УДК 517.925

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ШАЗИ

И. П. Мартынов (Гродно, Беларусь), А. В. Чичурин (Брест, Беларусь)
chio@tut.by

Аннотация

Найдено решение системы Шази, состоящей из 9 нелинейных алгебраических уравнений. Эта система представляет собой необходимое условие принадлежности к P-типу класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с шестью особыми точками.

Введение. Исследуя на предмет принадлежности к $P-$типу уравнения вида

$$w''' = R(w'', w', w, z), \tag{1}$$

где R – рациональная функция по w'', w', w с аналитическими коэффициентами по z, Шази получил упрощенное уравнение

$$w''' = \frac{PQ'' - P''Q}{PQ' - P'Q} w'w'' - \frac{P'Q'' - P''Q'}{PQ' - P'Q} \frac{w'^3}{2}, \tag{2}$$

где $P,\ Q$ – два полинома четвертой степени по w с постоянными коэффициентами, а P', P'', Q', Q'' – производные полиномов P, Q по w [1]. В этой же работе он показал, что уравнение (2) имеет не более шести полюсов, а также то, что уравнение $P-$типа вида (1), которое допускает в качестве своего упрощения уравнение (2) (причем все корни относительно переменной w уравнения $PQ' - QP' = 0$ простые), необходимо имеет вид

$$w''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{(w' - a_k')(w'' - a_k'') + A_k(w' - a_k')^3 + B_k(w' - a_k')^2 + C_k(w' - a_k')}{w - a_k} +$$

$$+ Dw'' + Ew' + \prod_{i=1}^{6}(w - a_i) \sum_{k=1}^{6} \frac{F_k}{w - a_k}. \tag{3}$$

Уравнение (3) содержит 32 функции по z: a_k, A_k, B_k, C_k, F_k $(k = \overline{1,6})$, D, E. Развивая метод Пенлеве [2] для уравнения (3), Шази получил систему из 31 алгебраического и дифференциального уравнений, в которых в качестве неизвестных выступают 32 функции – коэффициенты уравнения (3). Система девяти уравнений, которая связывает функции A_k и a_k $(k = \overline{1,6})$, согласно работе [1], имеет вид

$$\sum_{k=1}^{6} A_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{6} a_k A_k = -6, \quad \sum_{k=1}^{6} a_k^2 A_k = -2 \sum_{k=1}^{6} a_k, \tag{4}$$

$$2A_k^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{6} \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0 \quad (k = \overline{1,6}). \tag{5}$$

Неизвестными функциями в системе (4), (5) являются функции A_k ($k=\overline{1,6}$).

Формулировка задачи. Целью данной работе является нахождение решения системы (4), (5).

Прежде всего отметим, что в работе [1] отсутствует подробный вывод условий (4), (5). Поэтому приведем здесь подробную процедуру получения условий (4), (5).

Уравнение (3) имеет шесть конечных полюсов по w. Поэтому значение z_0 при котором $w=\infty$ не может быть полюсом уравнения (3) и, следовательно, точка z_0 является только точкой голоморфности упрощенного уравнения (2), которое можно записать в виде

$$(w-a_1)w''' = \left(1+\sum_{j=2}^{6}\frac{w-a_1}{w-a_j}\right)w'w'' + \left(A_1+\sum_{j=2}^{6}\frac{(w-a_1)A_j}{w-a_j}\right)w'^3. \qquad (6)$$

Запишем разложение для простого полюса z_0 функции w

$$w(z)=\frac{\alpha}{z-z_0}+\beta+\gamma(z-z_0)^2+..., \qquad (7)$$

где $\alpha,\ \beta,\ z_0$ – произвольные постоянные.

Тогда имеем

$$\frac{w-a_1}{w-a_j}=1+\frac{a_j-a_1}{\alpha}(z-z_0)+...\ (j=\overline{2,6}), \qquad (8)$$

$$(w-a_1)w'''=-\frac{6\alpha^2}{(z-z_0)^5}+\frac{6\alpha(a_1-\beta)}{(z-z_0)^4}+..., \qquad (9)$$

$$\frac{w-a_1}{w-a_j}w'^3=-\frac{\alpha^3}{(z-z_0)^6}+\frac{(a_1-a_j)\alpha^2}{(z-z_0)^5}+\frac{(a_1-a_j)(a_j-\beta)\alpha}{(z-z_0)^4}+...\ (j=\overline{2,6}), \qquad (10)$$

$$w'w''=-\frac{2\alpha^2}{(z-z_0)^5}+...\ . \qquad (11)$$

Отсюда возникают коэффициентные условия (4) как резонансные условия [3] для любых значений α и β. Действительно, подставим соотношения (8)-(11) в уравнение (6) и сравним коэффициенты при $(z-z_0)^{-6},\ (z-z_0)^{-5},\ (z-z_0)^{-4}$. Коэффициентное условие при $(z-z_0)^{-6}$ есть

$$0=\sum_{k=1}^{6}A_k, \qquad (12)$$

то есть получаем первое условие системы (4). Коэффициентное условие при $(z-z_0)^{-5}$ есть

$$-6\alpha^2=-12\alpha^2+\sum_{j=2}^{6}A_j(a_1-a_j)\alpha^2$$

или, разделив на α^2, получаем

$$6=a_1\sum_{j=2}^{6}A_j-\sum_{j=2}^{6}a_jA_j.$$

Учитывая равенство (12), легко записать последнее соотношение в форме второго уравнения системы (4).

Коэффиицентное условие при $(z-z_0)^{-4}$ есть

$$6\alpha a_1 - 6\alpha\beta = \alpha(2\sum_{j=2}^{6}(a_1-a_j) + \sum_{j=2}^{6}(a_1-a_j)a_jA_j) - \alpha\beta\sum_{j=2}^{6}(a_1-a_j)A_j. \tag{13}$$

Поскольку α и β произвольные постоянные, то коэффициенты при α и β должны обязательно равняться нулю. Приравнивая коэффициенты при $\alpha\beta$ в обеих частях соотношения (13), получаем второе уравнение системы (4). Равенство коэффициентов при α в соотношении (13) приводит к уравнению

$$0 = 4a_1 - 2\sum_{j=2}^{6}a_j + a_1\sum_{j=2}^{6}a_jA_j - \sum_{j=2}^{6}a_j^2A_j. \tag{14}$$

Выразив значения сумм $\sum_{j=2}^{6}A_j$ и $\sum_{j=2}^{6}a_jA_j$ из первого и второго уравнений системы (4) и подставив в равенство (14), получим третье уравнение системы (4).

Теперь выведем систему (5). Для этого рассмотрим голоморфное разложение функции w в точке z_0

$$w(z) = a_1(z_0) + \alpha(z-z_0) + \beta(z-z_0)^2 + \gamma(z-z_0)^3 + \dots\ , \tag{15}$$

где $\alpha,\ \gamma,\ z_0$ – произвольные постоянные. Дифференцируя (15), получим

$$w''' = 6\gamma + \dots, \tag{16}$$

$$w'w'' = 2\alpha\beta + (6\alpha\gamma + 4\beta^2)(z-z_0) + \dots\ , \tag{17}$$

$$w'^3 = \alpha^3 + 6\alpha^2\beta(z-z_0) + \dots\ . \tag{18}$$

Подставим в уравнение (6) соотношения (15)-(18) и учтем, что

$$\frac{w-a_1}{w-a_j} = \frac{\alpha}{a_1-a_j}(z-z_0) + \ \dots\ . \tag{19}$$

В полученном уравнении сравним коэффициенты при $(z-z_0)^0$: $\quad 2\alpha\beta + A_1\alpha^3 = 0$ или

$$2\beta = -A_1\alpha^2 \text{ для } \forall\alpha; \tag{20}$$

и коэффициенты при $(z-z_0)^1$:

$$6\alpha\gamma = 6\alpha\gamma + 4\beta^2 + 6\alpha^2\beta A_1 + \sum_{j=2}^{6}\frac{2\alpha^2\beta + A_j\alpha^4}{a_1-a_j}.$$

Подставляя значение β из (20) в последнее соотношение, найдем

$$A_1^2\alpha^4 - 3\alpha^4A_1^2 + \sum_{j=2}^{6}\frac{(A_j-A_1)\alpha^4}{a_1-a_j} = 0. \tag{21}$$

Уравнение (21) можно преписать в виде

$$2A_1^2 + \sum_{j=2}^{6}\frac{A_1-A_j}{a_1-a_j} = 0. \tag{22}$$

Беря в соотношении (19) вместо a_1 функцию a_j $(j = \overline{2,6})$ и проведя аналогичные рассуждения для каждого из этих значений j, получим еще пять соотношений вида (22), то есть получим систему (5).

Решение задачи. Сформулируем основной результат.

Теорема. *Решение системы (4), (5) имеет вид*

$$A_k = \frac{-6a_k^4 + 4\sigma_1 a_k^3 + 3(\alpha_2 - \sigma_2)a_k^2 - 3\beta_2 a_k + 3\beta_3 - \sigma_4}{6a_k^5 - 5\sigma_1 a_k^4 + 4\sigma_2 a_k^3 - 3\sigma_3 a_k^2 + 2\sigma_4 a_k - \sigma_5} \quad (k = \overline{1,6}), \tag{23}$$

где основные симметрические многочлены σ_k, составленные из элементов a_k $(k = \overline{1,6})$, связаны с величинами α_2, β_2, β_3 следующими соотношениями

$$\beta_2 = \frac{(3\alpha_2 - \sigma_2)(2\alpha_2\sigma_1 - 3\sigma_3) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2}, \tag{24}$$

$$\beta_3 = \frac{2\sigma_1\sigma_5 - (3\alpha_2 - \sigma_2)(12\alpha_2^2 - 4\sigma_2\alpha_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4)}{2(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)}, \tag{25}$$

а функция α_2 удовлетворяет уравнению 5-й степени

$$1296\alpha_2^5 - 1296\alpha_2^4 + 216(2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_4)\alpha_2^3 + 24(\sigma_1^2\sigma_4 - 2\sigma_2^3 - 6\sigma_2(\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_4) - 9\sigma_1\sigma_5 + 54\sigma_6)\alpha_2^2 +$$
$$+ (12\sigma_1(\sigma_3(2\sigma_2^2 - 3\sigma_4) + 6\sigma_2\sigma_5) + \sigma_1^2(9\sigma_3^2 - 8\sigma_2\sigma_4 + 144\sigma_6) - 12(4\sigma_2^2\sigma_4 - 9\sigma_3\sigma_5 + 72\sigma_2\sigma_6) -$$
$$-4\sigma_1^3\sigma_5)\alpha_2 + (2\sigma_1\sigma_4 - 3\sigma_2\sigma_3 - 6\sigma_5)(\sigma_1^2\sigma_3 - 4\sigma_1\sigma_4 + 12\sigma_5) + 4(\sigma_1^2 - 6\sigma_2)^2\sigma_6 = 0. \tag{26}$$

Доказательство. Доказательство теоремы основано на методе Н.А. Лукашевича, опубликованном в работе [4]. Решение системы (4), (5) мы ищем, согласно работе [4], в виде

$$A_k = \frac{\sum_{i=0}^{4} \chi_i a_i^{4-i}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{6} (a_k - a_j)} \quad (k, j = \overline{1,6}), \tag{27}$$

где χ_i – неизвестные функции. Перепишем знаменатели правых частей (27), используя основные симметрические многочлены σ_i $(i = \overline{1,6})$, в виде

$$\varphi(a_k) \equiv \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{6} (a_k - a_j) = 6a_k^5 - 5\sigma_1 a_k^4 + 4\sigma_2 a_k^3 - 3\sigma_3 a_k^2 + 2\sigma_4 a_k - \sigma_5 \quad (k = \overline{1,6}). \tag{28}$$

Выберем функции χ_i $(i = \overline{0,4})$ согласно формул (23):

$$\chi_0 = -6, \quad \chi_1 = 4\sigma_1, \quad \chi_2 = 3(\alpha_2 - \sigma_2), \quad \chi_3 = -3\beta_2, \quad \chi_4 = 3\beta_3 - \sigma_4, \tag{29}$$

где неизвестные функции α_2, β_2, β_3 связаны с другими функциями α_1, α_3, β_1 и основными симметричесмими многочленами σ_i $(i = \overline{1,6})$ следующими соотношениями

$$\sigma_1 = -2\alpha_1, \ \sigma_2 = \beta_1 + 3\alpha_2, \ \sigma_3 = -4\alpha_3 - 2\beta_2, \ \sigma_4 = 3\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2, \tag{30}$$

$$\sigma_5 = -2(\alpha_1\beta_3 - \beta_1\alpha_3), \ \sigma_6 = \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3. \tag{31}$$

Решая систему (30), (31), относительно неизвестных величин β_2, β_3 и α_2 получим соотношения (24)-(26) и

$$\alpha_1 = -\frac{\sigma_1}{2}, \quad \beta_1 = \sigma_2 - 3\alpha_2, \quad \alpha_3 = \frac{\sigma_1(4\alpha_2(\sigma_2 - 3\alpha_2) - \sigma_1\sigma_3 + 4\sigma_4) - 12\sigma_5}{4(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)}.$$

Подставим значения функций A_k $(k = \overline{1,6})$ из соотношений (23) в левые части уравнений системы (4) и воспользуемся тождествами

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{\varphi(a_k)} \equiv \sum_{k=1}^{6} \frac{a_k}{\varphi(a_k)} \equiv \sum_{k=1}^{6} \frac{a_k^2}{\varphi(a_k)} \equiv \sum_{k=1}^{6} \frac{a_k^3}{\varphi(a_k)} \equiv \sum_{k=1}^{6} \frac{a_k^4}{\varphi(a_k)} \equiv 0,$$

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{a_k^5}{\varphi(a_k)} \equiv 1, \ \sum_{k=1}^{6} \frac{a_k^6}{\varphi(a_k)} \equiv \sigma_1, \ \sum_{k=1}^{6} \frac{a_k^7}{\varphi(a_k)} \equiv \sigma_1^2 - \sigma_2 \tag{32}$$

(тождества (32) доказаны в работе [4] на основе свойств определителей Вандермонда [5]). В результате несложных преобразований получаем правые части уравнений системы (4). Таким образом, соотношения (23) удовлетворяют системе (4).

Теперь подставим значения функций A_k $(k = \overline{1,6})$ из соотношений (23)-(26) в левые части уравнений системы (5). После приведения к общему знаменателю и выделения множителей получим шесть выражений

$$(6a_k^2 + \sigma_2 - 2a_k\sigma_1)(1296\alpha_2^5 - 1296\alpha_2^4 +$$

$$+216(2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_4)\alpha_2^3 + 24(\sigma_1^2\sigma_4 - 2\sigma_2^3 - 6\sigma_2(\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_4) - 9\sigma_1\sigma_5 + 54\sigma_6)\alpha_2^2 +$$

$$+(12\sigma_1(\sigma_3(2\sigma_2^2 - 3\sigma_4) + 6\sigma_2\sigma_5) + \sigma_1^2(9\sigma_3^2 - 8\sigma_2\sigma_4 + 144\sigma_6) - 12(4\sigma_2^2\sigma_4 - 9\sigma_3\sigma_5 + 72\sigma_2\sigma_6) -$$

$$-4\sigma_1^3\sigma_5)\alpha_2 + (2\sigma_1\sigma_4 - 3\sigma_2\sigma_3 - 6\sigma_5)(\sigma_1^2\sigma_3 - 4\sigma_1\sigma_4 + 12\sigma_5) + 4(\sigma_1^2 - 6\sigma_2)^2\sigma_6 \ (k = \overline{1,6}). \tag{33}$$

Но второй множитель в произведениях (33) равен нулю в силу соотношения (26). Таким образом, доказано, что функции (23)-(26) удовлетворяют также системе (5) для каждого из пяти корней уравнения (9).

Замечание 1. *Если набор функций a_k $(k = \overline{1,6})$ обладает определенной симметрией, то некоторые из пяти наборов функций A_k вида (23)-(26) могут совпадать.*

Покажем это на примере.

Пример. Выберем функции a_k $(k = \overline{1,6})$ линейными вида

$$a_1 = x, \ a_2 = 2x, \ a_3 = 4x, \ a_4 = -x, \ a_5 = -2x, \ a_6 = -4x.$$

Тогда функции A_k $(k = \overline{1,6})$ вида (23)-(26) запишутся в форме

$$A_1 = \frac{19x^4 - 6x^2\alpha_2 - \alpha_2^2}{30x^5}, \ A_2 = \frac{\alpha_2^2 + 3x^2\alpha_2 - 52x^4}{48x^5}, \ A_3 = \frac{-\alpha_2^2 + 9x^2\alpha_2 - 176x^4}{480x^5},$$

$$A_4 = -A_1, \quad A_5 = -A_2, \quad A_6 = -A_3,$$

а функция α_2 является одной из трех функций

$$(\alpha_2)_1 = 4x^2, \quad (\alpha_2)_2 = -\frac{(\sqrt{57} + 11)x^2}{2}, \quad (\alpha_2)_3 = \frac{(\sqrt{57} - 11)x^2}{2}.$$

Литература

1. Chazy J. *Sur les equations differentielles du troisieme ordre et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes* // Acta Math., 1911. Vol. 34. P. 317–385.

2. Painleve P. *Lecons sur les theorie analytique des equations differentielles. Professies a Stokholm,* Paris, 1897.

3. Мартынов И.П. *О некоторых задачах аналитической теории дифференциальных уравнений, решаемых в Гродненском государственном университете* // Веснік Гродненского дзяржаунага універсітэта, - 2003, сер. 2, № 2(22), с. 15-25.

4. Лукашевич Н.А. *К теории уравнения Шази* // Дифференц. уравнения, - 1993. Т.29, № 2. С. 353–357.

5. Ван дер Варден Б.Л. *Алгебра.* М., Наука, 1976.