y = C_1 e^x + e^{2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)\ .$$

3.3. Випадок кратних коренів

Нехай характеристичне рівняння має кратні корені. Тоді дістанемо менш ніж n частинних розв'язків рівняння (4.1). Розв'язки характеристичного рівняння не дають фундаментальної системи розв'язків, а отже, й загального розв'язку. Знайдемо спосіб знаходження всіх частинних розв'язків, які б складали фундаментальну систему.

Позначимо через $\varphi(k)$ ліву частину характеристичного рівняння, тобто

$$\varphi(k) = k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_{n-1}k + p_n$$

Шукатимемо частинні розв'язки рівняння (4.1) у вигляді функції

$$\mu = e^{kx}u \tag{4.6}$$

де $k-$ корінь характеристичного рівняння; $n-$ невідома функція від x, яку треба визначити так, щоб

$$L[e^{kx}u] = 0$$

Для того щоб підставити функцію (4.6) у рівняння (4.1), треба обчислити всі її похідні від першого до n-го порядку. Використовуючи формулу Лейбніца, знаходимо:

$$y = e^{kx}u,$$

$$y' = e^{kx}(ku + u'),$$

$$y'' = e^{kx}(k^2u + 2ku' + u''),$$

$$y''' = e^{kx}(k^3u + 3k^2u' + 3ku'' + u''');$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n-1)} = e^{kx}\left(k^{n-1}u + (n-1)k^{n-2}u' + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}k^{n-3}u'' + \ldots + (n-1)ku^{(n-2)} + u^{(n-1)}\right);$$

$$y^{(n)} = e^{kx}\left(k^n u + nk^{n-1}u' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}k^{n-2}u'' + \ldots + nku^{(n-1)} + u^{(n)}\right)$$

Тепер маємо

$$L[e^{kx}u] = e^{kx}\left(\varphi(k)u + \varphi'(k)u' + \frac{\varphi''(k)}{1\cdot 2}u'' + \ldots + \frac{\varphi^{(n-1)}(k)}{(n-1)!}u^{(n-1)} + u^{(n)}\right) \qquad (4.7)$$

Якщо k_1 є m_1 кратним коренем характеристичного рівняння, де $m_1 < n$, то, як відомо з алгебри,

$$\varphi(k_1) = 0,\ \varphi'(k_1) = 0,\ \varphi''(k_1) = 0, \ldots, \varphi^{(m_1-1)}(k_1) = 0,\ \varphi^{(m_1)}(k_1) \neq 0$$

і вираз (4.7) матиме вигляд

$$L[e^{k_1x}u] = e^{k_1x}\left(\frac{\varphi^{(m_1)}(k_1)}{m_1}u^{(m_1)} + \frac{\varphi^{(m_1+1)}(k)}{(m_1+1)!}u^{(m_1+1)} + \ldots + u^{(n)}\right)$$

Отже, функція y = буде розв'язком рівняння (4.1) тоді, коли

$$e^{k_1x}\left(\frac{\varphi^{(m_1)}(k_1)}{m_1}u^{(m_1)} + \frac{\varphi^{(m_1+1)}(k)}{(m_1+1)!}u^{(m_1+1)} + \ldots + u^{(n)}\right) = 0$$

Проте e^{k_1x} не дорівнює нулю; не дорівнює нулю й кожнийз коефіцієнтів при $u^{(m_1)}, u^{(m_1+1)}, \ldots, u^{(n)}$. Тому, для тогощоб функція e^{k_1x} була розв'язком рівняння (4.1), повинні справджуватися рівності

$$u^{(m_1)} = \;), u^{(m_1+\;)} = \;),..., u^{(n)} = \;)$$

Очевидно, що за u можна тут взяти функції

$$x, x^2, x^3,..., x^{m_1-}$$

Частинними розв'язками рівняння (4.1), що відповідають кореню характеристичного рівняння k_1 кратності m_1 будуть функції

$$e^{k_1x},\; xe^{k_1x}, x^2e^{k_1x},\; \ldots, x^{m_1-}\; e^{k_1x}$$

Так само кореню k_2 кратності m_2 відповідатимуть частинні розв'язки

$$e^{k_2x},\; xe^{k_2x}, x^2e^{k_2x},\; \ldots, x^{m_2-}\; e^{k_2x}$$

і т. д.

У загальному випадку, коли характеристичне рівняння має корені

k_1 кратності m_1

k_2 кратності m_2

……………………

k_p кратності m_p

$$m_1 + n_2 + \;..+ n_p = ı,\; m_i \geq \;,\; i = \;,2,\ldots p.$$

то їм відповідатиме система п різних частинних розв'язків рівняння (4.1):

$$e^{k_1x},\; xe^{k_1x}, x^2e^{k_1x},\; \ldots, x^{m_1-}\; e^{k_1x}$$

$$e^{k_2x},\; xe^{k_2x}, x^2e^{k_2x},\; \ldots, x^{m_2-}\; e^{k_2x}$$

………………………………………

$$e^{k_px},\; xe^{k_px}, x^2e^{k_px},\; \ldots, x^{m_p-}\; e^{k_px}$$

Раніше було показано, що ця система функцій є лінійно незалежною, а отже, маємо фундаментальну систему розв'язків, лінійна комбінація яких дає загальний розв'язок:

$$
\begin{aligned}
y = & \left(C_1^1 + C_2^1 x + C_3^1 x^2 + \ldots + C_{m_1}^1 x^{m_1-1}\right) e^{k_1 x} + \\
+ & \left(C_1^2 + C_2^2 x + C_3^2 x^2 + \ldots + C_{m_2}^2 x^{m_2-1}\right) e^{k_2 x} + \\
+ & \ldots + \left(C_1^p + C_2^p x + C_3^p x^2 + \ldots + C_{m_p}^p x^{m_p-1}\right) e^{k_p x}
\end{aligned}
\qquad (4.8)
$$

Якщо $k_1 = \alpha + \beta i$ – комплексний корінь кратності *m,* то $k_1 = \alpha - \beta i$ теж корінь кратності *m.* Цій парі коренів відповідатимуть такі частинні розв'язки!

$$
\begin{array}{ll}
y_1^1 = e^{(a+\beta i)x} & y_2^1 = e^{(a-\beta i)x} \\
y_1^2 = xe^{(a+\beta i)x} & y_2^2 = xe^{(a-\beta i)x} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_1^m = x^{m-1} e^{(a+\beta i)x} & y_2^m = x^{m-1} e^{(a-\beta i)x}
\end{array}
$$

Замість функцій $x^p e^{(a+\beta i)x}$ і $x^p e^{(a-\beta i)x}$, p=0,1,2,…,m-1 у фундаментальній системі можна взяти функції

$$x^p e^{ax} \cos \beta x \ \text{ і } \ x^p e^{ax} \sin \beta x$$

Таким чином,*m*-кратному комплексному кореню $a + \beta i$ характеристичного рівняння в загальному розв'язку відповідатимуть таких *2m* членів:

$$e^{ax} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_m x^{m-1}) \cos \beta x$$

і

$$e^{ax} (C_1' + C_2' x + C_3' x^2 + \ldots + C_m' x^{m-1}) \sin \beta x$$

Приклади

1. Розв'язати рівняння

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 + k + \ = 0$$

звідки $k_1 = k_2 -$

Маємо такий загальний розв'язок: $y = (C_1 + C_2 x)e^{-}$.

2. Розв'язати рівняння

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0,$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$k^3 - k^2 + 2k - \ = 0$, або $(k - 2)^3 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = k_3 = 2$, Отже,

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{2x}$$

3. Розв'язати рівняння

$$y^V + 5y^{IV} + 0y^{III} + 0y^{II} + 5y^I + y = 0$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^5 + \ k^4 + \ 0k^3 + \ 0k^2 + \ k + \ = 0$$

або

$$(k + \ )^5 = 0$$

Звідси

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = -$$

Загальний розв'язок:

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4)e^{-}$$

4. Розв'язати рівняння

$$y^{(4)} + 2y' - 1y' - 2y' + 36y = 0.$$

Розв'язання. З характеристичного рівняння

$$k^4 + \ k^3 - \ 1k^2 - \ 2k + \ 6 = 0$$

знаходимо $k_1 = k_2 = 2,\ k_3 = k_4 = -$ Отже,

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + (C_3 + C_4 x)e^{- x}$$

5. Розв'язати рівняння

$$y^{(4)} + 8y' + 6y = 0$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння $k^4 + k^2 + 6 = 0$

звідки $k_1 = k_2 = 2i,\ k_3 = k_4 = - i$.

Маємо такий загальний розв'язок:

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x$$

6. Розв'язати рівняння

$$y^{(4)} + 2y' + 3y' + 2y' + y = 0$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^4 + k^3 + k^2 + k + = 0$$

має корені

$$k_1 = k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ k_3 = k_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

це

Отже, функція

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left((C_1 + C_2 x)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + (C_3 + C_4 x)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

є загальним розв'язком.

7. Розв'язати рівняння

$$y^{V} + y^{IV} + 2y^{III} + 2y^{II} + y^{I} + y = 0$$

Розв'язання, Складаємо характеристичне рівняння $k^5 + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1 = 0$, звідки $k_1 = -1, k_2 = k_3 = i, k_4 = k_5 = -i$. Загальним розв'язком є функція

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x$$

Таким чином, схема інтегрування лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку з сталими коефіцієнтами складається з таких етапів.

1. Знаходження відповідного характеристичного рівняння (4.4).
2. Знаходження частинних розв'язків диференціального рівняння, які відповідають знайденим кореням характеристичного рівняння, причому

1) кожен з дійсних і різних коренів, наприклад k_1 дає частинний розв'язок $e^{k_1 x}$
2) кожна окрема пара комплексних коренів $\alpha + i\beta$ дає два частинних розв'язки $e^{ax}\cos\beta$ і $e^{ax}\sin\beta$
3) кожен m-кратний корінь, як дійсний, так і комплексний, дає m частинних розв'язків, які можна дістати за допомогою множення частинних розв'язків 1) і 2) на $1, x, x^2, ..., x^{m-1}$

3. Множення кожного з цих розв'язків на довільну сталу і додавання результатів.

Здобута таким чином сума і буде загальним розв'язком заданого диференціального рівняння.

В кожному варіантізнайти загальний розв’язок диференціального рівняння.

13.1. $y'' - 4y' + 3y = 0.$
13.2. $y'' - 4y' + 4y = 0.$
13.3. $y'' + 4y = 0.$
13.4. $y'' - y' - 2y = 0.$
13.5. $y'' - 2y' = 0.$
13.6. $y'' - 2y' + 2y = 0.$
13.7. $y'' + 5y' + 4y = 0.$
13.8. $y'' + 6y' + 9y = 0.$
13.9. $y'' + 25y = 0.$

13.10. $y'' - 2y' - 3y = 0.$
13.11. $y'' + 3y' = 0.$
13.12. $y'' + 6y' + 10y = 0.$
13.13. $y'' - 5y' + 4y = 0.$
13.14. $y'' - 8y' + 16y = 0.$
13.15. $y'' + 16y = 0.$
13.16. $y'' + 2y' - 3y = 0.$
13.17. $y'' - 3y' = 0.$
13.18. $y'' - 4y' + 5y = 0.$
13.19. $y'' + 4y' + 3y = 0.$
13.20. $y'' + 4y' + 4y = 0.$
13.21. $y'' + 9y = 0.$
13.22. $y'' + y' - 2y = 0.$
13.23. $y'' + 2y' = 0.$
13.24. $y'' + 2y' + 2y = 0.$
13.25. $y'' - 5y' + 6y = 0.$
13.26. $y'' - 4y = 0.$
13.27. $y'' - 6y' + 10y = 0.$
13.28. $y'' + 2y' + y = 0.$
13.29. $y'' + 3y' - 4y = 0.$
13.30. $y'' + 2y' + 6y = 0.$