М. Є. Коренков, І. П. Головенко

Цілі функції та нескінченні добутки

(спецкурс)

Луцьк – 2008

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.162я73

Рекомендовано до друку вченою радою Волинського державного університету імені Лесі Українки (протокол №1 від 25 вересня 2003 року).

Рецензенти:
Середа В. Ю., професор кафедри вищої математики Луцького технічного університету, канд. фіз.-мат. наук;
Філозоф Л. І., завідуючий кафедрою математичного аналізу ВНУ імені Лесі Українки, канд. фіз.-мат. наук.

Коренков М. Є., Головенко І. П.
К66 Цілі функції та нескінченні добутки (спецкурс). – Луцьк: Волинська обласна друкарня, 2008. – 38 с.

Розглянуто теорію числових і функціональних нескінченних добутків та питання про розкладання цілої функції в нескінченний добуток.

УДК 517.8(075.8)
ББК 22.162я73

Передмова

В цьому спецкурсі розглянуто теорію числових та функціональних нескінченних добутків (їх збіжність, зв'язок з рядами, рівномірну збіжність в області та всередині області), досліджено питання про оцінку канонічного добутку Вейєрштрасса, на основі чого вказано зв'язок між характеристиками його росту та верхньою щільністю послідовності його нулів. Основна частина спецкурсу присвячена питанню про розкладання цілої функції в нескінченний добуток. Стосовно цього доведені теореми Вейєрштрасса та Адамара. Остання теорема доводиться з використанням нерівностей, які є аналогом відомих нерівностей Коші для коефіцієнтів степеневого розкладу аналітичної функції. В спецкурсі розглянуто також питання про показник збіжності числової послідовності та про порядок лічильної функції цієї послідовності, встановлено зв'язок між цими поняттями.

Особливістю викладу матеріалу в спецкурсі є те, що при доведенні теореми Адамара не використовується відома лема А. Картана про оцінку модуля многочлена знизу.

Цей спецкурс можна рекомендувати студентам університету спеціальності „математика'.

Автори вдячні студентам математичного факультету ВНУ імені Лесі Українки Павлісюк А. С., Лелюшок В. М., Іванчук М. Б. за якісну підготовку тексту курсу лекцій до опублікування.

§1.Числові нескінченні добутки.

Якщо $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ - довільна послідовність комплексних чисел, $U_n \neq 0\ (n \in N)$, то символ виду

$$U_1 \cdot U_2 \cdot \ldots \cdot U_n \ldots \qquad (1)$$

або, що те саме, виду $\prod_{n=1}^{\infty} U_n$ називається нескінченним добутком. При цьому U_n називається загальним членом (загальним співмножником) нескінченного добутку (1).

Розглянемо послідовність $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, де $P_n = \prod_{k=1}^{n} U_k\ (n \in N)$, яка називається послідовністю частинних добутків нескінченного добутку (1).

Якщо послідовність $\{P_n\}$ має скінченну границю *U*, $\exists \lim_{n\to\infty} P_n = U$, причому $U \neq 0$, то говорять, що нескінченний добуток (1) збігається до числа *U*, яке називається значенням цього нескінченного добутку і це записують у вигляді $U = \prod_{n=1}^{\infty} U_n$.

Якщо послідовність $\{P_n\}$ не має скінченної границі або її границя дорівнює 0 (при умові, що $U_n \neq 0$, коли $n \in N$), то говорять, що нескінченний добуток (1) розбігається.

Якщо нескінченний добуток (1) збігається до числа $U, U \neq 0$, то $\exists \lim_{n\to\infty} P_n = U, \exists \lim_{n\to\infty} P_{n-1} = U$. Отже, $\exists \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} =$ $= \left(\lim_{n\to\infty} P_n\right) : \left(\lim_{n\to\infty} P_{n-1}\right) = 1$. Таким чином, співвідношення

$$\exists \lim_{n\to\infty} U_n = 1 \qquad (2)$$

є необхідна умова збіжності нескінченного добутку (1). Можна показати, що вказана умова не є достатньою для такої збіжності.

<u>Приклади:</u> 1. Справедлива рівність $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-1} = 2$, оскільки в даному випадку $P_n := 1 \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1} = 1 \cdot \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2}{n^2-1} =$

$= 1 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)(n-1)}{(n-2) \cdot n} \cdot \frac{n \cdot n}{(n-1)(n+1)} = \frac{2n}{n+1} \to 2 \ (n \to \infty)$.

Отже, вказаний нескінченний добуток збігається до числа 2.

2. Нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, оскільки для нього $U_n = \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$, тобто не виконується необхідна умова його збіжності.

3. Нескінченний добуток $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} \cdot (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \ldots$ розбіжний, оскільки для нього послідовність $P_m = \begin{cases} 1 & при \quad m = 2k \\ \frac{m+3}{2} & при \quad m = 2k-1 \end{cases} \ (k \in \mathbb{N})$ не має скінченної границі.

Враховуючи необхідну умову збіжності нескінченного добутку (1), його загальний член зручно записати у вигляді $U_n = 1 + V_n$, де $V_n \neq -1, V_n \in \mathbb{C} \ (n \in \mathbb{N})$, а сам цей нескінченний добуток – у вигляді

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + V_n). \tag{3}$$

Тоді співвідношення $\exists \lim_{n \to \infty} V_n = 0$ буде необхідною умовою збіжності нескінченного добутку (3).

<u>Теорема 1.1.</u> Нескінченний добуток (3) збігається тоді і лише тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + V_n), \tag{4}$$

де $-\pi < \arg(1 + V_n) \leq \pi$.

◀ Збіжність ряду (4) рівносильна одночасній збіжності рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln|1+V_n|, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arg(1+V_n). \tag{6}$$

Із збіжності рядів (5), (6) випливає збіжність наступних послідовностей

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} \ln|1+V_k| = \ln\left|\prod_{k=1}^{n} (1+V_k)\right| \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{7}$$

$$B_n := \sum_{k=1}^{n} \arg(1+V_k) = \widetilde{Arg}\prod_{k=1}^{n} (1+V_k) \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{8}$$

де $\widetilde{Arg}\prod_{k=1}^{n}(1+V_k)$ є те значення аргументна числа $\prod_{k=1}^{n}(1+V_k)$, яке задається лівою частиною рівності (8). Із збіжності послідовностей $(A_n), (B_n)$ випливає збіжність послідовності $\prod_{k=1}^{n}(1+V_k) = \exp(A_n + iB_n) \quad (n \in \mathbb{N})$, причому до числа відмінного від 0. Отже, якщо збігається ряд (4) (і, отже, збігаються ряди (5), (6)), то збігається і нескінченний добуток (3).

Навпаки. Якщо збігається нескінченний добуток (3) до числа $U \neq 0$, тобто $\prod_{n=1}^{\infty}(1+V_n) = U$, то існує границя $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}|1+V_k| = |U| \neq 0$ і, отже, збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln|1+V_n|$. Окрім того існує послідовність значень

$$Arg\left[\prod_{k=1}^{n}(1+V_k)\right] = \sum_{k=1}^{n}\arg(1+V_k) + 2\pi\mu_n = \varphi_n,$$

яка збігається до одного із значень $ArgU$ (μ_k - цілі числа). Із умови $\lim\limits_{k\to\infty}(1+V_k)=1$ випливає, що $|\arg(1+V_k)|<\pi$ $(k>k_0)$. Отже, $|\varphi_{k+1}-\varphi_k| = |\arg(1+V_{k+1})+2\pi(\mu_{k+1}-\mu_k)| > 2\pi|\mu_{k+1}-\mu_k| - \pi$, коли $k>k_0$. Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty}(\varphi_{k+1}-\varphi_k)=0$, то з попередньої нерівності випливає, що цілі невід'ємні числа $|\mu_{k+1}-\mu_k|$ повинні перетворюватися в нуль, починаючи з деякого номера *n*, тобто $\mu_n=\mu_{n+1}=\ldots=\mu$. Тому збігається не лише послідовність $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, але і послідовність $\sum\limits_{k=1}^{n}\arg(1+V_k)=\varphi_n-2\pi\mu_n$, тобто збігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\arg(1+V_k)$. Із збіжності рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln|1+V_k|, \sum\limits_{k=1}^{\infty}\arg(1+V_k)$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+V_k)$. ▶

<u>Зауваження.</u> Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+V_k)=\widetilde{L}n\prod\limits_{k=1}^{n}(1+V_k)$, де $\widetilde{L}n\prod\limits_{k=1}^{n}(1+V_k)$ є значення логарифма виразу $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+V_k)$, що задається лівою частиною попередньої рівності, то $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+V_k)=\exp\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+V_k)\right)$. Ми приходимо до твердження: якщо нескінченний добуток (3) збігається, то справедлива рівність

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+V_n)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+V_n)\right). \tag{9}$$

Нескінченний добуток (3) називається абсолютно збіжним, якщо абсолютно збіжним є ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+V_n)$, тобто, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+V_n)$. Зрозуміло, що абсолютно збіжний нескінченний добуток є збіжний, але обернене твердження не є справедливим. Очевидно, в абсолютно збіжному нескінченному добуткові можна довільним чином змінювати порядок співмножників, не порушуючи цим збіжність нескінченного добутку і не змінюючи цим його значення.

<u>Теорема 1.2.</u> Нескінченний добуток (3) збігається абсолютно тоді і лише тоді, коли збігається абсолютно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$.

◀ Використовуючи відомий розклад $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots, |z| < 1$, при $|V_n| < 1$ дістаємо

$$\ln(1+V_n) = V_n - \frac{V_n^2}{2} + \frac{V_n^3}{3} - \ldots = V_n\left(1 - \frac{V_n}{2} + \frac{V_n^2}{3} - \ldots\right).$$

Якщо $|V_n| < \frac{1}{2}$, то

$$|V_n| \cdot \frac{1}{2} = |V_n|\left(1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \ldots\right) < |\ln(1+V_n)| < |V_n|\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right) = \frac{3}{2}|V_n|.$$

З останніх нерівностей випливає, що збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |V_n|$ тягне за собою збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1+V_n)|$ і навпаки. ▶

<u>Зауваження.</u> Оскільки збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+|V_n|)$ рівносильна збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |V_n|$, то із попередньої теореми випливає, що

абсолютна збіжність нескінченного добутку $\prod_{n=1}^{\infty}(1+V_n)$ рівносильна збіжності нескінченного добутку $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|V_n|)$.

§2. Нескінченні функціональні добутки.

Якщо $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots (z \in$ є довільна послідовність функцій $f_n(z) \neq 0$ $(z \in$ $)$, що визначені на множині E, $E \subset$, то символ виду

$$\prod_{n=} \tag{1}$$

називається функціональним нескінченним добутком. Функціональний нескінченний добуток (1) називається збіжним (розбіжним) в точці z_0 із E, якщо збіжний (розбіжний) числовий нескінченний добуток $\prod_{n=}$. Сукупність всіх точок із E, в яких збігається нескінченний добуток (1) називається множиною збіжності його.

Якщо E є множина збіжності нескінченного добутку (1), то при кожному z із E існує скінченна і відмінна від 0 границя

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} \quad \in \tag{2}$$

де $P_n(z) = \prod_{k=}$. Тоді співвідношення (2) записують у вигляді

$$f(z) = \prod_{n=} \tag{3}$$

і говорять, що нескінченний добуток (1) збігається на E до функції f. При наявності рівності (3) говорять, що функція f зображається у вигляді функціонального нескінченного добутку (вона розкладена у функціональний нескінченний добуток).

Функціональний нескінченний добуток (1) називається рівномірно збіжним на множині E до функції $f(z), z \in$, якщо $P_n(z) \to$) $(n \to \infty$ $\in$ і $f(z) \neq$ при $z \in$.

Розглянемо послідовність $(V_n(z))_{n=}^{\infty}$ $\in$, функцій, що визначені в області G, $G \subset$ і такі, що $V_n \neq -1$ $\in$; $n \in$.
Утворимо тоді функціональний нескінченний добуток

$$\prod_{n=} \quad \in \tag{4}$$

Цей добуток називається рівномірно збіжним всередині області G, якщо послідовність $P_n = \prod_{k=1}^{\infty} 1 - {}_k \quad \in \; ; z \in$

збігається рівномірно на кожній компактній в C множині $E, E \subset$.

<u>Теорема 2.1.</u> Якщо існує такий збіжний ряд $\sum_{n=}$, що $|V_n| \leq {}_n \in \; ; n \in$, то функціональний добуток (4) збігається абсолютно і рівномірно в області G, $G \subset$.

◀ Позначивши $P_n(z) = \prod_{k=}$, дістанемо

$P_n(z) - \quad = \quad + \quad + \quad + \quad \geq \quad \in$

Тому

$|P_n(z) - \quad \leq \quad + \quad + \quad + \quad \leq$

$\leq \quad + \quad + \quad + \quad < \quad \in \quad \geq$

внаслідок нерівності $1 + \quad \leq \quad \geq$ Тут $M = \quad >$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=}$ а разом із ним послідовність $(P_n(z))_{n=}^{\infty}$ збігається рівномірно в області G. Із збіжності ряду

$\sum\limits_{n=}$ випливає абсолютна збіжність добутку (4) в G. ▶

<u>Наслідок.</u> Якщо виконуються умови попередньої теореми і функції $V_n(z)$ $(z \in G; n \in N)$ аналітичні в області G, $G \subset C$, то функція

$$f(z) = \prod_{n=} \qquad \in$$

аналітична в G.

◀ Як випливає з попередньої теореми добуток (4) збігається рівномірно в області G до функції f, тобто $P_n(z) \rightrightarrows f(z)$ $(n \to \infty; z \in G)$. Внаслідок теореми Вейєрштрасса про ряди аналітичних функцій функція f аналітична в G. ▶

<u>**Теорема 2.2.**</u> Якщо функції $V_n(z)$ аналітичні в однозв'язній в C області G, $G \subset C$, і $V_n(z) \neq -1$ $(z \in G; n \in N)$ причому ряд

$$\sum_{n=} \qquad \in \tag{5}$$

збігається рівномірно всередині області G до функції $s(z)$,

$$s(z) = \sum_{n=} \qquad \in \tag{6}$$

то нескінченний добуток (4) збігається також рівномірно всередині області G до аналітичної в G функції f,

$$f(z) = \prod_{n=} \qquad \in \tag{7}$$

і справедлива рівність $f(z) = \qquad \in$

◀ Якщо ряд (5) збігається рівномірно всередині області G до функції $s(z)$, то в силу теореми 1.1 нескінченний добуток (4) збігається в області G до деякої функції f, тобто справедлива

рівність (7). Функція $s(z)$ аналітична в області G, внаслідок теореми Вейєрштрасса про ряди аналітичних функцій. На основі зауваження із §1 приходимо до рівності $f(z) = \qquad \in$ Отже, функція f аналітична в G.

Запишемо далі

$$f(z) - \prod_{k=} \qquad \left[\sum \qquad \right] \qquad \left[\sum \qquad \right]$$

$$= \qquad \left\{ \qquad \left[\sum \qquad \right] \right.$$

Нехай K компактна множина, $K \subset$. Тоді $(\exists \quad > \quad \forall \in \qquad \le$ Оскільки на компакті K ряд (5)збігається рівномірно, то для довільного числа $\varepsilon \quad < \quad <$ існує номер $n_0, n_0 =$ такий, що

$$\left| \sum_{k= \ +} \qquad \right| < \frac{\quad}{2M} < \frac{\quad}{2} \qquad > \qquad \in$$

Тому в силу (8)

$$\left| f(z) - \prod_{k=} \qquad \right| \qquad \left[\qquad \left(\qquad \right) \qquad \right]$$

$$= \frac{\quad}{2} \left[\qquad \left(\qquad \right) \qquad \right] \qquad \left[\qquad \right]$$

при $n >$ і $z \in$, звідки і випливає рівномірна збіжність добутку (4) всередині області G. ▶

§3. Узагальнення поняття збіжності нескінченного добутку.

Вивчення властивостей цілих функцій потребує модифікації поняття збіжності нескінченного добутку, яке було вказане в попередніх параграфах.

Якщо в нескінченому числовому добуткові $\prod_{k=}$ скінченна кількість співмножників перетворюються в нуль, то цей добуток називається збіжним (в узагальненому розумінні), якщо $(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)(a_n \neq \;)$ і нескінченний добуток $\prod_{k= \; +}$ збігається (у звичайному розумінні) до числа відмінного від 0. Значення всього нескінченного добутку $\prod_{k=}$ вважається в цьому випадку рівним нулю, тобто

$$\prod_{k=} \qquad \prod_{=} \qquad \prod_{=} \; \prod_{= \; +}$$

При такій модифікації поняття збіжності нескінченний добуток $\prod_{k=}$ перетворюється в нуль тоді і лише тоді, коли принаймні один із його співмножників перетворюється в нуль.

Нескінченний добуток

$$\prod_{k=} \tag{1}$$

що складений із функцій f_k, які аналітичні на множині E, $E \subset$ (і в деяких точках із E перетворюються в нуль), називається збіжним на множині E, якщо існує такий номер $n_0 =$ що $(\forall \; > \;\; \forall \; \in \;\; \neq$ і нескінченний добуток

$\prod\limits_{k= \ +}$ $\quad \Xi$ збігається в кожній точці z із E (в звичайному розумінні) до значення $\varphi_{n_0}(z) \neq 0$ $(z \in E)$, тобто, коли $\exists_{n\to\infty} \prod\limits_{\kappa= \ +}$ $\quad \in$ і функція φ_{n_0} не перетворюється в нуль на E.

Нескінченний добуток (1) називається рівномірно збіжним на множині E, якщо при вказаному вище номері $n_0, n_0 =$ рівномірно збігається на E нескінченний добуток $\prod\limits_{k= \ +}$ $\quad \Xi$ тобто, якщо $\prod\limits_{k=n_0+1} (z) \rightrightarrows \varphi_{n_0}(z)\ (n \to \ ;\ z \in E)$, причому функція φ_{n_0} не перетворюється в нуль на множині E.

Аналогічно видозмінюється і звичайне означення абсолютної збіжності нескінченного добутку.

Вказана модифікація відомих означень зручна тим, що тепер перетворення скінченної кількості множників в нуль в деяких точках множини E не впливає ні на збіжність нескінченного добутку (1) ні на характер такої збіжності. В наступних параграфах буде іти мова саме про узагальнену збіжність нескінченного добутку.

§4. Показник збіжності послідовності та її лічильна функція.

Нехай дано послідовність комплексних чисел $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ таку, що $0 < |a_n| \leq |a_{n+}|\ (n \in \mathrm{N})$, $\lim\limits_{n\to} a_n =$.

<u>Означення 1.</u> Число τ,

$$\tau = \inf\left\{\alpha \ \ 0 \Big| \sum_{k=1} a_k\Big|^{-\alpha} < \ \infty\right\}, \tag{1}$$

називається показником збіжності послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (при умові, що вказаний ряд збігається при деякому $\alpha > 0$). Якщо ряд із

(1) розбігається при кожному $\alpha > 0$, то вважають, що показником збіжності цієї послідовності є + ∞, τ = + ∞.

Очевидно , завжди 0 ≤ τ ≤ + ∞.

Кількість *υ(r)*, $r \geq 0$, точок послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, які знаходяться в крузі $|z| < r$ називається лічильною функцією даної послідовності, а величина ρ_1, $\rho_1 = \overline{\lim\limits_{r \to +\infty}} \dfrac{\ln^+ \upsilon(r)}{\ln r}$, де $\ln^+ \upsilon(r) = 0$, коли *υ(r)*<1, і $\ln^+ \upsilon(r) = \ln \upsilon(r)$, коли $\upsilon(r) \geq 1$, називається порядком функції *υ(r)*. Очевидно $0 \leq \rho_1 \leq +\infty$.

Якщо $\rho_1 < +\infty$, то величина $\Delta = \overline{\lim\limits_{r \to +\infty}} \dfrac{\upsilon(r)}{r^{\rho_1}}$ називається верхньою щільністю послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

<u>**Теорема 4.1.**</u> Показник збіжності τ послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, вказаної вище, співпадає із порядком ρ_1 її лічильної функції *υ(r)*, $r \geq 0$, тобто τ = ρ_1 .

◄ Нехай $\rho_1 < +\infty$. Візьмемо довільне число μ, $\mu > \rho_1$. Тоді для числа γ такого, що $\rho_1 < \gamma < \mu$, виконується $\dfrac{\ln \upsilon(r)}{\ln r} < \gamma \Rightarrow \ln \upsilon(r) < \ln r^{\gamma} \Rightarrow \upsilon(r) < r^{\gamma}$. Тому $\dfrac{\upsilon(r)}{r^{\mu+1}} < \dfrac{r^{\gamma}}{r^{\mu+1}} = r^{-1-(\mu-\gamma)}$, звідки випливає, що

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\upsilon(r)}{r^{\mu+1}} dr < +\infty \quad (\mu > \rho_1). \tag{2}$$

Навпаки, якщо виконується умова (2) при $\mu > 0$, то при довільному $\varepsilon > 0$ справедлива

$$\varepsilon > \int\limits_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^{\mu+1}} dt \geq \upsilon(r) \cdot \int\limits_r^{+\infty} \frac{dt}{t^{\mu+1}} = \frac{\upsilon(r)}{\mu r^{\mu}},$$

тобто $\upsilon(r) < \varepsilon \cdot \mu \cdot r^{\mu}$. Отже,

$$\upsilon(r) = o(r^{\mu}),\ r \to +\infty \tag{3}$$

і $\ln \upsilon(r) < \ln(\varepsilon\mu) + \mu \ln r$, $\frac{\ln \upsilon(r)}{\ln r} < \mu + \frac{\ln(\varepsilon\mu)}{\ln r}$, тобто $\rho_1 \le \mu$.

Таким чином, $\rho_1 = \inf\left\{ \mu > 0 \mid \int_0^{+\infty} \upsilon(r) \cdot r^{-\mu-1} dr < +\infty \right\}$.

Нехай тепер при деякому α, $\alpha > 0$, збігається ряд із (1) і нехай число r_0 таке, що $0 < r_0 < |a_1|$. Тоді $\upsilon(t)=0$, коли $0 \le t \le r_0$. Використовуючи інтеграл Стілтьєса та інтегруючи частинами, дістанемо при $r > r_0$

$$\sum_{|a_k|\le r} |a_k|^{-\alpha} = \int_{r_0}^{r} \frac{d\upsilon(t)}{t^{\alpha}} = \frac{\upsilon(t)}{t^{\alpha}}\Big|_{r_0}^{r} + \alpha \int_{r_0}^{r} \frac{\upsilon(t)}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{\upsilon(r)}{r^{\alpha}} + \alpha \int_0^{r} \frac{\upsilon(t)}{t^{\alpha+1}} dt. \quad (4)$$

Звідси

$$\int_0^{r} \frac{\upsilon(t)}{t^{\alpha+1}} dt \le \frac{1}{\alpha} \sum_{|a_k|\le r} |a_k|^{-\alpha}.$$

Переходячи тут до границі при $r \to +\infty$ і враховуючи збіжність ряду із (1), дістанемо

$$\int_0^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^{\alpha+1}} dt < +\infty. \quad (5)$$

Навпаки, якщо виконується (5) при деякому $\alpha > 0$, то, використовуючи співвідношення (3), яке справедливе при $\mu = \alpha$ і рівність (4), дістанемо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{-\alpha} = \lim_{r\to+\infty} \sum_{|a_k|\le r} |a_k|^{-\alpha} = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^{\alpha+1}} dt < +\infty,$$

тобто збігається ряд із лівої частини. Отже,

$$\tau = \inf\left\{ \alpha > 0 \mid \int_0^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^{\alpha+1}} dt < +\infty \right\}$$

і тому $\tau = \rho_1$ у випадку, коли τ та ρ_1 скінченні. Якщо $\tau = +\infty$, то $\rho_1 = +\infty$, бо припустивши, що $\rho_1 < +\infty$, ми отримали б за вже доведеним, що $\tau < +\infty$. Аналогічно показуємо, що $\tau = +\infty$, коли $\rho = +\infty$. ▶

Зауваження. При доведенні теореми показано, що

$$\rho = \tau = \inf\left\{\alpha > 0 \mid \int_0^{+\infty}\frac{\upsilon(t)}{t^{\alpha+1}}dt < +\infty\right\} \quad (\rho < +\infty, \tau < +\infty).$$

§5. Канонічний добуток Вейєрштрасса та його оцінка.

Теорема 5.1. Нехай $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ - послідовність комплексних чисел така, що $0 < |a_k| \le |a_{k+1}|$ $(k \in N)$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty$, і

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{-q} < +\infty, \tag{1}$$

де $q \in N$. Якщо ціла функція $g(z)$ має степеневий розклад виду

$$g(z) = 1 + c_q z^q + c_{q+1} z^{q+1} + \ldots \quad (z \in C),\ c_q \neq 0, \tag{2}$$

то нескінченний добуток

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{z}{a_k}\right) \quad (z \in C) \tag{3}$$

збігається абсолютно і рівномірно в кожному скінченному крузі $K_R(0) = \{z \in C : |z| < R\}$, $0 < R < +\infty$, до цілої функції f.

◀ Із (1) випливає, що $|g(z) - 1| = |z|^q \cdot |c_q + c_{q+1}z + \ldots| \le A \cdot |z|^q$, $A = const$, $0 < A < +\infty$, для всіх z таких, що $|z| \le r_0$ $(0 < r_0 < +\infty)$. Розглянемо круг $K_R(0)$ довільного радіуса R, $0 < R < +\infty$. Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty$, то $(\exists k_0 = k_0(R) \in N)(\forall k \ge k_0): \left(\frac{R}{|a_k|} < r_0\right)$.

Тому

$$\left|g\left(\frac{z}{a_k}\right) - 1\right| \le A\left|\frac{z}{a_k}\right|^q \le A \cdot R^q \frac{1}{|a_k|^q} \quad (k \ge k_0,\ |z| < R).$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} AR^q |a_k|^{-q}$ збігається, то в силу відомої теореми нескінченний добуток із (3) збігається абсолютно і рівномірно в крузі $K_R(0)$ до аналітичної в цьому крузі функції f. Оскільки число R можна взяти довільним, $0 < R < +\infty$, то функція f аналітична в C тобто f є ціла функція і рівність (3) справедлива в C. ►

<u>Зауваження 1.</u> Розглянемо цілу функцію $E(z;p)$ таку, що $E(z;p) = 1 - z$ при $p = 0$ і $E(z;p) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right)$ при

$p \in N$, яка називається первісним множником Вейєрштрасса. При $p = 0$ функція $E(z;p) - 1 = -z$ має в точці $z = 0$ нуль першого порядку. Якщо $p \in N$, то $(E(z;p) - 1)' = -z^p \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}\right)$, тобто ця похідна має в точці $z = 0$ нуль порядку *p*. Отже, функція $E(z;p) - 1$ має в цій точці нуль порядку *p*+1. Тому справедливий розклад

$$E(z;p) = 1 + c_{p+1} z^{p+1} + c_{p+2} z^{p+2} + \ldots \quad (z \in C;\ c_{p+1} \neq 0)$$

при $p \in N$. Якщо ряд (1) збігається при $q = (p+1) \in N$, то, згідно з попередньою теоремою, нескінченний добуток

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_k}; p\right), \quad z \in C, \tag{4}$$

де $p \geq 0$, збігається абсолютно і рівномірно в кожному крузі $K_R(0)$, $0 < R < +\infty$, до цілої функції φ. Нескінченний добуток із правої частини (4) тобто функція φ називається канонічним добутком Вейєрштрасса роду *p*. Зрозуміло, що функція φ має нулі в точках послідовності $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ і лише в них.

<u>Приклад.</u> Якщо ряд (1) збігається при $q = 2$, то нескінченний добуток

$$\psi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{z}{a_k}$$

збігається абсолютно і рівномірно в кожному крузі $K_R(0)$, $0 < R < +\infty$, до функції ψ, яка є цілою функцією. Це випливає із розкладу

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots \quad (z \in \mathbb{C})$$

та теореми 1 ($(a_k)_{k=1}^{\infty}$ - послідовність із цієї теореми).

<u>Теорема 5.2.</u> Нехай виконуються всі умови теореми 1 і $\ln M(r; g) = O(r^{\gamma})$, $r \to +\infty$, де $0 < \gamma < q$. Якщо $\upsilon(r)$, $r > 0$, є число точок послідовності $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ із круга $\{z : |z| \le r\}$, то існує така стала C, що залежить лише від функції g, що

$$\ln M(r; f) < C \int_{0}^{+\infty} \frac{\upsilon(r\tau)}{\tau^{1+\gamma}} \cdot \frac{d\tau}{1+\tau^{q-\gamma}} \quad (0 < r < +\infty). \tag{5}$$

◄ Тут і скрізь в цьому параграфі будемо позначати через C з індексами сталі, що залежать лише від функції g. Із (2) випливає, що $g(z) = 1 + z^q(c_q + o(1))$, $z \to 0$, $c_q \neq 0$. Оскільки $\ln(1+\zeta) = \zeta(1+o(1))$, $\zeta \to 0$, то $\ln g(z) = \ln(1 + z^q(c_q + o(1))) =$ $= z^q(c_q + o(1))(1+o(1)) = z^q \cdot O(1) = O(z^q)$, $z \to 0$. Звідси випливає, що $\ln M(r, g) = O(r^q)$, при $r \to 0$, оскільки $\ln|g(z)| \le |\ln g(z)|$. Враховуючи ще умови теореми дістаємо $\ln M(r, g) < K_1 r^q$ при $0 < r < r_0$ і $\ln M(r, g) < K_2 r^{\gamma}$ при $r_1 < r < +\infty$ ($K_1 > 0$, $K_2 > 0$), $K_1 = const$, $K_2 = const$. Отже, $\ln M(r, g(z)) \le C_1 \Psi(r)$ при $0 < r < +\infty$, де $\Psi(r) = \dfrac{r^q}{1 + r^{q-\gamma}}$. Тоді із (3) випливає, що

$$\ln M(r;f)=\ln\left|f(re^{i\varphi})\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left|g\left(\frac{re^{i\varphi}}{a_k}\right)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\ln M\left(r;g\left(\frac{z}{a_k}\right)\right)\le$$

$$\le C_1\sum_{k=1}^{\infty}\Psi\left(\frac{r}{|a_k|}\right)=C_1\int_0^{+\infty}\Psi\left(\frac{r}{t}\right)d\nu(t)=C_1\Phi(r). \qquad (6)$$

Як було раніше показано, справедливе $\nu(t)=o(t^q)\ (t\to\infty)$, коли збігається ряд (1). Окрім того, $\nu(t)=0$ при $0\le t<|a_1|$. Тому, переходячи до інтеграла Стілтьєса та інтегруючи частинами, дістаємо

$$\Phi(r)=\int_0^{+\infty}\Psi\left(\frac{r}{t}\right)d\nu(t)=\Psi\left(\frac{r}{t}\right)\nu(t)\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\nu(t)\Psi'\left(\frac{r}{t}\right)\frac{r}{t^2}dt=$$

$$=\int_0^{\infty}\nu(t)\Psi'\left(\frac{r}{t}\right)\frac{r}{t^2}dt=\int_0^{\infty}\nu(r\tau)\Psi'\left(\frac{1}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau^2}. \qquad (7)$$

Оскільки

$$\Psi'(r)=\frac{qr^{q-1}+r^{2q-1}}{(1+r^{q-1})^2},$$

то

$$\Psi'\left(\frac{1}{\tau}\right)=\tau^{1-q}\cdot\frac{q\tau^{q-1}+1}{(1+\tau^{q-1})^2}<\frac{q\tau^{1-q}}{(1+\tau^{q-1})}.$$

Звідси та із (6), (7) випливає оцінка (5) із $C=C_1\cdot q$. ▶

Зауваження 2. Для канонічного добутку Вейєрштрасса $\varphi(z)$ роду $p\ge 1$ виду (4) справедлива оцінка

$$\ln M(r,\varphi)<C(p)\int_0^{\infty}\frac{\nu(r\tau)}{\tau^{1+p}}\cdot\frac{d\tau}{1+\tau}=C(p)r^{p+1}\int_0^{\infty}\frac{\nu(t)\,dt}{t^{p+1}(r+t)}, \qquad (8)$$

де $C(p)$ - стала, що залежить лише від p.

◀ Якщо $p\ge 1$, то $\ln E(z,p)=\ln(1-z)+z+\dfrac{z^2}{2}+\ldots+\dfrac{z^p}{p}=$

$= -\sum_{k=}^{\infty}\frac{z^k}{k} + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p} = -\sum_{k=p+}^{\infty}\frac{z^k}{k} \quad (|z| < \ )$. Тому $\ln E(z;p) =$

$= z^{p+}\left(-\frac{1}{p+} + o( )\right) \ z \to \ $. Отже, $\ln M(r;E(z,p)) = O(r^{p+}), \ r \to \ $.

Окрім того $\ln|E(z;p)| \le \ln(+|z|) + \sum_{k=1}^{p}\frac{|z|^k}{k} = O(|z|^p), \ z \to \ $, тобто $\ln M(r;E(z,p)) = O(r^p), \ r \to \ $. Застосовуючи попередню теорему при $q = p +$, $\gamma = p \ (p >)$ дістанемо (8).

Якщо $p =$, то роль функції ψ може виконувати функція $\psi \ = \ + \ >$, оскільки в цьому випадку $\ln M(r;E(z;0)) = \ - \ \le \ + \ = \ < \ < +\infty$.
Міркуючи в цьому випадку, як при доведенні попередньої теореми і враховуючи рівність $\psi' \ = \frac{1}{1+}$, дістанемо

$$\ln M(r,f) \le C_1 \int_0^{\infty} \upsilon(\tau)\,\psi\left(\frac{1}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}, \quad 0 < C_1 = const < +\infty.$$

Оскільки тепер $\psi'\left(\ \right)$ то дістанемо потрібну оцінку. ►

Зауваження 3. Якщо φ канонічний добуток виду (4) і роду $p \ge$, то

$$\ln M(r;\varphi) \le C(p)\left\{r^p \int_0^r \frac{\upsilon(t)}{t^{p+1}}dt + r^{p+1}\int_r^{\infty}\frac{\upsilon(t)}{t^{p+2}}dt\right\}. \tag{9}$$

◄ Справді, при кожному $R, 0 < \ < +\infty$, маємо

$$r^{p+1}\int_0^{\infty}\frac{\upsilon(t)\,dt}{t^{p+1}(r+t)} = r^{p+1}\int_0^{R}\frac{\upsilon(t)\,dt}{t^{p+1}(+r)} + r^{p+1}\int_R^{+\infty}\frac{\upsilon(t)\,dt}{t^{p+1}(+r)} \le$$

$$\le r^p \int_0^R \frac{\upsilon(t)\,dt}{t^{p+1}} + r^{p+1}\int_R^{\infty}\frac{\upsilon(t)\,dt}{t^{p+2}}. \tag{10}$$

Із (8) і (10) при $R =$ дістанемо (9).▶

Зауваження 4. Якщо φ канонічний добуток виду (4) і роду $p \geq$, то

$$\ln M(r;\varphi = \quad \to \infty \qquad (11)$$

◀ Справді, із (8) випливає, що

$$\lim_{n\to} \frac{\ln M(r;\varphi)}{r^{p+1}} < \lim_{r\to} C(p) \int_0^{\infty} \frac{\upsilon(t)\,dt}{t^{p+1}(r+t)} =$$

$$= C(p) \int_0^{+\infty} \left[\lim_{r\to} \frac{\upsilon(t)}{t^{p+}(r+t)} \right] dt = C(p) \cdot 0 = ,$$

де законність переходу до границі під знаком інтеграла можна обґрунтувати, оскільки підінтегральна функція, як функція від r, монотонно прямує до нуля при $r \to +\infty$. ▶

Зауваження 5. Надалі домовимось, що при побудові канонічного добутку виду (4) приймати за p, якщо не вказано протилежне, найменше невід'ємне ціле число, при якому ряд (1) збігається. Це число будемо називати родом послідовності $(a_k)_{k=}^{\infty}$.

<u>Теорема 5.3. (Бореля).</u> Порядок ρ $\rho =$, канонічного добутку φ виду (4) не перевищує порядку ρ лічильної функції $\upsilon(r), r \geq$, послідовності його нулів $(a_k)_{k=}^{\infty}$.

◀ Оскільки p – найменше ціле число при якому збігається ряд $\sum_{k=}$ і порядок ρ лічильної функції $\upsilon(r)$ дорівнює показнику збіжності послідовності $(a_k)_{k=}^{\infty}$, то $p \leq \leq +$. Із (11) випливає, що при кожному $\varepsilon >$ виконується

$$M(r,\varphi < \qquad < \quad + \quad +$$

$$\frac{\ln M(r,\varphi}{\ln r} < \quad + \quad + \frac{}{\ln r}$$

Звідси випливає, що $\rho \leq \quad + \quad$. Якщо $\rho_{\cdot} = \quad + \quad$, то $\rho \leq \quad$. Нехай тепер $\rho_{\cdot} < \quad + \quad$. Тоді для довільного $\rho' \quad < \quad < \quad + \quad$, виконується

$$\frac{\ln \upsilon(r)}{\ln r} \overset{as}{<} \rho', \quad \upsilon(r) \overset{as}{<} r^{\rho'}.$$

Отже, $\upsilon(r) < C_2 r^{\rho'} \quad (0 < r < +\infty)$, де C_2 – деяка стала, $C_2 > \quad$. Тоді із (8) дістаємо

$$\ln M(r,\varphi) < \int_0^{\infty} \quad \int^{+\infty}$$

$$= \quad < \quad < +\infty \quad < \quad = \quad < +\infty$$

Отже, $\rho \leq \quad$. Звідси випливає, що $\rho \leq \quad$. ▶

<u>Зауваження 6</u>. При доведенні теореми Бореля було показано, що $\ln M(r,\varphi) \overset{as}{<} \quad$ при довільному $\varepsilon > \quad$. Звідси випливає, що порядок ρ $\rho = \quad$, канонічного добутку φ роду p не перевищує $p + \quad \leq \quad + \quad$. Якщо $\rho = \quad + \quad$, то $\frac{\ln M(r,\varphi)}{r^{p+}} < \quad$ і тому функція φ має мінімальний тип, $\sigma \; \varphi = \quad$.

Справедливі також твердження: 1) при нецілому показникові збіжності $\rho_{\cdot}$ послідовності $a_k \;{}_{k=}^{\infty}$ канонічний добуток φ роду p має порядок ρ такий, що $\rho \leq \quad$; 2) при $\rho = \quad$ ($\rho_{\cdot}$ - неціле) функція φ буде нормального або мінімального типу, тобто $\sigma \; \varphi < +\infty$, якщо $\Delta < +\infty$, і вона буде мінімального типу, тобто $\sigma \; \varphi = \quad$, якщо $\Delta = \quad$ (тут Δ – верхня щільність послідовності $a_k \;{}_{k=}^{\infty}$, тобто $\overline{\lim\limits_{r \to \infty}} \frac{\upsilon(r)}{r^{\rho_{\cdot}}} = \Delta$).

Справедливість першого твердження зразу ж випливає із теореми Бореля. Окрім того при $\Delta < +\infty$ виконується

$\upsilon(t) < \Delta \quad \cdot t^{\rho}$, де ε – довільне число, $\varepsilon >$. Отже, $\upsilon(t) < (\Delta \quad \varepsilon) B(\rho) \cdot t^{\rho} \quad (< t < +\infty)$, де $B(\rho > \quad =$ Тоді при нецілому $\rho \quad \rho \leq \quad +$, із (8) випливає, що

$$\ln M(r,\varphi) < C(p) \int_{0}^{+\infty} \frac{(\Delta \quad \varepsilon)(\tau^{\rho} B(\rho))}{\tau^{+p}(+\tau)} d\tau = C(p)(\Delta \quad \varepsilon) B(\rho) r^{\rho} \times$$

$$\times \int_{0}^{+\infty} \frac{\tau^{\rho -p-1}}{1+\tau} d\tau = \Delta \quad \varepsilon) D(p;\rho) r^{\rho} \quad (< D(p;\rho) = const < +\infty). \quad (12)$$

Звідси випливає, що $0 \leq \quad < +\infty$ при $\Delta < +\infty$ і $\sigma \varphi =$ при $\Delta =$. Отже, справедливе друге твердження.

Зазначимо, що при цілому ρ оцінку виду (12) неможливо отримати із (8).

§6. Розкладання цілої функції в нескінченний добуток.

<u>Теорема Вейєрштрасса.</u> Нехай $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ - довільна послідовність комплексних чисел, така, що $0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| \quad (n \in N)$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, і (p_n) - послідовність цілих чисел така, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{p_n} < +\infty \qquad (1)$$

при довільному $r > 0$. Тоді існує ціла функція φ, яка має нулі у всіх точках a_n і тільки в них, причому порядок нуля функції φ в точці a_n такий, скільки членів, рівних a_n, має дана послідовність. Ця функція має вигляд

$$\varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n}; p_n \right) \quad (z \in \mathbb{C}), \qquad (2)$$

де $E(\zeta; p)$ - первісний множник Вейєрштрасса.

◄ Оскільки $\ln E(\zeta; p) = \ln(1-\zeta) + \sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k} = -\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k} \quad (|\zeta| < 1)$,

то

$$\left|\ln E(\zeta; p)\right| \le |\zeta|^{p+1} (1 + |\zeta| + \ldots) \le \frac{|\zeta|^{p+1}}{1-q} \quad (|\zeta| \le q < 1), \qquad (3)$$

де $q = const$. Позначивши $\overline{K}_n := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le q|a_n|\}$, можемо стверджувати, що для кожного круга $\overline{K} := \{|z| \le R\}$ довільного радіуса R, $R > 0$, існує n_0, $n_0 \in \mathbb{N}$, таке, що $\overline{K} \subset \overline{K}_n$ $(n \ge n_0)$.

Отже, в силу (3)

$$\left|\ln E\left(\frac{z}{a_n}; p_n\right)\right| \le \frac{1}{1-q} \cdot \left|\frac{z}{|a_n|}\right|^{p_n+1},$$

коли $|z| = r \le R$ і $n \ge n_0$. Тому, внаслідок (1), ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln E\left(\frac{z}{a_n}; p_n\right)$$

збігається абсолютно і рівномірно в крузі $\overline{K}$ причому до аналітичної в $\overline{K}$ функції g_{n_0}. Отже, нескінченний добуток

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}; p_n\right) = \varphi_{n_0}(z) = \exp(g_{n_0}(z)) \quad (z \in \overline{K}) \qquad (4)$$

збігається в крузі $\overline{K}$ до аналітичної функції φ_{n_0} причому такої, що $\varphi_{n_0}(z) \ne 0$, коли $z \in \overline{K}$. Добуток із (4) відрізняється від добутку із (2) множником $\prod_{n=1}^{n_0-1} E\left(\frac{z}{a_n}; p_n\right)$, який перетворюється в нуль в точках $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}$ і лише в них. Оскільки радіус R круга $\overline{K}$

можна вибрати довільним, то добуток із (2) збігається в C до цілої функції φ, яка має задані нулі. ►

Зауваження 1. Зазначимо, що вказана в теоремі послідовність $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ завжди знайдеться. Зокрема її роль може виконувати послідовність $p_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Наслідок. Нехай нулі цілої функції f, які занумеровані за неспадними їх модулями, утворюють послідовність $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ і в цій послідовності кожен нуль записаний стільки разів, яка його кратність. Якщо $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ така послідовність цілих чисел, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < +\infty$$

при кожному $r > 0$, то

$$f(z) = z^{\lambda} \exp(h(z)) \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}; p_n \right) \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{5}$$

де h – ціла функція і λ - кратність нуля функції f в точці $z = 0$.

◄ Побудуємо цілу функцію φ виду (2), нулі якої співпадають із точками послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ і розглянемо функцію $g(z) = f(z)/(z^{\lambda}\varphi(z))$. Оскільки g є ціла функція така, що $g(z) \neq 0$ $(z \in \mathbb{C})$, то $h(z) = \ln g(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ є також ціла функція. Тоді $f(z)/(z^{\lambda}\varphi(z)) = \exp(h(z))$, $f(z) = z^{\lambda} \exp(h(z))\varphi(z)$ $(z \in \mathbb{C})$. Тому в силу (2) справедлива рівність (5). ►

Зауваження 2. В представленні (5) послідовність (p_n) вказана неоднозначно, а тому неоднозначно визначена і функція h.

Зауваження 3. Представлення (5) значно спрощується, якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\alpha}} < +\infty \tag{6}$$

при деякому α $(\alpha > 0)$. В цьому випадку, як це випливає із попереднього, позначивши через p найменше ціле число таке, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < +\infty,$$

можемо нескінченний добуток в (5) замінити канонічним добутком Вейєрштрасса роду p тобто добутком

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}; p\right).$$

Тоді представлення (5) матиме вигляд

$$f(z) = z^{\lambda} \exp \psi(z) \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}; p\right) \quad (z \in \mathbb{C}), \qquad (7)$$

де ψ - ціла функція, що визначається однозначно.

Якщо в представленні (7) $\psi(z)$ - многочлен степеня q, то f називається цілою функцією скінченного роду, причому число $\gamma = \max\{p, q\}$ називається родом цілої функції f.

Якщо в представленні (5) або h – не є многочлен або ряд (6) розбігається при кожному $\alpha > 0$, то вважають, що рід функції f рівний $+\infty$.

<u>Зауваження 4.</u> Як уже зазначалося роль послідовності (p_n), вказаної в наслідку до попередньої теореми, може виконувати послідовність $p_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$ тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{n+1} < +\infty$$

при кожному $r > 0$. Тоді представлення (5) набуває вигляду

$$f(z) = z^{\lambda} \exp(\mu(z)) \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}; n\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

де μ - ціла функція.

§7. Нерівність Ієнсена та наслідки з неї.

<u>Теорема 7.1.</u> Якщо $n_f(t)$ - лічильна функція нулів цілої функції f такої, що $f(0)=1$, тобто $n_f(t)$ - це число нулів f в крузі $K_r(0)=\{z\in\mathbb{C}:|z|<r\}$ з врахуванням їх кратності, і $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|\le r\}$, то справедливе співвідношення

$$\int_0^r \frac{n_f(t)}{t}\,dt \le \ln^+ M_f(r),\quad (0<r<+\infty), \tag{1}$$

яке називається нерівністю Ієнсена.

◄ Зафіксуємо число r, $r>0$. Позначимо $n=n_f(r)$ і через $a_1,a_2,...,a_n$ - нулі f в крузі $K_r(0)$, що занумеровані в порядку неспадання їх модулів і де кожен нуль повторюється стільки разів, яка його кратність. Розглянемо функцію F,

$$F(z)=f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{r(z-a_k)}{r^2-\overline{a_k}z}.$$

Оскільки кожна з функцій $w=w_k(z)=\frac{r(z-a_k)}{r^2-\overline{a_k}z}$ $(k=\overline{1,n})$ має нуль в точці $z=a_k$ і відображає коло $\Gamma_r(0)=\{z:|z|=r\}$ на одиничне коло $\Gamma_1(0)=\{w:|w|=1\}$, то функція F аналітична в замкнутому крузі $\overline{K_r(0)}$, $F(z)\neq 0$ при $z\in K_r(0)$ і $|F(z)|=|f(z)|$, коли $z\in\Gamma_r(0)$. Тому згідно з принципом максимума модуля $|F(z)|\le M_F(r)=M_f(r)$ $(|z|<r)$, тобто

$$\left|f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{r(z-a_k)}{r^2-\overline{a_k}z}\right|\le M_f(r). \tag{2}$$

Покладаючи $z=0$ в (2), дістанемо $r^n/\prod_{k=1}^{n}|a_k|\le M_f(r)$, тобто

$$\left|\frac{a_2}{a_1}\right|\cdot\left|\frac{a_3}{a_2}\right|^2\cdot\ldots\cdot\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|^{n-1}\cdot\frac{r^n}{|a_n|^n}\le M_f(r). \qquad (3)$$

Логарифм лівої частини цієї нерівності можна записати у вигляді

$$\ln\left|\frac{a_2}{a_1}\right|+2\ln\left|\frac{a_3}{a_2}\right|+\ldots+(n-1)\ln\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|+n\ln\frac{r}{|a_n|}=$$

$$=\int\limits_{|a_1|}^{|a_2|}\frac{dt}{t}+\int\limits_{|a_2|}^{|a_3|}\frac{2dt}{t}+\ldots+\int\limits_{|a_{n-1}|}^{|a_n|}\frac{(n-1)dt}{t}+\int\limits_{|a_n|}^{r}\frac{ndt}{t}=\int\limits_0^r\frac{n_f(t)}{t}dt. \qquad (4)$$

Тут ми врахували те, що $n_f(t)=0$, коли $0<t<|a_1|$, і $n_f(t)=k$, якщо $|a_k|<t<|a_{k+1}|$ (при умові $|a_k|\ne|a_{k+1}|$). Із (3) та (4) дістаємо $\int\limits_0^r\frac{n_f(t)}{t}dt\le\ln^+M_f(r)$. ▶

<u>Зауваження.</u> Доведене твердження залишається в силі і без вимоги $f(0)=1$, оскільки в загальному випадку замість функції f з нулем кратності m в точці $z=0$ можна розглянути функцію $f(z)m!/z^m f^{(m)}(0)$ також цілу порядку такого, як і порядок f, та з нулями при $z\ne 0$ такими, як і нулі f.

<u>Наслідок.</u> Якщо ціла функція f задовольняє умови попередньої теореми, то

$$n_f(r)\le\ln^+M_f(er).$$

◀ Оскільки функція n_f неспадна, то в силу нерівностіІєнсена $n_f(r)=\int\limits_r^{er}\frac{n_f(r)}{t}dt\le\int\limits_0^{er}\frac{n_f(t)}{t}dt\le\ln^+M_f(er)$. ▶

<u>Теорема 7.2.</u> Показник збіжності τ послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ нулів цілої функції f не перевищує її порядку ρ тобто $\tau\le\rho$.

◀ Не зменшуючи загальності наших міркувань можемо вважати, що $f(0)=1$. Оскільки порядок лічильної функції $n_f(r)$ послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ співпадає із показником збіжності цієї послідовності, то за попереднім наслідком дістаємо

$$\tau=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln n_f(r)}{\ln r}\le\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M_f(er)}{\ln r}=$$

$$=\overline{\lim_{r\to\infty}}\left(\frac{\ln\ln M_f(er)}{\ln(er)}\cdot\frac{\ln(er)}{\ln r}\right)=\rho(f)=\rho. \text{ ▶}$$

Зазначимо, що із нерівності Ієнсена випливає також співвідношення

$$\Delta_{\tau}:=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n_f(r)}{r^{\tau}}\le\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln M_f(er)}{(er)^{\tau}}e^{\tau}.$$

Отже, при $\tau=\rho(f)=\rho$ справедливе $\Delta_{\rho}\le e^{\rho}\sigma_{\rho}$, де σ_{ρ} - величина типу функції f. Співставляючи це з відомими фактами, що торкаються оцінки порядку та типу канонічного добутку, приходимо до наступного твердження.

<u>**Теорема 7.3.**</u> Порядок $\rho(\varphi)=\rho$ канонічного добутку Вейєрштрасса $\varphi=\varphi(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_n},p\right)$ $(z\in\mathbb{C})$, співпадає із показником збіжності τ послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ його нулів, $\rho(\varphi)=\tau$.

При нецілому τ цей канонічний добуток буде мінімального, нормального або максимального типу в залежності від того, буде рівна нулю, числу більшому нуля та меншому нескінченності або рівна нескінченності, верхня щільність послідовності нулів цього добутку Δ_{ρ},

$$\Delta_{\rho}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n_f(r)}{r^{\rho}}.$$

§8. Модифікація нерівностей Коші.

В багатьох випадках використовується нерівність із наступного твердження.

Лема. Якщо функція f,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (|z|<R), \tag{1}$$

аналітична в крузі $K_R(0)=\{|z|<R\}$ і задовольняє в ньому умову $\operatorname{Re} f(z)\le A$, то

$$|c_n|\le \frac{2(A-\operatorname{Re} c_0)}{R^n} \quad (n\ge 1). \tag{2}$$

◄ Розглянемо функцію

$F(z)=A-f(z)=A-c_0-\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (|z|<R)$ та коло $\Gamma_r(0)=\{z\in\mathbb{C}:|z|=r\},\ r<R$. При $n\ge 1$ дістаємо

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r(0)}\frac{F(z)}{z^{n+1}}dz=\{z=re^{i\varphi},\ 0\le\varphi\le 2\pi\}=\frac{1}{2\pi r^n}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\left[P(re^{i\varphi})+iQ(re^{i\varphi})\right]e^{-in\varphi}d\varphi, \tag{3}$$

де $F(z)=P(x,y)+iQ(x,y),\ z=x+iy=re^{i\varphi}$. Оскільки функція $z^{n-1}F(z)\ (n\ge 1)$ аналітична в $K_R(0)$, то

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r(0)}z^{n-1}F(z)dz=\frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[P(re^{i\varphi})+iQ(re^{i\varphi})\right]e^{in\varphi}\ (n\ge 1).$$

Тому

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[P(re^{i\varphi})-iQ(re^{i\varphi})\right]e^{-in\varphi}d\varphi \quad (n\ge 1). \tag{4}$$

Оскільки

$$r^n b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[P(re^{i\varphi}) + iQ(re^{i\varphi})\right]\cdot e^{-in\varphi}d\varphi,$$

то внаслідок (4), дістаємо

$$r^n b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{i\varphi})\cdot e^{-in\varphi}d\varphi \quad (n \ge 1).$$

Однак $P(z) = u - \operatorname{Re} f(z) \ge 0$ при $z \in K_R(0)$. Зокрема $P(z) \ge 0$, коли $z \in \overline{K_r}(0)$. Тому

$$r^n|b_n| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|P(re^{i\varphi})\cdot e^{-in\varphi}\right|d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P(re^{i\varphi})\,d\varphi = 2\operatorname{Re} b_0. \quad (5)$$

Переходячи в (5) до границі при $r \to R-0$, дістанемо

$$|b_n|R^n \le 2\operatorname{Re} b_0 = 2\operatorname{Re}(u - c_0) = 2(u - \operatorname{Re} c_0).$$

Оскільки $|b_n| = |c_n|$ $(n \ge 1)$, то дістаємо (2). ►

Зауваження. При виконанні умов доведеної леми позначимо $B_f(r) = \max\{\operatorname{Re} f(z) : z \in \overline{K_r}(0)\}$, $0 < r < R$. Оскільки $\operatorname{Re} f(z)$, $z \in K_R(0)$, є гармонійна функція в цьому крузі, то, згідно із принципом максимума гармонійної функції виконується $(\forall z \in K_r(0))\ \operatorname{Re} f(z) \le B_f(r)$. Застосовуючи до круга $K_r(0)$ попередню теорему і поклавши там $B_f(r)$ замість u дістанемо співвідношення

$$|c_n| \le \frac{2(B_f(r) - \operatorname{Re} c_0)}{r^n} \quad (n \ge 1,\ 0 < r < R),$$

що є аналогом відомої нерівності Коші для коефіцієнтів степеневого розкладу аналітичної функції f.

§9. Розклад цілої функції скінченного порядку в нескінченний добуток.

За наслідком із теореми Вейєрштрасса ціла функція f може бути записана у вигляді

$$f(z) = z^m \exp(g(z)) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n} \right\} \quad (z \in \mathbb{C}), \qquad (1)$$

де $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ - послідовність нулів f, $a_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, m – кратність нуля f в точці $z = 0$, g – деяка ціла функція і $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ - послідовність цілих чисел така, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < +\infty \qquad (2)$$

при кожному $r,\ 0 < r < +\infty$. Покажемо що представлення (1) набуває значно простішого вигляду, якщо f – ціла функція скінченного порядку.

<u>Теорема 9.1.(Адамара).</u> Ціла функція f скінченного порядку $\rho,\ \rho < +\infty$, допускає представлення

$$f(z) = z^m \exp(P(z)) \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}; p\right) \quad (z \in \mathbb{C}), \qquad (3)$$

де послідовність $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ і число m, вказані вище, а рід p канонічного добутку правої частини задовольняє умову $p \leq \rho$ і $P(z)$ - алгебраїчний многочлен степеня q такого, що $q \leq \rho$. Іншими словами ціла функція f скінченного порядку ρ має скінченний рід, який не перевищує ρ.

◄ Ми знову вважаємо, що нулі f занумеровані за неспадними їх модулями. Оскільки показник збіжності τ послідовності нулів $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ не перевищує порядку ρ цілої функції f, $\tau \leq \rho$, а рід p канонічного добутку не перевищує τ, то $p \leq \rho$.

Тому при $p = [\rho]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ збігається і, отже, збігається ряд (2) при $p_n = p$ і довільному $r,\ 0 < r < +\infty$. Таким чином при $p = [\rho] \le \rho$ канонічний добуток в (3) збігається до певної цілої функції. Отже, справедливе (1) з $p_n = p,\ (n \in \mathbb{N})$.

Залишається показати, що $g(z)$ в (1) з $p_n = p,\ (n \in \mathbb{N})$ є многочлен степеня $q,\ q \le \rho$. Позначивши

$$P_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p$$

і вважаючи, що $f(0) = 1$ (а це не зменшує загальності наших міркувань) запишемо (1) у вигляді

$$f(z) = \prod_{n=1}^{m}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\exp\left\{g(z) + \sum_{n=1}^{m} P_n(z)\right\}\prod_{n=m+1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\exp P_n(z), \quad (4)$$

де m – довільне, $m \in \mathbb{N}$. Зафіксувавши число $R,\ 0 < R < +\infty$, виберемо число $m,\ m = m(R)$, в попередній рівності так, щоб було $|a_n| \le R$ при $n \le m$ і $|a_{m+1}| > R$. Позначимо

$$f_R(z) = \exp\left(g(z) + \sum_{n=1}^{m} P_n(z)\right)\prod_{n=m+1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\exp P_n(z),\ z \in \mathbb{C}.$$

На колі $\Gamma_{2R}(0) = \{z : |z| = 2R\}$ виконується

$$\left|1 - \frac{z}{a_n}\right| \ge \frac{|z|}{|a_n|} - 1 = \frac{2R}{|a_n|} - 1 \ge 1 \quad (n \le m).$$

Тому із (4) дістаємо $M_f(2R) = \max\{|f(z)| : z \in \Gamma_{2R}(0)\} \ge |f_R(z)|$ $(z \in \Gamma_{2R}(0))$; отже, за принципом максимума модуля

$$|f_R(z)| \le M_f(2R) \quad (z \in C_{2R}(0)). \quad (5)$$

Функція f_R не має нулів в деякому крузі $K_{R'}(0)$ такому, що $R' > R$. Тому аналітичною в цьому крузі є однозначна вітка

$$g_R(z) = \ln f_R(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{m} P_n(z) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left\{ \ln\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + P_n(z) \right\}, \quad (6)$$

оскільки ряд правої частини, як було показано раніше, збігається рівномірно всередині круга $K_{R'}(0)$. Для функції g_R на колі $\Gamma_R(0)$ в силу (5) виконується

$$\operatorname{Re} g_R(z) = \ln|f_R(z)| \le \ln M_f(2R). \quad (7)$$

Оскільки в нашому випадку $f(0) = 1$, то $g_R(0) = \ln f_R(0) = \ln f(0) = 0$. Із (7) та модифікованих нерівностей Коші випливає, що коефіцієнти c_k степеневого розкладу в околі точки $z = 0$ функції g_R задовольняють нерівність

$$|c_k| \le 2\frac{\ln M_f(2R)}{R^k} \quad (k \ge 1). \quad (8)$$

Оскільки степені многочленів P_n рівні $p = [\rho]$, то при $k > [\rho] = p$ справедливе

$$c_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{k a_n^k}.$$

Звідси в силу (8) дістаємо

$$\frac{|g^{(k)}(0)|}{k!} \le 2\frac{\ln M_f(2R)}{R^k} + \frac{1}{k}\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^k}. \quad (9)$$

Оскільки у нас $k > p$, то $\frac{\ln M_f(2R)}{R^k} \to 0 \ (R \to \infty)$. Тому за попередньою теоремою

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^k} < +\infty \quad (k > p).$$

і $m = m(R) \to$ $(n \to$ $)$, то другий доданок правої частини в (9) прямує до 0 при $R \to$. Переходячи до границі в (9) при $R \to$ дістаємо

$$\frac{|g^{(k)}(0)|}{k!} \le 0 \quad (k > \rho).$$

Отже, $g^{k}(0) = 0$ при $k > \rho$ тобто g - многочлен степеня $q,\ q \le \rho$. ▶

Зазначимо, що для функції нецілого порядку ρ степінь многочлена в експоненційному множнику представлення (3) менший ρ і тому порядок, цілої функції f, як можна показати, співпадає з порядком канонічного добутку із (3) і, отже, з показником збіжності τ послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Таким чином в цьому випадку $p < \rho < p +$ тобто рід функції f рівний $p = \rho$.

При цілому порядку $\rho,\ \rho(f) = \rho$, рід функції f або рівний ρ або рівний $\rho -$. Справді, якщо рід f менший ρ, то $q < \rho$ і порядок функції f, як можна показати, співпадає з порядком канонічного добутку, який рівний τ. З іншого боку, $p \le \tau \le p +$, так що $p \le \rho \le p +$ і оскільки, за припущенням $p < \rho$, то $p = \rho -$.

Взагалі, якщо показник збіжності τ послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ є ціле число і

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\tau}} = \infty,$$

то рід p канонічного добутку в (3) рівний його порядку $\rho,\ p = \rho = \tau$. Якщо вказаний ряд збігається, то рід канонічного добутку рівний $\rho -$.

Було вже зазначено, що показник збіжності τ послідовності нулів цілої функції f нецілого порядку ρ співпадає із $\rho,\ \tau = \rho$.

В цьому випадку, як можна переконатися, функція f має той же порядок і тип, що і відповідний їй канонічний добуток із (3). Отже, ми приходимо до наступного твердження.

<u>Теорема 9.2.</u> Якщо порядок ρ цілої функції f є неціле число, а Δ_f - верхня щільність послідовності її нулів, то при $\Delta_f = 0$ функція f має мінімальний тип, при $0 < \Delta_f < +\infty$ вона нормального типу і при $\Delta_f = +\infty$ вона максимального типу.

<u>Приклад.</u> Оскільки для функції $f(z) = \sin z$, послідовність нулів якої

$$0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \dots,\ \pm n\pi,\ \dots \quad (n \in \mathbb{N})$$

має показник збіжності $\tau = 1$, її порядок $\rho = 1$, рід відповідного канонічного добутку $p = 1$, то за теоремою Адамара

$$\sin z = z\exp(az+b)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)\exp\left(\frac{z}{n\pi}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n\pi}\right)\exp\left(-\frac{z}{n\pi}\right) =$$

$$= z\exp(az+b)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \quad (z \in \mathbb{C}),$$

де $a,\ b$ - комплексні сталі. Тоді при $z \to 0$ із рівності

$$\frac{\sin z}{z} = \exp(az+b)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

дістаємо $\exp b = 1$. Отже,

$$\sin z = z\exp(az)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Із непарності функції $\sin z$ і попередньої рівності випливає, що $\exp(az) = \exp(-az)$, $\exp(2az) = 1$, тобто $a = 0$. Отже,

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Література

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.

2. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.

3. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 175 с.

4. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

5. Маркушевич А. И. Целые функции. – М.: Наука, 1975. – 119 с.

Навчальне видання

Микола Євгенович Коренков
Ірина Петрівна Головенко

Цілі функції та нескінченні добутки (спецкурс)

Літературний редактор – Л. І. Філозоф