

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки  
Кафедра алгебри і математичного аналізу



ЗАТВЕРДЖЕНО

Проректор з науково-педагогічної і  
навчальної роботи та рекрутації,  
проф. Гаврилюк С. В.

19 жовтня 2016 р.

## ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

### Робоча програма

нормативної навчальної дисципліни

підготовки \_\_\_\_\_ магістра \_\_\_\_\_

галузь знань 11 Математика та статистика

спеціальність 111 Математика

освітня програма Математика



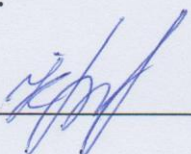
**Робоча програма навчальної дисципліни «Теорія випадкових процесів» для студентів галузі знань 11 Математика та статистика, спеціальності 111 Математика, освітньої програми Математика.**  
12 вересня 2016 року. – 16 с.

**Розробник:** Кальчук І.В., доцент кафедри алгебри і математичного аналізу, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

**Рецензент:** Харкевич Ю.І., професор кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики, кандидат фіз.-мат. наук, професор

**Робоча програма навчальної дисципліни затверджена на засіданні кафедри алгебри і математичного аналізу**  
протокол № 3 від 14.09.2016 р.

Завідувач кафедри:

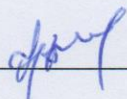


---

(Кальчук І.В.)

**Робоча програма навчальної дисципліни схвалена науково-методичною комісією факультету інформаційних систем, фізики та математики**  
протокол № 2 від 16.09.2016 р.

Голова науково-методичної комісії факультету:



---

(Полетило С.А.)

**Робоча програма навчальної дисципліни схвалена науково-методичною радою університету** протокол № 2 від 19 . 10 . 2016 р.

## ВСТУП

Робоча програма навчальної дисципліни «Теорія випадкових процесів» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки магістра спеціальності 111 «Математика».

**Предметом** вивчення є закономірності випадкових подій у динаміці, випадкові процеси і пов'язані з ними детерміновані диференціальні рівняння.

**Міждисциплінарні зв'язки:** Дисципліна «Теорія випадкових процесів» є одним з розділів теорії ймовірностей і читається як логічне продовження класичного курсу «Теорія ймовірностей і математична статистика». Засвоєння даного курсу дозволяє студентам досліджувати закономірності зміни випадкових величин в часі. Дисципліну слід вивчати обов'язково після вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика», яка формує базу для вивчення теорії випадкових процесів, бо поняття курсу «Теорія випадкових процесів» (випадкових функцій) узагальнюють класичні поняття теорії ймовірностей (випадкових величин). Перестановка місцями цих курсів, а також їх паралельне вивчення, неприпустимі.

Вивчення дисципліни «Теорія випадкових процесів» ґрунтується на базі знань, отриманих студентами в ході освоєння в процесі навчання дисциплін «Алгебра та геометрія», «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння» та «Теорія ймовірностей і математична статистика» математичного циклу.

Програма навчальної дисципліни складається з таких **змістових модулів**:

1. Марківські процеси.
2. Кореляційний аналіз випадкових процесів. Інші випадкові процеси.

## 1. ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

| Найменування показників   | Галузь знань,<br>спеціальність,<br>освітня<br>програма, освітній<br>ступінь | Характеристика<br>навчальної дисципліни |
|---|---|---|
|   |   | денна форма навчання                    |
| Кількість кредитів – 4  | 11 Математика та статистика   | нормативна                              |
|   | 111 математика  |   |
| Модулів: 2  | математика  | Рік підготовки 5                        |
| Змістових модулів: 2  |   | Семестр 9                               |
| ІНДЗ: є   | математика  | Лекції – 34 год                         |
| Загальна кількість годин: 120   |   | Практичні – 20 год                      |
| Тижневих годин<br>(для денної форми навчання):<br><br>аудиторних: 3<br>консультації: 0,5<br>самостійної роботи: 3 | магістр   | Самостійна робота – 58 год              |
|   |   | Консультації – 8 год                    |
|   |   | Форма контролю :<br><b>екзамен</b>      |

## 2. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

1.1. Метою викладання навчальної дисципліни «Теорія випадкових процесів» є: ознайомлення та оволодіння основними математичними поняттями, теоретичними положеннями і методами сучасної теорії випадкових процесів, уміння будувати і досліджувати математичні моделі стохастичних за своєю природою фізичних явищ.

1.2. Основними завданнями вивчення дисципліни «Теорія випадкових процесів» є застосування основних математичних понять, теоретичних положень і методів сучасної теорії випадкових процесів до розв'язання фізичних та інших прикладних задач.

1.3. Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні:

**знати:**

- основні поняття загальної теорії випадкових процесів,
- визначення випадкового процесу, траєкторії, закону розподілу,
- визначення та основні властивості ланцюгів Маркова,
- визначення та властивості головних типів випадкових процесів,
- визначення марковського процесу,
- рівняння Чепмена-Колмогорова,
- визначення та властивості випадкових процесів з незалежними приростами,
- Пуассонівські процеси
- Процес Вінера
- Процеси загибелі і розмноження
- Застосування в системі масового обслуговування,
- кореляційний аналіз випадкових процесів
- неперервність, диференціювання та інтегрування випадкових процесів,

- визначення та властивості стаціонарних випадкових процесів.

***вміти:***

- знаходити матриці переходу за  $n$  кроків для ланцюгів Маркова,
- обчислювати граничні ймовірності для ланцюгів Маркова з дискретним та неперервним часом,
- доводити ергодичну теорему маркова,
- класифікувати стани дискретних ланцюгів Маркова
- доводити ергодичну теорему Маркова, теорему солідарності та критерій зворотності,
- виражати  $n$ -вимірний закон розподілу процесу Маркова через одновимірні та двовимірні закони розподілу,
- виводити рівняння Чепмена-Колмогорова,
- використовувати диференціальні рівняння Колмогорова,
- класифікувати випадкові процеси,
- обчислювати основні характеристики випадкових процесів: функцію розподілу, щільність, кореляційні функції,
- знаходити спектральні зображення стаціонарних випадкових процесів.

На вивчення навчальної дисципліни відводиться 120 год./4 кредити ECTS.

### **3. ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОБСЯГ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

#### **Змістовний модуль I. Марківські процеси**

##### *ТЕМА 1. Дискретні ланцюги Маркова.*

Означення ланцюга Маркова. Матриця переходу. Ергодична теорема Маркова. Класифікація станів. Теорема солідарності. Періодичні ланцюги Маркова. Випадкові блукання.

##### *ТЕМА 2. Процеси з незалежними приростами.*

Випадкові процеси з неперервним часом, загальні поняття. Скінченновимірні розподіли. Однорідні процеси з незалежними приростами. Пуассонівський випадковий процес. Вінерів випадковий процес.

##### *ТЕМА 3. Марківські процеси з неперервним часом.*

Ланцюги Маркова з неперервним часом. Системи диференціальних рівнянь Колмогорова. Ергодична теорема для ланцюгів Маркова з неперервним часом. Процеси загибелі і розмноження. Застосування в теорії масового обслуговування.

#### **Змістовний модуль II. Кореляційний аналіз випадкових процесів.**

##### ***Інші випадкові процеси.***

##### *ТЕМА 4. $L_2$ -теорія випадкових процесів.*

Неперервність, диференціювання і інтегрування в середньому квадратичному випадкових процесів. Характеристики випадкового процесу.

##### *ТЕМА 5. Стаціонарні процеси.*

Стаціонарні в широкому розумінні випадкові процеси. Спектральні зображення. Ергодична властивість стаціонарних в широкому розумінні випадкових процесів.

##### *ТЕМА 6. Гіллясті процеси. Процеси відновлення.*

Диференціальні рівняння для твірної функції. Ефекти виродження і вибуху. Функція відновлення. Рівняння відновлення.

#### 4. СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

| Назви змістовних модулів і тем  | Кількість годин |              |           |          |           |
|---|-----------------|--------------|-----------|----------|-----------|
|   | Усього          | у тому числі |           |          |           |
|   |                 | Лек.         | Практ.    | Конс.    | Сам. роб. |
| 1   | 2               | 3            | 4         | 5        | 6         |
| <b>Змістовий модуль I. Марківські процеси</b>   |                 |              |           |          |           |
| Тема 1. Дискретні ланцюги Маркова   | 21              | 6            | 4         | 1        | 10        |
| Тема 2. Процеси з незалежними приростами  | 22              | 6            | 4         | 2        | 10        |
| Тема 3. Марківські процеси з неперервним часом  | 21              | 6            | 4         | 1        | 10        |
| <i>Разом за змістовним модулем I</i>  | 64              | 18           | 12        | 4        | 30        |
| <b>Змістовий модуль II. Кореляційний аналіз випадкових процесів. Інші випадкові процеси</b> |                 |              |           |          |           |
| Тема 4. $L_2$ -теорія випадкових процесів   | 21              | 6            | 4         | 1        | 10        |
| Тема 5. Стаціонарні процеси   | 21              | 6            | 4         | 1        | 10        |
| Тема 6. Гіллясті процеси. Процеси відновлення   | 14              | 4            | 0         | 2        | 8         |
| <i>Разом за змістовним модулем II</i>   | 56              | 16           | 8         | 4        | 28        |
| <b>Всього годин</b>   | <b>120</b>      | <b>34</b>    | <b>20</b> | <b>8</b> | <b>58</b> |



## 5. ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

| №<br>з/п     | Тема  | Кількість<br>годин |
|--------------|---|--------------------|
| 1            | Ланцюги Маркова з дискретним часом. Матриця переходу. Обчислення фінальних ймовірностей.  | 2                  |
| 2            | Класифікація станів. Періодичні ланцюги Маркова.  | 2                  |
| 3            | Пуассонівський випадковий процес.   | 2                  |
| 4            | Нестационарний процес Пуассона. Процес Вінера.  | 2                  |
| 5            | Ланцюги Маркова з неперервним часом. Матриця інтенсивностей. Система диференціальних рівнянь Колмогорова. Знаходження граничних ймовірностей.       | 2                  |
| 6            | Система диференціальних рівнянь для процесів загибелі і розмноження. Система масового обслуговування.   | 2                  |
| 7            | Кореляційна теорія випадкових процесів. Кореляційна функція і інші характеристики дійсних і комплексних випадкових процесів. Неперервність.         | 2                  |
| 8            | Похідна і інтеграл випадкового процесу. Характеристики похідної та інтеграла випадкового процесу.   | 2                  |
| 9            | Стационарні процеси. Означення стационарного в широкому розумінні випадкового процесу, його характеристики. Стационарно зв'язані випадкові процеси. | 2                  |
| 10           | Спектральні зображення стационарних в широкому розумінні випадкових процесів(дискретні і неперервні спектри).                                       | 2                  |
| <b>Разом</b> |   | <b>20</b>          |

## 6. КОНСУЛЬТАЦІЇ

| № з/п        | Тема  | Кількість годин |
|--------------|---|-----------------|
| 1            | Ланцюги Маркова з дискретним часом.   | 1               |
| 2            | Пуассонівський випадковий процес.   | 1               |
| 3            | Ланцюги Маркова з неперервним часом.  | 1               |
| 4            | Система диференціальних рівнянь для процесів загибелі і розмноження. Система масового обслуговування. | 1               |
| 5            | Кореляційна теорія випадкових процесів. Неперервність.  | 1               |
| 6            | Похідна і інтеграл випадкового процесу.   | 1               |
| 7            | Стаціонарні процеси.  | 1               |
| 8            | Спектральні зображення стаціонарних в широкому розумінні випадкових процесів.                         | 1               |
| <b>Разом</b> |   | <b>8</b>        |

## 7. САМОСТІЙНА РОБОТА

| № з/п        | Тема  | Кількість годин |
|--------------|---|-----------------|
| 1            | Випадкове блукання по прямій і решітці                | 8               |
| 2            | Процес Паскаля  | 7               |
| 3            | Система масового обслуговування з чергами             | 10              |
| 4            | Процеси відновлення                                   | 10              |
| 5            | Стрибкові марковські процеси                          | 10              |
| 6            | Гіллясті процеси                                      | 8               |
| 7            | Прогноз і фільтрація стаціонарних випадкових процесів | 5               |
| <b>Разом</b> |   | <b>58</b>       |

## 8. ІНДИВІДУАЛЬНІ НАКОВО-ДОСЛІДНІ ЗАВДАННЯ

За один змістовний модуль кожен студент виконує індивідуальні завдання: декілька задач з пройдених тем, а також опрацьованих самостійно, та захищає свою роботу.

**Індивідуальне завдання № 1** передбачає опрацювання теоретичного матеріалу та виконання завдань на теми:

1. Ланцюги Маркова. Матриця переходу та граф.
2. Матриця переходу ланцюга Маркова за  $n$  кроків. Ймовірність перебування в заданому стані на  $n$ -му кроці.
3. Ергодична теорема Маркова. Відшукання фінальних ймовірностей.
4. Класифікація станів ланцюга Маркова: істотність, зворотність та ін.
5. Періодичні ланцюги Маркова. Виділення циклічних підкласів.
6. Стаціонарний процес Пуассона та його характеристики.
7. Закон розподілу часу між двома сусідніми появами подій.  
Нестаціонарний процес Пуассона.
8. Випадковий процес Вінера.
9. Марковські процеси з неперервним часом. Диференціальні рівняння Колмогорова.
10. Процеси загибелі і розмноження. Системи масового обслуговування.

**Індивідуальне завдання № 2** передбачає опрацювання теоретичного матеріалу та виконання завдань на теми:

1. Характеристики випадкових процесів: математичне сподівання та дисперсія.
2. Кореляційна теорія.
3. Неперервність, диференціювання та інтегрування випадкових процесів.
4. Характеристики комплексних випадкових процесів.
5. Стаціонарні в широкому розумінні випадкові процеси.

6. Спектральні зображення.

7. Гіллясті випадкові процеси. Процеси відновлення.

Вправи розв'язуються самостійно в позааудиторний час в зошитах для індивідуальної роботи. Звіт про виконання ІНДЗ подається у вигляді зошита (титульна сторінка стандартного зразка) із оформленими розв'язаннями, запропонованих студенту завдань, висвітленими теоретичними питаннями. Оцінка роботи здійснюється відповідною кількістю балів.

## **9. МЕТОДИ НАВЧАННЯ**

При вивченні курсу застосовуються проблемно-інформаційний, частково-пошуковий, дослідницький методи навчання.

## **10. ФОРМА ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ УСПІШНОСТІ НАВЧАННЯ**

Форма підсумкового контролю успішності навчання – екзамен.

### **Підсумкові питання з курсу**

1. Означення ланцюга Маркова. Матриця переходу.
2. Ймовірність переходу за  $n$  кроків (рівність Маркова, матриця переходу за  $n$  кроків).
3. Ймовірність перебування системи в заданому стані на  $n$ -му кроці.
4. Ергодична теорема Маркова. Обчислення фінальних ймовірностей.
5. Класифікація станів. Критерій зворотності. Теорема солідарності.
6. Періодичні ланцюги Маркова.
7. Випадковий процес Пуассона.
8. Випадковий процес Вінера.
9. Випадкові процеси з неперервним часом: загальні означення.
10. Ланцюги Маркова з неперервним часом. Перехідні ймовірності.
11. Система диф. рівнянь Колмогорова. Ергодична теорема для ланцюгів Маркова з неперервним часом. Обчислення граничних ймовірностей.
12. Процеси загибелі і розмноження.

13. Система масового обслуговування з втратами. Рівняння Ерланга.
14. Математичне сподівання та дисперсія.
15. Кореляційна функція (нормована, взаємна).
16. Характеристики комплексних випадкових процесів.
17. Неперервність випадкового процесу.
18. Похідна випадкового процесу.
19. Інтегрування випадкових процесів.
20. Стаціонарні в широкому розумінні випадкові процеси.
21. Спектральні зображення.

## 11. МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ ДІАГНОСТИКИ УСПІШНОСТІ НАВЧАННЯ

Контроль знань студентів здійснюється шляхом:

- опитування студентів;
- письмового контролю (контрольні роботи та колоквіуми);
- виконання ІНДЗ;
- іспиту.

## 12. РОЗПОДІЛ БАЛІВ, ЯКІ ОТРИМУЮТЬ СТУДЕНТИ

| МОДУЛЬ 1            |    |    |        |                       |       | МОДУЛЬ 2            |   |   |        |                       |   | Сума  |
|---------------------|----|----|--------|-----------------------|-------|---------------------|---|---|--------|-----------------------|---|-------|
| Поточне оцінювання  |    |    |        | Підсумкове оцінювання |       | Поточне оцінювання  |   |   |        | Підсумкове оцінювання |   |       |
| Змістовний модуль 1 |    |    | ІНДЗ 1 |                       |       | Змістовний модуль 2 |   |   | ІНДЗ 2 |                       |   |       |
| T1                  | T2 | T3 |        | T4                    | T5    | T6                  |   |   |        |                       |   |       |
| 4                   | 4  | 4  |        | 8                     | МКР 1 | Колоквіум 1         | 4 | 4 |        | 4                     | 8 | МКР 2 |
| 50                  |    |    |        |                       |       | 50                  |   |   |        |                       |   |       |



### Шкала оцінювання (національна та ECTS)

| Сума балів<br>за всі види навчальної<br>діяльності | Оцінка ECTS | Оцінка за національною<br>шкалою |
|--|-------------|----------------------------------|
|  |             | для екзамену                     |
| 90 – 100   | A           | Відмінно                         |
| 82 – 89  | B           | Добре                            |
| 75 - 81  | C           |                                  |
| 67 -74   | D           | Задовільно                       |
| 60 - 66  | E           |                                  |
| 1 – 59   | Fx          | Незадовільно                     |

### 13. МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

1. Сорока Л.І. Основні дискретні і неперервні розподіли. Методична розробка. / Л.І.Сорока, Волинський нац. ун-т. ім. Лесі Українки. – Луцьк, 2010. – 34 с.

2. Сорока Л.І. Випадкові процеси: методичні рекомендації / Л.І. Сорока, І.В Кальчук; Східноєвропейський нац. ун-т. ім. Лесі Українки. – Луцьк, 2013. – 56 с.

### 14. СПИСОК ДЖЕРЕЛ

#### ОСНОВНА ЛІТЕРАТУРА

1. Боровков А.А. Теория вероятностей / А.А. Боровков – М. : Наука, 1987. – 436 с.

2. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : [учеб. пособие] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2007. – 479 с.

3. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов /И.И. Гихман, А.В. Скороход. – К. :Выща школа, 1980. – 570 с.

4. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – 6-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1998. – 479 с.
5. Зубков А. М. Сборник задач по теории вероятностей / А. М. Зубков, Б.А. Севастьянов, В. П Чистяков. – 2-е изд., испр. и доп.— М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит – 1989.— 320 с
6. Коваленко И. Н. Теория вероятностей / И. Н. Коваленко, Б.В. Гнеденко. – К. : Выща школа, 1990. – 328 с.
7. Розанов Ю.А. Случайные процессы. Краткий курс / Ю.А. Розанов – М. : Наука, 1971. – 184 с.
8. Скороход А.В. Элементы теории вероятностей и случайных процессов / А.В. Скороход. – К. : Выща школа, 1980. – 344 с.
9. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів / А.В. Скороход. – К. : Либідь, 1990. – 168 с.
10. Сеньо П.С. Випадкові процеси: [підручник для студентів ВНЗ] / П.С. Сеньо. – Львів : Компакт, 2006. – 288 с.

#### **Збірники задач:**

1. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / [Б.Г. Володин и др.]; под ред. Свешникова А.А. – М. : Наука, 1970. – 656 с.
2. Андрухаев Х.М. Сборник задач по теории вероятностей / Х.М. Андрухаев – М. : Просвещение, 1985. – 160 с.
3. Вентцель Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей : [учеб. пособие] /Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров/ – 5-е изд., испр. – М. : Академия, 2003. – 488 с.
4. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. –М. : Высш. шк., 1998. – 400 с.
5. Емельянов Г.В. Задачник по теории вероятностей и математической статистике / Г.В. Емельянов, В.П. Скитович. – Л. :Изд-во ЛГУ, 1969. – 332 с.

6. Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей / А.М. Зубков, Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков. – М. : Наука, 1989. – 320 с.

7. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под ред. Свешникова А.А. – М. : Наука, 1970.

### ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

1. Дынкин Е.Б. Теоремы и задачи о процессах Маркова / Е.Б. Дынкин, А.А. Юшкевич. – М. : Наука, 1967. – 232 с.

2. Бочаров П.П. Теория вероятностей и математическая статистика / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – М. : Гардарика, 1998. – 328 с.

3. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы / Дж. Л. Дуб. – М. : ИЛ. – 1964. – 608 с.

4. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках / К.В. Гардинер. – М. : Мир, 1986. – 528 с..

5. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии / Ван Кампен Н.Г. – М. : Высшая школа, 1990. – 376 с.

6. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций / А. М. Яглом. – Л. : Гидрометеиздат, 1981. – 268 с.

7. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение / П. Леви. – М. : Наука, 1972. – 375 с.

8. Лавренченко А. С. Лекции по математической статистике и теории случайных процессов / А. С. Лавренченко. – М. : Изд-во МАИ, 1974. –140 с.