МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Математичний факультет
Кафедра математичного аналізу

О.Г.Ханін

Математичні методи оптимізації в менеджменті та бізнесі

Методична розробка

.

Луцьк – 2013

З М І С Т

1. Вступ:
поняття про задачі оптимізації у бізнесі

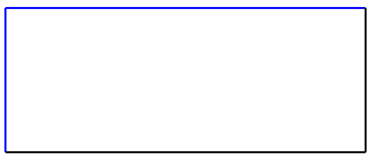
Існує велике коло задач у бізнесі, у яких необхідно максимізувати певні показники, наприклад, прибуток, кількість виробленої продукції, фондовіддачу тощо, або, відповідно, мінімізувати витрати, собівартість, використання виробничих площ, людських ресурсів і т.д. Такі задачі називаються задачами оптимізації або оптимального управління..

Приклад 1.1

Розглянемо приклад простої задачі оптимізації. Необхідно за допомогою 100 м паркану огородити прямокутну ділянку найбільшої площі. Якими мають бути сторони прямокутника?

Розв'язок.

Для розв'язання цієї практичної задачі необхідно на першому кроці побудувати її математичну модель. Позначимо одну із сторін прямокутника через **x** (м). Довжина паркану 100 м, тобто периметр прямокутника дорівнює 100. Значить напівпериметр (сума довжин двох суміжних сторін, виділених синім кольором) дорівнює 50.



Таким чином, якщо довжина першої сторони - **x**, то іншої сторони прямокутника – (50-**x).** Зрозуміло, що довжина кожної із сторін такого прямокутника не може бути меншою за 0 та більшою за 50**,** тобто на змінну **x** накладаються обмеження

$$0 \le x \le 50. \qquad (1)$$

Як відомо, площа S прямокутника дорівнює добутку довжин його суміжних сторін:

$$S = x \cdot (50-x). \qquad (2)$$

Тобто математична модель має наступний вигляд: **знайти максимум функції**

S(x)= x· (50-x), **якщо її аргумент** x **знаходиться у межах** $0 \le x \le 50$.

Зауважимо, що функція, максимум або мінімум якої ми знаходимо, називається **цільовою.**

Перейдемо тепер до аналізу математичної моделі. Розкриємо дужки у формулі (2):

$S=50 \cdot x - x^2$. Ми бачимо, що дана функція є квадратичною. Її похідна дорівнює $S' = 50 - 2 \cdot x$, а значення **x** належать відрізку $[0;50]$. Нам необхідно знайти такі значення **x**, при яких цільова функція набуває максимуму. Відомо, що у точках екстремуму (максимуму або мінімуму) похідна дорівнює 0. Це так звана критична точка функції. З теорії відомо, що функція може досягати екстремуму лише у точках, у яких похідна дорівнює 0 (критичних точках) або на кінцях відрізка.

Розв'яжемо рівняння: $S' = 50 - 2 \cdot x = 0$, звідки x = 25. Таким чином, щоб з'ясувати у яких точках досягається максимум цільової функції (2), підставимо послідовно замість **x** 0, 25 та 50 і обрахуємо значення функції.

$S(0)=0$, $S(25)=625$, $S(50)=0$. Значить максимальна можлива площа ділянки досягається, коли довжина однієї сторони - 25 м. Але в цьому випадку і довжина іншої сторони дорівнює 50-25=25 (м). Таким чином, серед усіх прямокутних парканів, паркан у вигляді квадрату зі стороною 25 м обмежує максимальну можливу площу, яка дорівнює 625 м^2.

2. Поняття про задачі лінійного програмування

У попередньому прикладі ми знаходили максимум квадратичної функції однієї невідомої (2) при обмеженнях (1). В реальних ситуаціях невідомих та обмежень може бути кілька. Існує, однак, клас задач оптимізації, з одного боку достатньо розповсюджених на практиці, а з іншого таких, що дозволяють знайти розв'язок без застосування складних методів, із використанням такого загальнодоступного інструменту, як Excel.

Приклад 2.1.

Невеличка сімейна фірма виробляє два популярних безалкогольних напої – «Pink Fizz» та «Mint Pop». Фірма може продати усю вироблену продукцію, однак обсяг виробництва обмежений кількістю основного інгредієнту та виробничою потужністю наявного обладнання. Для виробництва 1 л «Pink Fizz» необхідно 0,02 год. роботи обладнання, а для виробництва 1л «Mint Pop» - 0,04 год. Витрати спеціального інгредієнту складають 0,01 кг та 0,04 кг на 1 л «Pink Fizz» та «Mint Pop» відповідно. Кожного дня у розпорядженні підприємства є 24 год. часу роботи обладнання та 16 кг спеціального інгредієнту. Прибуток фірми складає 0,1 дол. за 1 л «Pink Fizz» і 0,3 дол. за 1 л «Mint Pop». Скласти оптимальну виробничу програму фірми (тобто з'ясувати скільки продукції кожного виду слід виробляти щоденно для максимізації щоденного прибутку).

Розв'язок.

Складемо математичну модель задачі оптимізації. Для цього позначимо через x_1 кількість «Pink Fizz», а через x_2 – кількість «Mint Pop». Тоді цільова функція, тобто щоденний прибуток фірми, має вигляд:

$$F=0{,}1\cdot x_1+0{,}3\cdot x_2 \text{ (дол.).} \qquad (3)$$

Але невідомі змінні x_1 та x_2 підпорядковуються певним обмеженням. Дійсно, для виробництва 1 л «Pink Fizz» необхідно 0,02 год. роботи обладнання, тоді, очевидно, для виробництва x_1 (л) цього напою знадобиться $0{,}02\cdot x_1$ годин роботи обладнання. Аналогічно, для виробництва x_2 (л) «Mint Pop» знадобиться $0{,}04\cdot x_2$ годин. Таким чином, загальні витрати часу роботи обладнання становитимуть $0{,}02\cdot x_1+0{,}04\cdot x_2$, що за умовами задачі не повинно перевищувати 24 год. Тобто

$$0{,}02\cdot x_1+0{,}04\cdot x_2 \le 24. \qquad (4)$$

Користуючись аналогічними міркуваннями, отримаємо, що загальні щоденні витрати основного інгредієнту для виробництва x_1 (л) «Pink Fizz» та x_2 (л) «Mint Pop» становитимуть $0{,}01\cdot x_1+0{,}04\cdot x_2$, що не повинно перевищувати 16 кг запасу. Таким чином,

$$0{,}01\cdot x_1+0{,}04\cdot x_2 \le 16. \qquad (5)$$

Зауважимо, що до обмежень (4) і (5) необхідно додати так звані природні обмеження:

$$x_1 \geq 0 \text{ і } x_2 \geq 0. \qquad (6)$$

Математична модель має наступний вигляд**: знайти максимум цільової функції (3) при виконанні обмежень (4)-(6).**

Чим же суттєво відрізняється ця задача від попередньої? На відміну від попереднього прикладу ми маємо 2 невідомі змінні x_1 і x_2. Але, що найбільш важливо, цільова функція та функції, які фігурують в обмеженнях є лінійними, тобто невідомі входять до них у першому степені. **Задачі знаходження максимуму або мінімуму лінійної цільової функції при лінійних обмеженнях називаються задачами лінійного програмування.** Такі задачі мають відносно простий алгоритм розв'язання (симплекс-метод). Наближений метод розв'язання таких задач з наперед заданною точністю реалізований в електронних таблицях Excel. В подальшому зосередимося саме на задачах лінійного програмування, проілюструємо ідею їх розв'язання, проаналізуємо кількість можливих розв'язків, розглянемо основні класи практичних задач, які приводять нас до методів лінійного програмування, та розв'яжемо їх засобами Excel.

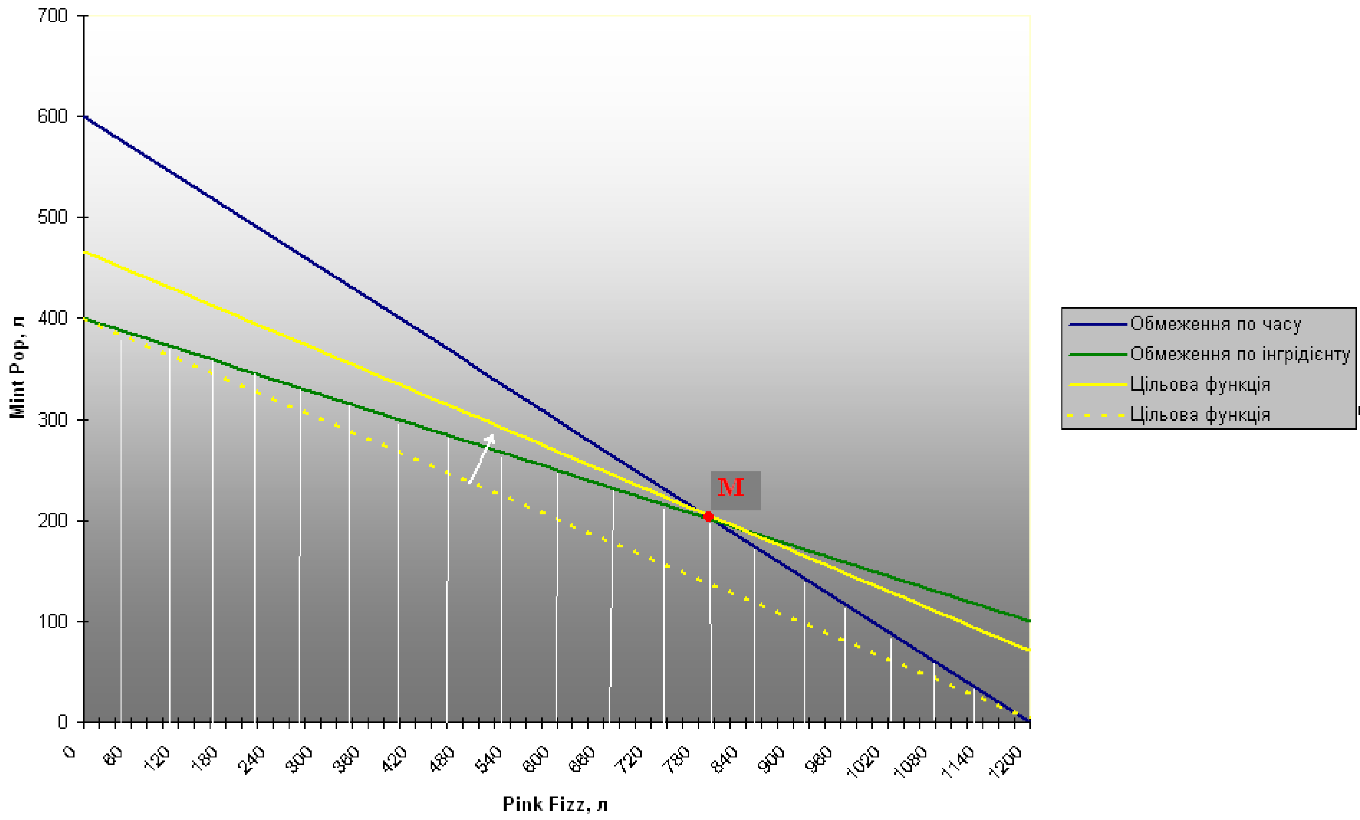
3. Геометрічна інтерпретація задач лінійного програмування

Якщо графічно побудувати систему обмежень (4)-(6) з попередньої задачі лінійного програмування, то отримаємо чотирикутник, заштрихований на малюнку нижче. Цільова функція $F=0{,}1\cdot x_1+0{,}3\cdot x_2$ зображена на цьому малюнку жовтою лінією. Якщо міняти значення F, то ця лінія буде рухатися вверх або вниз. З теорії відомо, що максимум або мінімум цільова функція може мати лише у вершинах багатокутника обмежень, якщо він замкнений. Тобто в нашому випадку, максимальне значення прибутку F буде досягатися, коли ця жовта лінія пройде через певну вершину заштрихованого чотирикутника якомога вище. В нашому випадку, очевидно, через т.М. Координати цієї точки $M(x_1, x_2)$ і будуть шуканими значенннями оптимальних обсягів виробництва напоїв.

Наша задача має єдиний розв'зок, але можливі випадки, коли таких розв'язків безліч. Це може трапитися, коли не одна вершина, а ціла сторона багатокутника обмежень буде належати прямій, що відповідає цільовій функції. Якщо ж система обмежень несумісна (одне обмеження протирічить іншому), то задача не буде мати жодного розв'язку. Таким чином, задача лінійного програмування може не мати жодного, мати єдиний або безліч розв'язків.

Фактично розв'язання задачі лінійного програмування зводиться до відшукання такої вершини багатокутника обмежень, у якій цільова функція набуватиме максимуму або мінімуму.

Геометрічна інтерпретація лише ілюструє підхід, але не може служити надійним та зручним інструментом розв'язання таких задач.



4. Приклади задач лінійного програмування та їх розв'язання за допомогою Excel

4.1. Задача про оптимальне використання ресурсів

Прикладом задачі про оптимальне використання ресурсів може служити приклад 2.1 про виробництво безалкогольних напоїв «Pink Fizz» та «Mint Pop». У п.2 ми побудували математичну модель задачі, яку ми дослідимо засобами Excel. Для цього внесемо у аркуш Excel вихідні дані прикладу, а у комірках E2 та E3 замість невідомого оптимального щоденного виробництва напоїв поставимо поки значення 0.

	A	B	C	D	E
1		Час роботи обладнання (год)	Витрати інгрідієнту (кг)	Прибуток (дол)	Щоденне виробництво напоїв (л)
2	«Pink Fizz» (1 л)	0,02	0,01	0,1	0
3	«Mint Pop» (1 л)	0,04	0,04	0,3	0
4					
5	Запас ресурсу	24	16		
6					

Крім первинних даних внесемо у таблиці також ліві частини обмежень (4) та (5): $0{,}02 \cdot x_1 + 0{,}04 \cdot x_2$ і $0{,}01 \cdot x_1 + 0{,}04 \cdot x_2$, а також праву частину цільової функції (3): $0{,}1 \cdot x_1 + 0{,}3 \cdot x_2$. Тільки замість невідомих x_1 та x_2, які позначають кількість вироблених напоїв кожного виду, вкажемо адреси комірок, які містять значення цих змінних, тобто E2 та E3:

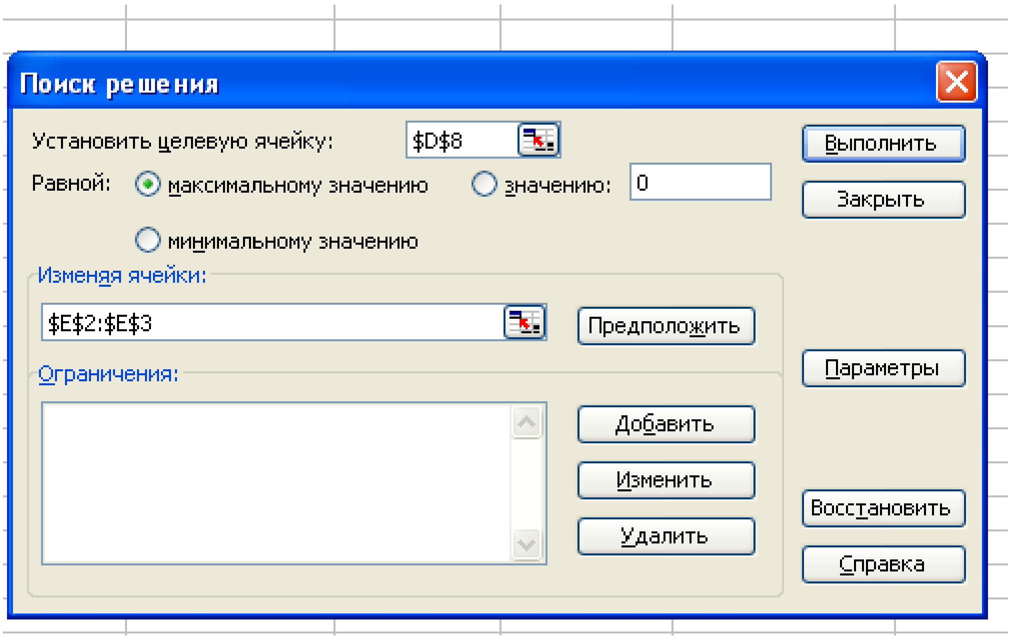
	B	C	D
1	**Час роботи обладнання (год)**	**Витрати інгрідієнту (кг)**	**Прибуток (дол)**
2	0,02	0,01	0,1
3	0,04	0,04	0,3
4			
5	24	16	
6			
7	**Обмеження по часу**	**Обмеження по інгрідієнту**	**Цільова функція (сумарний прибуток)**
8	=B2*$E2+B3*$E3	=C2*$E2+C3*$E3	=D2*$E2+D3*$E3
9			

У комірках B8 – D8 висвітлюватимуться значення цих формул, які поки дорівнюють 0, т.я. значення невідомого щоденного виробництва напоїв (x_1 та x_2) поки ми прийняли рівними 0.

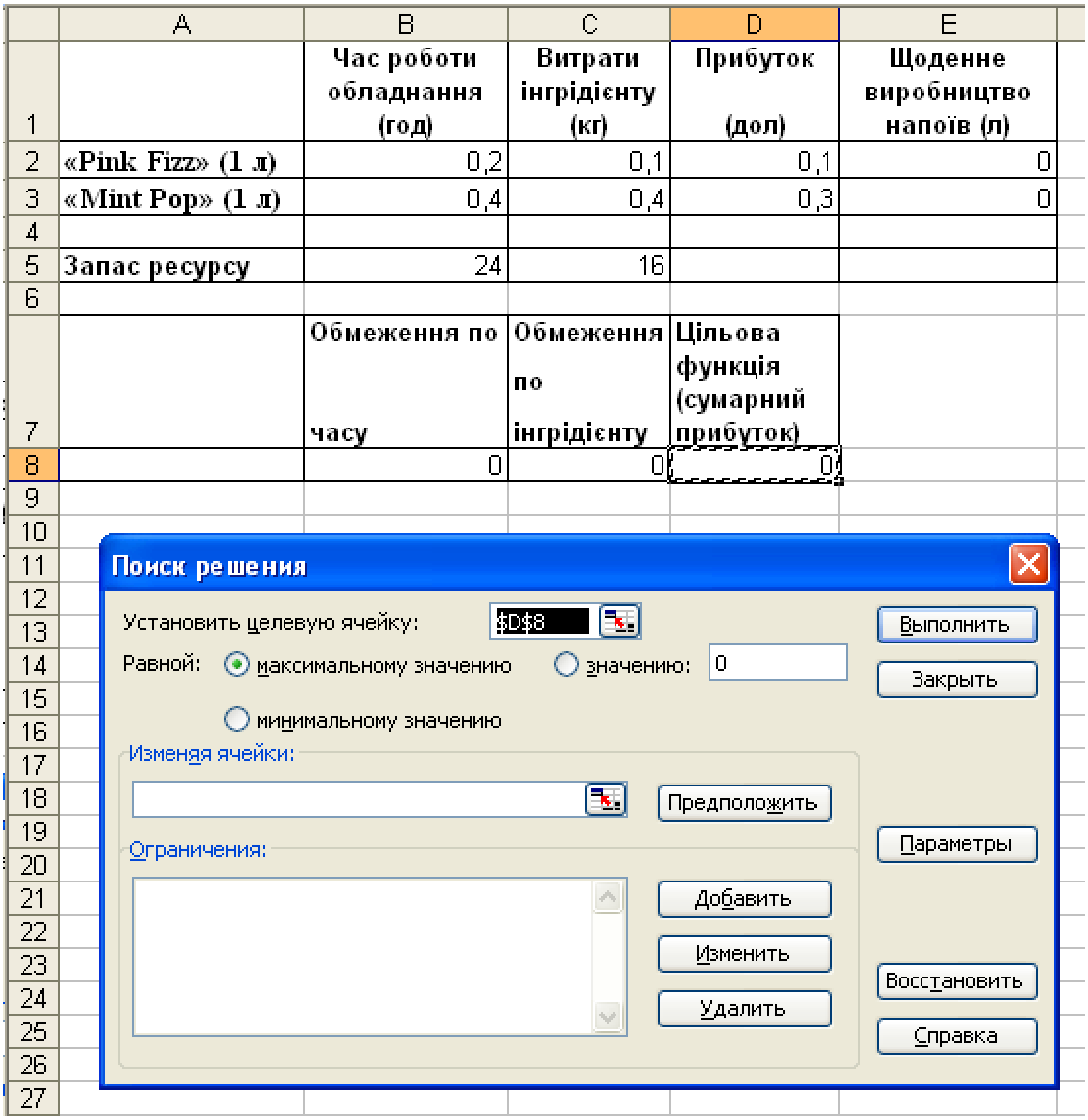
D8 fx =D2*$E2+D3*$E3

	A	B	C	D	E
1		**Час роботи обладнання (год)**	**Витрати інгрідієнту (кг)**	**Прибуток (дол)**	**Щоденне виробництво напоїв (л)**
2	**«Pink Fizz» (1 л)**	0,02	0,01	0,1	0
3	**«Mint Pop» (1 л)**	0,04	0,04	0,3	0
4					
5	**Запас ресурсу**	24	16		
6					
7		**Обмеження по часу**	**Обмеження по інгрідієнту**	**Цільова функція (сумарний прибуток)**	
8		0	0	0	
9					

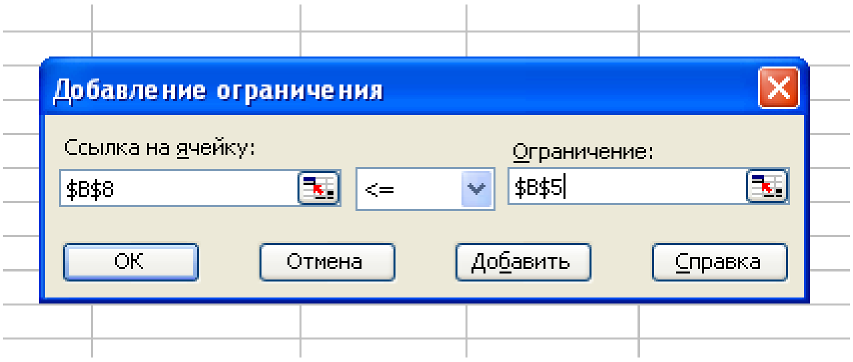
Поставимо курсор у комірку, у якій знаходиться формула, що відповідає цільовій функції, тобто у D8. Оберемо тепер у головному меню Excel опцію «Сервис», а у ній - «Поиск решений». Перед нами виникне вікно пошуку розв’язків задач оптимізації:



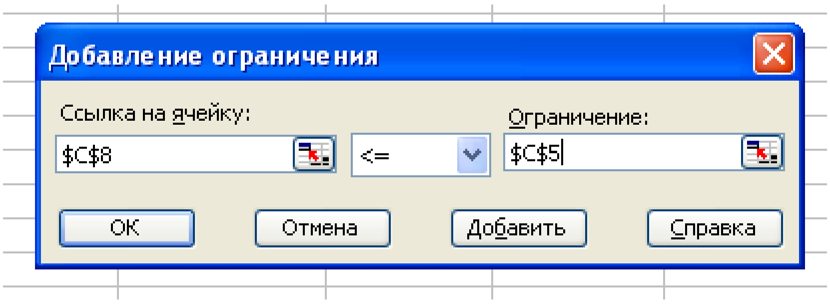
Ми повинні знайти максимум цільової функції (прибутку), тому ми повинні встановити цільову комірку D8 рівною максимальному значенню, при цьому ми будемо змінювати значення комірок E2 та E3 (змінні x_1 та x_2).



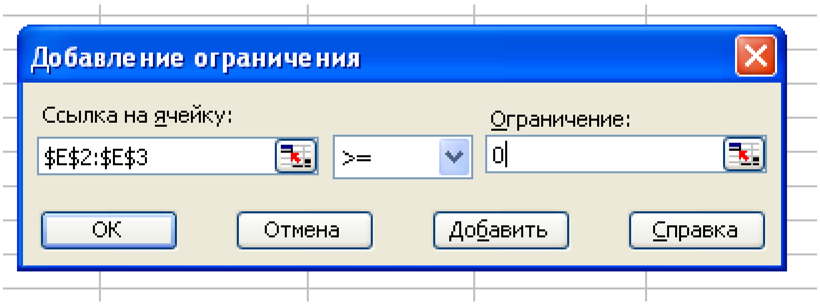
Додамо тепер обмеження, натискаючи на кнопку «Добавить». Наприклад, обмеження по часу буде мати вигляд:



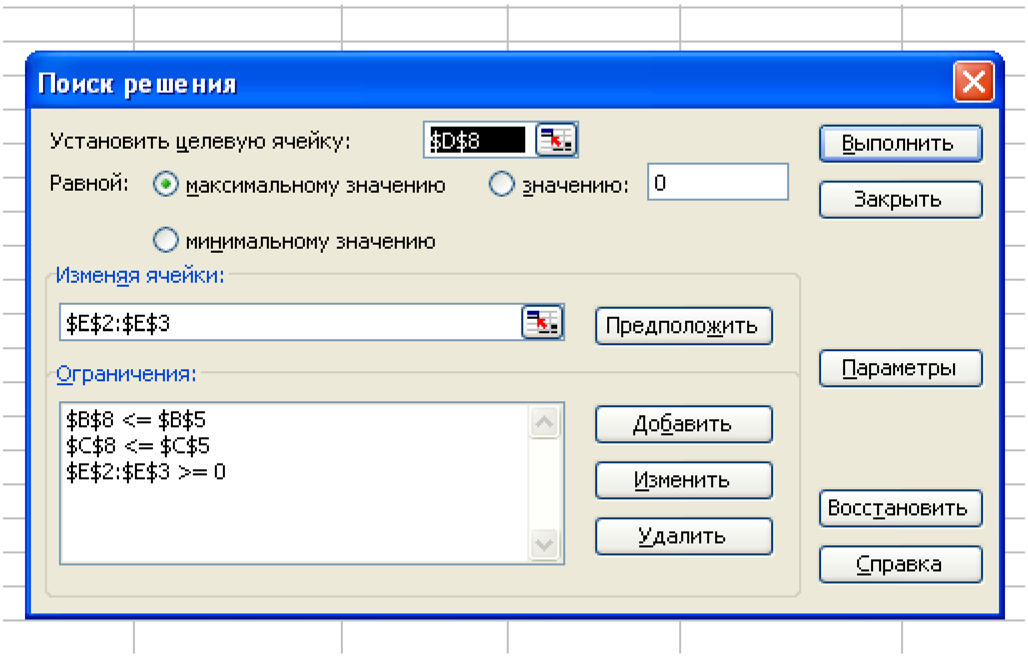
Обмеження по інгредієнту, буде мати вигляд:



Крім того, необхідно вказати, що значення комірок E2 та E3 мають бути невід’ємні, тобто додати відповідні обмеження:



Після чого необхідно натиснути «ОК». Остаточно, вікно «Поиска решений» буде мати вигляд:



Залишається лише натиснути «Выполнить». Отримаємо наступний розв’язок:

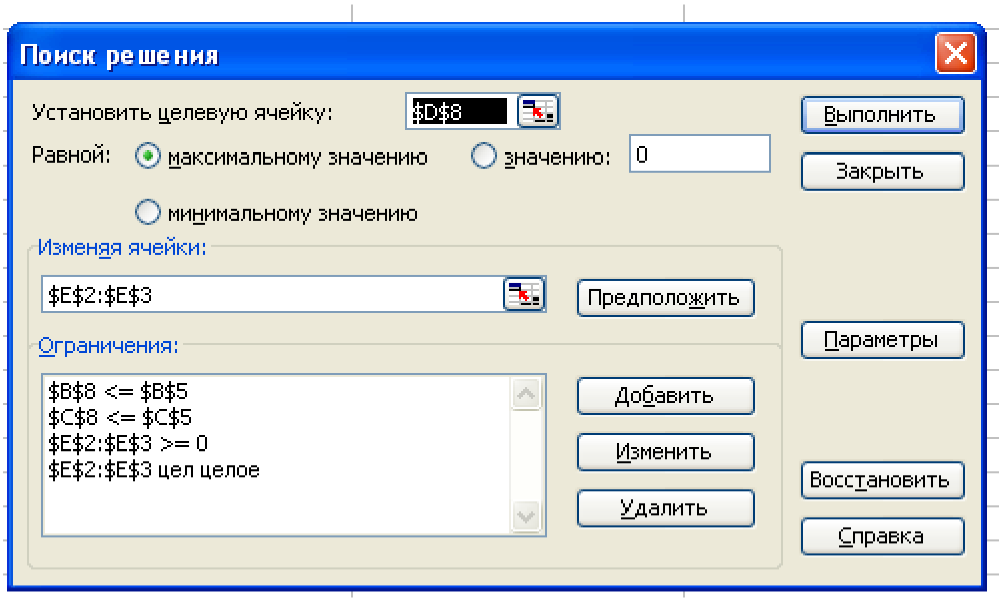
	Час роботи обладнання (год)	Витрати інгрідієнту (кг)	Прибуток (дол)	Щоденне виробництво напоїв (л)
«Pink Fizz» (1 л)	0,02	0,01	0,1	800
«Mint Pop» (1 л)	0,04	0,04	0,3	200
Запас ресурсу	24	16		

	Обмеження по часу	Обмеження по інгрідієнту	Цільова функція (сумарний прибуток)
	24	16	140

Тобто максимальний денний прибуток дорівнює 140 дол. і досягається при виробництві 800 л «Pink Fizz» та 200 л «Mint Pop».

Зауваження.

1. Дещо модифікуємо умови задачі. Нехай одиницею вимірювання напоїв будуть не літри, а пляшки. Тобто і час роботи обладнання, і витрати інгрідієнту у таблиці дані із розрахунку на 1 пляшку напою. Тепер нас цікавить, яку оптимальну кількість пляшок x_1 і x_2 кожного напою неохідно виробити, щоб отримати найбільший прибуток при умові виконання обмежень по часу і запасу інгрідієнту. В математичну модель такої задачі необхідно додати поряд з умовою $x_1 \geq 0$ і $x_2 \geq 0$, умову x_1 і x_2 - цілі. Тоді остаточне вікно «Поиска решений» буде мати вигляд:



2. Під задачею оптимального використання ресурсів (це стосується і подальших задач) необхідно розуміти набагато ширше коло практичних прикладів, математичні моделі яких,

фактично ідентичні даній задачі. Розглянемо, наприклад, так звану задачу оптимального складання раціону.

До добового раціону входять продукти харчування $П_1$ та $П_2$, причому запас продукту $П_1$ – 200 од., а $П_2$ - 400 од. Вартість одиниці продукції $П_1$ складає 0,2 у.о., а $П_2$ - 0,1 у.о. Дані продукти містять поживні речовини P_1 та P_2, вміст яких вказаний у таблиці:

Поживні речовини	**Мінімальна норма споживання**	**Вміст поживних речовин у одиниці продукції**	
		$П_1$	$П_2$
P_1	120	0,02	0,02
P_2	160	0,04	0,02

Скласти оптимальний раціон, найменшої вартості.

Нехай x_1 та x_2 – кількості продуктів $П_1$ та $П_2$ у раціоні. Цільова функція задачі $F(x)=0{,}2\cdot x_1+0{,}1\cdot x_2$. Обмеження по вмісту речовини P_1: $0{,}02\cdot x_1+0{,}02\cdot x_2 \geq 120$. Обмеження по вмісту речовини P_2: $0{,}04\ x_1+0{,}02\cdot x_2 \geq 160$. Крім того, очевидно, $x_1 \geq 0$ та $x_2 \geq 0$. Тобто математична модель задачі полягає у мінімізації цільової функції F(x) при вказаних обмеженнях, що цілком аналогічно задачі про оптимальне використання ресурсів (див. (3)-(6)) з тою різницею, що у цій задачі необхідно було максимізувати цільову функцію, а обмеження (4) і (5) мали протилежні знаки нерівностей.

Тобто усі розглянуті нами нижче математичні моделі та методи їх дослідження повинні бути розповсюджені на набагато ширше коло практичних задач, точний зміст яких може бути іншим.

4.2. Задача про оптимальне завантаження обладнання

Іншим, але доволі схожим, типом задач лінійного програмування є задача оптимального завантаження обладнання. Розглянемо наступний приклад, який ілюструє даний клас задач.

Приклад 4.2.1

Підприємству задано план випуску продукції $П_1$ та $П_2$, яка має випускатись на обладнанні двох типів: O_1 та O_2. Скласти оптимальний графік завантаження обладнання, при якому собівартість випущеної продукції є мінімальною, якщо вихідні дані наведені у наступній таблиці:

Вид обладнання	Випуск продукції за одиницю часу (тонн)		Вартість роботи за одиницю часу (тис. грн.)		Фонд робочого часу (год.)
	$П_1$	**$П_2$**	**$П_1$**	**$П_2$**	
$О_1$	2	2	1	5	175
$О_2$	3	1	2	1	160
План випуску продукції (тонн)	250	400			

Розв'язок.

Першим кроком розв'язання задачі оптимізації є побудова її математичної моделі. Позначимо час, який на обладнанні $О_1$ виробляється продукція $П_1$ через x_{11}, на обладнанні $О_1$ продукція $П_2$ – через x_{12} , на обладнанні $О_2$ продукція $П_1$ – через x_{21}, а на обладнанні $О_2$ продукція $П_2$ – через x_{22}.

Тоді цільова функція, тобто собівартість виробництва, буде мати вигляд:

$$F(x_1,x_2)= 1\cdot x_{11}+5\cdot x_{12}+2\cdot x_{21}+1\cdot x_{22}. \qquad (7)$$

Вкажемо тепер обмеження на змінні.

Обмеження по виконанню плану

по продукції $П_1$: $2\cdot x_{11}+3\cdot x_{21}\geq 250$, (8)

по продукції $П_2$: $2\cdot x_{12}+1\cdot x_{22}\geq 400$. (9)

Обмеження по фонду робочого часу

по обладнанню $О_1$: $x_{11} + x_{12}\leq 175$, (10)

по обладнанню $О_2$: $x_{21} + x_{22}\leq 160$. (11)

Додаткові обмеження: $x_{11}\geq 0$, $x_{12}\geq 0$, $x_{21} \geq 0$, $x_{22}\geq 0$. (12)

Таким чином, математична модель задачі може бути сформульована наступним чином:

мінімізувати цільову функцію (7) при обмеженнях (8)-(12).

Реалізуємо цю задачу за допомогою Excel. Для цього спочатку перенесемо у електронні таблиці первинні дані.

	A	B	C	D	E	F
1	**Вид обладнання**	**Випуск продукції за одиницю часу (тонн)**		**Вартість роботи за одиницю часу (тис. грн.)**		**Фонд робочого часу (год.)**
2		**$П_1$**	**$П_2$**	**$П_1$**	**$П_2$**	
3	**$О_1$**	2	2	1	5	175
4	**$О_2$**	3	1	2	1	160
5	**План випуску продукції** (тонн)	250	400			

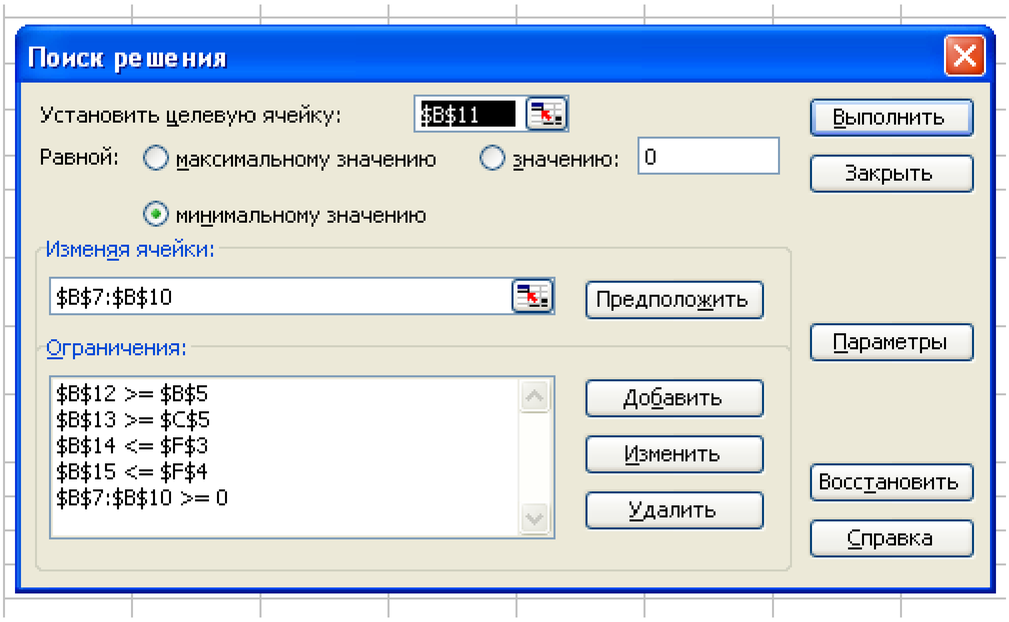
Наступним кроком необхідно занести у комірки B7 – B10 електронних таблиць початкові значення змінних x_1 та x_2 (оптимальний час роботи обладнання), які ми поки приймемо за 0, а у комірки B11 –B15 - формули, що відповідають цільовій функції (7) (її права частина) та обмеженням (8) – (11) (ліві частини).

	A	B
1	**Вид обладнання**	**Випуск продукції за одиницю**
2		**$П_1$**
3	**$О_1$**	2
4	**$О_2$**	3
5	**План випуску продукції** (тонн)	250
6		
7	**x_{11}**	0
8	**x_{12}**	0
9	**x_{21}**	0
10	**x_{22}**	0
11	**Цільова функція**	=D3*B7+E3*B8+D4*B9+E4*B10
12	**Обмеження по плану П1**	=B3*B7+B4*B9
13	**Обмеження по плану П2**	=C3*B8+C4*B10
14	**Обмеження по часу для О1**	=B7+B8
15	**Обмеження по часу для О2**	=B9+B10

Хоча реально ми бачимо в Excel значення цих формул, які на початку дорівнюють 0.

	A	B	C	D	E	F
1	Вид обладнання	Випуск продукції за одиницю часу (тонн)		Вартість роботи за одиницю часу (тис. грн.)		Фонд робочого часу (год.)
2		$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$	
3	$О_1$	2	2	1	5	175
4	$О_2$	3	1	2	1	160
5	План випуску продукції (тонн)	250	400			
6						
7	x_{11}	0				
8	x_{12}	0				
9	x_{21}	0				
10	x_{22}	0				
11	Цільова функція	0				
12	Обмеження по плану П1	0				
13	Обмеження по плану П2	0				
14	Обмеження по часу для О1	0				
15	Обмеження по часу для О2	0				
16						

Залишається звернутися до модуля «Поиск решений» та внести відповідні дані:



Натискаємо «Выполнить» і отримуємо шуканий оптимальний розв’язок:

	A	B	C	Строка формул	E	F
1	**Вид обладнання**	**Випуск продукції за одиницю часу (тонн)**		**Вартість роботи за одиницю часу (тис. грн.)**		**Фонд робочого часу (год.)**
2		**$П_1$**	**$П_2$**	**$П_1$**	**$П_2$**	
3	**O_1**	2	2	1	5	175
4	**O_2**	3	1	2	1	160
5	**План випуску продукції** (тонн)	250	400			
6						
7	**x_{11}**	8,749999975				
8	**x_{12}**	151,2499997				
9	**x_{21}**	77,50000002				
10	**x_{22}**	97,50000062				
11	**Цільова функція**	1017,499999				
12	**Обмеження по плану П1**	250				
13	**Обмеження по плану П2**	400				
14	**Обмеження по часу для О1**	159,9999997				
15	**Обмеження по часу для О2**	175,0000006				

Тобто мінімальна собівартість продукції 1017,5 тис. грн.. досягається, якщо продукцію $П_1$ виробляти на обладнанні $О_1$ 8,7 год., продукцію $П_2$ на обладнанні $О_1$ - 151,2 год., $П_1$ на обладнанні $О_2$ - 77,5 год., а $П_2$ на обладнанні $О_2$ - 97,5 год. При цьому виконуються умови щодо виконання плану та обмеження щодо максимального фонду робочого часу.

Зауваження.

Аналогічну математичну модель, а значить і аналогічний розв'язок, має відома «**транспортна задача**». В якості такої задачі розглянемо наступний приклад.

Нехай ми маємо 3 склади, у кожному з яких відповідно 310, 280 та 250 тонн певного товару, а також 4 торгові точки, які мають відповідно потреби у товарі 250, 189, 220 та 260 тонн. Вартості перевезень 1 тони товару з і-го складу в j-у торгову точку (тис. грн..) вказані у таблиці:

	Магазин 1	**Магазин 2**	**Магазин 3**	**Магазин 4**
Склад 1	4	5	7	3
Склад 2	8	6	9	10
Склад 3	12	4	5	11

Скласти оптимальний план перевезень, тобто план, який мінімізує транспортні витрати.

Розв'язок.

Позначимо x_{ij} – кількість товару (тон), що буде перевезено з i-го складу в j-у торгову точку. Тобто, наприклад, x_{23} – це кількість товару, перевезеного з 2-го складу в 3-й магазин.Тоді цільова функція (сумарна вартість перевезень) дорівнює:

$$F(x) = 4\cdot x_{11} + 5\cdot x_{12} + 7\cdot x_{13} + 3\cdot x_{14} + 8\cdot x_{21} + 6\cdot x_{22} + 9\cdot x_{23} + 10\cdot x_{24} + 12x_{31} + 4\cdot x_{32} + 5\cdot x_{33} + 11\cdot x_{34}. \quad (13)$$

Обмеження по запасам товару:

$$4\cdot x_{11} + 5\cdot x_{12} + 7\cdot x_{13} + 3\cdot x_{14} \le 310,$$
$$8\cdot x_{21} + 6\cdot x_{22} + 9\cdot x_{23} + 10\cdot x_{24} \le 280, \quad (14)$$
$$12x_{31} + 4\cdot x_{32} + 5\cdot x_{33} + 11\cdot x_{34} \le 250.$$

Обмеження по потребам у товарах:

$$4\cdot x_{11} + 8\cdot x_{21} + 12\cdot x_{31} \ge 250,$$
$$5\cdot x_{12}+ 6\cdot x_{22}+ 4\cdot x_{32} \ge 189,$$
$$7\cdot x_{13}+ 9\cdot x_{23} + 5\cdot x_{33} \ge 220, \quad (15)$$
$$3\cdot x_{14}+ 10\cdot x_{24} + 11\cdot x_{34} \ge 260.$$

Додаткові обмеження: $x_{ij} \ge 0$, где i=1,2,3; j=1,2,3,4. (16)

Необхідно мінімізувати цільову функцію (13) при обмеженнях (14) – (16).

Якщо порівняти дану модель із моделлю (7) – (12), то ми бачимо що вони аналогічні. Аналогом обладнання є склад, а аналогом продукції – магазин. Єдина відмінність у кількості невідомих, т.я. в нас було 2 види обладнання і 2 види продукції, а зараз 3 склади і 4 магазини. Але ця відмінність - несуттєва і не впливає на хід розв'язання.

4.3. Задача про оптимальний розкрій матеріалів

Надзвичайно цікавою і актуальною є задача оптимального розкрою матеріалів, яку можна проілюструвати наступним прикладом.

Приклад 4.3.1

Підприємство одержує труби довжиною 3,4 м, із яких виготовляють 400 заготовок довжиною 1 м, 300 заготовок довжиною 0,6м, 200 заготовок довжиною 0,9м. Визначити оптимальний план розкрою труб на заготовки.

Розв'язок.

Є різні способи розкрою труби довжиною 3,4м на заготовки дорвжинами 1, 0,9 та 0,6 м. Фактично задача полягає у тому, щоб визначити, скільки труб розрізати кожним з можливих способів так, щоб отримати 400 заготовок довжиною 1м, 300 – довжиною 0,6м і 200 – довжиною 0,9м. Оптимальність плану розкрою буде полягати у мінімазації кількості труб, використаних для отримання необхідної кількості заготовок.

Побудуємо математичну модель задачі. Для цього зведемо у таблицю усі можливі способи розкрою труб.

№ способа	Кількість кусків довжиною 1 м	Кількість кусків довжиною 0,9 м	Кількість кусків довжиною 0,6 м
1.	3	0	0
2.	2	1	0
3.	2	0	2
4.	1	2	1
5.	1	1	2
6.	1	0	4
7.	0	3	1
8.	0	2	2
9.	0	1	4
10.	0	0	5

Позначимо x_i – скільки разів користуються i-м способом розкрою. Наприклад, x_1 – це кількість разів, коли скористалися 1-м способом. У цьому випадку отримали $\mathbf{3x_1}$ заготовок довжиною 1м, а залишок становить $\mathbf{0{,}4x_1}$ (м).

Тоді система обмежень буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
&3x_1+2x_2+2x_3+1x_4+1x_5 \geq 400,\\
&1x_2+2x_4+1x_5+3x_7+2x_8+1x_9 \geq 200,\\
&2x_3+1x_4+2x_5+4x_6+1x_7+2x_8+4x_9+5x_{10} \geq 300,\\
&x_1, x_2, \ldots, x_{10} \geq 0,\\
&x_1, x_2, \ldots, x_{10} \text{ – цілі.}
\end{aligned} \tag{17}$$

Цільова функція матиме вигляд:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = \sum_{i=1}^{10} x_i \,. \tag{18}$$

Необхідно знайти мінімум цільової функції (18) при обмеженнях (17).

Перенесемо усі дані таблиці, ліві і праві частини обмежень, а також цільову функцію у аркуш Excel.

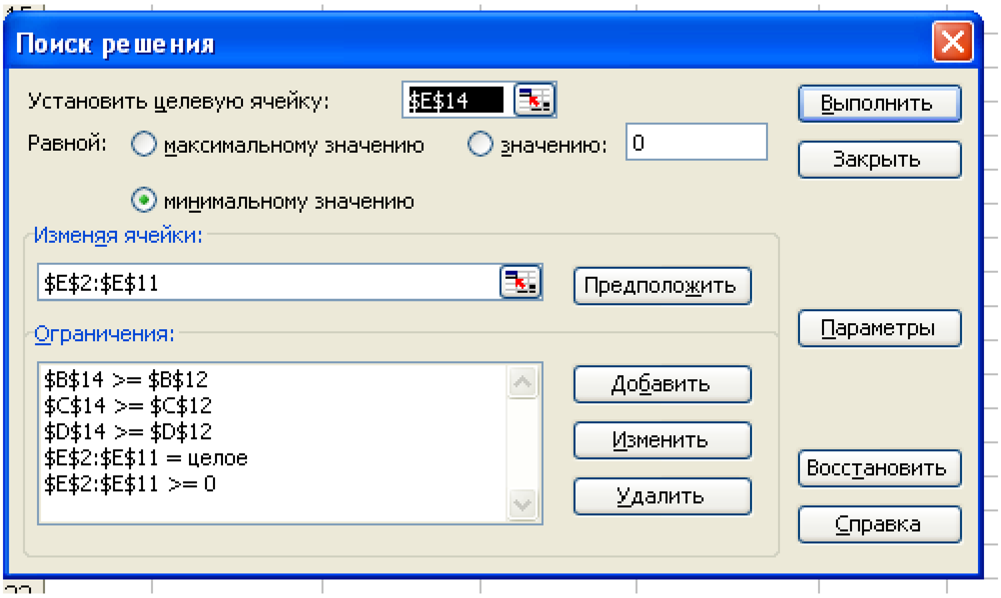
B14 | f_x =B2*$E2+B3*$E3+B4*$E4+B5*$E5+B6*$E6+B7*$E7+B8*$E8+B9*$E9+B10*$E10+B11*$E11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Кількість кусків довжиною 1 м	Кількість кусків довжиною 0,9 м	Кількість кусків довжиною 0,6 м	Кількість розрізань труби за даним способом					
2		3	0	0	0					
3		2	1	0	0					
4		2	0	2	0					
5		1	2	1	0					
6		1	1	2	0					
7		1	0	4	0					
8		0	3	1	0					
9		0	2	2	0					
10		0	1	4	0					
11		0	0	5	0					
12	План	400	200	300						
13		Випущено заготовок 1м	Випущено заготовок 0,9м	Випущено заготовок 0,6м	Цільова функція (всього труб, шт)					
14		0	0	0	0					
15										

Скористаємося пошуком розв'язків, так, як ми це робили раніше.

E14 | f_x =$E2+$E3+$E4+$E5+$E6+$E7+$E8+$E9+$E10+$E11

	A	B	C	D	E	F
1		Кількість кусків довжиною 1 м	Кількість кусків довжиною 0,9 м	Кількість кусків довжиною 0,6 м	Кількість розрізань труби за даним способом	
2		3	0	0	0	
3		2	1	0	0	
4		2	0	2	0	
5		1	2	1	0	
6		1	1	2	0	
7		1	0	4	0	
8		0	3	1	0	
9		0	2	2	0	
10		0	1	4	0	
11		0	0	5	0	
12	План	400	200	300		
13		Випущено заготовок 1м	Випущено заготовок 0,9м	Випущено заготовок 0,6м	Цільова функція (всього труб, шт)	
14		0	0	0	0	
15						



Натиснемо «Выполнить» і отримаємо наступний результат:

	A	B	C	D	E
1		**Кількість кусків довжиною 1 м**	**Кількість кусків довжиною 0,9 м**	**Кількість кусків довжиною 0,6 м**	**Кількість розрізань труби за даним способом**
2		3	0	0	58
3		2	1	0	0
4		2	0	2	50
5		1	2	1	101
6		1	1	2	0
7		1	0	4	25
8		0	3	1	0
9		0	2	2	0
10		0	1	4	0
11		0	0	5	0
12	**План**	**400**	**200**	**300**	
13		**Випущено заготовок 1м**	**Випущено заготовок 0,9м**	**Випущено заготовок 0,6м**	**Цільова функція (всього труб, шт)**
14		400	202	301	234
15					