УДК 517.5

Стасюк С.А., Федуник О.В. (Інститут математики НАН України, Київ)
Stasyuk S.A., Fedunyk O.V.

Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних

Approximative characteristic of classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables

Одержано точні за порядком оцінки наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q за допомогою операторів ортогонального проектування, а також лінійних операторів, що підпорядковані деяким умовам.

Exact order estimates of approximation of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic multivariate functions in the space L_q by using operators of orthogonal projections as well as linear operators subjected to some conditions are obtained.

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[0;2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$, у якому норма визначається рівностями

$$||f||_{L_p(\pi_d)} = ||f||_p = \Big((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \ , \ 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = ||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Надалі скрізь будемо вважати, що для функцій $f(x) \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0 \ , \quad j = \overline{1,d}.$$

Для $f(x) \in L_p(\pi_d)$ введемо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=\overline{1,d}}} ||\Delta_h^l f(\cdot)||_p,$$

де $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_d}^l \dots \Delta_{h_1}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l(\dots(\Delta_{h_1}^l f(x)))$ — мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j і

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + jh, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє наступні умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$; $\quad \Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \le \Big(\prod_{j=1}^{d} m_j \Big)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $\quad j = \overline{1,d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0$, $\quad j = \overline{1,d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S), (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha} \ , \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}\ , \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \neq j$.

Означимо деякі порядкові співвідношення, які будуть використовуватись далі.

Функції $\mu(n)$ і $\nu(n)$ будемо називати функціями однакового порядку і писати $\mu(n) \asymp \nu(n)$, якщо існує n_0, таке, що для будь- якого $n > n_0$ виконується нерівність $C_3\mu(n) \leq \nu(n) \leq C_4\mu(n)$, де сталі $C_3, C_4 > 0$ можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$. Якщо ж $\mu(n) \leq C_5\nu(n)$ або $\mu(n) \geq C_6\nu(n)$, то позначимо $\mu(n) \ll \nu(n)$ і $\mu(n) \gg \nu(n)$ відповідно.

В подальшому в формулюванні отриманих результатів буде присутнє порядкове співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, $M, n \in \mathbb{N}$, яке будемо розуміти таким чином, що існують сталі $0 < C_7 < C_8$ такі, що виконуються нерівності

$$C_7 2^n n^{d-1} \leq M \leq C_8 2^n n^{d-1}.$$

Зазначимо, що виходячи з останньої подвійної нерівності, можемо записати наступні порядкові співвідношення:

$$n \asymp \log M, \quad 2^n \asymp \frac{M}{\log^{d-1} M}\ .$$

Означимо тепер класи функцій $B^\Omega_{p,\theta}$, які були розглянуті в роботі [2].

Нехай $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, d}$. Позначимо

$$\rho(s) = \left\{\ k : \quad 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d} \right\},$$

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, $(k, x) = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$.

Для $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4, (S), (S_l), клас $B^\Omega_{p,\theta}$

визначається наступним чином

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \Big\{ f \in L_p(\pi_d) : \ ||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \Big\},$$

де

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \Big\{ \int\limits_{\pi_d} \Big(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \Big)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \Big\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1}$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}.$$

В [2] для $1 < p < \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1) – 4), (S) і (S_l) встановлено, що

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \Big\{ \sum_{s} ||\delta_s(f,\cdot)||_p^{\theta} \ \Omega(2^{-s})^{-\theta} \Big\}^{\frac{1}{\theta}} , \ \ 1 \le \theta < \infty \ , \tag{2}$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{s} \frac{||\delta_s(f,\cdot)||_p}{\Omega(2^{-s})} \ , \tag{3}$$

$\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Нижче ми покажемо, що для норм функцій із класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна записати представлення, аналогічні (2) і (3) у випадках $p = 1$ і $p = \infty$, дещо видозмінивши при цьому "блоки" $\delta_s(f,x)$.

Нехай $V_n(t)$ означає ядро Валле Пуссена порядку $2n-1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1} \Big(1 - \frac{k-n}{n} \Big) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \Big(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \Big)$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, через $A_s(f,x)$ позначимо згортку

$$A_s(f,x) = f(x) * A_s(x).$$

Має місце

Теорема 1. *Нехай $\Omega(t)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, що задовольняє умову (S) з деяким $\alpha > 0$, а також умову (S_l).*

Функція $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, *тоді і лише тоді, коли*

$$\Big\{ \sum_{s>0} \|A_s(f,\cdot)\|_p^{\theta} \ \Omega(2^{-s})^{-\theta} \Big\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

і в цьому випадку

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \Big\{ \sum_{s>0} \|A_s(f,\cdot)\|_p^{\theta} \ \Omega(2^{-s})^{-\theta} \Big\}^{\frac{1}{\theta}} . \tag{4}$$

Зазначимо, що при доведенні теореми будемо використовувати деякі ідеї роботи [2], на які вказуватиметься в ході доведення.

Доведення. Встановимо для $||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}}$ оцінку зверху. В [2] показано, що

$$||f||^{\theta}_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \ll \sum_{k \ge 0} \Big(\Omega_l(f, 2^{-k})_p \Big)^{\theta} \Omega(2^{-k})^{-\theta}, \tag{5}$$

де $k = (k_1, \dots, k_d)$, $2^{-k} = (2^{-k_1}, \dots, 2^{-k_d})$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$.

Враховуючи, що (див., наприклад, [3, стор. 304]) $f(x) = \sum\limits_{s>0} A_s(f,x)$, одержимо

$$\Omega_l(f, 2^{-k})_p = \sup_{|h| \le 2^{-k}} ||\Delta^l_h f(\cdot)||_p \le \sum_{s>0} \sup_{|h| \le 2^{-k}} ||\Delta^l_h A_s(f,\cdot)||_p. \tag{6}$$

Для проведення подальших міркувань розглянемо 2 випадки.

Якщо $|h_j| \le 2^{-s_j}$, то використаємо для оцінки $||\Delta^l_{h_j} A_s(f,\cdot)||_p$ нерівність (див., наприклад, [3, с. 166])

$$||\Delta^l_{h_j} g(\cdot)||_p \le |h_j|^l \Big\| \frac{\partial^l g}{\partial x_j} \Big\|_p$$

та нерівність Бернштейна для тригонометричних поліномів. Одержимо

$$||\Delta^l_{h_j} A_s(f,\cdot)||_p \le |h_j|^l \Big\| \frac{\partial^l}{\partial x_j} A_s(f,\cdot) \Big\|_p \ll |h_j|^l 2^{s_j l} ||A_s(f,\cdot)||_p. \tag{7}$$

Якщо ж $|h_j| > 2^{-s_j}$, то використовуючи для оцінки $||\Delta^l_{h_j} A_s(f,\cdot)||_p$ нерівність Мінковського, матимемо

$$||\Delta^l_{h_j} A_s(f,\cdot)||_p \ll ||A_s(f,\cdot)||_p. \tag{8}$$

Беручи до уваги (7) та (8) робимо висновок, що

$$||\Delta_h^l A_s(f,\cdot)||_p \ll ||A_s(f,\cdot)||_p \prod_{j=1}^{d} \min\{1, |h_j|^l 2^{s_j l}\},$$

а

$$\sup_{|h|\leq 2^{-k}} ||\Delta_h^l A_s(f,\cdot)||_p \ll ||A_s(f,\cdot)||_p \prod_{j=1}^{d} \min\{1, 2^{l(s_j-k_j)}\}. \tag{9}$$

Далі, враховуючи (6), (9) та використовуючи ті ж самі міркування, що в [2] можна довести, що

$$\sum_{k\geq 0} \Big(\Omega_l(f, 2^{-k})_p\Big)^\theta \Omega(2^{-k})^{-\theta} \ll \sum_{s>0} \|A_s(f,\cdot)\|_p^\theta \ \Omega(2^{-s})^{-\theta}. \tag{10}$$

Об'єднуючи (5) і (10) одержуємо для (4) оцінку зверху.

Оцінка знизу встановлюється цілком аналогічно, як і в роботі [2] із заміною $\delta_s(f,\cdot)$ на $A_s(f,\cdot)$.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Так як $\Omega(t)$, $\Omega_l(f,t)_p$ задовольняють умови 1-4, (S) та (S_l), то при $0 < t_1 < t_2 < 2t_1$ мають місце співвідношення

$$\Omega(t_1) \asymp \Omega(t_2), \quad \Omega_l(f,t_1)_p \asymp \Omega_l(f,t_2)_p. \tag{11}$$

В [4] встановлено, що при $1 \leq p \leq \infty$ має місце нерівність

$$||A_s(f,\cdot)||_p \ll \Omega_l(f, 2^{-s})_p. \tag{12}$$

Виходячи з (1) і раховуючи (11) та (12) одержимо

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} > \Big(\int_0^1 \dots \int_0^1 \Big(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}\Big)^\theta \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \gg$$

$$\gg \Big(\sum_{s>0} (\Omega_l(f,2^{-s})_p)^\theta \ \Omega(2^{-s})^{-\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \gg \Big(\sum_{s>0} ||A_s(f,\cdot)||_p^\theta \ \Omega(2^{-s})^{-\theta}\Big)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Оцінка знизу встановлена.

Теорема доведена.

Зауважимо, що при $\theta = \infty$ клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадає з класом H^{Ω}_p, для якого встановлено в [6], що має місце співвідношення

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{||A_s(f,\cdot)||_p}{\Omega(2^{-s})}.$$

Зазначимо, що далі в роботі будуть розглядатись класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального вигляду:

$$\Omega(t) = \omega\Big(\prod_{j=1}^{d} t_j\Big), \tag{13}$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l). Легко переконатися, що для $\Omega(t)$ вигляду (13) виконуються властивості 1) – 4) функції типу мішаного модуля неперервності порядку l, а також умови (S) і (S_l), і тому зберігаються наведені вище зображення норм функцій класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

В даній роботі з використанням результату теореми 1 встановлюються точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі L_q для деяких значень параметрів p і q. Щоб навести означення цього поняття, введемо деякі позначення.

Нехай $\{u_i(x)\}_{i=1}^{M}$— ортонормована система функцій $u_i(x) \in L_\infty(\pi_d)$. Кожній функції $f(x) \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, поставимо у відповідність агрегат наближення виду $\sum\limits_{i=1}^{M}(f, u_i)u_i(x)$, тобто ортогональну проекцію функції $f(x)$ на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i(x)\}_{i=1}^{M}$. Тоді для функціонального класу F з $L_q(\pi_d)$ величина

$$d^{\perp}_M(F, L_q) = \inf_{\{u_i(x)\}_{i=1}^{M}} \sup_{f \in F} \Big\| f(x) - \sum_{i=1}^{M}(f, u_i)u_i(x)\Big\|_q \tag{14}$$

називається ортопроекційним поперечником цього класу в просторі $L_q(\pi_d)$.

Поняття ортопроекційного поперечника ввів В.М. Темляков [7]. Крім ортопроекційних поперечників будемо досліджувати величини $d^B_M(F, L_q)$, також введені В.М. Темляковим [7], які визначаються наступним чином

$$d^B_M(F, L_q) = \inf_{G \in L_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f(x) - Gf(x)\|_q\,. \tag{15}$$

Через $L_M(B)_q$ тут позначено множину лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься в підпросторі розмірності M простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує число $B \geq 1$ таке, що для всіх векторів $k = (k_1, \dots, k_d)$ виконується нерівність $\left\| Ge^{i(k,x)} \right\|_2 \leq B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M, а також оператори, які задаються на ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, який визначається послідовністю $\{\lambda_m\}$ такою, що $|\lambda_m| \leq 1$ для всіх m. Із (14) і (15) легко бачити, що величини $d_M^{\perp}(F, L_q)$ і $d_M^B(F, L_q)$ пов'язані між собою нерівністю

$$d_M^B(F, L_q) \leq d_M^{\perp}(F, L_q). \tag{16}$$

На даний час відомо багато робіт, в яких досліджувались ортопроекційні поперечники тих чи інших класів функцій. Тут згадаємо роботи [8, 9], в яких вивчались величини (14), (15) для класів функцій багатьох змінних $W_{p,\alpha}^r$, H_p^r. Дослідження ортопроекційних поперечників класів функцій багатьох змінних $B_{p,\theta}^r$ проводились в роботах [10, 11], де можна ознайомитись з детальнішою бібліографією.

При доведенні результатів будемо користуватись наступною теоремою.

Теорема А (Літтлвуда - Пелі, див., наприклад, [3, с.65]). *Нехай* $p \in (1, \infty)$. *Тоді існують додатні числа* C_9, C_{10} *такі, що для кожної функції* $f \in L_p(\pi_d)$ *виконується співвідношення*

$$C_9 ||f||_p \leq \left\| \Big(\sum_s |\delta_s(f, \cdot)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_{10} ||f||_p \ .$$

Теорема А є узагальненням на багатовимірний випадок відомої теореми Літтлвуда - Пелі (див. [12, т.2, гл.15]).

При встановленні оцінок зверху в теоремах 2 і 3 за агрегати наближення будемо брати частинні суми ряду Фур'є з "номерами" гармонік із множини Q_n

$$S_{Q_n}(f, x) = \sum_{(s,1)<n} \delta_s(f, x),$$

де $Q_n = \bigcup\limits_{(s,1)<n} \rho(s)$— "східчастий гіперболічний хрест", і розглядати величини

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B_{p,\theta}^{\Omega})_q = \sup_{f \in B_{p,\theta}^{\Omega}} \|f(x) - S_{Q_n}(f, x)\|_q.$$

Перейдемо до викладу отриманих результатів.

Теорема 2. *Нехай* $1 \le q \le p \le \infty$, $p \ge 2$, $(q,p) \ne (\infty,\infty)$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 0$ *та умову* (S_l). *Тоді при* $1 \le \theta \le \infty$ *має місце порядкова рівність*

$$d_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) \asymp d_M^B(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}, \tag{17}$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$, $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Зауважимо, що внаслідок нерівності (16) для доведення теореми достатньо буде оцінити знизу величину $d_M^B(F, L_q)$ і, відповідно, зверху величину $d_M^{\perp}(F, L_q)$.

Доведення. Оцінка зверху в (17) випливає із відомих результатів. Дійсно, нехай M— задане. Підберемо n із співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$. Для $1 < q \le p < \infty$, $p \ge 2$, $1 \le \theta \le \infty$ розглянемо наближення класу $B_{p,\theta}^{\Omega}$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f,x)$ у метриці L_q. Тоді, використовуючи оцінки $\mathcal{E}_{Q_n}(B_{p,\theta}^{\Omega})_p$ [2] та нерівність

$$d_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q) \ll \mathcal{E}_{Q_n}(B_{p,\theta}^{\Omega})_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(B_{p,\theta}^{\Omega})_p,$$

одержуємо шукану оцінку зверху для $d_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q)$, а, отже, і для $d_M^B(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q)$. У випадку $q = 1$ або $p = \infty$ проведемо аналогічні до наведених вище міркування, додатково використавши нерівність $||\cdot||_1 \le ||\cdot||_q$, $1 < q < \infty$, або вкладення $B_{\infty,\theta}^{\Omega} \subset B_{p,\theta}^{\Omega}$, $2 \le p < \infty$.

Перейдемо до встановлення в (17) оцінки знизу. Зазначимо, що оскільки отримана оцінка зверху не залежить від параметрів p і q, то для доведення оцінки знизу для величини $d_M^B(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q)$ достатньо розглянути випадок $p = \infty$, $q = 1$. Доведення розіб'ємо на три частини.

Нехай спочатку $2 \le \theta < \infty$. В цьому випадку використаємо допоміжне твердження, для формулювання якого введемо деякі позначення.

Покладемо

$$\overline{S}_n = \left\{ s : (s,1) = n, s_j - \text{парні числа}, j = \overline{1,d} \right\},$$

$$\rho^+(s) = \left\{ k : k = (k_1, \dots, k_d), 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j}, j = \overline{1,d} \right\},$$

$\overline{Q}_n = \bigcup\limits_{s \in \overline{S}_n} \rho^+(s)$, $|\overline{Q}_n|$— кількість елементів множини $\overline{Q}_n$.

Для вектора $m = (m_1, \dots, m_d)$ (m_j— цілі невід'ємні числа, $j = \overline{1,d}$) через $RT(m)$ позначимо множину дійсних тригонометричних поліномів виду

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le m_j} \widehat{t}(k) e^{i(k,x)}.$$

Нехай далі $k_j^{s_j} = 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}$ і

$$T(\overline{Q}_n) = \Big\{ t(x) = \sum_{s\in\overline{S}_n} t_s(x) e^{i(k^s,x)}, t_s \in RT(2^{s-2}) \Big\}.$$

Для $g(x) \in T(\overline{Q}_n)$ позначимо

$$\overline{\delta}_s(g,x) = \sum_{k\in\rho^+(s)} \widehat{g}(k) e^{i(k,x)}.$$

При таких позначеннях має місце наступне твердження.

Лема 1 [8]. *Нехай* $M \le \frac{|\overline{Q}_n|}{4}$. *Тоді для довільного простору* $\Phi \in L_1(\pi_d)$, *розмірність якого не перевищує* M, *знайдеться функція* $g(x) \in T(\overline{Q}_n)$ *така, що*

$$||\overline{\delta}_s(g,x)||_\infty \le |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}}, \ s \in \overline{S}_n,$$

$$||g||_2 \ge C_{11} > 0,$$

і для будь- якого $\varphi \in \Phi$ *виконується умова* $(g,\varphi) = 0$.

Отже, нехай $M-$ задане. Розглянемо деякий лінійний оператор G із $L_M(B)_1$, для якого $\dim G(B^{\Omega}_{\infty,\theta} \cap T(\overline{Q}_n)) \le M$. Підберемо парне n із умови $|\overline{Q}_{n-2}| < 4M \le |\overline{Q}_n|$. Тоді $\dim G(T(\overline{Q}_n)) \le M$, і оскільки $M \le \frac{|\overline{Q}_n|}{4}$, то розмірність простору $\Psi \subset T(\overline{Q}_n)$ такого, що $G(\Psi) = 0$, буде більшою M. Крім того, внаслідок леми 1, знайдеться функція $g(x) \in \Psi$ така, що

$$||\overline{\delta}_s(g,x)||_\infty \le |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}}, \ s \in \overline{S}_n,$$

і

$$||g||_2 \ge C_{11} > 0.$$

Розглянемо функцію $f_1(x) = C_{12}\omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} g(x)$, $C_{12} > 0$, і оцінимо $||f_1||_{B^{\Omega}_{\infty,\theta}}$, $2 \le \theta < \infty$.

Використовуючи представлення (4) при $p = \infty$ маємо для $f_1(x)$

$$||f_1||_{B^{\Omega}_{\infty,\theta}} \asymp \Big(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) ||A_s(f_1,x)||_\infty^\theta \Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \Big(\sum_{s\in\overline{S}_n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) ||\overline{\delta}_s(g,x)||_\infty^\theta \Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}} \omega^{-1}(2^{-n}) \Big(\sum_{s\in\overline{S}_n} 1 \Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Із одержаного робимо висновок, що функція $f_1(x)$ із відповідною сталою $C_{12} > 0$ належить класу $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$, $2 \leq \theta < \infty$.

Тепер оцінимо $\|f_1(x) - Gf_1(x)\|_1$. Зазначимо, що оскільки $g(x) \in \Psi$ і $G(\Psi) = 0$, то

$$\|g(x) - Gg(x)\|_1 = ||g||_1. \tag{18}$$

Для того, щоб оцінити знизу $||g||_1$, скористаємось нерівністю [12, т.1, с.330]

$$||g||_2 \leq ||g||_1^{\frac{1}{3}} ||g||_4^{\frac{2}{3}},$$

внаслідок якої

$$||g||_1 \geq ||g||_2^3 ||g||_4^{-2} \tag{19}$$

Таким чином, оскільки внаслідок леми 1 $||g||_2 \geq C_{11} > 0$, то для одержання шуканої оцінки знизу для $||g||_1$ залишається відповідним чином оцінити знизу $||g||_4^{-2}$. Взявши до уваги те, що $g(x) \in \Psi \subset T(\overline{Q}_n)$, і використовуючи теорему Літтлвуда- Пелі і нерівність Мінковського, будемо мати

$$0 < ||g||_4 \ll \Big\| \Big(\sum_{s \in \overline{S}_n} |\overline{\delta}_s(g,x)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_4 \ll \Big(\sum_{s \in \overline{S}_n} \|\overline{\delta}_s(g,x)\|_4^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{s \in \overline{S}_n} ||\overline{\delta}_s(g,x)||_\infty^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}} \Big(\sum_{s \in \overline{S}_n} 1 \Big)^{\frac{1}{2}} \ll |\overline{S}_n|^{-\frac{1}{2}} |\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Звідки $||g||_4^{-1} \geq C_{13}$, тому враховуючи (19) отримуємо оцінку

$$||g||_1 \geq C_{14}. \tag{20}$$

Отже, із (18) і (20) маємо

$$\|g(x) - Gg(x)\|_1 \geq C_{14}$$

і, внаслідок вибору функції $f_1(x)$, одержуємо шукану оцінку знизу у випадку $2 \leq \theta < \infty$

$$\|f_1(x) - Gf_1(x)\|_1 = C_{12}\omega(2^{-n})|\overline{S}_n|^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \|g(x) - Gg(x)\|_1 \gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})}.$$

Для встановлення відповідної оцінки знизу величини $d^B_M(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_1)$ у випадку $1 \leq \theta < 2$ також використаємо допоміжне твердження.

Через S_n і $\widetilde{Q}_n$ позначимо наступні множини:

$$S_n = \Big\{ s : (s,1) = n, s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d} \Big\}, \quad \widetilde{Q}_n = \bigcup_{s \in S_n} \rho(s).$$

Має місце наступна лема.

Лема 2 [8]. *Нехай* $G \in L_M(B)_1$ *і число* n *таке, що* $C_{15}(B,d)|\widetilde{Q}_{n-1}| < M <$ $< C_{16}(B,d)|\widetilde{Q}_n|$. *Тоді існує вектор* $k^0 = (k_1^0, \dots, k_d^0) \in \widetilde{Q}_n$ *і стала* $C_{17}(d) > 0$ *такі, що*

$$\left\| e^{i(k^0,x)} - Ge^{i(k^0,x)} \right\|_1 \geq C_{17}(d).$$

Розглянемо функцію $f_2(x) = \omega(2^{-n})e^{i(k^0,x)}$. Використовуючи (4) легко переконатись, що $f_2(x)$ належить класу $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$. Тоді, внаслідок леми 2, для $f_2(x)$ маємо

$$||f_2(x) - Gf_2(x)||_1 = \omega(2^{-n}) \left\| e^{i(k^0,x)} - Ge^{i(k^0,x)} \right\|_1 \gg \omega(2^{-n}).$$

Нехай тепер $\theta = \infty$. В цьому випадку знову скористаємось допоміжним твердженням.

Лема 3 [8]. *Нехай* $G \in L_M(B)_1$. *Тоді існують число* n *і множина* $S_n^1 \subset S_n$ *такі, що* $|\widetilde{Q}_n| < C_{18}(B,d)M$, $|S_n^1| \geq \frac{|S_n|}{2}$ *і в кожному* $\rho(s), s \in S_n^1$, *знайдуться вектори* $k^s \in \rho(s)$ *такі, що для функції*

$$g_1(x) = \sum_{s \in S_n^1} e^{i(k^s,x)}$$

і деякого вектора y^* *має місце оцінка*

$$\|g_1(x+y^*) - Gg_1(x+y^*)\|_1 \gg (\log M)^{\frac{d-1}{2}}.$$

Розглянемо функцію

$$f_3(x) = \omega(2^{-n})g_1(x).$$

Внаслідок представлення (11) легко переконатись, що $f_3(x)$ належить класу $B^{\Omega}_{\infty,\infty}$. Для того, щоб оцінити $\|f_3(x+y^*)-Gf_3(x+y^*)\|_1$, використаємо результат леми 3. Одержимо

$$\|f_3(x+y^*) - Gf_3(x+y^*)\|_1 = \omega(2^{-n})\|g_1(x+y^*) - Gg_1(x+y^*)\|_1 \gg$$
$$\gg \omega(2^{-n})(\log M)^{\frac{d-1}{2}} \asymp \omega(2^{-n})n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Оцінки знизу величини $d_M^B(B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_1)$ для $1 \leq \theta \leq \infty$ встановлені. Теорема 2 доведена.

Теорема 2′. *Нехай* $p \geq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 0$ *та умову* (S_l). *Тоді*

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_1 \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}, \tag{21}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Оцінка зверху в (21) випливає на основі нерівності $\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_1 \le \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ із оцінки наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ східчасто- гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f,x)$ в метриці L_q при $1 < q \le p < \infty$, $p \ge 2$ [13], а оцінка знизу— із теореми 1, при умові $M \asymp 2^n n^{d-1}$, внаслідок нерівності

$$d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_1) \ll \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_1.$$

Наслідок 1. При $\theta = \infty$ із теореми 2 у випадку $1 \le q \le p \le \infty$, $p \ge 2$, $(q,p) \ne (\infty,\infty)$ отримуємо оцінку

$$d^{\perp}_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp d^B_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Зауваження 1. Точні за порядком оцінки величин $d^{\perp}_M(F, L_q)$ і $d^B_M(F, L_q)$, якщо p і q задовольняють умови теореми 1, для класів $F = H^r_p$ встановлені В.М. Темляковим [8], а у випадку, коли в якості F виступають класи $B^r_{p,\theta}$, знайдені А.С. Романюком [10].

Теорема 3. *Нехай* $1 \le q \le p \le 2$, $(q,p) \ne (1,1)$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 0$ *та умову* (S_l). *Тоді при* $1 \le \theta \le \infty$ *має місце порядкова рівність*

$$d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})_+}, \qquad (22)$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$, $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доведення. Оцінка зверху у співвідношенні (22) випливає із результату наближення функцій класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ східчасто- гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f,x)$ у метриці L_p [2] на основі нерівності $\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_p$, $q \le p$.

Переходячи до встановлення відповідної оцінки знизу в (22) для $d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ зазначимо, що її достатньо встановити для випадку $q = 1$, $1 < p \le 2$.

Нехай спочатку $1 \le \theta < p$. В цьому випадку оцінка знизу величини $d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_1)$ встановлюється за допомогою тих самих міркувань, які проводились при доведенні оцінки знизу в теоремі 1 у випадку $1 \le \theta < 2$.

Розглянемо тепер випадок $p \le \theta \le \infty$. Введемо деякі позначення та сформулюємо твердження, яке буде використовуватись в подальших міркуваннях.

Як і в теоремі 2, через S_n і $\widetilde{Q}_n$ позначимо наступні множини:

$$S_n = \Big\{ s : (s, 1) = n, s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d} \Big\}, \quad \widetilde{Q}_n = \bigcup_{s \in S_n} \rho(s),$$

а також покладемо

$$\widetilde{S}_n = \Big\{ s \in S_n : s_j \geq \frac{n}{2d}, j = \overline{1, d} \Big\}.$$

Оскільки $|S_n| \asymp n^{d-1}$, то легко переконатись, що і $|\widetilde{S}_n| \asymp n^{d-1}$.

Нехай далі $K_n(t)$ означає ядро Фейєра порядку n, тобто

$$K_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big) \cos kt.$$

Через k^s позначимо вектор $k^s = (k_1^{s_1}, \dots, k_d^{s_d})$, де

$$k_j^{s_j} = \begin{cases} 2^{s_j - 1} + 2^{s_j - 2}; & s_j \geq 2, \\ 1, & s_j = 1, j = \overline{1, d}. \end{cases}$$

Далі розіб'ємо куб π_d на n^{d-1} кубів з довжиною ребра $\frac{2\pi}{|\widetilde{S}_n|^{\frac{1}{d}}}$ і встановимо взаємно однозначну відповідність між множиною $\widetilde{S}_n$ і утвореною множиною кубів. При цьому через $x^s \in \pi_d$ позначимо центр куба, що відповідає вектору $s \in \widetilde{S}_n$ і покладемо $u = 2^{[(1-\frac{1}{d}) \log_2 n]}$.

При таких позначеннях має місце наступне твердження.

Лема 4 [8]. *Нехай $G \in L_M(B)_1$. Тоді існують число n і множина $S_n^2 \subset \widetilde{S}_n$ такі, що $|\widetilde{Q}_n| < C_{19}(B, d)M$, $|S_n^2| \geq \frac{|\widetilde{S}_n|}{2}$ і в кожному $\rho(s), s \in S_n^2$, знайдуться куби з центрами в k^s і довжинами ребер $2u$ такі, що для функції*

$$g_2(x) = \sum_{s \in S_n^2} e^{i(k^s, x)} \prod_{j=1}^{d} K_u(x_j - x_j^s)$$

і деякого вектора y^* має місце оцінка

$$\|g_2(x + y^*) - G g_2(x + y^*)\|_1 \gg \log^{d-1} M.$$

Тепер перейдемо безпосередньо до встановлення оцінки знизу величини $d_M^B(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_1)$. Розглянемо для цього функції

$$f_4(x) = \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} g_2(x), \quad 2 \leq \theta < \infty,$$

$$f_5(x) = \omega(2^{-n}) g_2(x), \quad \theta = \infty,$$

і оцінимо $||f_4||_{B^{\Omega}_{p,\theta}}$, $2 \le \theta < \infty$, та $||f_5||_{B^{\Omega}_{p,\infty}}$, використавши (4) і (11) відповідно.

Враховуючи, що внаслідок вибору параметра u

$$\|A_s(g_2,x)\|_p \ll \Big\| \prod_{j=1}^{d} K_u(x_j) \Big\|_p \asymp u^{d(1-\frac{1}{p})} \asymp n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}, \forall s \in S_n^2,$$

матимемо

$$||f_4||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \Big(\sum_{s \in S_n^2} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) ||A_s(g_2,x)||_p^{\theta} \Big)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \Big(\sum_{s \in S_n^2} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})\theta} \Big)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \omega(2^{-n}) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \omega^{-1}(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})} \Big(\sum_{s \in S_n^2} 1 \Big)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})} n^{\frac{d-1}{\theta}} = n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}; \tag{23}$$

$$||f_5||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(f_5,x)\|_p}{\omega(2^{-(s,1)})} = \omega(2^{-n}) \sup_{s \in S_n^2} \frac{\|A_s(g_2,x)\|_p}{\omega(2^{-(s,1)})} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})} \omega^{-1}(2^{-n}) = n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}. \tag{24}$$

Таким чином, з (23) і (24) робимо висновки, що

$$g_3(x) = C_{20} n^{-(d-1)(1-\frac{1}{p})} f_4(x) = C_{20} \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{\theta})} g_2(x)$$

належить класу $B^{\Omega}_{p,\theta}, 2 \le \theta < \infty$, з відповідною сталою $C_{20} > 0$, а

$$g_4(x) = C_{21} n^{-(d-1)(1-\frac{1}{p})} f_5(x) = C_{21} \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)(1-\frac{1}{p})} g_2(x)$$

— класу $B^{\Omega}_{p,\infty}$ з відповідною сталою $C_{21} > 0$.

Далі, внаслідок леми 4, існує вектор y^* такий, що

$$\|g_3(x+y^*) - Gg_3(x+y^*)\|_1 \gg \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{\theta})} \|g_2(x+y^*) - Gg_2(x+y^*)\|_1 \gg$$

$$\gg \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{\theta})} \log^{d-1} M \asymp \omega(2^{-n}) n^{-(d-1)(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{\theta})} n^{d-1} = \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})}.$$

Аналогічно, як і вище, внаслідок леми 4,

$$\|g_4(x+y^*) - Gg_4(x+y^*)\|_1 \gg \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{p}}.$$

Теорема 3 доведена.

Теорема 3$'$. *Нехай* $1 < p \le 2$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 0$ *та умову* (S_l). *Тоді*

$$\mathcal{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_1 \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Оцінка зверху слідує із [2], а знизу — з теореми 2, при умові що $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Наслідок 2. При $\theta = \infty$ із теореми 3 у випадку $1 \le q \le p \le 2$, $(q,p) \ne (1,1)$ отримуємо оцінку

$$d^{\perp}_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp d^{B}_M(H^{\Omega}_p, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{p}},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Зауваження 2. У випадку $1 \le q \le p \le 2$, $(q,p) \ne (1,1)$ точні за порядком оцінки величин $d^{\perp}_M(H^r_p, L_q)$ і $d^{B}_M(H^r_p, L_q)$ встановлені В. М. Темляковим [8], а величин $d^{\perp}_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ і $d^{B}_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$— А. С. Романюком [10].

Зауваження 3. Теореми 2$'$ і 3$'$ доповнюють результати робіт [2, 14] по наближенню класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є.

1. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483–522.

2. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1997. — **219**. — С. 356–377.

3. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

4. *Пустовойтов Н.Н.* Многомерная теорема Джексона в пространстве L_p // Матем. заметки. — 1992. — **52**, № 1. — С. 35–48.

5. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **187**. — С. 143–161.

6. *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**. — С. 35–48.

7. *Темляков В.Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. — 1982. — **267**, № 2. — С. 314–317.

8. *Темляков В.Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **189**. — С. 138–168.

9. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1–112.

10. *Романюк А.С.* Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. I // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 9. — С. 1224–1231.

11. *Романюк А.С.* Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. II // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 10. — С. 1402–1408.

12. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т 1. — 615 с; Т 2. — 537 с.

13. *Стасюк С.А.* Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 11. — С. 1557–1568.

14. *Стасюк С.А.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 11. — С. 1551–1559.