

УДК 517.5

О. В. Федунік (Волинський державний університет, Луцьк)

ОЦІНКИ ЛІНІЙНИХ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ $B_{p,\theta}^\Omega$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Одержано точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega$ в просторі L_q для деяких значень параметрів p та q .

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, — простір 2π -періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod_{j=1}^d [0; 2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$, у якому норма визначається рівностями

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Всюди далі будемо вважати, що функції f належать підпростору

$$L_p^0(\pi_d) = \left\{ f : f \in L_p(\pi_d), \int_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, j = \overline{1, d} \right\}.$$

За допомогою рівності

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^l (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d)$$

© О. В. Федунік, 2007

означимо l -ту різницю функції f з кроком h_j за змінною x_j .

Для $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ і $h = (h_1, \dots, h_d)$ введемо мішану l -ту різницю

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \dots \Delta_{h_1}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\dots (\Delta_{h_1}^l f(x))).$$

Означимо для $f \in L_p^0(\pi_d)$ мішаний модуль неперервності порядку l :

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j, \\ j=1, \bar{d}}} \|\Delta_h^l f(x)\|_p.$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l , яка задовольняє такі умови:

- 1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, \bar{d}}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;
- 2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;
- 3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \leq \left(\prod_{j=1}^d m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, \bar{d}}$;
- 4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, \bar{d}}$.

Нехай також $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) , (S_l) , які називають умовами Барі–Стечкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S) , якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l) , якщо $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l) , якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих $t_i, i \neq j$.

Означимо деякі порядкові співвідношення, які будуть використовуватись далі.

Функції $\mu(n)$ і $\nu(n)$ будемо називати функціями однакового порядку і писати $\mu(n) \asymp \nu(n)$, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $C_3\mu(n) \leq \nu(n) \leq C_4\mu(n)$, де сталі $C_3, C_4 > 0$ можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору \mathbb{R}^d . Якщо ж $\mu(n) \leq C_5\nu(n)$ або $\mu(n) \geq C_6\nu(n)$, то позначимо $\mu(n) \ll \nu(n)$ або $\mu(n) \gg \nu(n)$ відповідно.

В подальшому в формулюванні отриманих результатів буде присутнє порядкове співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, $M, n \in \mathbb{N}$, яке будемо розуміти таким чином: існують сталі $0 < C_7 < C_8$ такі, що виконуються нерівності

$$C_7 2^n n^{d-1} \leq M \leq C_8 2^n n^{d-1}.$$

Означимо тепер класи функцій $B_{p,\theta}^\Omega$, які були розглянуті в роботі [2].

Нехай $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, d}$. Позначимо

$$\rho(s) = \{ k : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1, d} \},$$

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k, t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f , $(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$.

Для $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови 1 – 4, клас $B_{p,\theta}^\Omega$ визначається наступним чином

$$B_{p,\theta}^\Omega := \left\{ f \in L_p^0(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \leq 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left\{ \int_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}.$$

В [2] для $1 < p < \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови 1 – 4, (S) і (S_l) доведено, що

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \asymp \left\{ \sum_s \|\delta_s(f,x)\|_p^\theta \Omega(2^{-s})^{-\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \quad (1)$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} \asymp \sup_s \frac{\|\delta_s(f,x)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, \quad (2)$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$.

Для норм функцій із класу $B_{p,\theta}^\Omega$ можна записати представлення, аналогічні (1) і (2) у випадках $p = 1$ і $p = \infty$, дещо змінивши при цьому "блоки" $\delta_s(f,x)$.

Нехай $V_n(t)$ означає ядро Валле Пуссена порядку $2n - 1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n} \right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j) \right)$$

і для $f \in L_p^0(\pi_d), 1 \leq p \leq \infty$, через $A_s(f, x)$ позначимо згортку

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x).$$

Тоді, як встановлено в [3], для кожного $1 \leq p \leq \infty$

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \asymp \left\{ \sum_s \|A_s(f, x)\|_p^\theta \Omega(2^{-s})^{-\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \quad (3)$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(f, x)\|_p}{\Omega(2^{-s})}. \quad (4)$$

Зауважимо, що при $\theta = \infty$ класи $B_{p,\theta}^\Omega$ співпадають із розглянутими в [4] класами H_p^Ω . У випадку $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$ норми функцій з класів $B_{p,\theta}^\Omega$ співпадають з нормами функцій з класів $B_{p,\theta}^r$, які означені в [5].

Зазначимо, що в роботі будуть розглядатись класи $B_{p,\theta}^\Omega$, які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального вигляду:

$$\Omega(t) = \omega \left(\prod_{j=1}^d t_j \right), \quad (5)$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови (S) і (S_l) . Легко

переконалися, що для $\Omega(t)$ вигляду (5) виконуються властивості 1 – 4 функції типу мішаного модуля неперервності порядку l , а також умови (S) і (S_l) , тому зберігаються наведені вище (1) – (4) зображення норм функцій з класів $B_{p,\theta}^\Omega$.

В даній роботі встановимо точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega$ в просторі $L_q(\pi_d)$ для деяких значень параметрів p та q . Нагадаємо, що поняття лінійного поперечника ввів В.М.Тихомиров [6]. Перейдемо до означення.

Нехай W — множина в банаховому просторі X . Тоді лінійний поперечник множини W в просторі X (позначається $\lambda_M(W, X)$) визначається за формулою

$$\lambda_M(W, X) = \inf_A \sup_{f \in W} \|f - Af\|_X, \quad (6)$$

де нижня межа береться по всіх діючих в X лінійних операторах A , розмірність області значень яких не перевищує M .

Зазначимо, що лінійний поперечник $\lambda_M(W, X)$ пов'язаний із поперечником $d_M(W, X)$, введеним А.М.Колмогоровим [7], нерівністю

$$d_M(W, X) \leq \lambda_M(W, X). \quad (7)$$

У зв'язку з цим цікаво з'ясувати, в яких випадках (для конкретних множин W і просторів X) поперечники $d_M(W, X)$ і $\lambda_M(W, X)$ співпадають, а в яких випадках в (7) має місце строга нерівність.

В даний час є велика кількість робіт, присвячених дослідженню лінійних поперечників тих чи інших класів функцій однієї та багатьох змінних. Тут згадаємо лише роботи Е.М.Галеєва [8, 9], де досліджуються величини (6) для класів функцій багатьох змінних W_p^r і H_p^r , а також роботи А.С.Романюка [10, 11], в яких встановлено порядкові оцінки лінійних поперечників класів функцій багатьох змінних $B_{p,\theta}^r$. В названих роботах міститься досить детальна бібліографія.

Наведемо твердження, які будемо використовувати далі.

Теорема А (Літлвуда - Пелі, див., наприклад, [12, с. 55]).
Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді існують додатні числа C_9, C_{10} такі, що для кожної функції $f(x) \in L_p^0(\pi_d)$ виконується співвідношення

$$C_9 \|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f; \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_{10} \|f\|_p.$$

Покладемо

$$\bar{S}_n = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : (s, 1) = n, s_j - \text{парні числа}, j = \overline{1, d} \right\},$$

$$\rho^+(s) = \left\{ k = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j}, j = \overline{1, d} \right\},$$

$$\bar{Q}_n = \bigcup_{s \in \bar{S}_n} \rho^+(s), |\bar{Q}_n| - \text{кількість елементів множини } \bar{Q}_n.$$

Для вектора $m = (m_1, \dots, m_d)$ (m_j — цілі невід'ємні числа, $j = \overline{1, d}$) через $RT(m)$ позначимо множину дійсних тригонометричних поліномів виду

$$t(x) = \sum_{|k_j| \leq m_j} \hat{t}(k) e^{i(k, x)}.$$

Далі, через k^s позначимо вектор $k^s = (k_1^{s_1}, \dots, k_d^{s_d})$, де

$$k_j^{s_j} = \begin{cases} 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}, & s_j \geq 2, \\ 1, & s_j = 1, j = \overline{1, d}, \end{cases}$$

і

$$T(\bar{Q}_n) = \left\{ t(x) = \sum_{s \in \bar{S}_n} t_s(x) e^{i(k^s, x)}, t_s \in RT(2^{s-2}) \right\}.$$

Для $g \in T(\overline{Q}_n)$ покладемо

$$\overline{\delta}_s(g, x) = \sum_{k \in \rho^+(s)} \widehat{g}(k) e^{i(k, x)}.$$

При таких позначеннях має місце наступне твердження.

Лема [13]. *Нехай $M \leq \frac{|\overline{Q}_n|}{4}$. Тоді для довільного простору $\Phi \in L_1(\pi_d)$, розмірність якого не перевищує M , знайдеться функція $g \in T(\overline{Q}_n)$ така, що*

$$\|\overline{\delta}_s(g, x)\|_\infty \leq |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}}, \quad s \in \overline{S}_n,$$

$$\|g\|_2 \geq C_{11} > 0,$$

і для будь-якого $\varphi \in \Phi$ виконується умова $(g, \varphi) = 0$.

Перейдемо до одержаних результатів.

Теорема. *Нехай $1 \leq q < 2 \leq p \leq \infty$, $2 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \dots \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l). Тоді для будь-яких $M, n \in \mathbb{N}$, таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце співвідношення*

$$\lambda_M(B_{p, \theta}^\Omega, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}. \quad (8)$$

Доведення. Оцінка зверху в (8) випливає із відомих результатів. Дійсно, нехай M — задане. Підберемо n із співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Для $1 < q < 2 \leq p < \infty$, $2 \leq \theta \leq \infty$, розглянемо наближення класу $B_{p, \theta}^\Omega$ у метриці $L_q(\pi_d)$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f, x) = \sum_{(s, 1) < n} \delta_s(f, x)$, де

$$Q_n = \bigcup_{(s, 1) < n} \rho(s) \text{ — "східчастий гіперболічний хрест"}.$$

Тоді, використовуючи встановлену в [14]

$$\sup_{f \in B_{p, \theta}^\Omega} \|f(x) - S_{Q_n}(f, x)\|_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+},$$

та нерівність

$$\lambda_M(B_{p,\theta}^\Omega, L_q) \ll \sup_{f \in B_{p,\theta}^\Omega} \|f(x) - S_{Q_n}(f, x)\|_q, \quad M \asymp 2^n n^{d-1},$$

одержуємо шукану оцінку зверху для $\lambda_M(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$. У випадку $q = 1$ або $p = \infty$ проведемо аналогічні до наведених вище міркування, додатково використавши нерівність $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_q$, $1 < q < 2$, або включення $B_{\infty,\theta}^\Omega \subset B_{p,\theta}^\Omega$, $2 \leq p < \infty$.

Встановимо тепер в (8) оцінку знизу. Для $1 < q < 2 \leq p < \infty$, $2 \leq \theta \leq \infty$, ця оцінка впливає з відомої оцінки колмогоровського поперечника

$$d_M(B_{p,\theta}^\Omega, L_q) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}, \quad M \asymp 2^n n^{d-1},$$

встановленої в [14], на основі нерівності (7). Як зазначалось вище, має місце включення $B_{\infty,\theta}^\Omega \subset B_{p,\theta}^\Omega$, $2 \leq p < \infty$, а також нерівність $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_q$, $1 < q < 2$. Тому, згідно з означенням лінійного поперечника, виконується нерівність $\lambda_M(B_{\infty,\theta}^\Omega, L_1) \leq \lambda_M(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$. Таким чином, достатньо відповідним чином оцінити знизу $\lambda_M(B_{\infty,\theta}^\Omega, L_1)$.

Отже, нехай M — задане. Підберемо парне n із умови $|\overline{Q}_{n-2}| < 4M \leq |\overline{Q}_n|$. Розглянемо деякий лінійний оператор G , який діє з L_∞ в L_1 , розмірність області значень якого не перевищує M . Тоді $\dim G(T(\overline{Q}_n)) \leq M$, і оскільки $M \leq \frac{|\overline{Q}_n|}{4}$, то розмірність простору $\Psi \subset T(\overline{Q}_n)$ такого, що $G(\Psi) = 0$, буде більшою M . Крім того, внаслідок леми 1, знайдеться функція $g \in \Psi$ така, що

$$\|\overline{\delta}_s(g, x)\|_\infty \leq |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}}, \quad s \in \overline{S}_n,$$

і

$$\|g\|_2 \geq C_{11} > 0.$$

Нехай $2 \leq \theta < \infty$. Розглянемо функцію

$$f_1(x) = C_{12}\omega(2^{-n})|\bar{S}_n|^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{d-1}{\theta}}g(x), \quad C_{12} > 0,$$

і оцінимо $\|f_1\|_{B_{\infty,\theta}^\Omega}$, $2 \leq \theta < \infty$.

Використовуючи представлення норми функції з класу $B_{\infty,\theta}^\Omega$, для f_1 маємо

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{B_{\infty,\theta}^\Omega} &\asymp \left(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|A_s(f_1, x)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \\ &\ll \omega(2^{-n})|\bar{S}_n|^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \bar{S}_n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|\bar{\delta}_s(g, x)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \\ &\ll \omega(2^{-n})|\bar{S}_n|^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{d-1}{\theta}} |\bar{S}_n|^{-\frac{1}{2}}\omega^{-1}(2^{-n}) \left(\sum_{s \in \bar{S}_n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1. \end{aligned}$$

Із одержаного робимо висновок, що функція f_1 із відповідною сталою $C_{12} > 0$ належить класу $B_{\infty,\theta}^\Omega$, $2 \leq \theta < \infty$.

Тепер оцінимо $\|f_1(x) - Gf_1(x)\|_1$. Зазначимо, що оскільки $g \in \Psi$ і $G(\Psi) = 0$, то

$$\|g(x) - Gg(x)\|_1 = \|g\|_1. \quad (9)$$

Для того, щоб оцінити знизу $\|g\|_1$, скористаємось нерівністю [15, т. 1, с. 330]

$$\|g\|_2 \leq \|g\|_1^{\frac{1}{3}} \|g\|_4^{\frac{2}{3}},$$

внаслідок якої

$$\|g\|_1 \geq \|g\|_2^3 \|g\|_4^{-2} \quad (10)$$

Оскільки внаслідок леми 1 $\|g\|_2 \geq C_{11} > 0$, то для одержання шуканої оцінки знизу для $\|g\|_1$ залишається відповідним чином

оцінити знизу $\|g\|_4^{-2}$. Взявши до уваги те, що $g \in \Psi \subset T(\overline{Q}_n)$, і використовуючи теорему Літлвуда-Пелі і нерівність Мінковського, будемо мати

$$\begin{aligned} 0 < \|g\|_4 &\ll \left\| \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} |\overline{\delta}_s(g, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_4 \ll \\ &\ll \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} \|\overline{\delta}_s(g, x)\|_4^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} \|\overline{\delta}_s(g, x)\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \ll |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}} |\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Звідки $\|g\|_4^{-1} \geq C_{13}$, тому, враховуючи (10), отримуємо оцінку

$$\|g\|_1 \geq C_{14}. \quad (11)$$

Отже, із (9) і (11) маємо

$$\|g(x) - Gg(x)\|_1 \geq C_{14}$$

і, внаслідок вибору функції f_1 , одержуємо шукану оцінку знизу у випадку $2 \leq \theta < \infty$

$$\begin{aligned} \|f_1(x) - Gf_1(x)\|_1 &= C_{12} \omega(2^{-n}) |\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \|g(x) - Gg(x)\|_1 \gg \\ &\gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}. \end{aligned}$$

При $\theta = \infty$ розглянемо функцію

$$f_2(x) = C_{15} \omega(2^{-n}) |\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} g(x), \quad C_{15} > 0.$$

Використовуючи зображення норми функції з класу $B_{\infty, \infty}^\Omega$, для f_2 маємо

$$\begin{aligned} \|f_2\|_{B_{\infty,\infty}^{\Omega}} &\asymp \sup_s \frac{\|A_s(f_2, x)\|_{\infty}}{\omega(2^{-(s,1)})} \ll \omega(2^{-n})|\bar{S}_n|^{\frac{1}{2}} \sup_{s \in \bar{S}_n} \frac{\|\bar{\delta}_s(g, x)\|_{\infty}}{\omega(2^{-(s,1)})} \ll \\ &\ll \omega(2^{-n})|\bar{S}_n|^{\frac{1}{2}} \omega^{-1}(2^{-n})|\bar{S}_n|^{-\frac{1}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Отже, робимо висновок, що функція f_2 із відповідною сталою $C_{15} > 0$ належить класу $B_{\infty,\infty}^{\Omega}$. Використовуючи ті ж самі міркування, що і вище, одержуємо оцінку знизу при $\theta = \infty$

$$\begin{aligned} \|f_2(x) - Gf_2(x)\|_1 &= C_{13}\omega(2^{-n})|\bar{S}_n|^{\frac{1}{2}} \|g(x) - Gg(x)\|_1 \gg \\ &\gg \omega(2^{-n})n^{\frac{d-1}{2}}. \end{aligned}$$

Теорема доведена.

Зауваження. Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_1}$, $1 \leq q < 2 \leq p \leq \infty$, $2 \leq \theta \leq \infty$, і $\alpha = r_1 > 0$, то виконується співвідношення

$$\lambda_M(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) \asymp M^{-r_1} \left(\log^{d-1} M \right)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}},$$

яке встановлене А.С.Романюком [11].

Наслідок. При $\theta = \infty$ із теореми 1 випливає оцінка

$$\lambda_M(H_p^{\Omega}, L_q) \asymp \omega(2^{-n})n^{\frac{d-1}{2}},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Отримані оцінки лінійних поперечників доповнюють результати робіт [16, 17].

1. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1956.— **5**.— С. 483–522.

2. Sun Youngsheng, Wang Heping. Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1997.— **219**.— С. 356–377.
3. Стасюк С.А., Федунік О.В. Апроксимативні характеристики класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн.— 2006.— **58**, № 5.— С. 692–704.
4. Пустовойтов Н.Н. Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math.— 1994.— **20**.— С. 35–48.
5. Лизоркин П.И., Никольский С.М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова.— 1989.— **187**.— С. 143–161.
6. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. — 1960. — Т. 15, № 3. — С. 81–120.
7. Kolmogoroff A. Über die beste Annäherung von Functionen einer gegeben Functionenklasse // Ann. Math. — 1936. — V. 37. — С. 107–111.
8. Галеев Э.М. О линейных поперечниках классов периодических функций многих переменных // Вест. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. — 1987. — № 4. — С. 13–16.
9. Галеев Э.М. Линейные поперечники классов Гельдера–Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, № 2. — С. 189–199.
10. Романюк А.С. Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. I // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 5. — С. 647–661.
11. Романюк А.С. Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. II // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 6. — С. 820–829.
12. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1977.— 456 с.
13. Темляков В.Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1989.— **189**.— С. 138–168.

14. Стасюк С.А. Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн.— 2004.— **56**, № 11.— С. 1557–1568.
15. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т1. — 615 с; Т2. — 537 с.
16. Федунік О.В. Лінійні поперечники класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання : Збірник праць Ін-ту математики НАН України.— 2004. — Т. 1, № 1. — С. 375–388.
17. Федунік О.В. Лінійні поперечники класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн.— 2006. — Т. 58, № 1. — С. 93–104.