УДК 517.9

Г. Степанюк, асп., О. Чичурін, д-р фіз.-мат. наук, проф.
stepgp@inbox.ru, chichurin@gmail.com

ОДНОПАРАМЕТРИЧНІ СІМ'Ї РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ТРЕТЬОГО СТУПЕНЯ, ЩО ПОВ'ЯЗАНЕ З УЗАГАЛЬНЕНИМ РІВНЯННЯМ АБЕЛЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Будуються диференціальні рівняння другого порядку третього степеня, для яких доводиться наявність двох однопараметричних сімей розв'язків у формі загальних розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку. За допомогою еквівалентної системи двох диференціальних рівнянь встановлюється зв'язок між побудованими диференціальними рівняннями і диференціальними рівняннями другого порядку першого степеня, які мають однопараметричні сім'ї розв'язків у формі загальних розв'язків рівнянь Абеля.

There are constructed the second order differential equations of third degree for which existence of two one-parameter solution sets in the form of general solutions to the first order differential equations is proved. By means of equivalent system of differential equations there is demonstrated connection between constructed differential equations and the second order differential equations of the first degree that have one-parameter solution sets in the form of general solutions of Abel equations.

Вступ. Найпростішими з точки зору структури правої частини диференціального рівняння першого порядку в нормальному вигляді, після рівняння Ріккаті, є рівняння вигляду

$$\frac{dw}{dz} = a_0(z)w^3 + a_1(z)w^2 + a_2(z)w + a_3(z). \tag{1}$$

Це рівняння, як і рівняння Ріккаті, часто зустрічається в теорії диференціальних рівнянь та її застосуваннях [1].

Аналітичні властивості розв'язків рівняння (1) суттєво відрізняються від властивостей розв'язків рівняння Ріккаті. Це пояснюється двома причинами: 1) розв'язки рівняння (1) мають рухомі алгебраїчні точки розгалуження другого порядку у той час, як розв'язки рівняння Ріккаті можуть мати лише рухомі полюси першого порядку; 2) рівняння Ріккаті завжди зводиться до однорідного лінійного рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами, в той час як для рівняння (1) це можливо лише в окремих випадках. Для відшукання загального розв'язку рівняння Ріккаті достатньо знати один його частинний розв'язок, у той час як для рівняння (1) питання про побудову його загального розв'язку за його частинними розв'язками не розглядалося. З іншого боку, очевидно, що для побудови рівняння вигляду (1) завжди достатньо знати чотири його (різні) частинні розв'язки [2].

У [2, 3] для рівняння Абеля першого роду побудовано диференціальне рівняння другого порядку

$$\begin{gathered}16w^6a_0^3 + 32w^5a_0^2a_1 + w^4\left(20a_0a_1^2 + 20a_0^2a_2\right) + 2a_1a_2a_3 - 2a_0a_3^2 - 5a_0\left(w'\right)^2 + \\ +w'(-20w^3a_0^2 - 20w^2a_0a_1 - 3a_1a_2 + 7a_0a_3 + w\left(-6a_1^2 - 2a_0a_2 - 3a_0\right) - a_1) + a_3a_1 + \\ +w^3\left(4a_1^3 + 22a_0a_1a_2 + 14a_0^2a_3 + 2a_1a_0 - 2a_0a_1\right) + w^2\left(6a_1^2a_2 + 4a_0a_2^2 + 14a_0a_1a_3 + 3a_2a_0 - 3a_0a_2\right) - a_1a_3 + \\ +w\left(2a_1a_2^2 + 4a_1^2a_3 + 2a_0a_2a_3 + 3a_3a_0 + a_2a_1 - a_1a_2 - 3a_0a_3\right) + \left(3wa_0 + a_1\right)w'' = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

У статтях [3, 4] доведено, що рівняння (2) має однопараметричні сім'ї розв'язків у формі загального розв'язку рівняння (1) і рівняння

$$w' = b_0(z)w^3 + b_1(z)w^2 + b_2(z)w + b_3(z), \tag{3}$$

коефіцієнти $b_i(z)$, $i = \overline{0,3}$, якого відрізняються від функцій $a_i(z)$, $i = \overline{0,3}$, і мають вигляд

$$\begin{gathered}b_0 = 4a_0, b_2 = \frac{b_1^2 + 12a_0a_2 - 4a_1^2}{12a_0}, \qquad b_3 = a_3 + \frac{a_1(b_1 - 2a_1)^2}{36a_0^2}, \\ b_1 = \frac{1}{36a_0}(b_1^3 - 12a_1b_1^2 + 36(a_1^2 + a_0 + a_0a_2)b_1 - 32a_1^3 - 72a_0a_1a_2 - 216a_0^2a_3 - 72a_1a_0 + 72a_0a_1)\end{gathered} \tag{4}$$

або

$$\begin{gathered}b_0 = 4a_0, \quad b_2 = a_2 + \frac{b_1^2 - 4a_1^2}{12a_0}, \quad b_3 = \frac{1}{180a_0^2}(12a_1^3 - 20a_1^2b_1 + a_1(36a_0a_2 + 5b_1^2 + 36a_0) + 36a_0(2a_0a_3 - a_1)), \\ b_1 = \frac{1}{180a_0}(180a_1^2b_1 - 224a_1^3 - 1944a_0^2a_3 - 12a_1(6a_0a_2 + 5b_1^2 + 6a_0) + 5(b_1^3 + 36b_1a_0) + 36a_0(5a_2b_1 + 2a_1))\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}152a_1^5 - 112a_1^4b_1 - 2a_1^3(234a_0a_2 - 7b_1^2 + 234a_0) + 36a_1^2(57a_0^2a_3 + 14b_1a_0 + a_0(14a_2b_1 + 13a_1)) - \\ -9a_1(a_0(7b_1^2 + 108a_0) + 12a_0^2(9a_2^2 + 14a_3b_1 - 3a_2) + a_0(a_2(7b_1^2 + 180a_0) + 56b_1a_1 - 36a_0)) + 9a_0((7b_1^2 + 108a_0)a_1 + \\ +108a_0^2(3a_2a_3 - a_3) + 3a_0(a_3(7b_1^2 + 36a_0) + 48a_2a_1 - 12a_1)) = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Рівняння (2) як рівняння, що має дві однопараметричні сім'ї розв'язків у формі загального розв'язку рівняння Абеля, будемо називати *узагальненим рівнянням Абеля* другого порядку.

У статті [4] для рівняння (2) побудовано дві еквівалентні системи виду

$$\begin{cases} w' = k_0 + k_1w + k_2w^2 + k_3w^3 + (3a_0w + a_1)u, \\ u' = \alpha u^2 + (p_0w^2 + p_1w + p_2)u + q_0w^3 + q_1w^2 + q_2w + q_3, \end{cases} \tag{7}$$

з двома наборами коефіцієнтів $k_i, q_i, i=\overline{0,3}$, p_0, p_1, p_2, що залежать від z, а саме:

$$\alpha = 2a_0,\ p_0 = 6a_0,\quad k_3 = a_0,\quad k_2 = 3p_1 - 11a_1,\ k_1 = \frac{3}{4}p_2 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{7a_1}{4a_0}(p_1 - 4a_1),\ k_0 = a_3 + \frac{a_0a_1(p_2-2a_2) - 4a_1^3 + 4a_1^2p_1}{4a_0^2},$$

$$q_0 = 5p_1 - 20a_1,\ q_1 = \frac{3}{2}p_2 - 3a_2 + \frac{25a_1p_1 - 68a_1^2 - 2p_1^2}{2a_0},$$

$$q_2 = \frac{1}{4a_0^2}(28a_1^2p_1 - 64a_1^3 + 4p_1a_0 - a_1(16a_0a_2 + 3p_1^2 + 16a_0) + a_0(2a_2p_1 + p_1p_2 + 16a_1 - 4p_1)), \tag{8}$$

$$q_3 = \frac{1}{8a_0^3}(8a_1^3p_1 - 16a_1^4 - a_1^2(16a_0a_2 + p_1^2 + 16a_0) + a_1(32a_0^2a_3 + 4p_1a_0 + a_0(4a_2p_1 + 16a_1 - 2p_1)) +$$

$$+a_0(2p_2a_0 - 4a_2a_0 - 2p_1a_1 + a_0(p_2^2 - 4a_2^2 - 8a_3p_1 + 4a_2 - 2p_2)))$$

та

$$\alpha = 2a_0,\ p_0 = 4a_0,\ k_3 = 4a_0,\ k_2 = 3p_1 - 4a_1,\ k_1 = \frac{3}{4}p_2 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{7a_1}{4a_0}(p_1 - 2a_1),\ k_0 = a_3 + \frac{a_1^2p_1 - 2a_1^3 + a_0a_1(p_2 - 2a_2)}{4a_0^2},$$

$$q_0 = 0, q_1 = p_2 - 2a_2 + \frac{5a_1p_1 - 6a_1^2 - p_1^2}{a_0},\ q_2 = \frac{1}{4a_0^2}(14a_1^2p_1 - 16a_1^3 - 8a_0^2a_3 + 4p_1a_0 - a_1(8a_0a_2 + 3p_1^2 + 8a_0) +$$

$$+a_0(2a_2p_1 + p_1p_2 + 8a_1 - 4p_1)),\ q_3 = \frac{1}{8a_0^3}(4a_1^3p_1 - 4a_1^4 - a_1^2(8a_0a_2 + p_1^2 + 8a_0) + 2a_1(8a_0^2a_3 + 2p_1a_0 + a_0(2a_2p_1 + 4a_1 - p_1)) +$$

$$+a_0(2p_2a_0 - 4a_2a_0 - 2p_1a_1 + a_0(p_2^2 - 4a_2^2 - 8a_3p_1 + 4a_2 - 2p_2))). \tag{9}$$

Між функціями u і w системи (7) і рівняння (2) існує наступний зв'язок: якщо з першого рівняння системи (7) знайти функцію u, тобто записати

$$u = \frac{w' - (k_0 + k_1w + k_2w^2 + k_3w^3)}{3a_0w + a_1}, \tag{10}$$

а потім підставити (10) у друге рівняння, то в результаті отримаємо рівняння (2).

У даній статті розглядається задача про побудову диференціальних рівнянь з певними (наперед визначенними) властивостями розв'язків в околі їх рухомих особливих точок: для випадку, коли однопараметричні сімейства розв'язків шуканих рівнянь визначаються через загальний розв'язок рівнянь Абеля першого порядку, що має рухомі алгебраїчні особливі точки. Ця задача є однією з актуальних задач сучасної аналітичної теорії диференціальних рівнянь.

Основний результат. Для того, щоб сформулювати основний результат статті, виконаємо наступну процедуру: продиференціюємо друге рівняння системи (7) за z, а потім з системи (7) і отриманого рівняння виключимо функції $w(z)$, $w'(z)$. В результаті отримаємо рівняння другого порядку з поліноміальною правою частиною третього ступеня, яке позначимо (А). Це рівняння не записуємо тут через його громіздкість.

Відомо [5], що рівняння Абеля (1) завжди можна звести до канонічної форми

$$w' = w^3 + i(z), \tag{11}$$

тобто маємо наступні коефіцієнтні рівності

$$a_0(z) = 1,\quad a_1(z) = 0,\quad a_2(z) = 0,\quad a_3(z) = i(z). \tag{12}$$

Для спрощення подальших викладок покладемо

$$p_1(z) = 1,\quad p_2(z) = 0. \tag{13}$$

Враховуючи (12), перепишемо рівняння (2) у вигляді

$$3ww'' - 5w'^2 + (-20w^3 + 7i)w' + 16w^6 + 14iw^3 - 3i'w - 2i^2 = 0. \tag{14}$$

Рівняння (14) має сім'ю розв'язків, які задовольняють рівняння (11). Наступна сім'я розв'язків отримується з рівнянь (3), (4), (12), тобто

$$w' = 4w^3 + b_1w^2 + \frac{1}{12}b_1^2w + i, \tag{15}$$

де коефіцієнт $b_1(z)$ пов'язаний з функцією $i(z)$ співвідношенням

$$b_1 = \frac{1}{36}b_1^3 - 6i. \tag{16}$$

Третя однопараметрична сім'я розв'язків рівняння (14) є загальним розв'язком рівняння, отримується з рівнянь (3), (5), (12) і співвідношення (6):

$$w' = 4w^3 + b_1w^2 + \frac{1}{12}b_1^2w + \frac{2}{5}i, \tag{17}$$

де $b_1^2 = 36i'/(7i)$, а функцію $i(z)$ можна визначити як гіпергеометричну функцію [6]:

$$i(z) = InverseFunction[-(7(4\times 5^{2/3}(20C_1 + 189\sqrt{7}\sharp 1^{4/7}) + 63\sqrt{7}\ ,$$

$$Hypergeometric2F1[\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{2},-\frac{189\sqrt{7}\sharp 1^{4/7}}{20C_1}](40 + \frac{378\sqrt{7}\sharp 1^{4/7}}{C_1})^{2/3}\ \sharp 1^{4/7})\sharp 1)/(40\times 2^{2/3}C_1(20C_1\sharp 1^{27/14} + 189\sqrt{7}\sharp 1^{5/2})^{2/3})\&][z + C_2]. \tag{18}$$

Таким чином, отримано наступний результат.

Теорема 1. *Диференціальне рівняння (14) має три однопараметричні сім'ї розв'язків, що визначаються співвідношеннями (11);) (15), (16) та (17), (18).*

Тепер, підставивши (8), (12), (13) у систему (7), отримаємо систему:

$$\begin{cases} w' = w^3 + 3w^2 + 3wu + i(z), \\ u' = 2u^2 + (6w^2 + w)u + 5w^3 - w^2 - i(z), \end{cases} \tag{19}$$

яка еквівалентна рівнянню (14).

Рівняння (A), що відповідає рівнянню (14) і системі (19), має вигляд

$$\begin{gathered}
368640u^{10} + 884736u^{11} + 324i^4(-136 + 1308u + 1152u^2 + 1026u^3 - 1575u') + 1536u^7(-443u' + 81(u')^2 - 63u'') + 625(u'')^3 + \\
+96u^5(13917(u')^2 + 1440(u')^3 + u'(60 - 2148u'') + u''(355 + 81u')) + 384u^6(6978(u')^2 + 341u'' - 3u'(193 + 90u'')) + \\
+3u(183924(u')^4 + 35108(u')^2u'' + u'(176 - 1075u'')u'' + 240(u'')^2 + 14(u')^3(832 + 675u'')) + 6u^3(-247404(u')^3 + 2304(u')^4 - \\
-28020u'u'' + u''(-144 + 2585u'') + 4(u')^2(-2744 + 7401u'')) + i'(-96768u^7 + 165888u^8 + 8100i^3(-8 + 3u) - 16i' + 625(i')^2 - \\
-2700i'u' - 336(u')^2 - 38475(u')^3 - 384u^6(-341 + 270u') - 6i^2(64 - 15876u^2 - 14256u^3 + 5184u^4 + 29025u' - 3u(4472 + 5175u')) - \\
-32u'' + 1875i'u'' - 5400u'u'' + 1875(u'')^2 - 48u^4(-730 + 75i' - 307u' + 432(u')^2 + 150u'') + 96u^5(355 + 81i' - 2148u' + 162u'') + \\
+3u(35108(u')^2 + 9450(u')^3 - 5i'(-48 + 215u') + u'(176 - 2150u'') + 480u'') + 6u^3(-144 + 2585i' - 28020u' + 29604(u')^2 + 5170u'') - \\
-6u^2(4371(u')^2 + 10i'(44 + 195u') + 880u'' + 12u'(298 + 325u'')) - 3i(74304u^5 + 6912u^6 + u^3(61484 - 74520u') + \\
+48u^4(-77 + 360u') + 5(170i' + 48u' + 9855(u')^2 + 340u'') - 2u(64 + 600i' + 30745u' + 16200(u')^2 + 1200u'') + \\
+2u^2(2512 + 1800i' - 9555u' + 3600u''))) + 3i^2(217728u^7 + 124416u^8 - 160434(u')^2 - 151875(u')^3 - 288u^6(-3241 + 216u') - \\
-1080u^5(-361 + 288u') - 128u'' - 48u^4(-1592 + 20007u' + 216u'') + 8u^3(-1240 - 168930u' + 21303(u')^2 + 3564u'') + \\
+6u^2(32 + 11394u' + 33093(u')^2 + 5292u'') - 6u'(64 + 9675u'') + 2u(451251(u')^2 + 13416u'' + u'(8992 + 15525u''))) = \\
= 145800i^5 + 784(u')^3 + 135324(u')^4 + 18225(u')^5 + 2048u^9(-89 + 540u') + 4608u^8(1 + 492u' - 36u'') + 336(u')^2u'' + 38475(u')^3u'' + \\
+16(u'')^2 + 2700u'(u'')^2 + 48u^4(12330(u')^3 - 307u'u'' + 5u''(-146 + 15u'') + (u')^2(-4982 + 432u'')) + 2i^3(128 + 538488u^4 + \\
+373248u^5 + 93312u^6 + 119880u' + 346275(u')^2 - 216u^3(-3052 + 1755u') - 108u^2(89 + 4320u') + 32400u'' - \\
-18u(352 + 47430u' + 675u'')) + 6u^2(-25404(u')^3 + 30537(u')^4 + 440(u'')^2 + 6u'u''(596 + 325u'') + 3(u')^2(-80 + 1457u'')) + \\
+3i(691200u^8 + 479232u^9 - 3840u^7(-53 + 72u') - 64u^6(-793 + 28368u' - 108u'') + 192u^5(-7 - 4422u' + 9(u')^2 + 387u'') + \\
+16u^4(49464(u')^2 - 231u'' + 8u'(-1186 + 135u'')) + 2u^2(-56382(u')^2 + 24570(u')^3 + 8u''(314 + 225u'') - 21u'(16 + 455u'')) - \\
-2u(329265(u')^3 + 30745u'u'' + 8(u')^2(1588 + 2025u'')) + 8u''(8 + 75u'') - 4u^3(-351465(u')^2 + 8280(u')^3 - 15371u'' + \\
+6u'(-1324 + 3105u'')) + 5(28062(u')^3 + 9720(u')^4 + 48u'u'' + 170(u'')^2 + (u')^2(112 + 9855u''))).
\end{gathered} \tag{20}$$

Щоб знайти однопараметричні сім'ї розв'язків рівняння (20), зробимо наступне: із системи (8), (10) – (13) визначимо $u = -w$, або, враховуючи рівність (11), отримаємо

$$u' = u^3 - i(z). \tag{21}$$

Потім з системи (8), (10), (12), (13), (15), (16) знаходимо

$$u = w^2 + \frac{1}{3}(b_1 - 3)w + \frac{1}{36}b_1^2. \tag{22}$$

Підставляючи співвідношення (22)у рівність (15) і враховуючи (16), отримуємо

$$u' = \frac{1}{216}(3(43 + 12u - 5\varphi)b_1^2 - 72(3i + 2(\varphi + 3u(\varphi - 4u - 5) - 3)) + 36(3\varphi - 13 + 2u(\varphi - 14))b_1 - 5b_1^3), \tag{23}$$

де

$$\varphi \equiv \sqrt{36u - 6b_1 + 9}. \tag{24}$$

Таким чином, отримано наступний результат.

Теорема 2. *Диференціальне рівняння (20) має дві однопараметричні сім'ї розв'язків, що визначаються співвідношеннями (21) та (23), (24), (16).*

Тепер, підставивши (9), (12), (13) в систему (7), отримаємо ще одну систему

$$\begin{cases} w' = 4w^3 + 3w^2 + 3wu + i(z), \\ u' = 2u^2 + (4w^2 + w)u - w^2 - 2i(z)w - i(z), \end{cases} \tag{25}$$

що еквівалентна рівнянню (14).

Рівняння, що аналогічне рівнянню (А) у попередньому випадку, і яке відповідає рівнянню (14) та системі (25), позначимо як рівняння (В). Тут не записуємо це рівняння в явному вигляді через його громіздкість. Для того, щоб отримати однопараметричні сім'ї розв'язків рівняння (В), за допомогою методу, що описаний вище у випадку рівняння (20), з системи (9), (10) – (13) знаходимо $u = -w(1+w)$, або, враховуючи рівність (11), маємо:

$$u' = \frac{1}{2}\sqrt{1-4u}(2i - 1 - \sqrt{1-4u} + (3 + \sqrt{1-4u})u). \tag{26}$$

Далі, з системи (9), (10), (12), (13), (15), (16) знаходимо

$$u = \frac{1}{36}\left(12(b_1 - 3)w + b_1^2\right). \tag{27}$$

Підставляючи (27) у рівність (15) і враховуючи (16), отримуємо:

$$u' = \frac{1}{144(b_1-3)^2}(-b_1^4 + 4u(b_1^2 - 3b_1 + 27)b_1^2 - 1296u^2 b_1 + 5184u^3 + 24i(b_1 - 3)(b_1^2 - 6b_1 - 36u + 18)). \tag{28}$$

Таким чином, встановлено наступний результат.

Теорема 3. *Диференціальне рівняння (В) має дві однопараметричні сім'ї розв'язків, що визначаються співвідношеннями (26) та (28), (16).*

Висновок. З допомогою вищевикладеного методу доведено (теореми 1-3), що рівняння (14) і (В) мають однопараметричні сім'ї розв'язків у вигляді загальних розв'язків рівняння Абеля (1) і наведена аналітична форма цих розв'язків.

1. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 462 с. 2. Лукашевич Н.А., Чичурин А.В. Дифференциальные уравнения первого порядка. – Мн.: БГУ, 1999. – 210 с. 3. Чичурин А.В. О существовании отображений между нелинейным уравнением второго порядка и уравнениями Абеля // Вестник Белорусского университета. Сер. 1, Математика. – 2003. – №3. – С. 76 – 80. 4. Чичурин А.В. Использование системы Mathematica при поиске конструктивных методов интегрирования уравнения Абеля // Вучоныя запіскі БрДУ імя А.С.Пушкіна. – 2007. – Т.3, ч.2. – С. 24 – 38. 5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с. 6. http://search.wolfram.com/?query=InverseFunction.

Надійшла до редколегії 17.04.11

УДК 519.21

З. Вижва, канд. фіз.-мат. наук, К. Федоренко, асп.,
e-mail: vsa@univ.kiev.ua

ПРО СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ НА ПЛОЩИНІ З КОРЕЛЯЦІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ ТИПУ КОШІ

Розглянуто задачу статистичного моделювання однорідних та ізотропних випадкових полів на площині із кореляційною функцією типу Коші. Побудовано модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій таких випадкових полів на основі їх спектрального розкладу.

The problem of statistical simulation of homogeneous and isotropic random fields on the plane with Koshi correlations functions has been considered. It has been constructed the model and algorithm for the statistical simulation of this fields realizations on the base of its spectral decomposition.

Вступ

За допомогою методів Монте-Карло можна згенерувати на комп'ютері реалізації важливих у практичному застосуванні випадкових полів, для яких отримано засобами статистичної обробки необхідну інформацію. А саме, якщо поле гауссівське, то використовують його математичне сподівання та кореляційну функцію. Цій проблемі на прикладі моделі Коші присвячено подану роботу.

1. Постановка задачі та її розв'язання

Розглядається задача статистичного моделювання реалізацій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині з кореляційною функцією типу Коші. Наведено обчислення спектральних коефіцієнтів для таких випадкових полів. Вони використовуються у побудованому моделюючому алгоритмі, що розроблений на основі спектрального розкладу полів [1, с. 59] .

Нехай $\xi(x), (x \in R^2)$ − дійснозначне і неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне випадкове поле на площині.

Означення: Випадкове поле $\xi(x)$ називається однорідним, якщо виконуються умови:

1) $E\xi(x) = const$ (припустимо,що $E\xi(x) = 0$);

2) $B(x,y) = B(x-y) = E\xi(x)\overline{\xi}(y) = \int\limits_{R^2} e^{i(\lambda, x-y)}\mu(d\lambda)$,

тобто його кореляційна функція $B(\rho)$ залежить лише від різниці $x-y$, де $\mu(d\lambda)$ − спектральна міра однорідного випадкового поля $\xi(x)$.

Означення: Випадкове поле $\xi(x)$ називається ізотропним, якщо $B(\rho) = B(|x-y|)$,тобто, його кореляційна функція залежить лише від довжини вектора $x-y$ і не залежить від його напрямку.

Як відомо [6], кореляційну функцію випадкового поля на площині $\xi(x)$ можна подати у вигляді:

$$B(\rho) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho)d\Phi(\lambda),$$

де $\Phi(\lambda)$ – обмежена неспадна функція, що є спектральною функцією, а $J_0(x)$ - функція Бесселя першого роду порядку 0.