М. Є. Коренков, І. П. Головенко, З. В. Зарицька

Методи розкладання мероморфної функції на найпростіші дроби (спецкурс)

Луцьк – 2009

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.162я73

Рекомендовано до друку вченою радою Волинського державного університету імені Лесі Українки (протокол №1 від 25 вересня 2003 року).

Рецензенти:
Середа В. Ю., професор кафедри вищої математики Луцького технічного університету, канд. фіз.-мат. наук;
Філозоф Л. І., завідуючий кафедрою математичного аналізу ВНУ імені Лесі Українки, канд. фіз.-мат. наук.

Коренков М. Є., Головенко І. П., Зарицька З. В.
К66 Методи розкладання мероморфної функції на найпростіші дроби (спецкурс). – Луцьк: Волинська обласна друкарня, 2009. – 42 с.

Розглянуто різні методи розкладання мероморфної функції в ряд, утворений з її найпростіших дробів.

УДК517.8(075.8)
ББК 22.162я73

Передмова

Розкладання мероморфної функції в ряд, утворений з її найпростіших дробів, є важливим питанням теорії аналітичних функцій. В теоретичному плані це питання розкривають відомі теореми Міттаг-Леффлера, однак застосування цих теорем пов’язані з технічними трудношами. В цьому спецкурсі вказані твердження, які менш загальні ніж теореми Міттаг-Леффлера, але які зручні в застосуваннях. Вони базуються на оцінці модуля мероморфної функції на, так званій, правильній системі контурів. Наведено тут також деякі спеціальні методи розкладання мероморфної функції, які вимагають оцінки її модуля зовні системи кружків, що охоплюють полюси цієї функції.

Спецкурс можна рекомендувати студентам спеціальності „математика’’ університету.

Автори вдячні студентам математичного факультету ВНУ імені Лесі Українки Павлісюк А. С., Лелюшок В. М., Іванчук М. Б. за якісну підготовку тексту спецкурсу до опублікування.

§1.Розкладання раціональної функції на найпростіші дроби.

Функція $f:C\to C$, яка однозначна і аналітична в C, називається цілою функцією.

Ціла функція не має скінченних особливих точок і тому точка ∞ є для неї ізольованою особливою точкою однозначного характеру. Ціла функція f розкладається в степеневий ряд виду

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \quad (z\in C), \tag{1}$$

який є одночасно її лорановим розкладом в проколотому околі точки ∞ .

Якщо ∞ є усувна особлива точка цілої функції f тобто $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=c_0\in C$, то, згідно з відомою теоремою Ліувілля, f є стала, $f(z)\equiv c_0=const \ (z\in C)$.

Якщо ∞ є полюс цілої функції f тобто $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$, то головна частина її лоранового розкладу в околі точки ∞ тобто в розкладі (1) являє собою многочлен g, $g(z):=c_1z+c_2z^2+...+c_mz^m,\ z\in C\ (c_m\neq 0,\ m\geq 1)$. Тоді функція

ψ, $\psi(z) := f(z) - g(z)$, $z \in C$, є ціла функція для якої ∞ є усувна особлива точка; тому $\psi(z) \equiv c_0 = const$, $z \in C$. Отже, $f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m$, $z \in C$. Отже, ціла функція, для якої ∞ є полюс, являє собою многочлен.

Ціла функція f, для якої ∞ є істотно особлива точка (тобто в точці ∞ функція f не має ні скінченної ні нескінченної границі) називається цілою трансцендентною функцією. Розклад (1) для трансцендентної цілої функції f містить нескінченну сукупність доданків із відмінними від 0 коефіцієнтами. Отже, ціла трансцендентна функція відмінна від сталої і многочлена. Наприклад, трансцендентними є наступні цілі функції: $\exp z$, $\sin z^2$, $\exp(\exp z)$ $(z \in C)$.

Функція f, яка або аналітична в C або не має в C інших особливих точок окрім полюсів, називається мероморфною функцією. Очевидно, кожну мероморфну функцію можна записати у вигляді частки двох цілих функцій. Зрозуміло, що цілі функції утворюють підклас класу всіх мероморфних функцій. Наприклад, мероморфними є наступні функції:

раціональна функція (частка двох алгебраїчних многочленів), $\cos z,\ tgz,\ \dfrac{\exp z}{\exp z - 1}$.

Оскільки кожен полюс мероморфної функції f є ізольована особлива точка, то ця функція не може мати в C більш ніж зчисленну сукупність полюсів. Справді, в кожному крузі $\{|z| < n\}$ $(n = 1,2,...)$ функція f може мати лише скінченну кількість полюсів (бо в протилежному випадку існувала б скінченна гранична точка сукупності всіх полюсів, яка була б неізольованою особливою точкою для f) і тому всі полюси f можна перенумерувати.

Наприклад, мероморфні функції tgz та $ctgz$ мають зчисленні сукупності полюсів відповідно $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in Z\right\}$, $\{k\pi | k \in Z\}$.

<u>**Теорема.**</u> Якщо для мероморфної функції f точка ∞ є усувна особлива точка або полюс, то f є раціональна функція.

◄ Очевидно функція f має в C лише скінченну сукупність полюсів, оскільки в протилежному випадку існувала б в $\overline{C}$ гранична точка сукупності всіх полюсів f, яка була б неізольованою особливою точкою для f. Позначимо через a_υ $\left(\upsilon=\overline{1,n}\right)$ скінченні полюси функції f і через

$$g_\upsilon(z):=\frac{c_{-s_\upsilon}^{(\upsilon)}}{\left(z-a_\upsilon\right)^{s_\upsilon}}+\ldots+\frac{c_{-1}^{(\upsilon)}}{z-a_\upsilon} \qquad (2)$$

позначимо головну частину лоранового розкладу функції f в проколотому околі точки a_υ. Позначимо через

$$g(z):=c_1 z+c_2 z+\ldots+c_s z^s \qquad (3)$$

головну частину лоранового розкладу функції f в околі точки ∞. При цьому, якщо ∞ є усувна особлива точка для f, то покладемо $g(z)\equiv 0,\ z\in C$. Тоді функція $\varphi,\ \varphi(z):=f(z)-g(z)-\sum_{\upsilon=1}^{n} g_\upsilon(z),\ z\in C$, правильна в $\overline{C}$ (має в $\overline{C}$ лише скінченну кількість особливих точок, що є її усувними особливими точками). Тому, згідно із теоремою Ліувілля, φ є стала, $\varphi(z)\equiv c_0=const,\ z\in C$. Отже,

$$f(z)=c_0+g(z)+\sum_{\upsilon=1}^{n} g_\upsilon(z) \qquad (4)$$

тобто f є раціональна функція. ►

Зауваження 1. В процесі доведення теореми ми одержали формулу (4), яка являє собою розклад раціональної функції f на цілу частину і найпростіші (елементарні) дроби. Проведені міркування дають просте доведення існування такого розкладу. Із рівності (4) випливає, що $c_0 = \lim\limits_{z\to\infty}(f(z) - g(z))$.

Зауваження 2. У випадку, коли f є логарифмічна похідна многочлена $P_n(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_n z$ $(c_n \neq 0,\ n \geq 1)$, що має прості нулі в точках a_υ $(\upsilon = \overline{1, n})$, тобто $f(z) := \dfrac{P_n'(z)}{P_n(z)}$, рівність (4) приймає вигляд

$$f(z) = \sum_{\upsilon=1}^{n} \frac{1}{z - a_\upsilon}.$$

§2. Задача і теореми Міттаг-Леффлера.

В попередньому параграфі встановлено формулу (4), яка дає можливість подати раціональну функцію у вигляді суми многочлена і суми, що складається з найпростіших дробів (елементарних дробів), які являють собою головні частини лоранового розкладу даної функції в проколотих околах її полюсів. Тут буде встановлено формулу подібну до формули (4) для довільної мероморфної функції.

Позначимо через a_n $(n = 1,2,...)$ полюси мероморфної функції f, а через

$$g_n(z) := \sum_{\upsilon=1}^{P_n} \frac{c_{-\upsilon}^{(n)}}{(z - a_n)^{\upsilon}} \tag{1}$$

головну частину її лоранового розкладу в проколотому околі полюса a_n.

Якщо мероморфна функція f має лише скінченну кількість полюсів a_n $\left(n = \overline{1,s}\right)$, то функція ψ, $\psi(z) := f(z) - \sum_{n=1}^{s} g_n(z)$ є ціла функція. І в цьому випадку

$$f(z) = \psi(z) + \sum_{n=1}^{s} g_n(z)$$

тобто, поставлена вище, задача розв'язана.

Розглянемо випадок, коли мероморфна функція f має нескінченну сукупність полюсів a_n $(n = 1,2,...)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ називається збіжним (рівномірно збіжним) на множині M, $M \subset C$, якщо лише скінченна кількість його членів мають полюси в M і після вилучення цих членів одержаний ряд збігається (рівномірно збігається) на множині M.

<u>Теорема 1.</u> (Міттаг-Леффлера). Для довільної послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ точок із C такої, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, і для довільної послідовності функцій g_n виду (1) існує мероморфна функція f, яка має полюси у всіх точках a_n і лише в цих точках, причому головні частини функції f в кожному полюсі a_n співпадають із g_n.

◄ Не зменшуючи загальності подальших наших міркувань, можемо вважати, що $a_n \neq 0 \ (n \in N)$ і що $|a_n| \leq |a_{n+1}| \ (n \in N)$. Зафіксуємо число q, $0 < q < 1$, і позначимо $K_n := \{z \in C \| z| < q|a_n|\}$. Оскільки функція g_n аналітична в крузі $\{z \in C \| z| < |a_n|\} =: \widetilde{K}_n$ і $\overline{K}_n \subset \widetilde{K}_n$, то функцію g_n в крузі K_n можна рівномірно наблизити її поліномами Тейлора

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^{m_n} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} \cdot z^k; \tag{2}$$

степінь m_n ми виберемо так, щоб було

$$(\forall z \in K_n)\left(|g_n(z) - P_n(z)| < \frac{1}{2^n}\ (n = 1,2,...)\right). \tag{3}$$

При такому виборі P_n ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(g_n(z) - P_n(z)) =: f(z) \tag{4}$$

збігається рівномірно на кожній компактній в C множині K в розумінні попереднього означення. Справді для кожної компактної в C множини K знайдеться номер s такий, що $K \subset K_n$ для $n \geq s$; члени ряду

$$f_s(z) := \sum_{n=s}^{\infty}(g_n(z) - P_n(z)) \tag{5}$$

аналітичні в K і в силу (3) цей ряд мажорується на K збіжним геометричним рядом. Отже, ряд (5) збігається на K рівномірно і його сума f_s за теоремою Вейєрштрасса аналітична в K.

Функція f відрізняється від f_s на раціональну функцію $\sum_{n=1}^{s-1}(g_n(z) - P_n(z))$ з полюсами a_n і головними частинами g_n $\left(n = \overline{1, s-1}\right)$ і, отже, має в K задані полюси і головні частини. Оскільки K – довільна компактна в C множина, то

f є мероморфна функція і вона має в C задані полюси і задані головні частини в цих полюсах. ►

<u>Теорема 2.</u> (Міттаг-Леффлера). Кожну мероморфну функцію f можна розкласти в ряд

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n(z) - P_n(z)\right), \tag{6}$$

що рівномірно і абсолютно збігається на кожній компактній в C множині, де h – ціла функція, g_n - головні частини функції f в її полюсах a_n і P_n - деякі многочлени.

◄ Вважаючи, що в точці z=0 функція f є аналітична, занумеруємо полюси функції f в порядку зростаючих їх модулів. Застосувавши попередню теорему побудуємо ряд

$$f_0(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n(z) - P_n(z)\right),$$

що рівномірно збігається на кожній компактній в C множині. Тоді функція $h := f - f_0$ є ціла функція. Отже, справедливе представлення (6). ►

<u>Приклад.</u> Мероморфна функція $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z}$ має в точках $a_n = n\pi \ (n \in Z)$ полюси другого порядку із головними

частинами $g_n(z)=\dfrac{1}{(z-n\pi)^2}$ в цих полюсах. Спираючись на попередню теорему 2, розкладемо її на найпростіші дроби. Ряд

$$f_0(z):=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2},$$

що складений із всіх головних частин функції f збігається рівномірно (в узагальненому розумінні) на кожному компакті $K,\ K\subset C$, оскільки він мажорується в кожному крузі $\{|z|<R\}$ збіжним числовим рядом $\sum\limits_{n\in Z}\dfrac{1}{(n\pi-R)^2}$. Це випливає із того, що кожен компакт K можна включити в круг виду $\{|z|<R\}$ і справедливі нерівності $|z-n\pi|>|n\pi-R|$ для всіх точок $z,\ |z|<R$, і точок $n\pi$ таких, що $|n\pi|>R$, оскільки $\dfrac{1}{|z-n\pi|^2}\le\dfrac{1}{(n\pi-R)^2}$ $(z\in K,\ |n\pi|>R)$. Отже, поправні многочлени P_n із теореми 2 тут не потрібні. Тому, згідно із цією теоремою, функція f має вигляд

$$f(z)=h(z)+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2},\tag{7}$$

де h – деяка ціла функція, яку потрібно знайти. Із (7) випливає, що

$$h(z) = \frac{1}{\sin^2 z} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}. \qquad (8)$$

Функція h є π - періодична, оскільки кожен доданок правої частини (8) є π - періодична функція. Тому вивчення функції h зводиться до розгляду її лише в смузі $S,\ S = \{0 < \operatorname{Re} z \le \pi\}$. Очевидно, $(\forall z \in S)(\forall n \in Z)(|z - n\pi| \ge \pi(n-1))$. Оскільки для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число $m,\ m \in N$, що $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2 \pi^2} < \varepsilon$, то $|f_0(z)| \le \frac{1}{|z|^2} + \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{|z - n\pi|^2} +$

$+ 2\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2 \pi^2} < \frac{1}{|z|^2} + \sum_{n=-m}^{m}{}' \frac{1}{|z - n\pi|^2} + \varepsilon \ (z \in S)$, де штрих означає, що доданок з індексом $n = 0$ опускається. Переходячи в останній нерівності до границі при $S \ni z \to \infty$ і враховуючи те, що ε можемо вибрати як завгодно малим, дістаємо $\lim\limits_{S \ni z \to \infty} f_0(z) = 0$. Оскільки $|\sin^2 z| = \sin^2 x + sh^2 y$

$(z = x + iy \in C)$, то $\lim\limits_{S \ni z \to \infty} \frac{1}{\sin^2 z} = 0$. Отже, $\lim\limits_{S \ni z \to \infty} h(z) = 0$. А це означає, що ціла функція h обмежена в S і, внаслідок її π -

періодичності, вона обмежена в *C*. Отже, згідно із відомою теоремою Ліувілля, $h = const$, причому $h(z) \equiv 0,\ z \in C$. Таким чином, розклад Міттаг-Леффлера для функції $\frac{1}{\sin^2 z}$ має вигляд

$$f(z) = \frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}\ .$$

§3. Конструктивні теореми розкладання мероморфних функцій.

Нехай f - мероморфна функція з полюсами $0 = a_0, a_1, a_2, ..., a_\upsilon, ...\ (a_\upsilon \neq 0\ \ при\ \upsilon \neq 0)$ і головними частинами $g(z, a_\upsilon)$ її лоранового розкладу відносно полюса a_υ.

<u>**Лема.**</u> Якщо *G* – довільна область, що обмежена замкнутою спрямлюваною жордановою кривою Г, $a_\upsilon \notin [\Gamma]\ (\upsilon \in N \cup \{0\})$, то

$$f(z) = \sum_{a_\upsilon \in G} g(z, a_\upsilon) + \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},\ z \in G\ , \qquad (1)$$

де інтеграл є функція змінної *z*, що аналітична в *G*.

◄ Позначивши

$$f_1(z) := f(z) - \sum_{a_\upsilon \in G} g(z, a_\upsilon),\ z \in \overline{G}\ , \qquad (2)$$

дістанемо функцію f_1, що аналітична в $\overline{G}$. Тому, згідно із інтегральною формулою Коші,

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f_1(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\psi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},\ z \in G\ , \qquad (3)$$

де $\psi(\zeta) := \sum_{a_\upsilon \in G} g(\zeta, a_\upsilon),\ \zeta \in C$. Очевидно, ψ - раціональна функція змінної ζ з нулем в точці ∞ . Тому $\frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z}$, $\zeta \in C\ \ (z \in G)$ - раціональна функція змінної ζ , яка в точці ∞ має нуль порядку ≥ 2. В силу відомої теореми (що випливає із основної теореми про лишки) дістаємо

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\psi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \operatorname*{res}_{\zeta=\infty} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z} = 0\ . \qquad (4)$$

Із (2), внаслідок (3), (4), дістаємо рівність (1). ►

Теорема 1. Якщо для мероморфної функції f існує система спрямлюваних жорданових контурів $(\Gamma_n)_{n=1}^{\infty}$, така, що $a_\upsilon \notin [\Gamma_n],\ [\Gamma_n] \subset \operatorname{int}\Gamma_{n+1}\ \ (n \in \mathrm{N})$ і $(\forall R > 0)(\exists m \in N)(\forall n > m)(K_R(0) \subset \operatorname{int}\Gamma_n)$, причому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = 0, \tag{5}$$

то функцію f можна записати у вигляді

$$f(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{a_\upsilon \in G_n} g(z, a_\upsilon) \qquad (z \in C), \tag{6}$$

де G_n – область, що обмежена контуром Γ_n.

◄ Взявши в рівності (1) Γ_n замість Γ, дістанемо

$$f(z) = \sum_{a_\upsilon \in G_n} g(z, a_\upsilon) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \quad (z \in G_n).$$

Перейшовши тут до границі при фіксованому z із C і $n \to \infty$, дістанемо (6). ►

<u>Зауваження 1.</u> Представлення (6) зокрема буде справедливе при умові, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\oint_{\Gamma_n}|f(\zeta)||d\zeta| < +\infty. \tag{7}$$

Справді, якщо d_n – відстань від точки 0 до контура Γ_n, то $d_n \to +\infty (n \to \infty)$. Якщо R – як завгодно велике додатне число, $R > 0$, то для всіх z таких, що $|z| < R$, при $d_n > R$ дістаємо

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_n}\frac{|f(\zeta)||d\zeta|}{|\zeta - z|} < \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(d_n - R)}\oint_{\Gamma_n}|f(\zeta)||d\zeta| \to 0 \quad (8)$$
$$(n \to \infty),$$

тобто виконується умова (5), яка тягне за собою рівність (6).

Зазначимо, що при виконанні умови (7) послідовність в (6) збігається рівномірно до функції f в кожному крузі $K_R(0) = \{|z| < R\}$ при довільному $R > 0$. Це випливає із співвідношення (8).

Зауваження 2. Як легко перевірити, представлення (6) справедливе зокрема в тому випадку, коли існує система концентричних кіл

$\Gamma_n = \{|\zeta| = r_n\}, r_n \to +\infty (n \to \infty)(r_n < r_{n+1})(n \in N), a_\upsilon \notin \Gamma_n$ таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} M(r_n) = 0$, де $M(r_n) = \max\limits_{z\in\Gamma_n}\{|f(z)|\}$.

Виявляється, що представлення аналогічне рівності (6) можна отримати і при більш загальних умовах, накладених на функцію f, а ніж вимога (7).

Теорема 2. Якщо для мероморфної функції f, вказаної вище, існує система спрямлюваних контурів $(\Gamma_n)_{n=1}^{\infty}$, про яку іде мова в теоремі 1 і така, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{\Gamma_n}\frac{|f(\zeta)||d\zeta|}{|\zeta|^{p+1}}<+\infty, \qquad (9)$$

для деякого невід'ємного цілого числа $p, p\geq 0$, то функція f має представлення

$$f(z)=\lim_{m_n\to\infty}\sum_{\upsilon=0}^{m_n}\left[g(z,a_\upsilon)+P_\upsilon(z)\right], \qquad (z\in C) \qquad (9')$$

де

$$P_\upsilon(z):=A_\upsilon^{(0)}+A_\upsilon^{(1)}z+\ldots+A_\upsilon^{(p)}z^p, \qquad (9'')$$

$$A_\upsilon^{(j)}=\operatorname*{res}_{\varsigma=a_\upsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} \qquad (j=0,1,2,\ldots,p) \qquad (9''')$$

і m_n – число полюсів функції f, що знаходяться всередині контура Γ_n (в області G_n, що обмежена контуром Γ_n). При цьому збіжність в (9') рівномірна на кожному крузі $K_R(0)=\{z\in C\,\|z|<R\}$ довільного радіуса $R>0$.

◄ Нехай виконується умова (9). Повертаючись до формули (1), візьмемо там G_n замість G і замість дробу $\dfrac{1}{\zeta-z}$ візьмемо вираз

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta}\left(1+\frac{z}{\zeta}+\frac{z^2}{\zeta^2}+\ldots\right) = \frac{1}{\zeta}\left(1+\frac{z}{\zeta}+\ldots+\frac{z^p}{\zeta^p}+\frac{\frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}}}{1-\frac{z}{\zeta}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\zeta}+\frac{z}{\zeta^2}+\ldots+\frac{z^p}{\zeta^{p+1}}+\frac{1}{\zeta - z}\frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}}.$$

Ми дістанемо

$$f(z) = \sum_{\upsilon=0}^{m_n} g(z, a_\upsilon) + \sum_{j=0}^{p}\frac{z^j}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{f(\zeta)z^{p+1}}{(\zeta - z)\zeta^{p+1}}d\zeta. \quad (10)$$

Позначивши

$$A_\upsilon^{(j)} = \operatorname*{res}_{\varsigma = a_\upsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, p),$$

дістанемо

$$\sum_{j=0}^{p}\frac{z^j}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}d\zeta = \sum_{j=0}^{p}\left(A_0^{(j)} + A_1^{(j)} + \ldots + A_{m_n}^{(j)}\right)z^j = \sum_{\upsilon=0}^{m_n} P_\upsilon(z),$$

де $P_\upsilon(z)$ – многочлен степеня не вищого p, а саме

$$P_\upsilon(z) = A_\upsilon^{(0)} + A_\upsilon^{(1)}z + \ldots + A_\upsilon^{(p)}z^p.$$

Тому формулу (10) можна записати у вигляді

$$f(z) = \sum_{\upsilon=0}^{m_n}\left[g(z, a_\upsilon) + P_\upsilon(z)\right] + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{f(\zeta)z^{p+1}}{(\zeta - z)\zeta^{p+1}}d\zeta. \quad (11)$$

Покажемо, що інтеграл в (11) рівномірно прямує до нуля при $n \to \infty$ в кожному фіксованому крузі $\{|z| < R\}$ при довільному $R > 0$. Справді, взявши n настільки великим, що $d_n > R$, дістанемо:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta) z^{p+1}}{(\zeta - z)\zeta^{p+1}} d\zeta \right| < \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_n} \frac{|f(\zeta)| |z|^{p+1}}{(|\zeta| - |z|) |\zeta|^{p+1}} |d\zeta| <$$

$$< \frac{R^{p+1}}{2\pi (d_n - R)} \oint_{\Gamma_n} \frac{|f(\zeta)| |d\zeta|}{|\zeta|^{p+1}}.$$

Однак в силу умови (9) існує така стала $+\infty > M > 0$, що

$$\int_{\Gamma_n} \frac{|f(\zeta)| |d\zeta|}{|\zeta|^{p+1}} < M \quad (n \in N).$$

Тому $\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta) z^{p+1}}{(\zeta - z)\zeta^{p+1}} d\zeta \right| < \frac{M \cdot R^{p+1}}{2\pi (d_n - R)} \to 0 \ (n \to \infty)$. Із (11) тоді випливає, що

$$f(z) = \lim_{m_n \to \infty} \sum_{\upsilon=0}^{m_n} \left[g(z, a_\upsilon) + P_\upsilon(z) \right] \tag{11'}$$

причому збіжність тут рівномірна в кожному крузі $\{|z| < R\}$. Теорему 2 доведено. ►

Зауваження 3. Зазначимо, що останню рівність можна переписати у вигляді

$$f(z)=\left[g(z,a_0)+P_0(z)\right]+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[g(z,a_{m_n+1})+P_{m_n+1}(z)\right]+...+\left[g(z,a_{m_{n+1}})+P_{m_{n+1}(z)}\right]\right\}, \qquad (12)$$

де потрібно покласти $m_0=0$. Вказаний ряд (12) збігається рівномірно в узагальненому тлумаченні на кожному крузі $\{|z|<R\}$, де $R>0$ – довільне додатне число.

Означення. Система $(\Gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ замкнутих спрямлюваних кривих Γ_n, вказаних в теоремі 1, називається правильною, якщо існує така стала $K>0$, що

$$(\forall n\in N)(|\Gamma_n|\le Kd_n),$$

де d_n – відстань від точки $z=0$ до кривої Γ_n.

Зауваження 4. Зазначимо, що умова (9) буде виконуватися, якщо на деякій правильній системі контурів $(\Gamma_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\max\limits_{\zeta\in\Gamma_n}\{|f(\zeta)|\}}{d_n^p}<+\infty \qquad (p\in Z, p\ge 0), \qquad (13)$$

оскільки в цьому випадку

$$\int\limits_{\Gamma_n} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{p+1}}|d\zeta| \le \max_{\zeta\in\Gamma_n}\{|f(\zeta)|\}\frac{|\Gamma_n|}{d_n^{p+1}} \le K\,\frac{\max\limits_{\zeta\in\Gamma_n}\{|f(\zeta)|\}}{d_n^{p}}.$$

Отже, при виконанні (13) також справедливі представлення (11'), (12).

Якщо виконується умова (13) і мероморфна функція f аналітична в точці $z=0$, то, як випливає із формул (9'), (9''), (9'''), справедливе представлення

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \ldots + \frac{f^{(p)}(0)}{p!}z^p +$$

$$+\lim_{m_n\to\infty}\sum_{\upsilon=1}^{m_n}\left[g(z,a_\upsilon) - T_\upsilon^{(p)}(z)\right], \tag{14}$$

де $T_\upsilon^{(p)}(z)$ многочлен Маклорена p-го степеня функції $g(z,a_\upsilon)$. Рівність (14) можна, подібно до (12), записати у вигляді

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \ldots + \frac{f^{(p)}(0)}{p!}z^p +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[g\left(z,a_{m_n+1}\right) - T_{m_n+1}^{(p)}(z)\right] + \ldots + \left[g\left(z,a_{m_{n+1}}\right) - T_{m_{n+1}}^{(p)}\right]\right\} \tag{15}$$

причому цей ряд збігається рівномірно в узагальненому розумінні в кожному крузі $\{|z|<R\}$ при довільному $R>0$ і $m_0=0$.

Покажемо, як із теореми 2 при виконанні умови (13) і того факту, що мероморфна функція f аналітична в точці 0, випливає представлення (14). Скористаємося відомою формулою

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} F(z)=\frac{1}{(m-1)!}\Phi^{(m-1)}(z_0), \qquad (16)$$

яка справедлива для функції F, що має в деякому проколотому околі точки z_0 представлення $F(z)=\dfrac{\Phi(z)}{(z-z_0)^m}$, де Φ – функція, яка аналітична в точці z_0, $z_0\in C$, і $m\in N$, $m\geq 1$.

Із формул (9'''), внаслідок (16), дістаємо

$$A_0^j=\operatorname*{res}_{\zeta=a_0=0}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}=\frac{1}{j!}f^{(j)}(0) \quad (j=0,1,\ldots,p).$$

Якщо

$$g(z,a_\upsilon)=\sum_{k=1}^{s_\upsilon}\frac{c_{-k}^{(\upsilon)}}{(z-a_\upsilon)^k},$$

то знову використовуючи формули (9''') і (16), дістаємо $(\upsilon \geq 1)$

$$A_\upsilon^j = \underset{\zeta=a_\upsilon}{res}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} = \underset{\zeta=a_\upsilon}{res}\frac{g(\zeta,a_\upsilon)}{\zeta^{j+1}} = \sum_{k=1}^{s_\upsilon}\underset{a_\upsilon}{res}\frac{c_{-k}^{(\upsilon)}}{(\zeta-a_\upsilon)^k\cdot\zeta^{j+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s_\upsilon}\underset{a_\upsilon}{res}\frac{c_{-k}^{(\upsilon)}\zeta^{-j-1}}{(\zeta-a_\upsilon)^k} = \sum_{k=1}^{s_\upsilon}\frac{1}{(k-1)!}\cdot c_{-k}^{(\upsilon)}(\zeta^{-j-1})^{(k-1)}\Big|_{\zeta=a_\upsilon} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s_\upsilon}\frac{1}{(k-1)!}c_{-k}^{(\upsilon)}(-1)^{k-1}(j+1)(j+2)\ldots(j+k-1)\cdot a_\upsilon^{-j-k} =$$

$$= \frac{1}{j!}\sum_{k=1}^{s_\upsilon}(-1)^{k-1}\frac{(j+k-1)!}{(k-1)!}\cdot c_{-k}^{(\upsilon)}\cdot a_\upsilon^{-j-k} = \frac{-g(\zeta,a_\upsilon)\ \big|_{\zeta=0}}{j!},$$

$(j=0,1,\ldots,p)$, оскільки

$$g^{(j)}(\zeta,a_\upsilon) = \sum_{k=1}^{s_\upsilon}c_{-k}^{(\upsilon)}((\zeta-a_\upsilon)^{-k})^{(j)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s_\upsilon}c_{-k}^{(\upsilon)}(-1)^j k(k+1)\ldots(k+j-1)(\zeta-a_\upsilon)^{-k-j}$$

і

$$g^{(j)}(\zeta,a_\upsilon)\ \Big|_{\zeta=0} = \sum_{k=1}^{s_\upsilon}(-1)^k c_{-k}^{(\upsilon)}k(k+1)\ldots(k+j-1)a_\upsilon^{-k-j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s_\upsilon}(-1)^k c_{-k}^{(\upsilon)}\frac{(k+j-1)!}{(k-1)!}.$$

Таким чином, в розглянутому випадку

$P_0(z)=\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{j!}f^{(j)}(0),\quad P_\upsilon(z)=-\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{j!}g^{(j)}(\zeta,a_\upsilon)\Big|_{\zeta=0}\quad(\upsilon\neq 0)$, тобто $P_0(z)$ є многочлен Маклорена p-го степеня функції f і $-P_\upsilon(z)$, $\upsilon\neq 0$, є многочлен Маклорена p-го степеня функції $g(\zeta,a_\upsilon)$, $-P_\upsilon(z)\equiv T_\upsilon^{(p)}(z)$.

Зауваження 4. Зазначимо, що при виконанні відповідних умов рівності (12), (15) можна записати у вигляді відповідно

$$f(z)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left[g(z,a_\upsilon)+P_\upsilon(z)\right],$$

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\ldots+\frac{f^{(p)}(0)}{p!}z^p+\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\left[g(z,a_\upsilon)-T_\upsilon^{(p)}(z)\right],$$

якщо ряди правих частин цих рівностей збігаються при звичайному підсумовуванні(без відповідного групування їх членів). Остання рівність справедлива, коли функція f аналітична в точці 0.

Зауваження 5. Якщо мероморфна функція f задовольняє умови теореми 2, вона має лише прості полюси в точках a_υ $(\upsilon=1,2,\ldots)$ і вона аналітична в точці 0, то представлення (15) в цьому випадку набуває вигляду

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\ldots+\frac{f^{(p)}(0)}{p!}z^p+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{z}{a_{m_n+1}}\right)^{p+1}\cdot\frac{B_{m_n+1}}{z-a_{m_n+1}}+\ldots+\left(\frac{z}{a_{m_{n+1}}}\right)^{p+1}\cdot\frac{B_{m_{n+1}}}{z-a_{m_{n+1}}}\right\},\quad (17)$$

де $B_\upsilon=\underset{z=a_\upsilon}{res}\, f(z)$ і ряд збігається рівномірно в узагальненому розумінні в кожному крузі $\{|z|<R\}$ при довільному R>0 і $n_0=0$.

Справді в даному випадку $g(z,a_\upsilon)=\dfrac{B_\upsilon}{z-a_\upsilon}$ і

$$T_\upsilon^{(p)}(z)=\left(\frac{1}{a_\upsilon}+\frac{z}{a_\upsilon^2}+\ldots+\frac{z^p}{a_\upsilon^{p+1}}\right)\left(-B_\upsilon\right).$$

Тому

$$g(z,a_\upsilon)-T_\upsilon^{(p)}(z)=B_\upsilon\left(\frac{1}{z-a_\upsilon}+\frac{1}{a_\upsilon}+\frac{z}{a_\upsilon^2}+\ldots+\frac{z^p}{a_\upsilon^{p+1}}\right)=$$

$$=B_\upsilon\left(\frac{1}{z-a_\upsilon}-\frac{\frac{z^p}{a_\upsilon^{p+1}}\cdot\frac{z}{a_\upsilon}-\frac{1}{a_\upsilon}}{1-\frac{z}{a_\upsilon}}\right)=$$

$$=B_\upsilon\left(\frac{1}{z-a_\upsilon}-a_\upsilon\frac{\frac{z^{p+1}}{a_\upsilon^{p+2}}-\frac{1}{a_\upsilon}}{a_\upsilon-z}\right)=B_\upsilon\left(\frac{1}{z-a_\upsilon}-\frac{z^{p+1}-a_\upsilon^{p+1}}{(a_\upsilon-z)a_\upsilon^{p+1}}\right)=$$

$$= B_\upsilon \frac{a_\upsilon^{p+1} + z^{p+1} - a_\upsilon^{p+1}}{(-a_\upsilon + z)a_\upsilon^{p+1}} = \left(\frac{z}{a_\upsilon}\right)^{p+1} \cdot \frac{B_0}{z - a_\upsilon}.$$

Рівність (17) можна переписати у вигляді

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \ldots + \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{B_\upsilon}{z - a_\upsilon} \cdot \left(\frac{z}{a_\upsilon}\right)^{p+1}, \qquad (18)$$

якщо ряд правої частини збігається при звичайному підсумовуванні його членів, що буде зокрема при виконанні умови $\sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{|B_\upsilon|}{|a_\upsilon|^{p+2}} < +\infty$ (коли полюси a_υ занумеровані в порядку зростання їх модулів). Переконаємося в останньому твердженні. Якщо R – фіксоване додатне число, $|a_\upsilon| > R, |z| < R$, то

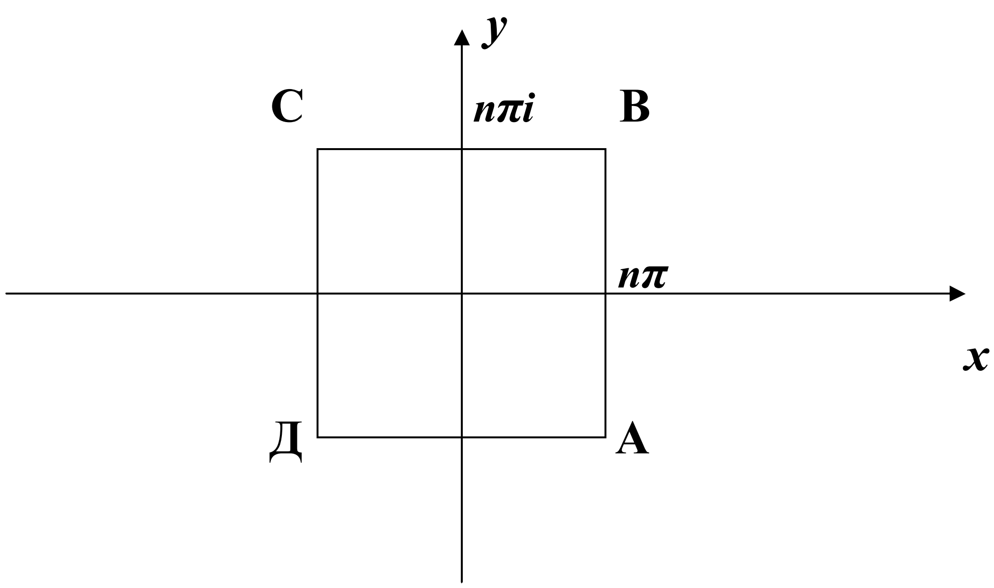
$$\left| \frac{B_\upsilon}{z - a_\upsilon} \cdot \left(\frac{z}{a_\upsilon}\right)^{p+1} \right| = \frac{|B_\upsilon|}{|a_\upsilon|^{p+2}} \cdot \frac{|z|^{p+1}}{|z - a_\upsilon|} \cdot |a_\upsilon| \le \frac{R^{p+1} \cdot |a_\upsilon|}{|a_\upsilon| - R} \cdot \frac{|B_\upsilon|}{|a_\upsilon|^{p+2}},$$

оскільки при вказаних умовах $|z - a_\upsilon| > |a_\upsilon| - R$. Тоді із попередніх нерівностей і збіжності ряду $\sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{|B_\upsilon|}{|a_\upsilon|^{p+2}}$ випливає абсолютна і рівномірна збіжність ряду (18) в крузі $K_R(0), R > 0$ (в узагальненому розумінні).

<u>Приклад.</u> Розглянемо функцію $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$ і за правильну систему контурів виберемо систему $\left(\Gamma_n\right)_{n=1}^{\infty}$ квадратів з центрами в точці 0 і сторонами паралельними координатним осям і довжини яких дорівнюють $2n\pi,\ n\in N$. На сторонах АВ та ДС маємо $z=\pm n\pi+iy$ і тому $\left|\dfrac{1}{\cos z}\right|=\dfrac{1}{\left|\cos\left(\pm n\pi+iy\right)\right|}=\dfrac{1}{\left|\cos(iy)\right|}=\dfrac{1}{chy}$. На сторонах ДА і СВ маємо $z=x\pm in\pi$ і тому

$$\left|\frac{1}{\cos z}\right|=\frac{1}{\left|\cos\left(x\pm in\pi\right)\right|}=\frac{1}{\sqrt{ch^2 n\pi-\sin^2 x}}\le\frac{1}{\sqrt{ch^2 n\pi-1}}=\frac{1}{shn\pi}.$$

Отже, $\displaystyle\int_{\Gamma_n}\frac{1}{\left|\cos\zeta\right|}\left|d\zeta\right|\le\frac{1}{shn\pi}4n\pi+\int_{-n\pi}^{n\pi}\frac{dy}{chy}$.



Оскільки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{chy}$ збігається і $\frac{4n\pi}{shn\pi}\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int\limits_{\Gamma_n}|f(\zeta)||d\zeta|<+\infty .$$

Дана функція $\frac{1}{\cos z}$ всередині контура Γ_n має полюси виду $a_\upsilon=(2\upsilon-1)\frac{\pi}{2}$, де $-n+1\le\upsilon\le n$. Ці полюси прості, причому

$$\underset{z=a_\upsilon}{res}\frac{1}{\cos z}=\frac{1}{-\sin\left(\upsilon\pi-\frac{\pi}{2}\right)}=(-1)^\upsilon .$$

Отже,

$$g(z,a_\upsilon)=\frac{(-1)^\upsilon}{z-(2\upsilon-1)\frac{\pi}{2}} .$$

В точці $z=0$ функція $\frac{1}{\cos z}$ аналітична. Тому $g(z,a_0)=0$.

Згідно із формулою (6) дістаємо

$$\frac{1}{\cos z}=\lim_{n\to\infty}\sum_{\upsilon=-n+1}^{n}\frac{(-1)^\upsilon}{z-(2\upsilon-1)\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{\upsilon=1}^{n}\frac{(-1)^{\upsilon}}{z-(2\upsilon-1)\frac{\pi}{2}}+\sum_{\upsilon=-n+1}^{0}\frac{(-1)^{\upsilon}}{z-(2\upsilon-1)\frac{\pi}{2}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{\upsilon=1}^{n}\frac{(-1)^{\upsilon}}{z-(2\upsilon-1)\frac{\pi}{2}}+\sum_{\upsilon=1}^{n}\frac{(-1)^{\upsilon+1}}{z+(2\upsilon-1)\frac{\pi}{2}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{\upsilon=1}^{n}(-1)^{\upsilon}\frac{(2\upsilon-1)\pi}{z^2-(2\upsilon-1)^2\frac{\pi^2}{4}}.$$

Отже, $\dfrac{1}{\cos z}=\sum_{\upsilon=1}^{\infty}(-1)^{\upsilon}\dfrac{(2\upsilon-1)\pi}{z^2-(2\upsilon-1)^2\frac{\pi^2}{4}}.$

Як випливає із попереднього цей ряд збігається рівномірно в кожному крузі $\{|z|<R\}$ в узагальненому розумінні.

§4. Деякі часткові випадки розкладання мероморфної функції на найпростіші дроби.

Виявляється, що в деяких випадках поряд із теоремами, вказаними раніше, можна використовувати при розкладанні мероморфних функцій і певні спеціальні теореми, які будуть сформульовані нижче.

Теорема 1. Нехай мероморфна функція f має полюси в точках $(a_\upsilon)_{\upsilon=1}^{\infty}$ із головними її частинами $g(z,a_\upsilon)$ $(\upsilon = 0,1,...)$ в цих полюсах. Позначимо $G := C \setminus \bigcup\limits_{\upsilon=0}^{\infty} \overline{K_{r_\upsilon}(a_\upsilon)}$. Припустимо, що радіус r_υ замкнутих кругів $\overline{K_{r_\upsilon}(a_\upsilon)} = \{z \in C \| z - a_\upsilon | \le r_\upsilon\}$ можна вибрати так, що виконуються умови:

1) круги $\overline{K_{r_\upsilon}(a_\upsilon)}$ $(\upsilon = 0,1,2,...)$ попарно не перетинаються;

2)
$$(\forall z \in G)(|f(z)| \le \alpha(|z|)), \qquad (1)$$

де $\alpha = \alpha(t),\ t \in [0,+\infty[$, є така функція змінної t, що

$$\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = 0.$$

Тоді справедливе співвідношення

$$f(z) = \lim_{R \to \infty} \sum_{|a_\upsilon| < R} g(z,a_\upsilon),\ \ z \in C. \qquad (2)$$

При цьому збіжність в (2) рівномірна відносно z в кожному крузі $\{|z| < r\}$ при довільному $r,\ 0 < r < +\infty$.

◀ Виберемо довільну послідовність $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$, $0 < R_n < R_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = +\infty$. Позначимо через G_n перетин $G \bigcap K_{R_n}(0)$ доповнений всіма тими кругами $\overline{K_{r_\upsilon}(a_\upsilon)}$, що $|a_\upsilon| < R_n$. Застосовуючи далі лему із попереднього параграфа дістанемо

$$f(z) = \sum_{a_\upsilon \in G_n} g(z, a_\upsilon) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \ z \in G_n, \qquad (3)$$

де Γ_n – контур, що обмежує область G_n.

Нехай $\Gamma_n' = \coprod_{i=1}^{p(n)} \gamma_i^{(n)}$ є об’єднання всіх тих дуг $\gamma_i^{(n)}$ кола $\Gamma_{R_n}(0)$, які є частинами Γ_n, $\Gamma_n'' = \coprod_{j=1}^{q(n)} \sigma_j^{(n)}$ є об’єднання всіх тих колових дуг $\sigma_j^{(n)}$ межі Γ_n, які не включаються в $\overline{K_{R_n}(0)}$, $\Gamma_n''' = \coprod_{k=0}^{s(n)} L_k^{(n)}$ є об’єднання всіх тих колових дуг $L_k^{(n)}$ межі Γ_n, які включаються в $\overline{K_{R_n}(0)}$. Тоді

$$\Gamma_n = \Gamma_n' \coprod \Gamma_n'' \coprod \Gamma_n'''.$$

Спираючись на нерівність $0<\frac{x}{\sin x}<M\ \left(0<0<\frac{\pi}{2}\right)$, де $0<M<+\infty$, $M=const$, можна показати, що при довільному $n\in N$

$$\left|\sigma_j^{(n)}\right|\le M_1\left|\widetilde{\sigma}_j^{(n)}\right|\ \left(1\le j\le q(n)\right),\ 0<M_1<+\infty\ \left(M_1=const\right) \tag{4}$$

і

$$\left|L_k^{(n)}\right|\le M_2\left|\widetilde{L}_k^{(n)}\right|\ \left(1\le k\le s(n)\right),\ 0<M_2<+\infty\ \left(M_2=const\right), \tag{5}$$

де $\widetilde{\sigma}_j^{(n)}$, $\widetilde{L}_k^{(n)}$ – дуги кола $\Gamma_{R_n}(0)$, які відповідають $\sigma_j^{(n)}$ та $L_k^{(n)}$. Позначивши $d_n:=\inf\{|\zeta|\,|\,\zeta\in\Gamma_n\}$, аналогічно можна показати, що при довільному $n\in N$ виконується

$$0<M_3<\frac{d_n}{R_n}<1,\ M_3=const,$$

тобто

$$d_n>M_3R_n\,. \tag{6}$$

Якщо $\overline{K_r(0)}$ – фіксований круг радіуса r, $0<r<+\infty$, то починаючи з деякого номера n виконується $\overline{K_r(0)}\subset G_n$. При $z\in\overline{K_r(0)}$ і всіх достатньо великих $n\in N$ із (3) дістаємо

$$\left| f(z) - \sum_{a_\upsilon \in G_n} g(z; a_\upsilon) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{|f(\zeta)||d\zeta|}{\left||\zeta| - |z|\right|} \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{|f(\zeta)||d\zeta|}{|\zeta| - r} < \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{|f(\zeta)||d\zeta|}{|\zeta|} . \qquad (7)$$

При довільному $\varepsilon > 0$ існує таке n_0, $n_0 \in N$, що

$$(\forall n > n_0)(\forall \zeta \in \Gamma_n)(|f(\zeta)| \le \alpha(|\zeta|) < \varepsilon).$$

Тому при $n > n_0$

$$\int_{\Gamma_n} \frac{|f(\zeta)||d\zeta|}{|\zeta|} = \left(\int_{\Gamma_n'} + \int_{\Gamma_n''} + \int_{\Gamma_n'''} \right) \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} |d\zeta| <$$

$$< \varepsilon \cdot \left(\int_{\Gamma_n'} + \int_{\Gamma_n''} + \int_{\Gamma_n'''} \right) \frac{|d\zeta|}{|\zeta|} <$$

$$< \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{p(n)} \frac{\left|\gamma_i^{(n)}\right|}{R_n} + \sum_{j=1}^{q(n)} \frac{\left|\sigma_j^{(n)}\right|}{R_n} + \sum_{k=1}^{s(n)} \frac{\left|L_k^{(n)}\right|}{d_n} \right) <$$

$$< \varepsilon \left(2\pi + M_1 \sum_{j=1}^{q(n)} \frac{\left|\tilde{\sigma}_j^{(n)}\right|}{R_n} + M_2 \sum_{k=1}^{s(n)} \frac{\left|\tilde{L}_k^{(n)}\right|}{R_n} M_3^{-1} \right) <$$

$$< \varepsilon \left(2\pi + 2\pi M_1 + 2\pi M_2 M_3^{-1} \right), \qquad (8)$$

оскільки $\left|\widetilde{\sigma}_j^{(n)}\right|/R_n$ та $\dfrac{\left|\widetilde{L}_k^{(n)}\right|}{R_n}$ радіанні міри дуг відповідно $\widetilde{\sigma}_j^{(n)}$, $\widetilde{L}_k^{(n)}$. При цьому ми скористалися оцінками (4)-(6). Із (7), внаслідок (8), випливає, що

$$\sum_{a_\upsilon \in G_n} g(z; a_\upsilon) \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} f(z) \ \left(n \to \infty;\ z \in \overline{K_r(0)}\right).$$

Оскільки послідовність (R_n), $R_n \to \infty$, вибрана довільним чином, то доведення теореми завершено. ►

Аналогічно доводиться наступне твердження.

<u>Теорема 2.</u> Нехай для мероморфної функції f виконуються всі умови попередньої теореми за виключенням умови (1), яка замінюється умовою

$$(\forall z \in G)\left(\left|f(z)\right| \le |z|^p \alpha(|z|)\right), \tag{8'}$$

де p – натуральне число, $p \in N$, і функція $\alpha = \alpha(t)$, $t \in [0, +\infty[$, така, що $\lim\limits_{t \to +\infty} \alpha(t) = 0$, і нехай, крім того, функція f аналітична в точці $z = 0$. Тоді

$$f(z) = f'(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \ldots + \frac{f^{(p-1)}(0)}{(p-1)!} z^{p-1} +$$

$$+ \lim_{R \to \infty} \sum_{|a_\upsilon| < R} \left[g(z; a_\upsilon) - T_\upsilon^{(p-1)}(z)\right], \tag{9}$$

де

$$T_{\upsilon}^{(p-1)}(z)=\sum_{j=0}^{p-1}\frac{g^{(j)}(0;a_{\upsilon})}{j!}z^{j},$$

причому збіжність в (9) рівномірна на кожному крузі $\{z\in C\,\|z|<r\}$ при довільному $r,\ 0<r<+\infty$.

<u>Приклад.</u> Мероморфна функція $f(z)=\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}$ має прості полюси $a_{\upsilon}=\upsilon\pi\ (\upsilon=\pm1,\pm2,...)$ і головні частини в цих полюсах $g(a_{\upsilon};z)=\frac{(-1)^{\upsilon}}{z-\upsilon\pi}$. В точці $z=0$ функція f аналітична. Оскільки функція $\frac{1}{\sin z}$ непарна, 2π – періодична і при $z=x+iy$ справедливе

$$\frac{1}{|\sin z|}=\frac{1}{\sqrt{sh^{2}y+\sin^{2}x}}\to 0\ \left(y\to\pm\infty;\ z\in C\right),$$

то вона обмежена в області $\widetilde{G}:=C\setminus\bigcup_{\upsilon=-\infty}^{+\infty}K_{\rho}(\upsilon\pi)$, де радіус ρ кружків $K_{\rho}(\upsilon\pi)$ задовольняє умову $0<\rho<\frac{\pi}{2}$. Отже,

$$(\exists M>0)(\forall z\in\widetilde{G})\left(\frac{1}{|\sin z|}\le M\right).$$

Тоді

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}\right| \le \frac{1}{|\sin z|} + \frac{1}{|z|} \le M + \frac{1}{|z|} = \left(\frac{M}{|z|} + \frac{1}{|z|^2}\right)|z| \quad \left(z \in \widetilde{G}\right)$$

Таким чином, в нашому випадку вимога (8') виконується при $z \in \widetilde{G}$ і $p = 1$, $\alpha(|z|) = \dfrac{M}{|z|} + \dfrac{1}{|z|^2}$. Покладаючи $R = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ $(n \in N)$ в (9), дістаємо

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} = f(0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{|a_\upsilon| < n\pi + \frac{\pi}{2}} \left[\frac{(-1)^\upsilon}{z - \upsilon\pi} + \frac{(-1)^\upsilon}{\upsilon\pi}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{\upsilon=-n}^{n}{}' \left[\frac{(-1)^\upsilon}{z - \upsilon\pi} + \frac{(-1)^\upsilon}{\upsilon\pi}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{\upsilon=1}^{n} \left(\frac{(-1)^\upsilon}{z - \upsilon\pi} + \frac{(-1)^\upsilon}{\upsilon\pi}\right) + \sum_{\upsilon=1}^{n} \left(\frac{(-1)^\upsilon}{z + \upsilon\pi} - \frac{(-1)^\upsilon}{\upsilon\pi}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{\upsilon=1}^{n} (-1)^\upsilon \frac{2z}{z^2 - (\upsilon\pi)^2} = \sum_{\upsilon=1}^{\infty} (-1)^\upsilon \frac{2z}{z^2 - (\upsilon\pi)^2},$$

де штрих біля знака суми означає, що доданок, який відповідає $\upsilon = 0$, вилучається.

Ми дістали розкладання

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} (-1)^\upsilon \frac{2z}{z^2 - (\upsilon\pi)^2}.$$

§5. Логарифмічна похідна цілої функції.

Згідно із відомою теоремою Адамара, цілу функцію f порядку ρ, $0 \le \rho < +\infty$, можна записати у вигляді $(z \in C)$

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^p}{pa_n^p}\right), \quad (1)$$

де $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність нулів a_n, $0 < |a_n| \le |a_{n+1}|$ $(n \in N)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \infty$, функції f, m-кратність точки $z = 0$ як нуля f, $P(z)$ – алгебраїчний многочлен, степінь якого не перевищує $[\rho]$, і p – рід послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, який також не перевищує $[\rho]$. Отже,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (\ln f(z))' =$$

$$= \frac{m}{z} + P'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 - \frac{z}{a_n}} \left(-\frac{1}{a_n}\right) + \left(\frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p}\right) \right] =$$

$$= \frac{m}{z} + P'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - a_n} + \left(\frac{z^{p-1}}{a_n^p} \cdot \frac{z}{a_n} - \frac{1}{a_n}\right) / \left(\frac{z}{a_n} - 1\right) \right] =$$

$$= \frac{m}{z} + P'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{z^p - a_n^p}{a_n^{p+1}} \cdot \frac{a_n}{z - a_n} \right) =$$

$$=\frac{m}{z}+P'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^p}{a_n^p\left(z-a_n\right)}.$$

Таким чином ми дістаємо рівність

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z}+P'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^p}{a_n^p\left(z-a_n\right)}, \qquad (2)$$

яка являє собою розкладання логарифмічної похідної цілої функції f в ряд її найпростіших дробів.

Формула (2) має широкі застосування.

<u>Приклад.</u> Мероморфна функція $-\frac{1}{2\sqrt{z}}tg\sqrt{z}$ є логарифмічна похідна цілої функції $f(z)=\cos\sqrt{z}$, оскільки

$$f'(z)/f(z)=-\frac{1}{2\sqrt{z}}\frac{\sin\sqrt{z}}{\cos\sqrt{z}}=-\frac{1}{2\sqrt{z}}tg\sqrt{z}.$$

Функція $\cos\sqrt{z}$ має порядок $\rho=\frac{1}{2}$ і точки $a_n=\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2$ $(n=0,1,2,...)$ є її нулями. Найменше невід'ємне ціле число p, при якому збігається ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2\right]^{-p-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^{-2p-2}$$

є нуль, тобто рід цієї послідовності дорівнює нулю, $p=0$. В нашому випадку $P(z)$ многочлен нульового степеня тобто

$P'(z) \equiv 0$. В силу формули (2) дістаємо розкладання даної функції в ряд найпростіших дробів, а саме

$$-\frac{1}{2\sqrt{z}} tg\sqrt{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z - \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2}.$$

Література

1. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. т. I – М.: Наука, 1967. – 486 с.

2. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. т. II. – М.: Наука, 1968. – 620 с.

3. Евграфов М. А., Бежанов К. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1972. – 415 с.

4. Хейман У. Мероморфные функции. – М.: Мир, 1966. – 287 с.

5. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. ч. I. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

6. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III, ч. 2. – М.: Наука, 1974. – 672 с.

7. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов, Изд-во при Львовском госуниверситете, 1988. – 142 с.

8. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1974. – 591 с.

Навчальне видання

Микола Євгенович Коренков
Ірина Петрівна Головенко
Зоя Володимирівна Зарицька

Методи розкладання мероморфної функції на найпростіші дроби (спецкурс)

Літературний редактор – Л. І. Філозоф