УДК 517.5

Федуник О. В. (Інститут математики НАН України, Київ)

Лінійні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q.

Linear widths of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic function of several variables in the space L_q.

Одержано точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі L_q для деяких значень параметрів p та q.

We obtained exact order estimates of linear widths of classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables in the space L_q for some means of parametres p and q.

I. Позначення і допоміжні твердження.

Нехай $\mathbb{R}^d$— евклідів простір з елементами $x=(x_1,...,x_d)$ і $\pi_d=\prod\limits_{j=1}^{d}[-\pi;\pi]$. Позначимо через $L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній функцій $f(x) = f(x_1,...,x_d)$ зі скінченною нормою, яка визначається наступним чином

$$||f||_{L_p(\pi_d)} = ||f||_p = \Big((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \ ,\ 1 \le p < \infty,$$

і

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = ||f||_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(x)|.$$

Всюди далі будемо вважати, що для функціій $f(x) \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx_j = 0\ ,\quad j=\overline{1,d}.$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$ через

$$S[f] = \sum_k \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}$$

позначимо її ряд Фур'є, де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є, $k=(k_1,\dots,k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j=\overline{1,d}$, і $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$.

Кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \Big\{\ k :\ \ 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j=\overline{1,d}\Big\}$$

і для $f(x)$ позначимо

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}.$$

Тоді ряд Фур'є функції f можна записати у вигляді

$$S[f] = \sum_s \delta_s(f,x).$$

За допомогою рівності

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d)$$

означимо l-ту різницю функції $f(x)$ з кроком h_j за змінною x_j.

Для $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ і $h = (h_1, \dots, h_d)$ введемо мішану l-ту різницю

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \dots \Delta_{h_1}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\dots (\Delta_{h_1}^l f(x))).$$

Означимо для $f \in L_p(\pi_d)$ мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega^l(f, t)_p = \sup_{|h_j| \le t_j, j=\overline{1,d}} ||\Delta_h^l f(\cdot)||_p \ .$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$— задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє наступні умови:

1) $\Omega(t) > 0, \ t_j > 0, \ j = \overline{1,d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \le (\prod\limits_{j=1}^{d} m_j)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S), (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha} \ , \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma} \ , \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \neq j$.

Зазначимо, що функції, які задовольняють сформульовані вище умови 1) – 4), (S) та (S_l), можуть мати вигляд

$$\Omega(t) = t_1^{r_1} \cdot ... \cdot t_d^{r_d} \cdot \Big(\log \frac{1}{t_1}\Big)^{m_1} \cdot ... \cdot \Big(\log \frac{1}{t_d}\Big)^{m_d},$$

де $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$, а m_j , $j = \overline{1,d}$,– фіксовані дійсні числа.

Означимо деякі порядкові співвідношення, які будуть використовуватись далі.

Функції $\mu(n)$ і $\nu(n)$ будемо називати функціями однакового порядку і писати $\mu(n) \asymp \nu(n)$, якщо існує n_0, таке, що для будь– якого $n > n_0$ виконується нерівність $C_3\mu(n) \leq \nu(n) \leq C_4\mu(n)$, де сталі $C_3, C_4 > 0$ можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$. Якщо ж $\mu(n) \leq C_5\nu(n)$ або $\mu(n) \geq C_6\nu(n)$, то позначимо $\mu(n) \ll \nu(n)$ і $\mu(n) \gg \nu(n)$ відповідно.

В подальшому в формулюванні отриманих результатів буде присутнє порядкове співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}, M, n \in \mathbb{N}$, яке розуміється таким чином, що існують сталі $0 < C_7 < C_8$ такі, що виконуються нерівності

$$C_7 2^n n^{d-1} \leq M \leq C_8 2^n n^{d-1}.$$

Для $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і заданої функції типу мішаного модуля неперервності $\Omega(t)$, яка задовольняє умови 1) – 4), (S) і (S_l), клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначається наступним чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \Big\{ f \in L_p(\pi_d) : \ ||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \leq 1 \Big\},$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \Big\{ \int\limits_{\pi_d} \Big(\frac{\Omega^l(f,t)_p}{\Omega(t)}\Big)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \Big\}^{\frac{1}{\theta}}, \ 1 \leq \theta < \infty \ ,$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega^l(f,t)_p}{\Omega(t)} \ .$$

В [2] для $1 < p < \infty$ доведено, що

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \Big\{ \sum_s ||\delta_s(f,\cdot)||_p^{\theta} \ \Omega(2^{-s})^{-\theta} \Big\}^{\frac{1}{\theta}} \ , \ \ 1 \leq \theta < \infty \ , \qquad (1)$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{||\delta_s(f,\cdot)||_p}{\Omega(2^{-s})} \ , \qquad (2)$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d}$.

Зазначимо, що класи функцій $B^{\Omega}_{p,\theta}$ були введені в роботі [2]. У випадку $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$ з (1), (2) випливають зображення

$$||f||_{B^{r}_{p,\theta}} \asymp \Big\{ \sum_s 2^{(r,s)\theta} ||\delta_s(f,\cdot)||_p^{\theta} \Big\}^{\frac{1}{\theta}} \ , \ 1 \leq \theta < \infty,$$

$$||f||_{B^{r}_{p,\infty}} \asymp \sup_s 2^{(r,s)} ||\delta_s(f,\cdot)||_p \ ,$$

які були встановлені в [3]. При $\theta = \infty$ клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадає із введеним в [4] класом H^{Ω}_p.

В даній роботі будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального вигляду:

$$\Omega(t) = \omega\Big(\prod_{j=1}^{d} t_j \Big), \qquad (3)$$

де $\omega(\tau)$— задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l). Легко переконатися, що для $\Omega(t)$ вигляду (3) виконуються властивості 1) – 4) функції типу мішаного модуля неперервності порядку l, а також умови (S) і (S_l). Тому при такій функції типу мішаного модуля неперервності $\Omega(t)$, за якою визначається клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, зберігаються зображення (1), (2) для норм функцій цього класу.

Метою роботи є встановлення точних за порядком оцінок лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі $L_q(\pi_d)$ для деяких значень параметрів p та q. Зазначимо, що поняття лінійного поперечника було введено В.М.Тихомировим [5]. Сформулюємо тепер це означення.

Нехай W— множина в банаховому просторі X. Тоді лінійний поперечник множини W в просторі X (позначається $\lambda_M(W,X)$) визначається за формулою

$$\lambda_M(W,X) = \inf_A \sup_{f\in W} ||f - Af||_X, \tag{4}$$

де нижня межа береться по всіх діючих в X лінійних операторах A, розмірність області значень яких не перевищує M.

Колмогоровським поперечником центрально-симетричної множини W в просторі X (позначається $d_M(W,X)$) називається величина

$$d_M(W,X) = \inf_{L_M} \sup_{f\in W} \inf_{h\in L_M} ||f - h||_X,$$

де L_M підпростір в X, розмірність якого не перевищує M.

Нагадаємо, що лінійний поперечник $\lambda_M(W,X)$ пов'язаний із поперечником Колмогорова $d_M(W,X)$ нерівністю

$$d_M(W,X) \le \lambda_M(W,X). \tag{5}$$

У зв'язку з цим цікаво з'ясувати, в яких випадках (для конкретних множин W і просторів X) поперечники $d_M(W,X)$ і $\lambda_M(W,X)$ рівні за порядком, а в яких випадках має місце порядкова нерівність

$$d_M(W,X) \ll \lambda_M(W,X).$$

На даний час є велика кількість робіт, в яких досліджувались лінійні поперечники тих чи інших класів функцій, або скінченновимірних множин [6,7]. Тут згадаємо лише роботи [8–10], в яких вивчались величини

(4) для класів функцій багатьох змінних W^r_p, H^r_p і $B^r_{p,\theta}$, а також добре відомі книги [11–13], в яких міститься досить детальна бібліографія.

При викладі результатів нам будуть необхідні деякі відомі твердження.

Нехай l^m_p означає простір $\mathbb{R}^m$, в якому введена норма

$$||x||_{l^m_p} = \begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1\le i\le m} |x_i|, & p = \infty, \end{cases}$$

і B^m_p— одинична куля в l^m_p.

Має місце наступна теорема.

Теорема А [6]. *Нехай* $M < m$, $1 \le p < 2 \le q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$. *Тоді*

$$\lambda_M(B^m_p, l^m_q) \asymp \max\left\{m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, min\{1, m^{\frac{1}{q}} M^{-\frac{1}{2}}\}\sqrt{1-\frac{M}{m}}\right\}.$$

Зауважимо, що у випадку $p = 1$, $q > 2$ відповідний результат випливає з твердження, встановленого Б.С.Кашиним [7].

Нехай $s \in \mathbb{N}^d$ і $\mathcal{T}(\rho(s))$ означає множину функцій виду

$$f(x) = \sum_{k\in\rho(s)} c_k e^{i(k,x)}.$$

Теорема Б [14]. *Між простором тригонометричних поліномів* $\mathcal{T}(\rho(s))$ *і простором* $\mathbb{R}^{2^{(s,1)}}$ *існує ізоморфізм, який ставить у відповідність функції* $f(\cdot)$ *вектор* $\delta_s f^j = \{f_n(\tau_j)\} \in \mathbb{R}^{2^{(s,1)}}$,

$f_n(t) = \sum\limits_{sgnk_l=sgnn_l} c_k e^{i(k,t)}$, $l = \overline{1,d}$, $n = (\pm1, \ldots, \pm1) \in \mathbb{R}^d$,

$\tau_j = (\pi 2^{2-s_1} j_1, \ldots, \pi 2^{2-s_d} j_d)$, $j_i = 1, 2, \ldots, 2^{s_i-1}, i = \overline{1,d}$, *і при цьому мають місце співвідношення*

$$\|\delta_s(f,x)\|_p \asymp \left(2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\delta_s f^j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \in (1,\infty).$$

Для функцій однієї змінної відповідна теорема наведена в [15, т.2, с.46].

Теорема B (Літтлвуда - Пелі, див., наприклад, [16, с.65]). *Нехай* $p \in (1, \infty)$. *Тоді існують додатні числа* C_9, C_{10} *такі, що для кожної функції* $f(x) \in L_p(\pi_d)$ *виконується співвідношення*

$$C_9 ||f||_p \leq \Big\| \Big(\sum_s |\delta_s(f, \cdot)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \leq C_{10} ||f||_p \ .$$

Теорема B є узагальненням на багатовимірний випадок відомої теореми Літтлвуда - Пелі (див. [15, т.2, гл.15]).

Лема 1 [8]. *Нехай* $s \in \mathbb{N}^d$ *і* $f(\cdot) \in \mathcal{T}(\rho(s))$, $M_s \in \mathbb{Z}_+$, $M_s \leq 2^{(s,1)}$. *Якщо* $1 < p, q < \infty$, *то існує лінійний оператор* $\Lambda_{M_s} : \mathcal{T}(\rho(s)) \to \mathcal{T}(\rho(s))$, *розмірність області значень якого не перевищує* M_s *такий, що*

$$\|f(\cdot) - \Lambda_{M_s} f(\cdot)\|_q \asymp \Lambda_{M_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, l_q^{2^{(s,1)}}) 2^{(s,1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f(\cdot)\|_p \ . \qquad (6)$$

Лема 2 [17, с.25]. *Нехай* $1 \leq p < q < \infty$ *і* $f \in L_p(\pi_d)$. *Тоді має місце співвідношення*

$$\|f\|_q^q \ll \sum_s \left(\|\delta_s(f, \cdot)\|_p \ 2^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \right)^q \ . \qquad (7)$$

Лема 3 [6]. *Нехай* $M < n$. *Тоді при* $1 \leq p < 2 \leq q < \infty$ *виконується*

$$d_M(B_p^n, l_q^n) \asymp \max \left\{ n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}, \min \left\{ 1, n^{\frac{1}{q}} M^{-\frac{1}{2}} \right\} \sqrt{1 - \frac{M}{n}} \right\} \ . \qquad (8)$$

Лема 4 (див., наприклад, [17, с.16]). *Нехай* $T_{n_1,\dots,n_d}$ – *тригонометричний поліном степеня* n_j *за змінною* x_j, $j = \overline{1, d}$. *Тоді при* $1 \leq q < p \leq \infty$ *має місце нерівність*

$$||T_{n_1,\dots,n_d}||_p \leq 2^d \Big(\prod_{j=1}^d n_j \Big)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} ||T_{n_1,\dots,n_d}||_q \ . \qquad (9)$$

Співвідношення (9) відоме під назвою "нерівність Нікольського різних метрик".

II. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай* $1 < p \le 2, p' < q < \infty$, $2 \le \theta \le q$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$ *та умову* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *та* n *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}, \tag{10}$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Доведення. Встановимо спочатку в (10) оцінку зверху. Нехай $f(x)$— довільна функція із класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ і задано достатньо велике число M. Підберемо n із співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність числа

$$M_s = \begin{cases} 2^{(s,1)}, & (s,1) \le n, \\ [2^{n+\nu(n-(s,1))}], & (s,1) > n, \end{cases} \tag{11}$$

де $\nu > 0$— деяке число, яке ми підберемо пізніше, $[a]$— ціла частина числа a. Оцінимо $\sum\limits_s M_s$. Для цього скористаємось тим, що

$$\sum_{(s,1)\le n} 2^{(s,1)} = \sum_{j=d}^{n} \sum_{(s,1)=j} 2^{(s,1)} = \sum_{j=d}^{n} 2^j \sum_{(s,1)=j} 1 \asymp$$

$$\asymp \sum_{j=d}^{n} 2^j j^{d-1} \ll 2^n n^{d-1} \tag{12}$$

і

$$\sum_{(s,1)>n} 2^{-\nu(s,1)} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{(s,1)=j} 2^{-\nu(s,1)} = \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-\nu j} \sum_{(s,1)=j} 1 \asymp$$

$$\asymp \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-\nu j} j^{d-1} \ll 2^{-\nu n} n^{d-1}, \tag{13}$$

при $\nu > 0$.

Враховуючи (12) і (13), будемо мати

$$\sum_s M_s \le \sum_{(s,1)\le n} 2^{(s,1)} + \sum_{(s,1)>n} 2^{n+\nu(n-(s,1))} \ll 2^n n^{d-1} \asymp M.$$

Розглянемо лінійний оператор, який діє на функцію $f(x)$ за формулою

$$\Lambda_M f(x) = \sum_s \Lambda_{M_s} \delta_s(f,x),$$

де оператори Λ_{M_s} побудовані згідно з лемою 1, тобто вони задовольняють співвідношення (6). Оцінимо $\|f(x)-\Lambda_M f(x)\|_q$. Використаємо для цього лему 2.

Оскільки за умовою теореми $2\le p'<q<\infty$, то виконавши у формулі (7) заміну індекса p на p' матимемо

$$\|f\|_q^q \ll \sum_s \left(\|\delta_s(f,\cdot)\|_{p'} 2^{(\frac{1}{p'}-\frac{1}{q})}\right)^q.$$

Взявши до уваги все вище сказане, можемо записати

$$\|f(x)-\Lambda_M f(x)\|_q \ll \Big\| \sum_{(s,1)>n} (\delta_s(f,x)-\Lambda_{M_s}\delta_s(f,x))\Big\|_q \ll$$

$$\ll \Big(\sum_{(s,1)>n} (2^{(s,1)(\frac{1}{p'}-\frac{1}{q})} \|\delta_s(f,x)-\Lambda_{M_s}\delta_s(f,x)\|_{p'})^q\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{14}$$

Далі, використовуючи співвідношення (6), із (14) отримаємо

$$\|f(x)-\Lambda_M f(x)\|_q \ll$$

$$\ll \Big(\sum_{(s,1)>n} (2^{(s,1)(\frac{1}{p'}-\frac{1}{q})} \Lambda_{M_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, l_{p'}^{2^{(s,1)}}) 2^{(s,1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})} \|\delta_s(f,x)\|_p)^q\Big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \Big(\sum_{(s,1)>n} (2^{(s,1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \Lambda_{M_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, l_{p'}^{2^{(s,1)}}) \|\delta_s(f,x)\|_p)^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{15}$$

і враховуючи те, що згідно з теоремою A

$$\Lambda_{M_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, l_{p'}^{2^{(s,1)}}) \ll 2^{(s,1)\frac{1}{p'}} M_s^{-\frac{1}{2}},$$

із (15) маємо

$$\|f(x)-\Lambda_M f(x)\|_q \ll \Big(\sum_{(s,1)>n} (2^{(s,1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}2^{(s,1)\frac{1}{p'}}M_s^{-\frac{1}{2}}\|\delta_s(f,x)\|_p)^q\Big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \Big(\sum_{(s,1)>n} (2^{(s,1)(1-\frac{1}{q})}M_s^{-\frac{1}{2}}\|\delta_s(f,x)\|_p)^q\Big)^{\frac{1}{q}}. \qquad (16)$$

Підставляючи тепер в (16) замість M_s відповідні значення із (11), продовжимо оцінку

$$\|f(x)-\Lambda_M f(x)\|_q \ll \Big(\sum_{(s,1)>n} (2^{(s,1)(1-\frac{1}{q})}2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu}{2}(n-(s,1))}\|\delta_s(f,x)\|_p)^q\Big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}}\Big(\sum_{(s,1)>n} (2^{(s,1)(1-\frac{1}{q}+\frac{\nu}{2})}\|\delta_s(f,x)\|_p)^q\Big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$=2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}}\Big(\sum_{(s,1)>n} (2^{(s,1)(1-\frac{1}{q}+\frac{\nu}{2})}\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}}2^{-\alpha(s,1)}\omega^{-1}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p)^q\Big)^{\frac{1}{q}}=I.$$

Оскільки $\Omega(t)=\omega(t_1\cdot\ldots\cdot t_d)$ задовольняє умову (S) із $\alpha>1-\frac{1}{q}$, то

$$\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}, \qquad (17)$$

при $(s,1)\ge n$.

Підберемо ν з умови

$$1-\frac{1}{q}+\frac{\nu}{2}-\alpha<0. \qquad (18)$$

Тоді, внаслідок (17) і (18), одержуємо

$$I \ll 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}}\Big(\sum_{(s,1)>n} (2^{(s,1)(1-\frac{1}{q}+\frac{\nu}{2}-\alpha)}\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\omega^{-1}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p)^q\Big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}+\alpha n}\omega(2^{-n})\Big(\sum_{(s,1)>n} (2^{(s,1)(1-\frac{1}{q}+\frac{\nu}{2}-\alpha)}\omega^{-1}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p)^q\Big)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\nu n}{2}+\alpha n}\omega(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{q}+\frac{\nu}{2}-\alpha)}\Big(\sum_{(s,1)>n}\omega^{-q}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= 2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\omega(2^{-n})\Big(\sum_{(s,1)>n}\omega^{-q}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Так як $2 \le \theta \le q$, то використовуючи нерівність [18]

$$\Big(\sum_k a_k^{m_1}\Big)^{\frac{1}{m_1}} \le \Big(\sum_k a_k^{m_2}\Big)^{\frac{1}{m_2}}, a_k \ge 0\ ,\ 1 \le m_2 \le m_1 < \infty, \qquad (19)$$

матимемо

$$I \ll 2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\omega(2^{-n})\Big(\sum_{(s,1)>n}\omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\omega(2^{-n})\|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \le \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}.$$

Таким чином, згідно з означенням лінійного поперечника, ми отримали в (10) оцінку зверху.

Перейдемо до встановлення відповідної оцінки знизу.

Оскільки $1 < p \le 2$, то $B^\Omega_{p,\theta} \supset B^\Omega_{2,\theta}$ і при $\theta \ge 2$ виконується $B^\Omega_{2,\theta} \supset B^\Omega_{2,2}$. Тому для того, щоб отримати оцінку знизу поперечника $\lambda_M(B^\Omega_{p,\theta}, L_q)$, достатньо оцінити знизу поперечник $\lambda_M(B^\Omega_{2,2}, L_q)$.

Задамо M і виберемо число l із умови $M \asymp 2^l l^{d-1}, 2^l l^{d-1} \ge 2M$. Покладемо $S = \{s : (s,1) = l\}$, $|S|$- кількість елементів множини S, і позначимо T_l множину тригонометричних поліномів з номерами гармонік із $\bigcup\limits_{s\in S}\rho(s)$.

Тоді за означенням лінійного поперечника

$$\lambda_M(B^\Omega_{2,2}, L_q) \ge \lambda_M(B^\Omega_{2,2} \cap T_l, L_q)\ . \qquad (20)$$

Якщо P_l— оператор ортогонального проектування на T_l, то для $f \in L_q$ і $t \in T_l$ виконується співвідношення

$$\|f - t\|_q \gg \|P_l f - t\|_q\ . \qquad (21)$$

Тому з (20) і (21) отримуємо

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{2,2}, L_q) \geq \lambda_M(B^{\Omega}_{2,2} \cap T_l, L_q \cap T_l)\ . \tag{22}$$

Нехай тепер $f \in L_2 \cap T_l$. Згідно з теоремою Б будемо мати

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{2,\theta}} \asymp \Big(\sum_{(s,1)=l} \|\delta_s(f,x)\|_2^2 \omega^{-2}(2^{-(s,1)}) \Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \omega^{-1}(2^{-l}) \Big(\sum_{(s,1)=l} \|\delta_s(f,x)\|_2^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \omega^{-1}(2^{-l}) \Big(\sum_{(s,1)=l} 2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\delta_s f^j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \omega^{-1}(2^{-l}) 2^{-\frac{l}{2}} \Big(\sum_{(s,1)=l} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\delta_s f^j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{23}$$

Із (23) робимо висновок, що, якщо $f \in L_2 \cap T_l$ і

$$\Big(\sum_{(s,1)=l} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\delta_s f^j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \omega(2^{-l}) 2^{\frac{l}{2}}, \tag{24}$$

то $C_{11} f \in B^{\Omega}_{2,2} \cap T_l\ ,\ C_{11} > 0$.

Іншими словами, довільній кулі $C_{11}\omega(2^{-l})2^{\frac{l}{2}} B_2^{2^l|S|}$ радіуса $C_{11}\omega(2^{-l})2^{\frac{l}{2}}$ з простору $l_2^{2^l|S|}$ ставиться у відповідність одинична куля із $B^{\Omega}_{2,2} \cap T_l$. Крім того, якщо $g \in L_q \cap T_l\ ,\ q \geq 2$, то внаслідок теореми Літтлвуда-Пелі, нерівності (19) і теореми Б одержимо

$$\|g\|_q \gg \Big\| \Big(\sum_{s \in S} |\delta_s(g,x)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_q = \Big\| \Big(\sum_{(s,1)=l} |\delta_s(g,x)|^2 \Big)^{\frac{q}{2}} \Big\|_1^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \Big\| \sum_{(s,1)=l} |\delta_s(g,x)|^q \Big\|_1^{\frac{1}{q}} = \Big(\sum_{(s,1)=l} \|\delta_s(g,x)\|_q^q \Big)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \Big(\sum_{(s,1)=l} 2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\delta_s f^j|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \asymp 2^{-\frac{l}{q}} \Big(\sum_{(s,1)=l} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\delta_s f^j|^q \Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{25}$$

Таким чином, із (22)– (25) отримуємо оцінку

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{2,2}, L_q) \gg \omega(2^{-l}) 2^{l(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \lambda_M(B_2^{2^l|S|}, l_q^{2^l|S|}) \ .$$

Далі, взявши до уваги відоме співвідношення [13]

$$\lambda_M(B_2^{2^l|S|}, l_q^{2^l|S|}) = \lambda_M(B_{q'}^{2^l|S|}, l_2^{2^l|S|}) \ \ , \ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

а потім нерівність (5), матимемо

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{2,2}, L_q) \gg \omega(2^{-l}) 2^{l(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} d_M(B_{q'}^{2^l|S|}, l_2^{2^l|S|}) \ . \tag{26}$$

Скориставшись тепер співвідношенням (8), одержимо

$$d_M(B_{q'}^{2^l|S|}, l_2^{2^l|S|}) \gg \min\left\{1, (2^l l^{d-1})^{\frac{1}{2}} (C_{12} 2^l l^{d-1})^{-\frac{1}{2}}\right\} \sqrt{1 - \frac{M}{2^l l^{d-1}}} \geq C_{13} > 0. \tag{27}$$

Із (26) і (27) отримуємо шукану оцінку знизу

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \gg \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \ .$$

Таким чином, оцінка знизу, а разом з нею і теорема, доведені.

Зауваження 1. Якщо $\Omega(t) = \Pi_{j=1}^d t_j^{r_1}$, $1 < p \leq 2, p' \leq q < \infty$, $2 \leq \theta \leq q$ і $\alpha = r_1 > 1 - \frac{1}{q}$, то виконується співвідношення

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}},$$

яке встановлене А.С. Романюком [10].

Зауваження 2. При порівнянні результату теореми 1 із відповідною оцінкою колмогоровського поперечника [2] робимо висновок, що для $1 < p \leq 2, p' < q < \infty, 2 \leq \theta \leq q$, $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$ має місце порядкова рівність

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp 2^{n(\frac{1}{p'}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2})} d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q),$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Теорема 2. *Нехай* $2 \le p < q < \infty,\ 2 \le \theta \le q$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ *та умову* (S_l). *Тоді для будь - яких натуральних* M *та* n *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \ . \tag{28}$$

Доведення. Оцінка зверху в (28) випливає з відповідної оцінки наближення класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ східчасто- гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f)$ [2].

Встановимо оцінку знизу. Нехай $f(x)$— довільна функція із класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$. Використавши для "блоків" $\delta_s(f,x)$ лему 4 і поклавши в нерівності (9) $q = 2$, одержимо

$$\|\delta_s(f,x)\|_p \ll 2^{(s,1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|\delta_s(f,x)\|_2 \ .$$

З останнього співвідношення випливає, що

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \Big(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f,x)\|^{\theta}_p \Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \Big(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) 2^{\theta(s,1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|\delta_s(f,x)\|^{\theta}_2 \Big)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \Big(\sum_s \omega_1^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f,x)\|^{\theta}_2 \Big)^{\frac{1}{\theta}} \asymp \|f\|_{B^{\Omega_1}_{2,\theta}} \ ,$$

де $\Omega_1(t) = \omega_1(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, $\omega_1(\tau) = \omega(\tau)\tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$.

Очевидно, що функція $\omega_1(\tau)$ є функцією типу мішаного модуля неперервності порядку $l+1$, яка задовольняє умову (S) з деяким $\alpha_1 = \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$ і умову (S_{l+1}).

З проведених вище міркувань робимо висновок, що виконується включення $B^{\Omega_1}_{2,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta}$, тому $\lambda_M(B^{\Omega_1}_{2,\theta}, L_q) \le \lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$. Щоб отримати оцінку $\lambda_M(B^{\Omega_1}_{2,\theta}, L_q)$ знизу, скористаємось результатом теореми 1.

$$\lambda_M(B^{\Omega_1}_{2,\theta}, L_q) \gg \omega_1(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} =$$

$$= \omega(2^{-n})2^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} = \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Таким чином, оцінка знизу в (28) доведена.

Зауваження 3. Якщо $\Omega(t) = \Pi_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$, $2 \le p < q < \infty$, $2 \le \theta \le q$ і $\alpha = r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, то виконується порядкова рівність [10]

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}.$$

Зауваження 4. Із теореми 2 і оцінок $d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ [2] при $2 \le p < q < \infty$, $2 \le \theta \le q$, $\alpha > \frac{1}{2}$ випливає співвідношення

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2})} d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q),$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Наведемо ще оцінки лінійних поперечників, які є наслідками відомих оцінок інших апроксимативних характеристик.

Теорема 3. *Нехай $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 0$ та умову (S_l). Тоді для будь- яких натуральних M та n таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, виконується:*

а) якщо $1 < q \le 2 \le p < \infty$, $2 \le \theta \le \infty$, то

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})};$$

б) якщо $2 < q \le p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, то

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+} ,$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

В теоремі 3 оцінки зверху в обох випадках випливають із відповідних оцінок наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є [19], а знизу— із оцінок колмогоровських поперечників [19].

Таким чином, при виконанні умов теореми 3 має місце співвідношення

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q).$$

Наслідок. При $\theta = \infty$ із теореми 3 у випадку $1 < q \leq p < \infty, p \geq 2$ отримуємо оцінку
$$\lambda_M(H_p^\Omega, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}}.$$

1. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1956. — **5**.— С. 483–522.

2. *Sun Youngsheng, Wang Heping* Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1997.— **219**. — С. 356–377.

3. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1989. — **187**. — С. 143–161.

4. *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**. — С. 35–48.

5. *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук.— 1960. — **15**, № 3. — С. 81–120.

6. *Глускин Е.Д.* Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. — 1983. — **120**, № 2. — С. 180–189.

7. *Кашин Б.С.* О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m // Изв. Арм. ССР. Матем. — 1980. — **XV**, № 5. — С. 379–394.

8. *Галеев Э.М.* Линейные поперечники классов Гельдера-Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки. — 1996.— **59**, № 2. — С. 189–199.

9. *Романюк А.С.* Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. I // Укр. мат. журн.— 2001. — **53**, № 5. — С. 647–661.

10. *Романюк А.С.* Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. II // Укр. мат. журн.— 2001. — **53**, № 6. — С. 820–829.

11. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. — М.: Наука, 1987. — 424 с.

12. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. — Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.

13. *Тихомиров В.М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фунд. направления / ВИНИТИ. — 1987.— **14**. — С. 103–260.

14. *Галеев Э.М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\widetilde{W}_p^r$ и $\widetilde{H}_p^r$ в пространстве $\widetilde{L}_p$ // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1985.— **49**, № 5. — С. 916–934.

15. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т1. — 615 с; Т2. — 537 с.

16. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.

17. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — 112 с.

18. *Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.

19. *Стасюк С.А.* Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 11. — С. 1557–1568.