Чичурин А. В.

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ШЕСТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

В настоящей работе приводится метод, позволяющий проинтегрировать нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка с шестью особыми точками с помощью символьного объекта DifferentialRoot, реализованного в системе Mathematica (версии 7 и 8).

1. Введение

Рассмотрим уравнение вида

$$y''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{y'y'' + A_k {y'}^3 + C_k y'}{y - a_k} + Ey', \tag{1}$$

где $y = y(x)$; а величины a_k, A_k, C_k $(k = \overline{1,6}), E$ − постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{k=1}^{6} A_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{6} a_k A_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{6} a_k^2 A_k = -2\sum_{k=1}^{6} a_k, \tag{2}$$

$$2A_k^2 + \sum_{j=1}^{6} \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0 \ \ (k, j = \overline{1,6};\ j \neq k), \tag{3}$$

$$\sum_{j=1; j\neq k}^{6} \frac{C_j - C_k}{a_k - a_j} = 2A_k + E \ \ (k, j = \overline{1,6};\ j \neq k). \tag{4}$$

Уравнение (1) возникает из уравнения Шази [1]

$$y''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{(y' - a_k')(y'' - a_k'') + A_k(y' - a_k')^3 + B_k(y' - a_k')^2 + C_k(y' - a_k')}{y - a_k} +$$
$$+Dw'' + Ew' + \prod_{i=1}^{6}(y - a_i) \sum_{k=1}^{6} \frac{F_k}{y - a_k}, \tag{5}$$

у которого коэффициенты a_k $(k = \overline{1,6})$ − постоянные, а коэффициенты B_k, F_k $(k = \overline{1,6})$ и D равны нулю. Условия (2)-(4) возникают из системы коэффициентных условий для уравнения Шази (5) [1] при указанных выше значениях коэффициентов.

Решение системы (2), (3) согласно работам [2, 3] имеет вид

$$A_k = \frac{-6a_k^4 + 4\sigma_1 a_k^3 + 3(\alpha_2 - \sigma_2)a_k^2 - 3\beta_2 a_k + 3\beta_3 - \sigma_4}{6a_k^5 - 5\sigma_1 a_k^4 + 4\sigma_2 a_k^3 - 3\sigma_3 a_k^2 + 2\sigma_4 a_k - \sigma_5} \quad (k = \overline{1,6}), \tag{6}$$

где основные симметрические многочлены σ_k, составленные из элементов a_k

$(k = \overline{1,6})$, связаны с величинами $\alpha_2, \beta_2, \beta_3$ следующими соотношениями

$$\beta_2 = \frac{(3\alpha_2 - \sigma_2)(2\alpha_2\sigma_1 - 3\sigma_3) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2}, \tag{7}$$

$$\beta_3 = \frac{2\sigma_1\sigma_5 - (3\alpha_2 - \sigma_2)(12\alpha_2^2 - 4\text{y}_2\alpha_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4)}{2(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)}, \tag{8}$$

а параметр α_2 удовлетворяет уравнению 5-й степени

$$\begin{gathered} 1296\alpha_2^5 - 1296\alpha_2^4 + 216(2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_4)\alpha_2^3 + 24(\sigma_1^2\sigma_4 - 2\sigma_2^3 - \\ 6\sigma_2(\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_4) - 9\sigma_1\sigma_5 + 54\sigma_6)\alpha_2^2 + (12\sigma_1(\sigma_3(2\sigma_2^2 - 3\sigma_4) + 6\sigma_2\sigma_5) + \\ \sigma_1^2(9\sigma_3^2 - 8\sigma_2\sigma_4 + 144\sigma_6) - 12(4\sigma_2^2\sigma_4 - 9\sigma_3\sigma_5 + 72\sigma_2\sigma_6) - 4\sigma_1^3\sigma_5)\alpha_2 + \\ (2\sigma_1\sigma_4 - 3\sigma_2\sigma_3 - 6\sigma_5)(\sigma_1^2\sigma_3 - 4\text{y}_1\sigma_4 + 12\sigma_5) + 4(\sigma_1^2 - 6\sigma_2)^2\sigma_6 = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

2. Главный результат

Приведем процедуру интегрирования уравнения (1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (2)-(4).

Введем замену

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{z(y)}. \tag{10}$$

В результате уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{y - a_i} \frac{dz}{dy} + 2\sum_{i=1}^{6} \frac{A_i}{y - a_i}\, z + 2\sum_{i=1}^{6} \frac{C_i}{y - a_i} + 2E. \tag{11}$$

Уравнение (11) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Мы можем переписать его в виде линейного уравнения с полиномиальными коэффициентами. Действительно, используя основные симметрические многочлены σ_k $(k = 1,6)$, перепишем уравнение (11) в виде

$$\begin{gathered} (y^6 - \sigma_1 y^5 + \sigma_2 y^4 - \sigma_3 y^3 + \sigma_4 y^2 - \sigma_5 y + \sigma_6)z'' = \\ = (6y^5 - 5\text{y}_1 y^4 + 4\sigma_2 y^3 - 3\sigma_3 y^2 + 2\sigma_4 y - \sigma_5)z' + \\ +2(-\sigma_5 A_6 + \sigma_4(A_5 + A_6)y - \sigma_3(A_4 + A_5 + A_6)y^2 + \\ +\sigma_2(A_3 + A_4 + A_5 + A_6)y^3 - \sigma_1(A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6)y^4)z + \\ +2(E + \sum_{i=1}^{6} \text{C}_i\, y^5 - \sigma_1(Ey + \text{C}_2 + \text{C}_3 + \text{C}_4 + \text{C}_5 + \text{C}_6)y^4 + \\ +\sigma_2(Ey + \text{C}_3 + \text{C}_4 + \text{C}_5 + C_6)y^3 - \sigma_3(Ey + \text{C}_4 + \text{C}_5 + \text{C}_6)y^2 + \\ +\sigma_4(Ey + \text{C}_5 + \text{C}_6)y - \sigma_5(Ey + \text{C}_6) + \sigma_6 E). \end{gathered} \tag{12}$$

Решение уравнения (12) при заданных постоянных величинах a_k $(k = \overline{1,6})$ и начальных условий $z(y_0) = z_0$, $z'(y_0) = z'_0$ можно определить через функцию **DifferentialRoot**[*lde*] [4], которая позволяет находить решения линейного дифференциального уравнения *lde*[*z*, *y*] с полиномиальными коэффициентами в символьной форме. Эта функция обобщает имеющиеся ранее у системы *Mathematica* (версии 7 и 8) возможности интегрирования линейных дифференциальных уравнений в виде специальных функций и др.

Находя с помощью этой функции два частных линейно независимых решения y однородного уравнения

$$
\begin{gathered}
(y^6 - \sigma_1 y^5 + \sigma_2 y^4 - \sigma_3 y^3 + \sigma_4 y^2 - \sigma_5 y + \sigma_6) z'' = \\
= (6y^5 - 5\sigma_1 y^4 + 4\sigma_2 y^3 - 3\sigma_3 y^2 + 2\sigma_4 y - \sigma_5) z' + \\
+2(-\sigma_5 A_6 + \sigma_4 (A_5 + A_6) y - \sigma_3 (A_4 + A_5 + A_6) y^2 + \\
+\sigma_2 (A_3 + A_4 + A_5 + A_6) y^3 - \sigma_1 (A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6) y^4) z
\end{gathered} \tag{13}
$$

и частное решение уравнения (12), построим общее решение уравнения (12). Из этого факта и замены, обратной (10), следует

Теорема. *Уравнение (1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (2)-(4), имеет общее решение в неявной форме вида*

$$
x + c_3 = \int \frac{dy}{\boldsymbol{DifferentialRoot}[lde12]}, \tag{14}
$$

где c_3 *– произвольная постоянная, а функция* $\boldsymbol{DifferentialRoot}[lde12]$ *определяет общее решение уравнения (12).*

Рассмотрим применение этой теоремы для решения уравнения (1)-(4) с заданными коэффициентами.

3. Пример.

Пусть

$$
a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = -2, a_5 = 4, a_6 = -4. \tag{15}
$$

В соответствии с формулами (6)-(8) находим коэффициенты A_k

$$
\begin{gathered}
A_1 = \frac{19 - 6\alpha_2 - \alpha_2^2}{30}, A_2 = -A_1, A_3 = -\frac{52 - 3\alpha_2 - \alpha_2^2}{48}, A_4 = -A_3, \\
A_5 = -\frac{176 - 3\alpha_2 + \alpha_2^2}{480}, A_6 = -A_5,
\end{gathered} \tag{16}
$$

причем параметр α_2 удовлетворяет условию (9). Это условие для коэффициентов вида (15) запишется в форме

$$
1296(\alpha_2 - 4)(\alpha_2 + 7)^2(\alpha_2(\alpha_2 + 11) + 16) = 0.
$$

Решая последнее уравнение относительно переменной α_2, находим

$$
\alpha_2 = 4, \alpha_2 = \frac{\sqrt{57} - 11}{2}, \alpha_2 = -\frac{\sqrt{57} + 11}{2}, \alpha_2 = -7.
$$

Будем сначала рассматривать три первых значения параметра α_2, поскольку для них выполняется условие

$$
18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2 \neq 0. \tag{17}
$$

3.1. Выберем первое значение $\alpha_2 = 4$. Тогда из соотношений (16) находим

$$
A_1 = -\frac{7}{10}, A_2 = \frac{7}{10}, A_3 = -\frac{1}{2}, A_4 = \frac{1}{2}, A_5 = -\frac{13}{40}, A_6 = \frac{13}{40}. \tag{18}
$$

Система (4) имеет ранг 4 и ее решение может быть записано в виде

$$
\begin{gathered}
C_3 = \frac{45C_1 + 25C_2 + 6E}{28}, \quad C_4 = \frac{25C_1 + 45C_2 - 6E}{28}, \\
C_5 = \frac{125C_1 + 99C_2 + 75E}{56}, \; C_6 = \frac{99C_1 + 125C_2 - 75E}{56},
\end{gathered} \tag{19}
$$

где C_1, C_2 – параметры.

Уравнение (12) тогда примет вид

$$
\begin{gathered}
(7y^6-147y^4+588y^2-448)z''=(1176y-588y^3+42y^5)z'-\\
-(1848-1050y^2-84y^4)z-104E+222Ey^2-132Ey^4+14Ey^6+\\
+15(1+y)^2(88-64y-10y^2+7y^3)C_1+15(y-1)^2(7y^3+10y^2-64y-88)C_2.
\end{gathered}\tag{20}
$$

Общее решение уравнения (20) имеет вид

$$
\begin{gathered}
z=c_1(4-5y+y^2)^2+c_2y(4+y^2)+(2E(3+7y^2)+\\
+5(2+7y)C_1+5(-2+7y)C_2)/14,
\end{gathered}\tag{21}
$$

где c_1, c_2 –произвольные постоянные. Подставляя выражение (21) в формулу (14), получим общее решение уравнения (1) с коэффициентами (15), (18), (19) в неявной форме

$$
-\frac{2(\psi 1-\psi 4)(\psi 2-y)^2\sqrt{\frac{(\psi 1-\psi 2)(\psi 3-y)}{(\psi 1-\psi 3)(\psi 2-y)}}\sqrt{\frac{(\psi 1-\psi 2)(\psi 2-\psi 4)(\psi 1-y)(\psi 4-y)}{(\psi 1-\psi 4)^2(\psi 2-y)^2}}}{\sqrt{5C_1(7y+2)+5C_2(7y-2)+2\left(7c_1(y^2-5y+4)^2+7c_2y(y^2+4)+E(7y^2+3)\right)}}\times
$$

$$
\times\frac{F\left(arcsin\left(\sqrt{\frac{(\psi 1-y)(\psi 2-\psi 4)}{(\psi 2-y)(\psi 1-\psi 4)}}\right)\mid\frac{(\psi 2-\psi 3)(\psi 1-\psi 4)}{(\psi 1-\psi 3)(\psi 2-\psi 4)}\right)}{(\psi 2-\psi 1)(\psi 2-\psi 4)}=\frac{x}{\sqrt{14}}+c_3,\quad (22)
$$

где [5]

$$
\begin{gathered}
\psi i\equiv \mathrm{Root}[14\#1^4c_1+\#1^3(14c_2-140c_1)+\#1^2(462c_1+14E)+\\
+\#1(35C_1+35C_2-560c_1+56c_2)+10C_1-10C_2+224c_1+6E\&,i]\ (i=\overline{1,4}),
\end{gathered}
$$

а функция F определяет эллиптический интеграл первого рода.

3.2. Выбирая второе значение $\alpha_2=\frac{\sqrt{57}-11}{2}$, находим из соотношений (16)

$$
\begin{gathered}
A_1=\tfrac{1}{12}\left(3+\sqrt{57}\right), A_2=-A_1, A_3=-\tfrac{1}{12}\left(6+\sqrt{57}\right), A_4=-A_3,\\
A_5=\tfrac{1}{48}\left(\sqrt{57}-27\right), A_6=-A_5.
\end{gathered}\tag{23}
$$

Соответствующая система (4) имеет решение вида

$$
\begin{gathered}
C_3=\tfrac{1}{32}\left(-9\left(\sqrt{57}-3\right)C_1+\left(53-7\sqrt{57}\right)C_2+6\left(\sqrt{57}-7\right)E\right),\\
C_4=\tfrac{1}{32}\left(\left(53-7\sqrt{57}\right)C_1-9\left(\sqrt{57}-3\right)C_2-6\left(\sqrt{57}-7\right)E\right),\\
C_5=\frac{-5\left(241+37\sqrt{57}\right)C_1-9\left(27+7\sqrt{57}\right)C_2+30\left(107+15\sqrt{57}\right)E}{2032+272\sqrt{57}},\\
C_6=\frac{-5\left(\left(241+37\sqrt{57}\right)C_2+\left(642+90\sqrt{57}\right)E\right)-9\left(27+7\sqrt{57}\right)C_1}{2032+272\sqrt{57}},
\end{gathered}\tag{24}
$$

где C_1, C_2 – параметры. Уравнение (12) тогда примет вид

$$16z'' = \frac{96y(y^4 - 14y^2 + 28)z'}{y^6 - 21y^4 + 84y^2 - 64} - \\ - \frac{48\left(4y^4 - (31 + \sqrt{57})y^2 - 4(\sqrt{57} - 3)\right)z}{y^6 - 21y^4 + 84y^2 - 64} + f(y), \tag{25}$$

где

$$f(y) = \frac{-9(\sqrt{57} - 3)C_1 + (53 - 7\sqrt{57})C_2 + 6(\sqrt{57} - 7)E}{y - 2} + \\ + \frac{(53 - 7\sqrt{57})C_1 - 9(\sqrt{57} - 3)C_2 - 6(\sqrt{57} - 7)E}{y + 2} + \\ + \frac{2(30(107 + 15\sqrt{57})E - 5(241 + 37\sqrt{57})C_1 - 9(27 + 7\sqrt{57})C_2)}{(127 + 17\sqrt{57})(y - 4)} - \\ - \frac{2\left(5\left((241 + 37\sqrt{57})C_2 + (642 + 90\sqrt{57})E\right) + 9(27 + 7\sqrt{57})C_1\right)}{(127 + 17\sqrt{57})(y + 4)} + \\ + \frac{32C_1}{y - 1} + \frac{32C_2}{y + 1} + 32E. \tag{26}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения (25) ($f(y) = 0$) можно записать как $z(y) = c_1 z_1(y) + c_2 z_2(y)$, где

$$z_1(y) = (4 - y)^{3/2}\sqrt{y - 4}\left((21 + \sqrt{57})y^2 - 3(\sqrt{57} - 5)y - 4(9 + \sqrt{57})\right),$$

$$z_2(y) = z_1(y) \times \int \frac{(y - 2)(y - 1)(y + 1)(y + 2)(y + 4)}{(y - 4)^3\left(-(21 + \sqrt{57})y^2 + 3(\sqrt{57} - 5)y + 4(9 + \sqrt{57})\right)^2}\,dy,$$

а общее решение уравнения (25), (26) тогда запишется в виде

$$z = c_1 z_1(y) + c_2 z_2(y) + z_2(y)\int z_1(y)\frac{f(y)}{W}dy - z_1(y)\int z_2(y)\frac{f(y)}{W}dy, \tag{27}$$

где $W = z_1(y)z_2{}'(y) - z_2(y)z_1{}'(y)$ − детерминант Вронского.

Используя формулу (14), находим *общее решение уравнения* (1) с коэффициентами (15), (23), (24) в виде $x + c_3 = \int \frac{dy}{z(y)}$, где $z(y)$ определяется соотношением (27).

Замечание 1. Для значения $\alpha_2 = -\frac{\sqrt{57}+11}{2}$ процедура отыскания общего решения соответствующего уравнения (1)-(4) аналогична, описанной выше для значения $\alpha_2 = \frac{\sqrt{57}-11}{2}$.

3.3. В случае, когда в соотношениях (7), (8) знаменатель равен нулю, то есть выполняется равенство

$$18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2 = 0, \tag{28}$$

поступаем так, как указано в работе [3]. Для этого находим из равенства (28) величину $\alpha_2 = \frac{6\sigma_2 - \sigma_1^2}{18}$ и подставляем ее в следующую систему

$$\sigma_1 = -2\alpha_1, \sigma_2 = \beta_1 + 3\alpha_2, \sigma_3 = -2\beta_2 - 4\alpha_3,$$

$$\sigma_4 = 3\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2, \sigma_5 = (-2)(\alpha_1\beta_3 - \beta_2\alpha_3), \sigma_6 = \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3,$$

приведенную в работе [3]. Решение полученной системы легко находится в виде

$$\alpha_1=-\frac{\sigma_1}{2},\beta_1=\frac{\sigma_1^2}{6},\beta_2=-2\alpha_3-\frac{\sigma_3}{2},\beta_3=\frac{\sigma_4}{3}-\frac{\sigma_1}{324}(108\alpha_3+\sigma_1^3-6\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3),$$

$$\sigma_1^5+27\sigma_3\sigma_1^2+324\sigma_5=6\sigma_2\sigma_1^3+108\sigma_4\sigma_1, \qquad (29)$$

$$\sigma_6=\frac{\alpha_3}{2}(4\alpha_3+\sigma_3)+\frac{(\sigma_1^2-6\sigma_2)(\sigma_1(108\alpha_3+\sigma_1^3-6\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3)-108\sigma_4)}{5832}. \qquad (30)$$

Тогда коэффициенты A_k запишутся как

$$A_k=\frac{(\sigma_1-6a_k)(108a_k^3-108\alpha_3-54\sigma_1a_k^2-\sigma_1^3-6a_k(\sigma_1^2-6\sigma_2)+6\sigma_1\sigma_2-27\sigma_3}{108(6a_k^5-5\sigma_1a_k^4+4\sigma_2a_k^3-3\sigma_3a_k^2+2\sigma_4a_k-\sigma_5)}$$

$$\left(k=\overline{1,6}\right). \qquad (31)$$

Таким образом, если для величин a_k $(k=\overline{1,6})$ выполняется условие (28), то величины A_k определяются по формулам (31), (30). При этом имеет место соотношение (29).

3.4. Возьмем теперь четвертое значение параметра α_2

$$\alpha_2=-7. \qquad (32)$$

Для него и для коэффициентов (15) выполняется условие (28), поэтому воспользуемся формулами (29)-(31). Подставляя в эти формулы величины (15) находим

$$A_1=\tfrac{1}{15}\left(6-\sqrt{66}\right),A_2=\tfrac{1}{15}\left(-6-\sqrt{66}\right),A_3=\tfrac{1}{12}\left(\sqrt{66}-6\right),$$
$$A_4=\tfrac{1}{12}\left(6+\sqrt{66}\right),A_5=\tfrac{1}{60}\left(-36-\sqrt{66}\right),A_6=\tfrac{1}{60}\left(36-\sqrt{66}\right), \qquad (33)$$

или

$$A_1=\tfrac{1}{15}\left(6+\sqrt{66}\right),A_2=\tfrac{1}{15}\left(\sqrt{66}-6\right),A_3=-\tfrac{1}{12}\left(6+\sqrt{66}\right),$$
$$A_4=\tfrac{1}{12}\left(6-\sqrt{66}\right),A_5=\tfrac{1}{60}\left(\sqrt{66}-36\right),A_6=\tfrac{1}{60}\left(36+\sqrt{66}\right). \qquad (34)$$

Соответствующая система (4) имеет решение вида

$$\mathrm{C}_3=\tfrac{1}{16}\left(9\left(6+\sqrt{66}\right)\mathrm{C}_1-\left(14+\sqrt{66}\right)\mathrm{C}_2+6\left(10+\sqrt{66}\right)E\right),$$
$$\mathrm{C}_4=\tfrac{1}{16}\left(\left(\sqrt{66}-14\right)\mathrm{C}_1-9\left(\sqrt{66}-6\right)\mathrm{C}_2+6\left(\sqrt{66}-10\right)E\right), \qquad (35)$$
$$\mathrm{C}_5=\tfrac{1}{16}\left(9\sqrt{66}\mathrm{C}_2-25\left(8+\sqrt{66}\right)\mathrm{C}_1-30\left(4+\sqrt{66}\right)E\right),$$
$$\mathrm{C}_6=\tfrac{1}{16}\left(25\left(\sqrt{66}-8\right)\mathrm{C}_2-9\sqrt{66}\mathrm{C}_1-30\left(\sqrt{66}-4\right)E\right),$$

где $\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2$ – параметры. Уравнение (12) примет вид

$$(64-84y^2+21y^4-y^6)z''+(168y-84y^3+6y^5)z'-$$
$$-\left(12\sqrt{66}y-84y^2+12y^4\right)z+g(y)=0, \qquad (36)$$

где

$$g(y)=3y(1+y)^2\left(36+\sqrt{66}-15y-\left(6+\sqrt{66}\right)y^2\right)\mathrm{C}_1+(y-1)^2(2E(1+y)^2\times$$
$$\times(y^2-3\sqrt{66}y-64)-3y(36-\sqrt{66}+15y+(\sqrt{66}-6)y^2)\mathrm{C}_2). \qquad (37)$$

Общее решение однородного уравнения (36) при $g(y)=0$ можно записать в виде

$$z(y)=c_1(y^3-7y-\sqrt{66})+c_2(y^4-2\sqrt{66}y-28),$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные. Общее решение уравнения (36), (37) тогда примет вид

$$z(y)=c_1\left(y^3-7y-\sqrt{66}\right)+c_2\left(y^4-2\sqrt{66}y-28\right)+E\left(y^2-\sqrt{66}y-\frac{29}{2}\right)-$$
$$-\frac{1}{4}(27+2\sqrt{66}+2(6+\sqrt{66})y)C_1+\frac{1}{4}(27-2\sqrt{66}+2(-6+\sqrt{66})y)C_2. \qquad (38)$$

Подставляя выражение (38) в формулу (14), получим общее решение уравнения (1) с коэффициентами (15), (33), (35) в неявной форме

$$2(\psi 1-y)(\psi 4-y)\sqrt{\frac{(\psi 1-\psi 2)(\psi 3-y)}{(\psi 1-\psi 3)(\psi 2-y)}}\times\varphi(y)^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\frac{F\left(arcsin\left(\sqrt{\frac{(\psi 1-y)(\psi 2-\psi 4)}{(\psi 2-y)(\psi 1-\psi 4)}}\right)\Big|\frac{(\psi 2-\psi 3)(\psi 1-\psi 4)}{(\psi 1-\psi 3)(\psi 2-\psi 4)}\right)}{(\psi 1-\psi 4)\sqrt{\frac{(\psi 1-\psi 2)(\psi 2-\psi 4)(\psi 1-y)(\psi 4-y)}{(\psi 1-\psi 4)^2(\psi 2-y)^2}}}\pm\frac{x}{2}=c_3, \quad (39)$$

где [5]

$$\psi i\equiv \mathrm{Root}[-2(56c_2+29E+2c_1(\sqrt{66}+7\#1-\#1^3)+$$
$$+2\#1(\sqrt{66}(2c_2+E)-E\#1-c_2\#1^3))-(27+2\sqrt{66}+2(6+\sqrt{66})\#1)C_1+$$
$$+(27-2\sqrt{66}+2(\sqrt{66}-6)\#1)C_2\&,i]\ (i=\overline{1,4}),$$
$$\varphi(y)=4y^2\left(E+y(c_1+c_2y)\right)-2\left(2\sqrt{66}c_1+56c_2+29E+2\left(7c_1+\sqrt{66}(2c_2+E)\right)y\right)-$$
$$-(27+2\sqrt{66}+2(6+\sqrt{66})y)C_1+(27-2\sqrt{66}+2(\sqrt{66}-6)y)C_2,$$

c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные, а функция F определяет эллиптический интеграл первого рода.

Замечание 2. Замена (10) была предложена в работе [6].

Замечание 3. Другие специальные случаи уравнения (3) были рассмотрены в работах [7-10].

4 Заключение

С помощью формулы (14) и символьных объектов **DifferentialRoot** [4] *или* **Root** [5] *удается проинтегрировать уравнение* (1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (2)-(4) *в замкнутой форме в квадратурах, элементарных или специальных функциях.*

В рассмотренном примере для значения параметра $\alpha_2=4$ общее решение уравнения (1) с коэффициентами (15), (18), (19) найдено в эллиптических функциях (22), для значения параметра $\alpha_2=-\frac{\sqrt{57}+11}{2}$ общее решение уравнения (1) с коэффициентами (15), (23), (24) найдено в виде квадратуры в замкнутой форме, а для значения параметра $\alpha_2=7$ общее решение уравнения (1) с коэффициентами (15), (33), (35) найдено в эллиптических функциях (39). Отметим, что если $c_1 = 0, c_2 = 0$, то соотношения (39) определяют следующие элементарные функции

$$y = \frac{1}{8E} e^{-\sqrt{E}(x+2c_3)} (e^{2\sqrt{E}(x+2c_3)} + 2e^{\sqrt{E}(x+2c_3)} (2\sqrt{66}E + (6+\sqrt{66})\mathrm{C}_1 -$$
$$-(\sqrt{66}-6)\mathrm{C}_2) + 2(248E^2 + \left(51+6\sqrt{66}\right)\mathrm{C}_1^2 +$$
$$+2\mathrm{C}_1\left(\left(93+8\sqrt{66}\right)E - 15\mathrm{C}_2\right) + 2(8\sqrt{66}-93)E\mathrm{C}_2 + (51-6\sqrt{66})\mathrm{C}_2^2)),$$

$$y = \frac{1}{8E} e^{-\sqrt{E}(x+2c_3)} (496E^2 e^{2\sqrt{E}x} + e^{4\sqrt{E}c_3} + 4\sqrt{66}E e^{\sqrt{E}(x+2c_3)} +$$
$$+2e^{\sqrt{E}(x+2c_3)} \left(\left(6+\sqrt{66}\right)\mathrm{C}_1 - \left(\sqrt{66}-6\right)\mathrm{C}_2\right) +$$
$$+2e^{2\sqrt{E}x}((51+6\sqrt{66})\mathrm{C}_1^2 + 2\mathrm{C}_1((93+8\sqrt{66})E - 15\mathrm{C}_2) +$$
$$+\mathrm{C}_2(2(8\sqrt{66}-93)E + (51-6\sqrt{66})\mathrm{C}_2))).$$

Литература

1. Chazy J. *Sur les equations differentielles du troisieme ordre et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes* // Acta Math., 1911. Vol. 34. P. 317–385.

2. Мартынов И.П., Чичурин А.В. *Использование системы Mathematica при решении системы уравнений Шази* // Тезисы докладов международной конференции "Математическое моделирование и дифференциальные уравнения" (Минск, БГУ, 2-5 октября 2007 г.)", - Минск, Институт математики НАН Беларуси, 2007. - С. 89 - 91.

3. Martynov I.P., Chichurin A.V. *On a solution of the Chazy system of equations* // Nonlinear Oscillations. - 2009. Vol. 12, #1, - pp. 92 - 98.

4. http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/DifferentialRoot.html

5. http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/Root.html

6. Лукашевич Н.А. *К теории уравнения Шази* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т.29, № 2. – С. 353-357.

7. Чичурин А.В. *Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса*: Монография. 2-е изд., доп. и перераб. - М.: Изд-во РУДН, 2003. - 163 с.

8.Чичурин А.В. *К проблеме существования отображений между классами уравнений Шази и уравнениями второго порядка* // Вестник Белорусского ун-та. Сер. 1, Математика. - 2003. - № 2. – С. 74 - 78.

9. Чичурин А.В. *Решение системы Шази и интегирование дифференциального уравнения Шази с шестью постоянными полюсами с помощью системы Mathematica* // Веснік Брэсцкага дзяржаўнага універсітэта.- 2010. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка № 2, С.134-141.

10. Чичурін О. *Про дослідження одного классу рівнянь Шазі* // Вісник Київського национального університету імені Тараса Шевченка. - 2010. Серыя Математика. Механика. Выпуск 24, - С. 14-20.