УДК 517.5

О. В. Федуник (Ін - т математики НАН України, Київ)

ЛІНІЙНІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ $\boldsymbol{B^{\Omega}_{p,\theta}}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Одержано точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в метриці простору L_q для деяких значень параметрів p та q.

Нехай $\mathbb{R}^d$ — евклідів простір з елементами $x = (x_1, ..., x_d)$, $L_p(\pi_d)$, $1 \leq p < \infty$, — простір 2π-періодичних на кубі $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi; \pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ зі скінченною нормою, яка визначається рівністю

$$||f||_{L_p(\pi_d)} = ||f||_p = \Big((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Всюди далі будемо вважати, що функції $f(x)$ належать підпростору

$$L^0_p(\pi_d) = \Big\{ f : \quad f \in L_p(\pi_d), \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0 \;, j = \overline{1, d} \Big\}.$$

За допомогою рівності

$$\Delta^l_{h_j} f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \ldots, x_d)$$

означимо l-ту різницю функції $f(x)$ з кроком h_j за змінною x_j.

Для $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ і $h = (h_1, \ldots, h_d)$ введемо мішану l-ту різницю

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \ldots \Delta_{h_1}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\ldots (\Delta_{h_1}^l f(x))).$$

Означимо для $f \in L_p^0(\pi_d)$ мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega^l(f,t)_p = \sup_{|h_j| \le t_j, j=\overline{1,d}} ||\Delta_h^l f(\cdot)||_p \ .$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$— задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0,\ \ t_j > 0,\ \ j = \overline{1,d}\ ;\ \ \Omega(t) = 0\ ,\ \ \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0\ ;$

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \le \Big(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j \Big)^l \Omega(t)\ ,\ \ m_j \in \mathbb{N}\ ,\ \ j = \overline{1,d}\ ;$

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0\ ,\ \ j = \overline{1,d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) , (S_l) , які називають умовами Барі–Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau)$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}\ , \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Функція $\varphi(\tau)$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}\ , \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \ne j$.

Зазначимо , що функції , які задовольняють сформульовані вище умови 1) – 4), (S) та (S_l) , можуть мати вигляд

$$\Omega(t) = t_1^{r_1} \cdot ... \cdot t_d^{r_d} \cdot \Big(\log \frac{1}{t_1}\Big)^{m_1} \cdot ... \cdot \Big(\log \frac{1}{t_d}\Big)^{m_d},$$

де $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$, а m_j , $j = \overline{1,d}$, — фіксовані дійсні числа.

Означимо деякі порядкові співвідношення , які будуть використовуватись далі.

Функції $\mu(n)$ і $\nu(n)$ називаємо функціями однакового порядку і писати $\mu(n) \asymp \nu(n)$, якщо існує n_0, таке, що для будь–якого $n > n_0$ виконується нерівність $C_3\mu(n) \le \nu(n) \le C_4\mu(n)$, де сталі $C_3, C_4 > 0$ можуть залежати тільки від параметрів, які входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та від розмірності d простору $\mathbb{R}^d$. Якщо ж $\mu(n) \le C_5\nu(n)$ або $\mu(n) \ge C_6\nu(n)$, то позначимо $\mu(n) \ll \nu(n)$ і $\mu(n) \gg \nu(n)$ відповідно.

Нехай $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\Omega(t)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності, що задовольняє умови 1) – 4), (S) і (S_l). Тоді клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ означається в наступний спосіб:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \Big\{ f \in L^0_p(\pi_d) : \ ||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \Big\},$$

де

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \Big\{ \int\limits_{\pi_d} \Big(\frac{\Omega^l(f,t)_p}{\Omega(t)}\Big)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \Big\}^{\frac{1}{\theta}}, \ 1 \le \theta < \infty \ , \tag{1}$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega^l(f,t)_p}{\Omega(t)}. \tag{2}$$

У [2] встановлено інше зображення норм (1), (2). Нехай $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,d}$.

Позначимо

$$\rho(s) = \left\{ \ k : \quad 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, \ j = \overline{1, d} \right\} ,$$

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$. Тоді

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_s ||\delta_s(f, \cdot)||^{\theta}_p \ \Omega(2^{-s})^{-\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}} , \ \ 1 \leq \theta < \infty \ , \qquad (3)$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{||\delta_s(f, \cdot)||_p}{\Omega(2^{-s})} \ , \qquad (4)$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_d})$.

Зазначимо, що класи функцій $B^{\Omega}_{p,\theta}$ були введені в роботі [2]. У випадку $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$ норма класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадає з означеною в [3] нормою класу $B^{r}_{p,\theta}$. При $\theta = \infty$ клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадає із класом H^{Ω}_p [4].

Зауважимо, що при $\Omega(t) = t_1^{r_1} \cdot ... \cdot t_d^{r_d}$ із (3), (4) випливають зображення

$$||f||_{B^{r}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_s 2^{(r,s)\theta} ||\delta_s(f, \cdot)||^{\theta}_p \right\}^{\frac{1}{\theta}} , \ 1 \leq \theta < \infty,$$

$$||f||_{B^{r}_{p,\infty}} \asymp \sup_s 2^{(r,s)} ||\delta_s(f, \cdot)||_p \ ,$$

які встановлені в [3].

В даній роботі встановимо точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі $L_q(\pi_d)$ для деяких значень параметрів p та q. Нагадаємо, що поняття лінійного поперечника ввів В.М.Тихомиров [5]. Перейдемо до означення.

Нехай W — множина в банаховому просторі X. Тоді лінійний поперечник множини W в просторі X (позначається $\lambda_M(W, X)$) визначається за формулою

$$\lambda_M(W, X) = \inf_A \sup_{f \in W} ||f - Af||_X, \tag{5}$$

де нижня межа береться по всіх діючих в X лінійних операторах A, розмірність області значень яких не перевищує M.

Зазначимо, що лінійний поперечник $\lambda_M(W, X)$ пов'язаний із поперечником $d_M(W, X)$, введеним А.М.Колмогоровим [6], нерівністю

$$d_M(W, X) \leq \lambda_M(W, X). \tag{6}$$

У зв'язку з цим цікаво з'ясувати, в яких випадках (для конкретних множин W і просторів X) поперечники $d_M(W, X)$ і $\lambda_M(W, X)$ співпадають, а в яких випадках в (6) має місце строга нерівність.

В даний час є велика кількість робіт, присвячених дослідженню лінійних поперечників тих чи інших класів функцій однієї та багатьох змінних. Тут згадаємо лише роботи Е.М.Галєєва [7 , 8], де досліджуються величини (5) для класів функцій багатьох змінних W^r_p і H^r_p, а також роботи А.С.Романюка [9 , 10], в яких встановлено порядкові оцінки лінійних поперечників класів функцій багатьох змінних $B^r_{p,\theta}$. В названих роботах міститься досить детальна бібліографія.

Наведемо тепер кілька тверджень, які будемо використовувати далі.

Нехай l_p^m означає простір $\mathbb{R}^m$, в якому введена норма

$$||x||_{l_p^m} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1 \le i \le m} |x_i|, & p = \infty, \end{cases}$$

і B_p^m — одинична куля в l_p^m.

Має місце така теорема.

Теорема А [11]. Нехай $M < m$, $1 \le p < 2 \le q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$. Тоді

$$\lambda_M(B_p^m, l_q^m) \asymp \max \Big\{ m^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}, min\Big\{1, m^{\frac{1}{q}} M^{-\frac{1}{2}}\Big\} \sqrt{1 - \frac{M}{m}} \Big\}.$$

Зауважимо, що у випадку $p = 1, q > 2$ відповідний результат випливає з твердження, встановленого Б.С.Кашиним [12].

Теорема Б (Літтлвуда - Пелі, див., наприклад [13, с.65]). Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді існують додатні числа C_7, C_8 такі, що для кожної функції $f(x) \in L_p^0(\pi_d)$ виконується співвідношення

$$C_7 ||f||_p \le \Big\| \Big(\sum_s |\delta_s(f; \cdot)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \le C_8 ||f||_p \ .$$

Позначимо через $\mathcal{T}(\rho(s))$, де $s \in \mathbb{N}^d$, множину функцій вигляду

$$f(x) = \sum_{k \in \rho(s)} c_k e^{i(k,x)}.$$

Лема [7]. Нехай $s \in \mathbb{N}^d$ і $f(\cdot) \in \mathcal{T}(\rho(s))$, $M_s \in \mathbb{Z}_+$, $M_s \le 2^{(s,1)}$. Якщо $1 < p$, $q < \infty$, то існує лінійний оператор $\Lambda_{M_s} : \mathcal{T}(\rho(s)) \to \mathcal{T}(\rho(s))$, розмірність області значень якого не перевищує M_s і такий, що

$$\|f(\cdot) - \Lambda_{M_s} f(\cdot)\|_q \asymp \Lambda_{M_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, l_q^{2^{(s,1)}}) 2^{(s,1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f(\cdot)\|_p \ . \quad (7)$$

Перш ніж перейти до викладу основних результатів, зазначимо, що ми будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального вигляду:

$$\Omega(t) = \omega\Big(\prod_{j=1}^{d} t_j\Big), \tag{8}$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l). Легко переконатися, що для $\Omega(t)$ вигляду (8) виконуються властивості 1) – 4) функції типу мішаного модуля неперервності порядку l, а також умови (S) і (S_l). Тому при такій функції типу мішаного модуля неперервності $\Omega(t)$, за якою визначається клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, зберігаються зображення (3), (4) норм функцій із цього класу.

Теорема 1. Нехай $1 < p \le 2 \le q \le p'$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > \frac{1}{p}$ та умову (S_l). Тоді для будь-яких натуральних M та n, які задовольняють умову $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце співвідношення

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}, \tag{9}$$

де $a_+ = max\{a, 0\}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Доведення. Встановимо спочатку в (9) оцінку зверху. Нехай $f(x)$ — довільна функція із класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ і задано достатньо велике число M. Підберемо n із співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і кожному вектору s поставимо у відповідність числа

$$M_s = \begin{cases} 2^{(s,1)}, & (s,1) \le n, \\ \left[2^{n+\nu(n-(s,1))}\right], & (s,1) > n, \end{cases} \tag{10}$$

де $\nu > 0$ — деяке число, яке ми підберемо пізніше, $[a]$ — ціла частина числа a.

Оцінимо $\sum\limits_{s} M_s$. Для цього скористаємось тим, що

$$\sum_{(s,1)\le n} 2^{(s,1)} = \sum_{j=d}^{n} \sum_{(s,1)=j} 2^{(s,1)} = \sum_{j=d}^{n} 2^j \sum_{(s,1)=j} 1 \asymp$$

$$\asymp \sum_{j=d}^{n} 2^j j^{d-1} \ll 2^n n^{d-1}, \tag{11}$$

$$\sum_{(s,1)>n} 2^{-\nu(s,1)} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{(s,1)=j} 2^{-\nu(s,1)} = \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-\nu j} \sum_{(s,1)=j} 1 \asymp$$

$$\asymp \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-\nu j} j^{d-1} \ll 2^{-\nu n} n^{d-1}, \tag{12}$$

при $\nu > 0$.

Із врахуванням (11) і (12) будемо мати

$$\sum_{s} M_s \le \sum_{(s,1)\le n} 2^{(s,1)} + \sum_{(s,1)>n} 2^{n+\nu(n-(s,1))} \ll 2^n n^{d-1} \asymp M.$$

Для функції $f(x) \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ розглянемо лінійний оператор, який діє за формулою

$$\Lambda_M f(x) = \sum_{s} \Lambda_{M_s} \delta_s(f,x),$$

де оператори Λ_{M_s} побудовані у відповідності до леми, тобто вони задовольняють співвідношення (7). Оцінимо $\|f(x) - \Lambda_M f(x)\|_q$.

Використовуючи послідовно теорему Літтлвуда—Пелі, нерівність Мінковського і співвідношення (7), отримаємо

$$\|f(x) - \Lambda_M f(x)\|_q \ll \left\| \Big(\sum_{(s,1)>n} |\delta_s(f,x) - \Lambda_{M_s}\delta_s(f,x)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_q =$$

$$= \Big\| \sum_{(s,1)>n} |\delta_s(f,x) - \Lambda_{M_s}\delta_s(f,x)|^2 \Big\|_{\frac{q}{2}}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{(s,1)>n} \Big\| |\delta_s(f,x) - \Lambda_{M_s}\delta_s(f,x)|^2 \Big\|_{\frac{q}{2}} \Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Big(\sum_{(s,1)>n} \|\delta_s(f,x) - \Lambda_{M_s}\delta_s(f,x)\|_q^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \Big(\sum_{(s,1)>n} \Lambda^2_{M_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, l_q^{2^{(s,1)}}) 2^{2(s,1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = I_1. \quad (13)$$

Згідно з теоремою A

$$\Lambda_{M_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, l_q^{2^{(s,1)}}) \ll 2^{(s,1)\frac{1}{q}} M_s^{-\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

тому з (13) і (14) матимемо

$$I_1 \ll \Big(\sum_{(s,1)>n} 2^{(s,1)\frac{2}{q}} M_s^{-1} 2^{2(s,1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Big(\sum_{(s,1)>n} 2^{(s,1)\frac{2}{p}} M_s^{-1} \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Підставляючи в (15) замість M_s відповідні значення із (10), одержимо

$$I_1 \ll \Big(\sum_{(s,1)>n} 2^{(s,1)\frac{2}{p}} 2^{-n-\nu(n-(s,1))} \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}} \Big(\sum_{(s,1)>n} 2^{(s,1)(\frac{2}{p}+\nu)} \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}} I_2.$$

Оскільки $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$ задовольняє умову (S) при $\alpha > \frac{1}{p}$, то

$$\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}, \tag{16}$$

при $(s,1) \geq n$.

Враховуючи (16), оцінимо I_2.

$$I_2 = \Big(\sum_{(s,1)>n} 2^{(s,1)(\frac{2}{p}+\nu)} \omega^2(2^{-(s,1)}) \omega^{-2}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Big(\sum_{(s,1)>n} 2^{(s,1)(\frac{2}{p}+\nu-2\alpha)} \frac{\omega^2(2^{-(s,1)})}{2^{-2\alpha(s,1)}} \omega^{-2}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \Big(\sum_{(s,1)>n} 2^{(s,1)(\frac{2}{p}+\nu-2\alpha)} \frac{\omega^2(2^{-n})}{2^{-2\alpha n}} \omega^{-2}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{\alpha n} \omega(2^{-n}) \Big(\sum_{(s,1)>n} 2^{2(s,1)(\frac{1}{p}+\frac{\nu}{2}-\alpha)} \omega^{-2}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Отже ,

$$2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}} I_2 \ll 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}+\alpha n} \omega(2^{-n}) \times$$

$$\times \Big(\sum_{(s,1)>n} 2^{2(s,1)(\frac{1}{p}+\frac{\nu}{2}-\alpha)} \omega^{-2}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = I_3.$$

Підберемо ν з умови

$$\frac{1}{p} + \frac{\nu}{2} - \alpha < 0. \tag{17}$$

Тепер, щоб оцінити I_3, розглянемо кілька випадків.

а) Нехай $2 < \theta < \infty$.

Застосуємо до I_3 нерівність Гельдера з показником $\frac{\theta}{2}$ і використаємо співвідношення (12)

$$I_3 \leq 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}+\alpha n}\omega(2^{-n})\Big(\sum_{(s,1)>n}\omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}}\times$$

$$\times\Big(\sum_{(s,1)>n}2^{(s,1)(\frac{1}{p}+\frac{\nu}{2}-\alpha)\frac{2\theta}{\theta-2}}\Big)^{\frac{\theta-2}{2\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}+\alpha n}\omega(2^{-n})\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}\Big(\sum_{(s,1)>n}2^{(s,1)(\frac{1}{p}+\frac{\nu}{2}-\alpha)\frac{2\theta}{\theta-2}}\Big)^{\frac{\theta-2}{2\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}+\alpha n}\omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}+\frac{\nu}{2}-\alpha)}n^{(d-1)\frac{\theta-2}{2\theta}} =$$

$$= \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

б) $1 \leq \theta \leq 2$.

Скориставшись нерівністю [14]

$$\Big(\sum_k a_k^{m_1}\Big)^{\frac{1}{m_1}} \leq \Big(\sum_k a_k^{m_2}\Big)^{\frac{1}{m_2}}, a_k \geq 0\ ,\ 1 \leq m_2 \leq m_1 < \infty,$$

отримаємо

$$I_3 \leq 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}+\alpha n}\omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}+\frac{\nu}{2}-\alpha)}\times$$

$$\times\Big(\sum_{(s,1)>n}\omega^{-2}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p^{2}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\Big(\sum_{(s,1)>n}\omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p^{\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \leq$$

$$\leq \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \leq \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}.$$

в) $\theta = \infty$.

Використаємо нерівність (17) і співвідношення (12)

$$I_3 \leq 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}+\alpha n}\omega(2^{-n}) \sup_s \frac{\|\delta_s(f,x)\|_p}{\omega(2^{-(s,1)})}\Bigg(\sum_{(s,1)>n} 2^{2(s,1)(\frac{1}{p}+\frac{\nu}{2}-\alpha)}\Bigg)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}+\alpha n}\omega(2^{-n})\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}}\Bigg(\sum_{(s,1)>n} 2^{2(s,1)(\frac{1}{p}+\frac{\nu}{2}-\alpha)}\Bigg)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}+\alpha n}\omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}+\frac{\nu}{2}-\alpha)}n^{\frac{d-1}{2}} =$$

$$= \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Таким чином, з проведених міркувань випливає оцінка зверху в співвідношенні (9).

Оцінку знизу в (9) отримуємо із відповідної оцінки колмогоровського поперечника $d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ на основі нерівності (6). Теорема доведена.

Зауваження 1. Якщо $\Omega(t) = \Pi_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$, $1 < p \leq 2 \leq q \leq p'$, $1 \leq \theta \leq \infty$ i $\alpha = r_1 > \frac{1}{p}$, то виконується співвідношення

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \Big(M^{-1}\log^{d-1} M\Big)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}\Big(\log^{d-1} M\Big)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+},$$

яке встановлене А.С. Романюком [9].

Зауваження 2. При виконанні умов теореми 1 для $\theta = \infty$ має місце порядкова рівність

$$\lambda_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}n^{\frac{d-1}{2}} ,$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Сформулюємо також ще одну теорему, результат якої є наслідком відомих оцінок деяких апроксимативних характеристик.

Теорема 2. Нехай $1 < p \leq q \leq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ і умову (S_l). Тоді для будь-яких натуральних M та n, які задовольняють умову $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце співвідношення

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{18}$$

Доведення. Оцінка зверху у (18) випливає із відповідної оцінки наближення класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є, а знизу— із оцінок колмогоровських поперечників [2].

Зауваження 3. При $\theta = \infty$ із теореми 2 випливає оцінка

$$\lambda_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{q}},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

На завершення зазначимо, що при виконанні умов теорем 1 і 2 має місце порядкова рівність

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \ .$$

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — 5. — С. 483–522.

2. Sun Youngsheng, Wang Heping. Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1997.— 219. — С. 356–377.

3. Лизоркин П.И., Никольский С.М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1989. — 187. — С. 143–161.

4. Пустовойтов Н.Н. Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — 20. — С. 35–48.

5. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. — 1960. — 15, № 3. — С. 81–120.

6. Kolmogoroff A. Über die beste Annaherung von Functionen einer gegeben Functionenclasse // Ann. Math. — 1936. — 37. — C. 107–111.

7. Галеев Э.М. Линейные поперечники классов Гельдера—Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки. — 1996.— 59, № 2. — С. 189–199.

8. Галеев Э.М. О линейных поперечниках классов периодических функций многих переменных // Вест. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. — 1987.— № 4. — С. 13–16.

9. Романюк А.С. Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных.I // Укр. мат. журн. — 2001. — 53, № 5 . — С. 647–661.

10. Романюк А.С. Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных.II // Укр. мат. журн. — 2001. — 53, № 6 . — С. 820–829.

11. Глускин Е.Д. Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. — 1983. — 120, № 2. — С. 180–189.

12. Кашин Б.С. О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m // Изв. Арм ССР. Матем. — 1980. — XV, № 5 . — С. 379–394.

13. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.

14. Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г. Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.