УДК 517.5

О. В. Федуник (Ін - т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ АПРОКСИМАТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ В ПРОСТОРІ L_q

Одержано точні за порядком оцінки наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q за допомогою операторів ортогонального проектування, а також лінійних операторів, які підпорядковані деяким умовам.

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0; 2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$, у якому норма визначається рівностями

$$||f||_{L_p(\pi_d)} = ||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = ||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Всюди далі будемо вважати, що функції f належать підпростору

$$L^0_p(\pi_d) = \Big\{ f : \quad f \in L_p(\pi_d), \int\limits_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, j = \overline{1, d} \Big\}.$$

За допомогою рівності

$$\Delta_{h_j}^l f(x)=\sum_{n=0}^{l}(-1)^{l-n}C_l^n f(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j+nh_j,x_{j+1},\ldots,x_d)$$

означимо l-ту різницю функції f з кроком h_j за змінною x_j.

Для $f(x)=f(x_1,\ldots,x_d)$ і $h=(h_1,\ldots,h_d)$ введемо мішану l-ту різницю

$$\Delta_h^l f(x)=\Delta_{h_d}^l\ldots\Delta_{h_1}^l f(x)=\Delta_{h_d}^l(\ldots(\Delta_{h_1}^l f(x))).$$

Означимо для $f\in L_p^0(\pi_d)$ мішаний модуль неперервності порядку l:

$$\Omega_l(f,t)_p=\sup_{\substack{|h_j|\le t_j,\\ j=\overline{1,d}}}||\Delta_h^l f(x)||_p\ .$$

Нехай $\Omega(t)=\Omega(t_1,\ldots,t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t)>0,\ \ t_j>0,\ \ j=\overline{1,d};\quad \Omega(t)=0,\ \ \prod\limits_{j=1}^{d}t_j=0;$

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1t_1,\ldots,m_dt_d)\le\Big(\prod\limits_{j=1}^{d}m_j\Big)^l\Omega(t),\ \ m_j\in\mathbb{N},\quad j=\overline{1,d};$

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j\ge 0,\quad j=\overline{1,d}$.

Нехай також $\Omega(t)$ задовольняє умови (S), (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau)\ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha>0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1>0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha}\le C_1\frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha},\qquad 0<\tau_1\le\tau_2\le 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \neq j$.

Означимо деякі порядкові співвідношення, які будуть використовуватись далі.

Функції $\mu(n)$ і $\nu(n)$ будемо називати функціями однакового порядку і писати $\mu(n) \asymp \nu(n)$, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $C_3\mu(n) \leq \nu(n) \leq C_4\mu(n)$, де сталі $C_3, C_4 > 0$ можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$. Якщо ж $\mu(n) \leq C_5\nu(n)$ або $\mu(n) \geq C_6\nu(n)$, то позначимо $\mu(n) \ll \nu(n)$ або $\mu(n) \gg \nu(n)$ відповідно.

В подальшому в формулюванні отриманих результатів буде присутнє порядкове співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, $M, n \in \mathbb{N}$, яке будемо розуміти таким чином: існують сталі $0 < C_7 < C_8$ такі, що виконуються нерівності

$$C_7 2^n n^{d-1} \leq M \leq C_8 2^n n^{d-1}.$$

Означимо тепер класи функцій $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які були розглянуті в роботі [2].

Нехай $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,d}$. Позначимо

$$\rho(s) = \left\{ \, k : \quad 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, \; j = \overline{1,d} \right\},$$

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} \widehat{f}(k)e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t)e^{-i(k,t)}dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f, $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$.

Для $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4, клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначається наступним чином

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \left\{ f \in L^0_p(\pi_d) : \ ||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\},$$

де

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left\{ \int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}.$$

В [2] для $1 < p < \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4, (S) і (S_l) доведено, що

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_{s} ||\delta_s(f,x)||^{\theta}_p \ \Omega(2^{-s})^{-\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \ \ 1 \le \theta < \infty \ , \qquad (1)$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{s} \frac{||\delta_s(f,x)||_p}{\Omega(2^{-s})} \ , \qquad (2)$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Для норм функцій із класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна записати представлення, аналогічні (1) і (2) у випадках $p = 1$ і $p = \infty$, дещо змінивши при цьому "блоки" $\delta_s(f,x)$.

Нехай $V_n(t)$ означає ядро Валле Пуссена порядку $2n-1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \Big(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j) \Big)$$

і для $f \in L^0_p(\pi_d), 1 \le p \le \infty$, через $A_s(f,x)$ позначимо згортку

$$A_s(f,x) = f(x) * A_s(x).$$

Тоді, як встановлено в [3], для кожного $1 \le p \le \infty$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_{s} \|A_s(f,x)\|_p^{\theta} \ \Omega(2^{-s})^{-\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \ 1 \le \theta < \infty, \qquad (3)$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{s} \frac{\|A_s(f,x)\|_p}{\Omega(2^{-s})}. \qquad (4)$$

Зауважимо, що при $\theta = \infty$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають із розглянутими в [4] класами H^{Ω}_p. У випадку $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$ норми функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з нормами функцій з класів $B^{r}_{p,\theta}$, які означені в [5].

Зазначимо, що в роботі будуть розглядатись класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального вигляду:

$$\Omega(t) = \omega\Big(\prod_{j=1}^{d} t_j \Big), \qquad (5)$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l). Легко переконатися, що для $\Omega(t)$ вигляду (5) виконуються властивості 1 – 4 функції типу мішаного модуля неперервності порядку l, а також умови (S) і (S_l), тому зберігаються наведені вище (1) — (4) зображення норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

В даній роботі встановлюються точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі L_q для деяких значень параметрів p і q. Як відомо, поняття ортопроекційного поперечника ввів В. М. Темляков [6]. Щоб навести означення цього поняття, введемо деякі позначення.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ — ортонормована система функцій $u_i(x) \in L_\infty(\pi_d)$. Кожній функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду $\sum\limits_{i=1}^{M}(f,u_i)u_i$, тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$. Тоді для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$ величина

$$d_M^{\perp}(F,L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M} \sup_{f\in F} \left\| f(x) - \sum_{i=1}^{M}(f,u_i)u_i(x)\right\|_q \tag{6}$$

називається ортопроекційним поперечником цього класу в просторі $L_q(\pi_d)$.

В роботі, крім ортопроекційних поперечників, будемо досліджувати величини $d_M^B(F,L_q)$, введені В. М. Темляковим [6], які визначаються таким чином:

$$d_M^B(F,L_q) = \inf_{G\in L_M(B)_q} \sup_{f\in F\cap D(G)} \|f(x) - Gf(x)\|_q \,. \tag{7}$$

Через $L_M(B)_q$ тут позначено множину лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься в підпросторі розмірності M простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує число $B \geq 1$ таке, що для всіх векторів $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, виконується нерівність $\left\| Ge^{i(k,x)} \right\|_2 \leq B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M, а також оператори, які задаються на ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, який визначається послідовністю $\{\lambda_m\}$ такою, що $|\lambda_m| \leq 1$ для всіх m. Із (6) і (7) легко бачити також, що величини $d^{\perp}_M(F, L_q)$ і $d^B_M(F, L_q)$ пов'язані між собою нерівністю

$$d^B_M(F, L_q) \leq d^{\perp}_M(F, L_q). \tag{8}$$

Сьогодні відомо багато робіт, присвячених дослідженню ортопроекційних поперечників тих чи інших класів функцій. Тут згадаємо роботи [7— 10], в яких вивчались величини (6), (7) для класів функцій багатьох змінних $W^r_{p,\alpha}$, H^r_p та $B^r_{p,\theta}$, і в яких можна ознайомитись з більш широкою бібліографією.

При встановленні оцінок зверху в теоремах 1 і 2 за агрегати наближення будемо брати частинні суми ряду Фур'є з "номерами" гармонік із множини Q_n

$$S_{Q_n}(f, x) = \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f, x),$$

де $Q_n = \bigcup\limits_{(s,1)<n} \rho(s)$ — "східчастий гіперболічний хрест", і розглядати величини

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q = \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f(x) - S_{Q_n}(f, x)\|_q.$$

Зазначимо, що величини $d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ і $\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$, де $M \asymp 2^n n^{d-1}$, пов'язані між собою нерівністю

$$d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \ll \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q. \tag{9}$$

Перейдемо до викладу отриманих результатів.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p < q < \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ *та умову* (S_l). *Тоді при* $1 \le \theta \le \infty$ *має місце порядкова рівність*

$$d_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) \asymp d_M^{B}(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}, \quad (10)$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$, $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доведення. У випадку $1 < p < q < \infty$ оцінка зверху в (10) випливає із оцінок наближення класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ за допомогою східчасто-гіперболічних сум Фур'є $S_{Q_n}(f,x)$ у метриці L_q [2] за умови, що M та n пов'язані співвідношенням $M \asymp 2^n n^{d-1}$. При $p = 1, 1 < q < \infty$ одержимо відповідну оцінку зверху для величини $\mathcal{E}_{Q_n}(B_{1,\theta}^{\Omega})_q$, де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Нехай q_0 — довільне число, що задовольняє умову $1 < q_0 < q$.

Лема 1[8, с. 25]. *Нехай* $1 \le q < p < \infty$, $f \in L_q^0(\pi_d)$. *Тоді*

$$||f||_p^p \ll \sum_s \left(||\delta_s(f,x)||_q 2^{(s,1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \right)^p.$$

Використавши лему 1, а також співвідношення

$$||\delta_s(f,x)||_p \asymp ||A_s(f,x)||_p, \ 1 < p < \infty, \quad (11)$$

для $f \in B_{1,\theta}^{\Omega}$ будемо мати

$$||f(x) - S_{Q_n}(f,x)||_q = \left\| \sum_{(s,1) \ge n} \delta_s(f,x) \right\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,1) \ge n} ||\delta_s(f,x)||_{q_0}^q 2^{(s,1)(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{(s,1)\geq n} ||A_s(f,x)||^q_{q_0} 2^{(s,1)(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Далі, використаємо відоме твердження.

Лема 2 (див., наприклад, [8, с.16]). *Нехай* $T_{n_1,\dots,n_d}$ — *тригонометричний поліном степеня* n_j *за змінною* x_j, $j=\overline{1,d}$. *Тоді при* $1 \leq q < p \leq \infty$ *має місце нерівність*

$$||T_{n_1,\dots,n_d}||_p \leq 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} n_j \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} ||T_{n_1,\dots,n_d}||_q \ . \qquad (12)$$

Співвідношення (12) відоме під назвою "нерівність різних метрик Нікольського".

Застосуємо до $A_s(f,x)$ нерівність (12), і продовжимо

$$\ll \left(\sum_{(s,1)\geq n} ||A_s(f,x)||^q_1 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q_0})q} 2^{(s,1)(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{(s,1)\geq n} ||A_s(f,x)||^q_1 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-q}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f,x)||^q_1 \frac{\omega^q(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)q}} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q}-\alpha)q} \right)^{\frac{1}{q}} = I_1.$$

Щоб оцінити I_1, розглянемо окремо три випадки.

Нехай $1 \leq \theta \leq q$. Використовуючи нерівність [11, с. 43]

$$\left(\sum_k |a_k|^{\mu_2} \right)^{\frac{1}{\mu_2}} \leq \left(\sum_k |a_k|^{\mu_1} \right)^{\frac{1}{\mu_1}}, 1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 < \infty,$$

а також той факт, що $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$ задовольняє умову (S) із $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, тобто

$$\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}, \qquad (13)$$

при $(s,1) \geq n$, будемо мати

$$I_1 \leq \left(\sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f,x)||_1^{\theta} \frac{\omega^{\theta}(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)\theta}} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q}-\alpha)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f,x)||_1^{\theta} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q}-\alpha)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq$$

$$\leq \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n} 2^{n(1-\frac{1}{q}-\alpha)} \left(\sum_{s} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f,x)||_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} ||f||_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \ll \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})}.$$

Нехай тепер $q < \theta < \infty$. Застосувавши до I_1 нерівність Гельдера з показником $\frac{\theta}{q}$, а також використавши (13) і відоме співвідношення [8, с. 11]

$$\sum_{(s,1)\geq n} 2^{-\nu(s,1)} \asymp 2^{-\nu n} n^{d-1}, \nu > 0, \tag{14}$$

одержимо

$$I_1 \leq \left(\sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f,x)||_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{(s,1)\geq n} \frac{\omega^{\frac{q\theta}{\theta-q}}(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)\frac{q\theta}{\theta-q}}} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q}-\alpha)\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll ||f||_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \left(\sum_{(s,1)\geq n} \frac{\omega^{\frac{q\theta}{\theta-q}}(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)\frac{q\theta}{\theta-q}}} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q}-\alpha)\frac{q\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \Bigg(\sum_{(s,1)\geq n} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q}-\alpha)\frac{q\theta}{\theta-q}} \Bigg)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \ll \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n} 2^{n(1-\frac{1}{q}-\alpha)} \times$$

$$\times n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} = \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}.$$

Нехай $\theta = \infty$. В цьому випадку також використаємо співвідношення (13) і (14)

$$I_1 \leq \sup_s \frac{||A_s(f,x)||_1}{\omega(2^{-(s,1)})} \Bigg(\sum_{(s,1)\geq n} \frac{\omega^q(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)q}} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q}-\alpha)q} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\asymp ||f||_{B^{\Omega}_{1,\infty}} \Bigg(\sum_{(s,1)\geq n} \frac{\omega^q(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)q}} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q}-\alpha)q} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \Bigg(\sum_{(s,1)\geq n} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q}-\alpha)q} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n} 2^{n(1-\frac{1}{q}-\alpha)} n^{\frac{d-1}{q}} = \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{q}}.$$

Встановимо тепер в (10) оцінку знизу. Її достатньо отримати для величини $d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$. При цьому розглянемо три випадки.

Нехай $q \leq \theta < \infty$. Розглянемо функцію

$$\varphi(x) = \sum_{s\in S_n} \mathcal{K}_s(x), \tag{15}$$

де $\mathcal{K}_s(x) = 2^d e^{i(k^s,x)} \prod\limits_{j=1}^{d} K_{2^{s_j-2}-1}(x_j)$,

$K_n(t) = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kt$ — ядро Фейєра порядку n,

$$S_n = \Bigg\{ s : (s,1) = n,\ s_j \in \mathbb{N},\ j = \overline{1,d} \Bigg\},$$

а через k^s позначимо вектор $k^s = (k_1^{s_1}, \dots, k_d^{s_d})$, де

$$k_j^{s_j} = \begin{cases} 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}, & s_j \geq 2, \\ 1, & s_j = 1, j = \overline{1,d}. \end{cases} \tag{16}$$

Покажемо, що функція

$$f_1(x) = C_9 \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \varphi(x) \tag{17}$$

із відповідною сталою $C_9 > 0$ належить класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \leq p < \infty$.

Оскільки $||\mathcal{K}_s(x)||_1 = 1$, то використовуючи лему 2 будемо мати

$$||f_1||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in S_n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) ||A_s(\varphi, x)||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \omega^{-1}(2^{-n}) \left(\sum_{s \in S_n} ||A_s(\varphi, x)||_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in S_n} ||A_s(\varphi, x)||_1^{\theta} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{p})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n(1-\frac{1}{p})} \left(\sum_{s \in S_n} ||A_s(\varphi, x)||_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in S_n} ||\mathcal{K}_s(x)||_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} = n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in S_n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Далі, через $\widetilde{Q}_n$ позначимо множину

$$\widetilde{Q}_n = \bigcup_{s \in S_n} \rho(s),$$

і використаємо допоміжне твердження.

Лема 3 [7]. *Нехай* $G \in L_M(B)_q, 1 < q \le \infty$. *Тоді для функції* φ *знайдуться таке* n, *що* $|\widetilde{Q}_n| \le C_{10}(B,d)M$, *а також вектор* y^*, *для яких*

$$||\varphi(x-y^*) - G\varphi(x-y^*)||_q \gg \begin{cases} 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{q}}, & 1 < q < \infty, \\ 2^n n^{d-1}, & q = \infty. \end{cases}$$

Скориставшись результатом леми 3 при $1 < q < \infty$, матимемо

$$||f_1(x-y^*) - Gf_1(x-y^*)||_q \gg \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} ||\varphi(x-y^*) - G\varphi(x-y^*)||_q \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{q}} = \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}.$$

Нехай $\theta = \infty$. Покажемо, що функція $f_2(x) = C_{11}\omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} \varphi(x)$, $C_{11} > 0$, належить класу $B^{\Omega}_{p,\infty}$, $1 \le p < \infty$.

$$||f_2||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{||A_s(f_2,x)||_p}{\omega(2^{-(s,1)})} = C_{11}\omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} \sup_{s\in S_n} \frac{||A_s(\varphi,x)||_p}{\omega(2^{-(s,1)})} =$$

$$= C_{11}\omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} \omega^{-1}(2^{-n}) \sup_{s\in S_n} ||A_s(\varphi,x)||_p \ll$$

$$\ll 2^{-n(1-\frac{1}{p})} \sup_{s\in S_n} ||K_s(x)||_p \asymp 2^{-n(1-\frac{1}{p})} 2^{n(1-\frac{1}{p})} = 1.$$

Тому, внаслідок леми 3,

$$||f_2(x-y^*) - Gf_2(x-y^*)||_q \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} ||\varphi(x-y^*) - G\varphi(x-y^*)||_q \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{q}} = \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{q}}.$$

Розглянемо випадок $1 \le \theta < q$. Тут також використаємо допоміжне твердження.

Лема 4 [7]. *Нехай* $G \in L_M(B)_q, 1 < q < \infty$. *Тоді знайдуться* n *таке, що* $|\widetilde{Q}_n| < C_{12}(B,d)M$, *і вектори* $s^* \in S_n$ *і* y^*, *для яких*
$$||\mathcal{K}_{s^*}(x-y^*) - G\mathcal{K}_{s^*}(x-y^*)||_q \gg 2^{n(1-\frac{1}{q})}. \tag{18}$$

Отже, розглянемо функцію

$$f_3(x) = C_{13}\omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}\mathcal{K}_{s^*}(x), C_{13} > 0,$$

і переконаємось, що $f_3 \in B^{\Omega}_{p,\theta}, 1 \le p < \infty$, при відповідному виборі C_{13}.

Оскільки

$$||A_{s^*}(f_3,x)||_p \ll \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}||\mathcal{K}_{s^*}(x)||_p \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}2^{(s^*,1)(1-\frac{1}{p})} = \omega(2^{-n}),$$

то, використавши це співвідношення, одержимо

$$||f_3||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})||A_s(f_3,x)||_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \omega^{-1}(2^{-n})||A_{s^*}(f_3,x)||_p \ll \omega^{-1}(2^{-n})\omega(2^{-n}) = 1.$$

Далі, внаслідок (18) будемо мати

$$|||f_3(x-y^*) - Gf_3(x-y^*)||_q \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}||\mathcal{K}_{s^*}(x-y^*) - G\mathcal{K}_{s^*}(x-y^*)||_q \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}2^{n(1-\frac{1}{q})} = \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Оцінка знизу для величини $d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$, а отже, і для $d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$, при всіх $1 \le \theta \le \infty$ встановлена.

Теорема доведена.

Теорема 1$'$. Нехай $1 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$ і умову (S_l). Тоді

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{1,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1-\frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Оцінка зверху доводиться в теоремі 1, а знизу — внаслідок нерівності (9) випливає із оцінки $d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_q)$, встановленої в теоремі 1.

Наслідок 1. *При* $\theta = \infty$ *із теореми 1 у випадку* $1 \leq p < q < \infty$ *отримуємо оцінку*

$$d^{\perp}_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp d^{B}_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{\frac{d-1}{q}},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Зауваження 1. Точні за порядком оцінки величин $d^{\perp}_M(F, L_q)$ і $d^{B}_M(F, L_q)$, якщо p і q задовольняють умови теореми 1, для класів H^r_p встановлені В.М. Темляковим [7], а у випадку, коли в якості F виступають класи $B^r_{p,\theta}$, знайдені А.С. Романюком [10].

Теорема 2. *Нехай* $1 \leq p < \infty$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \frac{1}{p}$ *і умову* (S_l). *Тоді при* $1 \leq \theta \leq \infty$ *має місце порядкова рівність*

$$d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty) \asymp d^{B}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}, \qquad (19)$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Доведення. При $1 < p < \infty$ оцінка зверху в (19) випливає з відомої оцінки величини $\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_\infty$, за умови, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, [12]. Далі, для випадку $p = 1$ встановимо відповідну оцінку зверху для величини $\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{1,\theta})_\infty$, де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Нехай q_0 — деяке число, яке задовольняє умову $1 < q_0 < \infty$, $f \in B^{\Omega}_{1,\theta}$. Тоді, використавши нерівність Мінковського, лему 2 і співвідношення (11), будемо мати

$$\|f(x)-S_{Q_n}(f,x)\|_\infty = \Big\|f(x)-\sum_{(s,1)<n}\delta_s(f,x)\Big\|_\infty \le \sum_{(s,1)\ge n}||\delta_s(f,x)\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{(s,1)\ge n} 2^{(s,1)\frac{1}{q_0}}||\delta_s(f,x)||_{q_0} \asymp \sum_{(s,1)\ge n} 2^{(s,1)\frac{1}{q_0}}||A_s(f,x)||_{q_0} \ll$$

$$\ll \sum_{(s,1)\ge n} 2^{(s,1)\frac{1}{q_0}} 2^{(s,1)(1-\frac{1}{q_0})}||A_s(f,x)||_1 = \sum_{(s,1)\ge n} 2^{(s,1)}||A_s(f,x)||_1 =$$

$$= \sum_{(s,1)\ge n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)})||A_s(f,x)||_1 \frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} 2^{(s,1)(1-\alpha)} = I_2.$$

Щоб оцінити I_2, розглянемо три випадки.

Нехай $1 < \theta < \infty$. Застосовуючи до I_2 нерівність Гельдера з показником θ, а також враховуючи те, що $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$ задовольняє умову (S) із $\alpha > 1$, і крім того, співвідношення (14), матимемо

$$I_2 \le \left(\sum_{(s,1)\ge n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})||A_s(f,x)||_1^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times\left(\sum_{(s,1)\ge n} \frac{\omega^{\frac{\theta}{\theta-1}}(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}}} 2^{(s,1)(1-\alpha)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll ||f||_{B^{\Omega}_{1,\theta}}\left(\sum_{(s,1)\ge n} \frac{\omega^{\frac{\theta}{\theta-1}}(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}}} 2^{(s,1)(1-\alpha)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,1)\ge n} \frac{\omega^{\frac{\theta}{\theta-1}}(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}}} 2^{(s,1)(1-\alpha)\frac{\theta}{\theta-1}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \bigg(\sum_{(s,1)\geq n} 2^{(s,1)(1-\alpha)\frac{\theta}{\theta-1}} \bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n} 2^{n(1-\alpha)} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} = \omega(2^{-n}) 2^n n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. Використаємо співвідношення (13) з $\alpha > 1$, а також (14)

$$I_2 \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f,x)||_1 2^{(s,1)(1-\alpha)} \leq$$

$$\leq \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n} \sup_s \frac{||A_s(f,x)||_1}{\omega(2^{-(s,1)})} \sum_{(s,1)\geq n} 2^{(s,1)(1-\alpha)} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n} ||f||_{B^{\Omega}_{1,\infty}} 2^{n(1-\alpha)} n^{d-1} \ll \omega(2^{-n}) 2^n n^{d-1}.$$

Нехай $\theta = 1$. Оскільки $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$ задовольняє умову (S), будемо мати

$$I_2 \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f,x)||_1 2^{(s,1)(1-\alpha)} \leq$$

$$\leq \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n} 2^{n(1-\alpha)} \sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f,x)||_1 \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^n ||f||_{B^{\Omega}_{1,1}} \ll \omega(2^{-n}) 2^n.$$

Щодо оцінки знизу в (19), зазначимо, що її достатньо встановити для величини $d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty)$.

У випадку $1 \leq \theta < \infty$ розглянемо функцію f_1 із теореми 1 і скористаємось оцінкою із леми 3 при $q = \infty$ і $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Будемо мати

$$||f_1(x - y^*) - G f_1(x - y^*)||_\infty \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}n^{-\frac{d-1}{\theta}}||\varphi(x-y^*)-G\varphi(x-y^*)||_\infty \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}n^{-\frac{d-1}{\theta}}2^n n^{d-1} =$$

$$= \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

При $\theta = \infty$ розглянемо функцію f_2 із теореми 1. Знову скориставшись оцінкою із леми 3 при $q = \infty$ і $M \asymp 2^n n^{d-1}$, одержимо

$$||f_2(x-y^*)-Gf_2(x-y^*)||_\infty \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})2!^{-n(1-\frac{1}{p})}||\varphi(x-y^*-G\varphi(x-y^*)||_\infty \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}2^n n^{d-1} = \omega(2^{-n})2^{n\frac{1}{p}}n^{d-1}.$$

Оцінка знизу в (19) повністю встановлена. Теорема доведена.

Теорема 2′. Нехай $1 \le \theta \le \infty$ і $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 1$ і умову (S_l). Тоді

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{1,\theta})_\infty \asymp \omega(2^{-n})2^n n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Оцінка зверху доводиться в теоремі 2, а знизу — внаслідок нерівності (9) випливає із оцінки $d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_\infty)$, встановленої в теоремі 2.

Наслідок 2. *При $\theta = \infty$ із теореми 2 у випадку $1 \le p < \infty$ отримуємо оцінку*

$$d^{\perp}_M(H^{\Omega}_p, L_\infty) \asymp d^{B}_M(H^{\Omega}_p, L_\infty) \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{d-1},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Зауваження 2. У випадку $1 \le p < \infty$ точні за порядком оцінки величин $d^{\perp}_M(H^r_p, L_\infty)$ і $d^{B}_M(H^r_p, L_\infty)$ встановлено В. М. Темляковим [7], а точні за порядком оцінки величин $d^{\perp}_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty)$ і $d^{B}_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty)$ — А. С. Романюком [10].

Зауваження 3. Теореми $1'$ і $2'$ доповнюють результати робіт [2, 3, 12, 14] по наближенню класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є.

Теорема 3. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 0$ *і умову* (S_l). *Тоді*

$$d^B_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_\infty) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}, \tag{20}$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Доведення. Для встановлення в (20) оцінки зверху розглянемо наближення функції $f \in B^{\Omega}_{1,\theta}$ за допомогою полінома

$$t_n(x) = \sum_{(s,1)<n} A_s(f,x). \tag{21}$$

Оператор G, який ставить у відповідність функції f поліном вигляду (21), належить до $L_M(1)_2$. Враховуючи, що $f(x) = \sum\limits_s A_s(f,x)$ [13, с. 304], і скориставшись нерівністю Мінковського, матимемо

$$\|f(x) - t_n(x)\|_\infty \le \sum_{(s,1)\ge n} \|A_s(f,x)\|_\infty =$$

$$= \sum_{(s,1)\ge n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) \|A_s(f,x)\|_\infty \frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} 2^{-\alpha(s,1)} = I_3.$$

Щоб оцінити I_3, розглянемо три випадки.

Нехай $1 < \theta < \infty$. Використовуючи нерівність Гельдера з показником θ та той факт, що $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$ задовольняє умову (S) з $\alpha > 0$, а також співвідношення (14), одержимо

$$I_3 \le \left(\sum_{(s,1)\ge n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|A_s(f,x)\|^{\theta}_\infty \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{(s,1)\geq n} \frac{\omega^{\frac{\theta}{\theta-1}}(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}}} 2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll ||f||_{B^{\Omega}_{\infty,\theta}} \Bigg(\sum_{(s,1)\geq n} \frac{\omega^{\frac{\theta}{\theta-1}}(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}}} 2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \Bigg(\sum_{(s,1)\geq n} 2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}} \Bigg)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n} 2^{-\alpha n} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} = \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Нехай тепер $\theta = 1$. Скориставшись для $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$ нерівністю (13) з $\alpha > 0$, будемо мати

$$I_3 \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f,x)||_\infty 2^{-\alpha(s,1)} \leq$$

$$\leq \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n} 2^{-\alpha n} \sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f,x)||_\infty \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) ||f||_{B^{\Omega}_{\infty,1}} \ll \omega(2^{-n}).$$

Нехай $\theta = \infty$. Використовуючи співвідношення (14) і умову (S) з $\alpha > 0$ для $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, матимемо

$$I_3 \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f,x)||_\infty 2^{-\alpha(s,1)} \leq$$

$$\leq \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n} \sup_s \frac{||A_s(f,x)||_\infty}{\omega(2^{-(s,1)})} \sum_{(s,1)\geq n} 2^{-\alpha(s,1)} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{\alpha n} ||f||_{B^{\Omega}_{\infty,\infty}} \sum_{(s,1)\geq n} 2^{-\alpha(s,1)} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})2^{\alpha n}2^{-\alpha n}n^{d-1} = \omega(2^{-n})n^{d-1}.$$

Встановимо оцінку знизу для величини $d^B_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_\infty)$.

При $1 \le \theta < \infty$ розглянемо функцію

$$f_4(x) = C_{14}\omega(2^{-n})2^{-n}n^{-\frac{d-1}{\theta}}\varphi(x),$$

де $C_{14} > 0$ — відповідним чином підібрана стала, а функція φ має той же зміст, що і в (15). Легко переконатись, що $f_4 \in B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$.

Дійсно, використавши співвідношення

$$||A_s(\varphi, x)||_\infty \ll ||\mathcal{K}_s(x)||_\infty \asymp 2^{(s,1)}, \tag{22}$$

будемо мати

$$||f_4||_{B^{\Omega}_{\infty,\theta}} \asymp \left(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})||A_s(f_4, x)||^{\theta}_\infty\right)^{\frac{1}{\theta}} = C_{14}\omega(2^{-n})2^{-n}n^{-\frac{d-1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{s \in S_n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})||A_s(\varphi, x)||^{\theta}_\infty\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \omega(2^{-n})2^{-n}n^{-\frac{d-1}{\theta}}\omega^{-1}(2^{-n}) \times$$

$$\times \left(\sum_{s \in S_n} ||\mathcal{K}_s(x)||^{\theta}_\infty\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 2^{-n}n^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\sum_{s \in S_n} 2^{(s,1)\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= 2^{-n}n^{-\frac{d-1}{\theta}}2^n\left(\sum_{s \in S_n} 1\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}}n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Враховуючи лему 3 при $q = \infty$ і $M \asymp 2^n n^{d-1}$, одержимо

$$||f_4(x - y^*) - Gf_4(x - y^*)||_\infty \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})2^{-n}n^{-\frac{d-1}{\theta}}||\varphi(x - y^*) - G\varphi(x - y^*)||_\infty \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})2^{-n}n^{-\frac{d-1}{\theta}}2^n n^{d-1} = \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

При $\theta = \infty$ розглянемо функцію

$$f_5(x) = C_{15}\omega(2^{-n})2^{-n}\varphi(x),\ C_{15} > 0.$$

Використовуючи (22), переконаємось, що $f_5 \in B^{\Omega}_{\infty,\infty}$.

$$||f_5||_{B^{\Omega}_{\infty,\infty}} \asymp \sup_s \frac{||A_s(f_5, x)||_\infty}{\omega(2^{-(s,1)})} =$$

$$= C_{15}\omega(2^{-n})2^{-n} \sup_{s\in S_n} \frac{||A_s(\varphi, x)||_\infty}{\omega(2^{-(s,1)})} =$$

$$= C_{15}\omega(2^{-n})2^{-n}\omega^{-1}(2^{-n}) \sup_{s\in S_n} ||A_s(\varphi, x)||_\infty \ll$$

$$\ll 2^{-n} \sup_{s\in S_n} ||\mathcal{K}_s(x)||_\infty \asymp 2^{-n}2^n = 1.$$

Враховуючи лему 3 при $q = \infty$, отримаємо

$$||f_4(x-y^*)-Gf_4(x-y^*)||_\infty \gg \omega(2^{-n})2^{-n}||\varphi(x-y^*)-G\varphi(x-y^*)||_\infty \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})2^{-n}2^n n^{d-1} = \omega(2^{-n})n^{d-1}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему, доведено.

Наслідок 3. *При $\theta = \infty$ із теореми 3 отримуємо оцінку*

$$d^B_M(H^{\Omega}_\infty, L_\infty) \asymp \omega(2^{-n})n^{d-1},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Теорема 4. *Нехай $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 0$ та умову (S_l). Тоді*

$$d^B_M(B^{\Omega}_{1,\theta}, L_1) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}, \tag{23}$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Доведення. Для встановлення в (23) оцінки зверху розглянемо для $f \in B^{\Omega}_{1,\theta}$ поліном наближення вигляду (21). Скориставшись нерівністю Мінковського, будемо мати

$$||f(x) - t_n(x)||_1 = \left\| \sum_{(s,1)\geq n} A_s(f,x) \right\|_1 \leq \sum_{(s,1)\geq n} ||A_s(f,x)||_1 =$$

$$= \sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)})||A_s(f,x)||_1 \frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} 2^{-\alpha(s,1)} = I_4.$$

Нехай спочатку $1 < \theta < \infty$. Застосовуючи до I_4 нерівність Гельдера з показником θ, і при $\alpha > 0$ використовуючи співвідношення (13), а також (14), одержимо

$$I_4 \leq \left(\sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})||A_s(f,x)||_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{(s,1)\geq n} \frac{\omega^{\frac{\theta}{\theta-1}}(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}}} 2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll ||f||_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \left(\sum_{(s,1)\geq n} \frac{\omega^{\frac{\theta}{\theta-1}}(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}}} 2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{(s,1)\geq n} 2^{-\alpha(s,1)\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})2^{\alpha n}2^{-\alpha n}n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} = \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Нехай далі $\theta = 1$. Оскільки $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$ задовольняє умову (S) з $\alpha > 0$, то

$$I_4 \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)})||A_s(f,x)||_1 2^{-\alpha(s,1)} \leq \omega(2^{-n})2^{\alpha n}2^{-\alpha n} \times$$

$$\times \sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)})||A_s(f,x)||_1 \ll \omega(2^{-n})||f||_{B^{\Omega}_{1,1}} \ll \omega(2^{-n}).$$

Нехай $\theta = \infty$. Використавши співвідношення (13) з $\alpha > 0$ і (14), одержимо

$$I_4 \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{(s,1)\geq n} \omega^{-1}(2^{-(s,1)})||A_s(f,x)||_1 2^{-\alpha(s,1)} \leq$$

$$\leq \omega(2^{-n})2^{\alpha n} \sup_s \frac{||A_s(f,x)||_1}{\omega(2^{-(s,1)})} \sum_{(s,1)\geq n} 2^{-\alpha(s,1)} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})2^{\alpha n}||f||_{B^{\Omega}_{1,\infty}} \sum_{(s,1)\geq n} 2^{-\alpha(s,1)} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})2^{\alpha n}2^{-\alpha n}n^{d-1} \ll \omega(2^{-n})n^{d-1}.$$

Таким чином, оцінка зверху в (23) встановлена.

Для доведення оцінки знизу використаємо допоміжне твердження. Покладемо

$$\widetilde{S}_n = \left\{ s \in S_n : s_j \geq \frac{n}{2d}, j = \overline{1, d} \right\}.$$

Оскільки $|S_n| \asymp n^{d-1}$, то можна переконатись, що і $|\widetilde{S}_n| \asymp n^{d-1}$.

Далі, розіб'ємо куб π_d на $|\widetilde{S}_n|$ кубів з довжиною ребра $\frac{2\pi}{|\widetilde{S}_n|^{\frac{1}{d}}}$ і встановимо взаємно однозначну відповідність між множиною $\widetilde{S}_n$ і утвореною множиною кубів. При цьому через $x^s \in \pi_d$ позначимо центр куба, що відповідає вектору $s \in \widetilde{S}_n$ і покладемо $u = 2^{[(1-\frac{1}{d})\log_2 n]}$.

Лема 5 [7]. *Нехай $G \in L_M(B)_1$. Тоді існують число n і множина $S_n^1 \subset \widetilde{S}_n$ такі, що $|\widetilde{Q}_n| < C_{16}(B,d)M$, $|S_n^1| \geq \frac{|\widetilde{S}_n|}{2}$ і* *в кожному* $\rho(s), s \in S^1_n$, *знайдуться куби з центрами в* k^s *і довжинами ребер* $2u$ *такі, що для функції*

$$g(x) = \sum_{s \in S^1_n} e^{i(k^s,x)} \prod_{j=1}^{d} K_u(x_j - x^s_j)$$

і деякого вектора y^* *має місце оцінка*

$$\|g(x + y^*) - Gg(x + y^*)\|_1 \gg \log^{d-1} M.$$

Вектори k^s в лемі 5 мають той же зміст, що і в (16).

При $1 \leq \theta < \infty$ розглянемо функцію

$$f_6(x) = C_{17}\omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}} g(x),$$

де функція g задовольняє умови леми 5, числа n і M пов'язані співвідношенням $M \asymp 2^n n^{d-1}$, і $C_{17} > 0$ — відповідним чином підібрана стала. Легко переконатись, що $f_6 \in B^{\Omega}_{1,\theta}$.

Дійсно, врахувавши, що

$$||A_s(g, x)||_1 \ll \left\| \prod_{j=1}^{d} K_u(x_j) \right\|_1 \leq C_{18}, \forall s \in S^1_n, \tag{24}$$

одержуємо

$$||f_6||_{B^{\Omega}_{1,\theta}} \asymp \omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in S^1_n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})||A_s(g, x)||^{\theta}_1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in S^1_n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}} \omega^{-1}(2^{-n}) \left(\sum_{s \in S^1_n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Далі, за лемою 5 існує вектор y^* такий, що

$$||f_6(x+y^*)-Gf_6(x+y^*)||_1 \gg \omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}}||g(x+y^*)-Gg(x+y^*)||_1 \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}}\log^{d-1}M \asymp \omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}}n^{d-1} = \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. Розглянемо функцію

$$f_7(x) = C_{19}\omega(2^{-n})g(x), C_{19} > 0.$$

Використовуючи (24), переконаємось, що $f_7 \in B^{\Omega}_{1,\infty}$.

$$||f_7||_{B^{\Omega}_{1,\infty}} \asymp \sup_s \frac{||A_s(f_7,x)||_1}{\omega(2^{-(s,1)})} = C_{19}\omega(2^{-n}) \sup_{s\in S^1_n} \frac{||A_s(g,x)||_1}{\omega(2^{-(s,1)})} =$$

$$= C_{19}\omega(2^{-n})\omega^{-1}(2^{-n}) \sup_{s\in S^1_n} ||A_s(g,x)||_1 \ll \sup_{s\in S^1_n} \Big\| \prod_{j=1}^{d} K_u(x_j) \Big\|_1 \ll 1.$$

Аналогічно, як і вище, за лемою 5 існує вектор y^* такий, що

$$||f_7(x+y^*)-Gf_7(x+y^*)||_1 \gg \omega(2^{-n})||g(x+y^*)-Gg(x+y^*)||_1 \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n})\log^{d-1}M \asymp \omega(2^{-n})n^{d-1} = \omega(2^{-n})n^{d-1}.$$

Оцінку знизу, а разом з нею і теорему 4, доведено.

Наслідок 4. *При $\theta = \infty$ із теореми 4 отримуємо оцінку*

$$d^B_M(H^{\Omega}_1, L_1) \asymp \omega(2^{-n})n^{d-1},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Зауваження 4. Аналоги теорем 3, 4 для класів H^r_p і $B^r_{p,\theta}$ доведені в [7] і [10].

Зауваження 5. Зазначимо, що питання про порядки величин $d^{\perp}_M(F, L_\infty)$, де в якості F виступають класи H^r_∞, $B^r_{\infty,\theta}$ і $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, а також питання про порядки величин $d^{\perp}_M(F, L_1)$ для класів H^r_1, $B^r_{1,\theta}$ і $B^{\Omega}_{1,\theta}$ залишились відкритими.

1. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1956.— **5**.— С. 483–522.
2. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1997.— **219**.— С. 356–377.
3. *Стасюк С.А., Федуник О.В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн.— 2006.— **58**, № 5.— С. 692–704.
4. *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math.— 1994.— **20**.— С. 35–48.
5. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова.— 1989.— **187**.— С. 143–161.
6. *Темляков В.Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР.— 1982.— **267**, № 2.— С. 314–317.
7. *Темляков В.Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1989.— **189**.— С. 138–168.
8. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1986.— **178**.— С. 1–112.
9. *Романюк А.С.* Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. I // Укр. мат. журн.— 2001.— **53**, № 9.— С. 1224–1231.
10. *Романюк А.С.* Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. II // Укр. мат. журн.— 2001.— **53**, № 10.— С. 1402–1408.
11. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства.— М.: Изд-во иностр. лит., 1948.— 456 с.
12. *Стасюк С.А.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Укр. мат. журн.— 2002.— **54**, № 11.— С. 1551–1559.

13. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1977.— 456 с.

14. *Стасюк С.А.* Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн.— 2004.— **56**, № 11.— С. 1557–1568.