МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Факультет інформаційних систем, фізики та математики
Кафедра алгебри та математичного аналізу

О.Г.Ханін

Математичні моделі ризикового страхування

Методична розробка
до спецкурсу «Актуарна та фінансова математика»
для студентів 5-го-6-го курсів
спеціальностей «Математика» та «Інформатика»

.

Луцьк – 2016

З М І С Т

Вступ

Актуарні розрахунки – це процес, у ході якого визначаються витрати, необхідні для страхування даного об’єкту. За допомогою актуарних розрахунків розраховуються страхові тарифи – частка участі кожного страхувальника у створенні страхового фонду. Актуарій – це людина, яка має певну кваліфікацію для оцінки ризиків та ймовірностей і застосовує її до проблем бізнесу та фінансів, зокрема, страхування.

Перша актуарна фірма виникла у Великобританії в 1762 році. В 1895 році національні спілки актуаріїв Бельгії, Франції, Німеччини, Великобританії та Сполучених Штатів створили Міжнародну Асоціацію Актуаріїв. В сучасному українському суспільстві перші актуарії з'явились лише після розпаду СРСР, проголошення незалежності України, початку перетворень господарської системи на ринкову і появи перших страхових товариств. Товариство актуаріїв України (ТАУ) — професійна громадська організація України, яка об’єднує актуаріїв та сприяє розвитку актуарної професії в Україні. Діяльність ТАУ розпочато в 2004 року.

Основними завданнями актуарної математики є:

- дослідження і групування ризиків у межах страхової сукупності;\
- визначення ймовірності настання страхового випадку;
- визначення нетто-премій та надбавок за ризик;
- математичне обґрунтування необхідних витрат на проведення страхування страховиком;
- математичне обґрунтування необхідних резервних фондів страховика, методів і джерел їх формування.

З бурхливим розвитком страхування в сучасному світі актуарні розрахунки та професія актуарія стали надзвичайно актуальними. У 2006 році в дослідженні U.S. News & World Report актуарії внесені в перелік 25 найкращих професій, які будуть мати великий попит в майбутньому.

У 2010 році дослідження, опубліковане сайтом Career Cast з пошуку роботи, класифікувало актуарія як роботу №1 в Сполучених Штатах.

В даній роботі зосередимося на моделях ризикового, майнового страхування та практичних прикладах їх застосування.

I. Теоретичні основи актуарних моделей ризикового страхування

1. Основні актуарні принципи

Страхова премія — грошова сума, що її сплачує особа, яка укладає угоду страхування і яка являє собою своєрідну плату за ризик, який бере на себе страхова компанія. Історично першою задачею, яку прийшлося розв'язувати актуарію, була задача визначення розміру страхової премії, яка б забезпечувала еквівалентність ризиків страховика (компанії яка страхує), та страхувальника (особи чи компанії, чиї ризики страхуються), тобто рівність їх можливих збитків. Для простоти проаналізуємо приклад розрахунку страхової премії без врахування процесу накопичення, тобто будемо вважати, що сума зібраних премій дорівнює сумі виплачених страхових відшкодувань.

Нехай на основі попереднього досвіду з'ясовано, що за одиницю часу (наприклад, рік) в групі з n однорідних страхових договорів відбулося m страхових випадків. Тоді частка m/n дозволяє оцінити ймовірність p страхового випадку.

Якщо з року в рік емпіричні значення m/n практично рівні, тобто їх коливання випадкові і не містять тренду, т о немає потреби в прогнозуванні поведінки цієї величини, достатньо знати її середнє значення. При великому обсязі спостережень (договорів) можна з високою ймовірністю казати, що істинне значення параметру p буде знаходитись у дуже вузькому довірчому інтервалі навколо частоти m/n. Тоді можна для подальших розрахунків взяти не точкову оцінку p, а праву межу довірчого інтервалу. Це зменшить ймовірність розорення страхової компанії, але дещо знизить її конкурентоздатність.

Тепер можна приступити до планування політики компанії відносно цього виду ризику на наступний рів. Зібрані премії повинні забезпечити виконання страховиком свої зобов'язань, тобто їх повинно вистачити, щоб виплатити всі страхові відшкодування. По суті настання страхового випадку серед n страхових договорів – це аналог «успіху» в схемі випробувань Бернуллі. Ймовірність страхового випадку p – це математичне сподівання частоти страхових випадків. Саме виходячи з цієї ймовірності розраховувалася страхова премія, тобто внесок страхувальника. Тоді, якщо фактична частота страхових випадків буде рівною своєму математичному сподіванню (принцип еквівалентності ризику) або меншою за нього, то страхова компанія виконає свої зобов'язання. В останньому випадку страховик навіть отримає прибуток.

Однак, страховика більше цікавить протилежна ситуація: перевищення фактичної частоти страхових випадків над очікуваним, яке може привести до розорення компанії. Для запобігання цьому страховик використовує такі засоби, як ризикова надбавка, розподіл власного ризику шляхом перестрахування, а також створює певний резерв, використовуючи, зокрема, власний капітал.

Зауважимо, що збільшення ризикової надбавки до страхової премії, з одного боку, підвищує надійність страхової компанії, з іншої, зменшує її конкурентоздатність на ринку страхових послуг, оскільки призводить до підвищення страхового тарифу. На практиці, у страхуванні життя відносна ризикова надбавка складає до 10%, у майновому страхуванні – 35-40%%.
Таким чином, виникає задача пошуку компромісу між підвищенням надійності та конкурентоспроможності. Тут грає роль об'єм страхового портфелю. Очевидно, чим він більший,тим компанія стійкіша. Вона може підтримувати високу конкурентоспроможність, зменшуючи ризикову надбавку практично без шкоди для надійності.

Коли ж можливості підвищення надійності шляхом введення ризикової надбавки вичерпані, компанія залучає свій власний капітал. Якщо величина початкового капіталу визначена правильно, то він витрачається та поповнюється таким чином, що в середньому не зростає і не спадає. Зайвий початковий капітал – це кошти, витягнуті з обігу, які нет приносять прибутку. Але недостатній початковий капітал може перешкодити компанії виконати свої зобов'язання перед клієнтами. Державні органи здійснюють контроль над достатністю власного капіталу страхових компаній.

Підвищити надійність можна і шляхом перестрахування, однак за послуги перестрахування необхідно платити, що недоцільно при достатності власного капіталу.

Таким чином, перед актуарієм стоїть задача знайти оптимальні шляхи забезпечення високої надійності страховика при збереженні його конкурентоспроможності на ринку. Спрощена схема функціонування страхової компанії може бути представлена наступним чином. Є однорідна множина договорів, кількість яких достатньо велика, а ймовірністі настання страхового випадку в кожному окремому договорі дуже малі і приблизно однакові. Страхові суми, які мають бути виплачена клієнту при настанні страхового випадку, вважаємо однаковими. Актуарій повинен розв'язати наступні задачі:

- визначити величину ризикової премії, яка б забезпечила еквівалентність обов'язків і ризику страховика і страхувальника;
- визначити величину ризикової надбавки;
- визначити величину страхового запасу (капіталу), який би з певною ймовірністю забезпечив би не розорення компанії;
- проаналізувати доцільність і розмір перестрахування.

Принцип еквівалентності ризиків сторін

При розрахунку ризикової премії користуються принципом, який називається принципом еквівалентності ризиків сторін і полягає у наступному:

ризикова премія (основна складова суми, сплаченої страхувальником) має дорівнювати математичному сподіванню шкоди страхової компанії за даною угодою, яку вона має покрити у разі настання страхового випадку.

Для окремого клієнта страховий випадок може або наступити з ймовірністю p, або не наступити з ймовірністю $q=1-p$. Тобто страхувальник ризикує премією $П$ (яку він може сплатити, а страховий випадок не настане) з ймовірністю $1-p$. Страховик ризикує різницею $S-П$ між страховою сумою S, яку він мусить сплатити клієнту у разі настання страхового випадку, що відбувається з ймовірністю p, та отриманою від клієнта премією $П$. Тому принцип еквівалентності ризиків сторін призводить до рівняння:

$$\boldsymbol{(S-П)p=П(1-p)}, \qquad (1)$$

звідки отримуємо значення ризикової премії

$$\boldsymbol{П=Sp}, \qquad (2)$$

де S – страхова сума, p – ймовірність страхового випадку.

Якщо угод декілька, то компанію цікавить не окрема угода і наступлення по неї страхового випадку, а загальна кількість випадків і сума всіх виплат для всього страхового портфелю, тобто колективний ризик.

Нехай всі N страхувальників внесуть у вигляді премій суму, рівну $П$, тобто загальна сума премій становитиме $NП$. Нехай ймовірність страхового випадку по кожній угоді дорівнює p. Тоді в середньому належить очикувати Np страхових випадків (схема Бернуллі), у кожному з яких необхідно виплатити страхове відшкодування S. Таким чином, **принцип еквівалентності ризиків сторін для портфелю з *N* однорідних угод** матиме вигляд:

$$\boldsymbol{NП=NSp}. \qquad (3)$$

Поділивши рівняння (3) на N, отримаємо те саме значення (2) ризикової премії , що і у випадку однієї угоди. Таким чином, ризикова премія не залежить від кількості угод у портфелі.

Принцип пропорційного відшкодування

Нехай об’єкт застрахований на суму *S*. Розглянемо, яке відшкодування *V* має виплачуватися страховиком у разі повного знищення об’єкту. Зауважимо, що згідно загальним правилам страхування страхова сума, на яку застрахований об’єкт, не повинна перевищувати його реальної ринкової вартості *C*. Очевидно, величина шкоди *X* також не може перевищувати *C*. Відшкодування *V* не може перевищувати величини реальної шкоди і величини суми, на яку здійснено страхування (але яка може бути як меншою, так і більшою за реальну шкоду). Тобто

$$V \le min(X, S).$$

Для знаходження реальної суми відшкодування користуються принципом пропорційного відшкодування

$$V = (X/C) \cdot S.$$

2. Приклади розрахунку ризикової премії

2.1. Розрахунок ризикової премії в умовах фіксованої шкоди

Приклад. Нехай два автомобілісти застрахували свої автомобілі від угону. У першого – вітчизняний автомобіль із сучасною ринковою вартістю 2000 у.о., а в іншого – іномарка сучасною вартістю 10000 у.о. Страхова компанвя оцінили ймовірність угону першого автомобіля у 0,01, а другого – у 0,04. У разі страхового випадку виплачується сума, яка дорівнює ринковій ціні. Знайти ризикові премії.

Розв’язок. За принципом еквівалентності ризиків сторін, страхова премія знаходиться за формулою (2), тобто для власника вітчизняного автомобіля вона становить

$$S_1 \cdot p = 2000 \cdot 0{,}01 = 20 \text{ (у.о.)},$$

а для власника іномарки –

$$S_2 \cdot p = 10000 \cdot 0{,}04 = 400 \text{ (у.о.)}.$$

2.2. *Розрахунок ризикової премії в умовах розподіленої шкоди*

Представляє інтерес ситуація, коли при настанні страхового випадку величина шкоди не є сталою , як у попередньому випадку, а представляє собою випадкову величину з певним законом розподілу. Розглянемо спочатку випадок, коли ця випадкова величина є дискретною.

Приклад. Нехай ймовірність страхового випадку $p=0{,}1$, а розподіл шкоди X при умові, що відбувся страховий випадок (подія A) даний у таблиці:

X	100	200	300	400
p(X\A)	0,4	0,3	0,2	0,1

Необхідно визначити розмір ризикової премії.

*Розв'язок.*Середня шкода при умові настання страхового аипадку дорівнює

$$M(X\backslash A)=100\cdot 0{,}4+200\cdot 0{,}3+300\cdot 0{,}2+400\cdot 0{,}1=200.$$

Але страховий випадок може наступити з ймовірністю $p=0{,}1$, а може і не наступити з ймовірністю $1-\ p=0{,}9$. В останньому випадку, зрозуміло, середня шкода $M(X\backslash\overline{A})=0$. Тоді середня шкода

$$MX= M(X\backslash A)\cdot p+ M(X\backslash\overline{A})\cdot(1-p)=200\cdot 0{,}1+0\cdot 0{,}9=20.$$

Таким чином, за принципом еквівалентності ризиків сторін ризикова премія

$$\Pi=MX=20.$$

Розглянемо тепер випадок, коли шкода X є неперервною випадковою величиною.

Приклад. Нехай страховий випадок *A* наступає з ймовірністю $p=0,05$ і тоді шкода *X* розподілена рівномірно на відрізку [0;600]. Знайти ризикову премію.

Розв'язок. При умові настання страхового випадку середня шкода

$$M(X\backslash A)=300.$$

Тоді, аналогічно попередньому прикладу,

$$MX= M(X\backslash A)\cdot p=300\cdot 0.05=15.$$

Таким чином, ризикова премія становить 15 (у.о.).

Приклад. Шкода при пожежі розподілена за експоненційним законом із середнім, рівним 4000. Нехай межа відповідаьності страхової компанії дорівнює 10000. Знайти середнє значення дійсно пред'явленого позову.

Розв'язок. Величина пред'явленого позову

$$Y=\min(X,L),$$

де *X* - величина шкоди, *L* – межа відповідальності.

Тому

$$\mathbf{P\{Y \le x\}}=\begin{cases} \mathbf{1}, \text{якщо } \mathbf{x \ge L}, \\ \mathbf{P\{X \le x\}}, \text{якщо } \mathbf{x} < L. \end{cases}$$

Оскільки шкода *X* при умові настання пожежі (подія *A*) розподілена експоненційно, то відповідна функція розподілу має вигляд

$$F_{X\backslash A}(x)=1-e^{-\alpha x}, \text{ коли } x\ge 0,$$

де $\alpha=1/M(X)=1/4000.$

Тоді щільність розподілу

$$f(x)=F'(x)=\alpha\, e^{-\alpha x}=\frac{1}{4000}\, e^{-\frac{1}{4000}x}.$$

Звідки середнє значення пред'явленого позову дорівнює

$$MY=\int_0^{\infty} yf(y)dy = \int_0^{L} xf(x)dx + \int_L^{\infty} Lf(x)dx = \frac{1}{\propto}(1-e^{-\propto L})=4000(1\text{-}e^{-10/4})\approx$$
$$\approx 3672.$$

2.3. Приклад комбінованого страхування

Певний ефект дає такий прийом, як комбіноване страхування, яке дозволяє знизити тарифи завдяки практичній неможливості одночасного виникнення кількох страхових випадків.

Приклад. Перший страхувальник застрахував на 1 рік своє домашнє майно на суму в 1000 у.о.:

від пожежі - в компанії X (подія A з ймовірністю 0,02);

від псування в результаті аварії системи гарячого водопостачання - в компанії Y (подія B з ймовірністю 0,01);

від крадіжки - в компанії Z (подія C з ймовірністю 0,03).

За угодою, якщо відбувся страховий випадок, то ткомпанія виплачує страхову суму повністю, незалежно від величини фактичної шкоди. Розрахувати ризикову премію.

Розв'язок. За першою угодою ризикова премія складе $S{\cdot}p$=1000·0,02=20 (у.о.), за другою угодою - 1000·0,01=10 (у.о.), за третьою - 1000·0,03=30 (у.о.). Разрм клієнт сплатить 60 у.о. внесків.

В той же час, якщо б цей клієнт застрахував своє майнол в одній страховій компанії, то нарахована йому ризикова премія була би меншою. Дійсно, оскільки одночасно може відбутися не більше однієї з цих трьох подій (точніше, ймовірності настання двох або трьох подій одночасно є невідчутно малими), то замість події $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}$ розглядатиметься подія

$$(\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}} \cap \overline{\boldsymbol{C}}) \cup (\overline{\boldsymbol{A}} \cap \boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{C}}) \cup (\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}} \cap \boldsymbol{C}),$$

ймовірність якої дорівнює 0,2*0,99*0,97+0,98*0,01*0,97+0,98*0,99*0,03= =0,057818, а не 0,06.

Таким чином, ризикова премія буде рівною 1000*0,057818≈57,82 (у.о.), тобто зменшиться майже на 4%.

Якщо ж ймовірності настання перелічених вище страхових випадків дорівнювали б, відповідно, 0,2; 0,1 та 0,3 , то для першого клієнта, який застрахував майно в трьох різних страхових компаніях, ризикова премія складала би 1000*0,6=600 (у.о.), а для другого, який усі ризики застрахував в одній компанії, - 1000*(0,2*0,9*0,7+0,8*0,1*0,7+0,8*0,9*0,3)=398 (у.о.), тобто зменшилася більше, ніж у 1,5 рази (!).

Таким чином, точний розрахунок ймовірностей скоадних подій дає можливість страховику знизити свої тарифи і тим самим підвищити конкурентоздатність при незмінній надійності.

3. Поняття про ризикову надбавку

Нехай у компанії є однорідний портфель з n договорів з однаковими страховими сумами S і ймовірностями настання страхових випадків p. Таким чином, ми маємо справу зі схемою Бернуллі.

Компанію цікавить не тільки середня кількість страхових випадків np, виходячи з якої обраховується страхова премія, але й можливе перевищення цього значення, а також ймовірність такого перевищення. Якщо б клієнт сплачував страховику лише ризикову премію, то у разі такого перевищення страховик би збанкрутував. Отже, крім страхової премії, страховий тариф містить ще деяку величину, яка називається ризиковою надбавкою і яка призначена, щоб з певною ймовірністю забезпечити не розорення страхової компанії у разі збільшення реальної кількості страхових випадків порівняно із середньою.

Позначимо кількість реальних страхових випадків через m. Оскільки вона розподілена за біноміальним законом, то при достатньо великій кількості угод n у портфелі з інтегральної теореми Лапласа випливає, що

$$P\{|m-np|<t\sqrt{npq}\}=P\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<t\sqrt{\frac{pq}{n}}\}\approx 2\Phi(t), \qquad (1)$$

де p - ймовірність страхового випадку, $q=1-p$, $\Phi(t)$ - інтегральна функція Лапласа.

Приклад. Нехай кількість страхових угод у портфелі становить n=1000, ймовірність страхового випадку p=0,1. Тоді середня очікувана кількість випадків становить np=100. Компанію цікавить ймовірність того, що фактичне число страхових випадків неперевисить деякого значення M. Якщо термін дії угоди становить 1 рік, то яка повинна бути ця межа, що не перевищувалася частіше, ніж 1 раз у 25 років? Якою у цьому випадку має бути ризикова надбавка? Оцінити конкурентоздатність компанії, якщо середньоринкова ризикова надбавка становить 10%.

Розв'язок. Із співвідношення (1) випливає, що

$$P\{m \geq np+ t\sqrt{npq}\}\approx(1-2\Phi(t))/2. \qquad (2)$$

Виникає питання, при якому значенні t, ймовірність (2) становитиме 0,04? З рівняння (2) випливає, що

$$\Phi(t)\approx 0,5 - P\{m \geq np+ t\sqrt{npq}\}. \qquad (3)$$

Приходимо до рівняння

$$\Phi(t)=0,5-0,04=0,46,$$

розв'язок якого можна знайти за таблицями інтегральної функції Лапласа, або скориставшись функцією Excel *Нормстобр.* Враховуючи, що значення функції стандартного нормального розподілу при тому самому аргументі на 0,5 більше за відповідне значення функції Лапласа,

$$t = \text{Нормстобр}(0{,}46+0{,}5)\approx 1{,}75.$$

Тоді абсолютна надбавка становитиме

$$d=t\sqrt{npq}\approx 1.75\sqrt{1000\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}\approx 16{,}62.$$

Відносна надбавка становитиме

$$\Theta=\frac{d}{np}\approx\frac{16{,}62}{100}\approx 0{,}1662=16{,}62\%.$$

Таким чином, при відносній надбавці *16,62%* можна вважати з ймовірністю 0,96 (порушення відбувається не частіше ніж 1 раз у 25 років), що число страхових випадків не перевищить $100+16{,}62\approx 117$ випадків. Якщо страхова сума складала би *S*, то **ризикова надбавка** дорівнювала би величині

$$S\cdot p\cdot \Theta, \qquad (4)$$

що в нашому випадку становить $\approx 0{,}01662\cdot S$. Тоді ризикова премія разом з надбавкою становитиме

$$S\cdot p+ S\cdot p\cdot \Theta=S\cdot p(1+ \Theta). \qquad (5)$$

В нашому випадку вираз (5) дорівнює $0{,}11662\cdot S$.

З позицій конкурентоздатності надбавка у майже 17% є надто великою. Спробуємо змінити умови.

Приклад. Нехай в умовах попереднього прикладу ми хочемо забезпечити ймовірність розорення не вище 0,01 (не частіше 1 разу на 100 років). Знайти відносну ризикову надбавку та оцінити рівень конкурентоспроможності компанії.

Розв'язок. В даному випадку ймовірність виходу кількості очиуваних страхових випадків за праву межу

$$\varepsilon=0{,}01=0{,}5-\Phi(t),$$

звідки $\Phi(t)=0{,}49$. Тобто $t=\text{НОРМСТОБР}(0{,}99)\approx 2{,}33$. Тобто відносна надбавка

$$\boldsymbol{\Theta=\frac{t\sqrt{npq}}{np}=t\sqrt{\frac{q}{np}}\approx 0{,}22,} \tag{6}$$

а отримане значення 22% є надто великим порівняно із середньо ринковим, що каже про низьку конкурентоздатність.

Приклад. Підійдемо з іншого боку. Знайдемо надійність (ймовірність не розорення), яку забезпечує надбавка у 10%.

Розв'язок. Отже, виходячи з (6),

$$\boldsymbol{\Theta=0{,}1=t\sqrt{\frac{q}{np}}=t\sqrt{\frac{0{,}9}{1000\cdot 0{,}1}}\approx 0{,}095\cdot t,}$$

звідки $t\approx 1{,}054$. Тоді ймовірність розорення

$$\boldsymbol{\varepsilon=0{,}5-\Phi(1{,}054)=1-\text{НОРМСТРАСП}(1{,}054)\approx 0{,}146,}$$

що становить приблизно 1 раз на 7 років, тобто ймовірність розорення є неприйнятно високою.

Проаналізуємо, чому в наших прикладах страховик не може встановити конкурентні умови страхування. Одна з таких причин – занадто висока ймовірність страхового випадку, але це не єдина причина. Із співвідношення (6) видно, що відносна надбавка обернено пропорційна квадратному кореню з об'єму страхового портфелю, тобто для її зменшення при незмінній ймовірності страхового випадку необхідно збільшити об'єм портфелю. Таким чином, другою причиною є занадто малий портфель страхових угод.

Приклад. Проаналізуємо ситуацію іншого страховика, який має справу з такими ж ризиками ($p=0{,}1$), але об'єм портфелю складає n=10000 угод. Якою має бути відносна надбавка, щоб забезпечити ймовірність розорення не частіше 1 разу на 25 років ?

Розв'язок. Маємо

$$\boldsymbol{\varepsilon=0{,}04=0{,}5-\Phi(t)=1-\text{НОРМСТРАСП}(t),}$$

звідки *t=НОРМСТОБР(0,96)≈1,75*.

Тобто

$$\boldsymbol{\Theta=t\sqrt{\frac{q}{np}}=1,75\sqrt{\frac{0,9}{10000\cdot 0,1}}\approx 0,05.}$$

Таким чином при збільшенні об'єму портфелю з 1000 до 10000 угод відносна надбавка зменшилася з 17% до 5%, і компанія стала цілком конкурентоспроможною на ринку страхових послуг.

Зауважимо, що страховик з меншим портфелем, щоб зберегти конкурентоспроможність вимушений знижати свої тарифи і збільшувати ризик розорення. Звідти видно, чому крупні компанії виживають, а дрібні розорюються.

Приклад. Збільшимо надійність страхової компанії з попереднього прикладу до 0,01 (тобто розорення не частіше 1 разу на 100 років). Якою має бути відносна надбавка?

Розв'язок.

ε=0,01=0,5-Φ(t)=1-НОРМСТРАСП(t),

звідки *t=НОРМСТОБР(0,99)≈2,33*.

Тобто

$$\boldsymbol{\Theta=t\sqrt{\frac{q}{np}}=2,33\sqrt{\frac{0,9}{10000\cdot 0,1}}\approx 0,07,}$$

що цілком прийнятно, зважаючи на середньо ринкову надбавку у 10%. Таким чином, ця страхова компанія може забезпечити достатньо високу надійність без залучення страхових резервів на відміну від слабкішого конкурента.

Приклад. Нарешті, проаналізуємо, якою буде надійність цієї компанії, якщо відносну ризикову надбавку зробити рівною середньо ринковому значенню?

Розв'язок.

$$\boldsymbol{\Theta=0,1=t\sqrt{\frac{q}{np}}=t\sqrt{\frac{0,9}{10000\cdot 0,1}}\approx 0,03\cdot t,}$$

звідки $t\approx 3,33$. Тоді ймовірність розорення

$$\boldsymbol{\varepsilon=0,5-\Phi(3,33)=1-\text{НОРМСТРАСП}(3,33)\approx 0,0004}$$

(розорення не частіше 1 разу на 2500 років!).

4. Поняття про нетто-премію

Під нетто-премією розуміють такий платіж страхувальника, який забезпечує з певною ймовірністю беззбитковість страховика. Вона складається з двох частин: по-перше, ризикової премії, яка обраховується за принципом еквівалентності ризиків сторін і становить Sp, де S – страхова сума, а p – ймовірність страхового випадку; по-друге, ризикової надбавки, яка дорівнює $Sp\Theta$, де Θ – відносна надбавка, яку знаходять із співвідношення (6). Очевидно,

$$\boldsymbol{Sp\Theta=St\sqrt{\frac{pq}{n}}}\ , \tag{7}$$

де $q=1-p$, n – кількість страхових угод в портфелі, значення t знаходиться, виходячи з ймовірності розорення $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon=0,5-\Phi(t)=1-\text{НОРМСТРАСП}(t),}$$

тобто

$$\boldsymbol{t=\text{НОРМСТОБР}(1-\varepsilon).} \tag{8}$$

Таким чином, враховуючи (6) - (8), нетто-премія

$$\boldsymbol{П=Sp(1+\Theta)=Sp\left(1+t\sqrt{\frac{q}{np}}\right)=S\left(p+t\sqrt{\frac{pq}{n}}\right).} \tag{9}$$

Розглянемо деякі приклади, в яких використовується поняття нетто-премії.

Приклад. В страховій компанії 6000 угод. Ймовірність страхового випадку в кожній з них становить 0,005, а страхова сума, що виплачується, становить 100000 у.о. Обрахувати розмір нетто-премії, який забезпечує ймовірність розорення не вищий за 0,05? Якщо компанія встановила для страхувальників тариф у 800 у.о., то на який прибуток вона може розраховувати з ймовірністю 0,95?

Розв'язок. За формулою (8) обрахуємо значення t, яке відповідає ймовірності розорення $\varepsilon=0,05$:

$$t = \text{НОРМСТОБР}(0,95)\approx 1,64. \qquad (10)$$

Тоді за формулою (9) розмір нетто-премії становитиме

$$П=100000\cdot 0,005\cdot(1+1,64\sqrt{\frac{0,995}{6000\cdot 0,005}})\approx 649,34 \text{ (у.о.)}.$$

Прибуток страхова компанія може отримати лише при умові не розорення. Тобто питання задачі можна переформулювати таким чином: на який прибуток може розраховувати страховик, якщо ймовірність не розорення становить 0,95, тобто ймовірність розорення становить 0,05?

Знаючи ймовірність розорення $\varepsilon=0,5$ згідно (10) $t\approx 1,64$. Тоді максимальне значення кількості страхових випадків з ймовірністю 0,95 становить

$$m=np+t\sqrt{npq}\approx 30+1,64\cdot 5,34\approx 39.$$

Таким чином, сума зібраних премій становить

6000*800=4 800 000 (у.о.),

а максимальний розмір сплаченого відшкодування –

39*100 000=3 900 000 (у.о.),

Тобто прибуток страховика становитиме

$$\boldsymbol{4\ 800\ 000 - 3\ 900\ 000 = 900\ 000\ (у.о.).} \qquad (11)$$

Нехай *Т* – тариф, який сплачує страхувальник, *П* – нетто-премія, *n* – кількість угод. Зауважимо, що

$$\boldsymbol{(Т\text{-}П)\cdot n=(800\text{-}649{,}34)\cdot 6000 \approx 903983{,}5,} \qquad (12)$$

що представляє собою більш точне значення, отримане в (11), тобто дає нам ще один шлях обрахунку ймовірного прибутку страховика.

Приклад. В умовах попереднього прикладу визначити ймовірність того, що страховик буде мати збитки (при умові відсутності резервів та перестрахування).

Розв'язок. Обчислимо на скільки відшкодувань вистачить зібраних внесків:

$$6000*800/100000=48,$$

тобто на 48 відшкодувань.

Розорення відбудеться, якщо кількість страхових випадків перевищить 48, тобто ймовірність розорення

$$\boldsymbol{\varepsilon=P\{m>48\}.}$$

Максимальне знечення кількості страхових випадків з ймовірністю $1\text{-}\varepsilon$ становить

$$\boldsymbol{np+t\sqrt{npq}}\ , \qquad (13)$$

де t = НОРМСТОБР(1- ε), тобто

$$\boldsymbol{\varepsilon=1\text{-}НОРМСТРАСР(t).} \qquad (14)$$

Знайдемо t з рівняння

$$6000*0{,}005+t\sqrt{6000\cdot 0.005\cdot 0.995} = 48.$$

Отримаємо $t \approx 3{,}37$, звідки з (14) ймовірність розорення $\varepsilon \approx 0{,}0004$.

5. Перехід від одночасної ризикової премії до періодичної

На практиці часто бувають випадки, коли клієнт здійснює виплати не одномоментно, а частинами на протязі певного часу. Розглянемо, як змінюється в цьому випадку розрахунок розміру ризикової премії.

Приклад. Нехай укладено страхову угоду терміном на 1 рік про страхування будинку від пожежі. Припустимо, що ймовірність страхового випадку оцінена у 0,04, а страхова сума дорівнює ринковій вартості будинку 25000 у.о. Припустимо також, що настання страхового випадку означає повне знищення майна, тобто страхова сума виплачується повністю. Розрахувати розмір ризикової премії у випадку її одночасної сплати, а також у випадку щоквартальної розстрочки протягом року на умовах 20% річних..

Розв'язок. При обрахуванні одночасної ризикової премії розмір ризикової премії, обчислений за правилом еквівалентності ризиків, становить $Sp=25000\cdot 0{,}04=1000$ *(у.о.)*. Припустимо тепер, що клієнт сплачує ризикову премію частинами на початку кожного кварталу. Для обрахування квартальної премії неможна поділити її загальний розмір у 1000 у.о. на чотири, тому що у випадку, коли страховик не отримав одночасного внеску, в нього немає впевненості, що він отримає всю обумовлену суму, оскільки страховий випадок може наступити до цього моменту. Якщо страховий випадок відбувається до моменту повної сплати внесків, то клієнт звільняється від усіх подальших внесків, а компанія повинна виконати свої зобов'язання у повному обсязі. Тому, очевидно, додаткові ризики страховика повинні бути закладені при обрахуванні щоквартальної ризикової премії, тобто загальна сума внесків страхувальника повинна певним чином збільшитися.

При обрахуванні розміру квартальної ризикової премії будемо вважати, що ймовірність виникнення пожежі не залежить від пори року, тобто становить 0,01 для кожного кварталу. Перший внесок, який страхувальник здійснює на початку першого кварталу, страховик отримає з ймовірністю 1. До другого внеску пройде один квартал, на протязі якого з ймовірністю 0,01 може відбутися страховий випадок, і страховик не отримає подальші внески, або не відбутися з ймовірністю 0,99, тоді страховик отримає другий внесок. Ймовірність, що страховик отримає третій внесок становить 0,99·0,99≈0,98, четвертий – 0,99·0,99·0,99≈0,97. Встановлені у страховій угоді 20% річних, тобто 5% у квартал, призначені для компенсації знецінення грошей. Кожного наступного кварталу реальна вартість грошей у 1,05 разів менша, ніж попереднього. Тому на початку кожного чергового кварталу, починаючи з другого, ***реальна*** сума зібраних від клієнта внесків буде в 1,05 разів меншою ніж на початку попереднього. Позначимо квартальну ризикову премію через π, тоді її значення знаходять з рівняння:

$$Sp=1000=\pi+\pi\cdot 0{,}99/1{,}05+\pi\cdot 0{,}98/(1{,}05)^2+\pi\cdot 0{,}97/(1{,}05)^3\approx 3{,}67\,\pi, \qquad (15)$$

звідки

$$\pi=1000/3{,}67\approx 272{,}5 \text{ (у.о.)}.$$

Таким чином, річна премія становитиме

$$272{,}5\cdot 4=1090 \text{ (у.о.)},$$

що на 9% вище, ніж при умові одночасної сплати.

Зауважимо, що ліва частина рівняння (15) представляє собою математичне сподівання відшкодування страховика, а права – математичне сподівання внесків страхувальника, рівність яких лежить в основі принципу еквівалентності ризику сторін.

Приклад. Нехай в умовах угоди з попереднього прикладу передбачено, що, якщо страховий випадок відбувся до моменту повної сплати клієнтом періодичних премій, то страховик утримує з виплачуваної суми розмір недовнесених премій. Розрахувати розмір щоквартальних періодичних премій.

Розв'язок. Для обчислення періодичної премії, яка в даному прикладі, очевидно, буде нижчою ніж у попередньому, складемо наступну таблицю (де *н* – номінальні внески та відшкодування, *д* – дисконтовані внескі та відшкодування з урахуванням знецінення грошей, π – номінальна квартальна премія, $v = \frac{1}{1+\frac{i}{100}}$, де i – квартальна відсоткова ставка):

Квартал	**Ймовірність випадку**	**Отримано внесків**		**Виплачено відшкодувань**			
				у разі настання страхового випадку без утримання недоотриманих внесків		у разі настання страхового випадку з утриманням недоотриманих внесків	
		н	***д***	***н***	***д***	***н***	***д***
1	0,01	π	π	S	S	S-3π	S-3π***
2	0,01	2 π	$\pi + \pi v$**	S	Sv***	S-2π	(S-2π)v
3	0,01	3 π	$\pi + \pi v + \pi v^2$	S	Sv^2	S-π	(S-π)v^2
4	0,01	4 π	$\pi + \pi v + \pi v^2 + \pi v^3$	S	Sv^3	S	Sv^3
0*	0,96	4 π	$\pi + \pi v + \pi v^2 + \pi v^3$	0	0	0	0

* - страховий випадок на протязі року не відбувся;

** - в цьому прикладі незалежно від того, чи стався і коли страховий випадок страховик по суті отримує внески за кожен квартал з ймовірністю 1;

*** - виплачені відшкодування в реалії також знецінюються з відповідним коефіцієнтом щоквартального знецінення v.

У майновому страхуванні відшкодування не завжди дисконтуються, тому спочатку ми не будемо враховувати останній стовпчик, в той же час внески клієнтів завжди дисконтуються. Складемо балансове рівняння – математичне сподівання суми всіх дисконтованих внесків дорівнює математичному сподіванню суми всіх номінальних відшкодувань, або, що те саме, - математичне сподівання суми щоквартальних різниць між дисконтованим внеском та номінальним відшкодуванням дорівнює нулю:

$$0{,}01\cdot(\pi-(S-3\pi))+0{,}01\cdot(\pi+\pi v-(S-2\pi))+0{,}01\cdot(\pi+\pi v+\pi v^2-(S-\pi))+$$

$$+0{,}01\cdot(\pi+v+\pi v^2+\pi v^3-S)+0{,}96\cdot(\pi+\pi v+\pi v^2+\pi v^3)=0, \tag{16}$$

де v=1,05, S=25000.

Звідки $\pi \approx 268{,}1$ *(у.о.)*, що менше, ніж у попередньому прикладі.

У деяких видах страхування, наприклад, у страхуванні життя, відшкодування завжди дисконтуються. Розглянемо в нашому прикладі як зміниться періодична премія у разі дисконтування не тільки внесків, але й відшкодувань (останній стовпчик таблиці). Складемо балансове рівняння:

$$0{,}01\cdot(\pi-(S-3\pi))+0{,}01\cdot(\pi+\pi v-(S-2\pi)v)+0{,}01\cdot(\pi+\pi v+\pi v^2-(S-\pi)v^2)+$$

$$+0{,}01\cdot(\pi+v+\pi v^2+\pi v^3-Sv^3)+0{,}96\cdot(\pi+\pi v+\pi v^2+\pi v^3)=0, \tag{17}$$

де v=1,05, S=25000.

Звідки $\pi \approx 250$ *(у.о.)*, тобто періодична премія зменшилася.

Приклад. У попередньому прикладі ми вважали рівно ймовірним настання страхового випадку у кожному кварталі, тобто, по суті, час до настання страхового випадку вважався рівномірно розподіленим. Нехай в умовах попереднього прикладу час до настання страхового випадку розподілений за експоненційним законом, але ймовірність настання страхового випадку на протязі року становить, як і раніше, 0,04. Розрахувати періодичну ризикову премію.

Розв'язок. Тепер, очевидно, ймовірності настання страхового випадку в кожному кварталі не будуть рівними. Обчислимо їх.

Нехай $P(t)$ – ймовірність, що страховий випадок не відбудеться за час t.

$P(t)=e^{-\lambda t}$. За умовою, якщо t=1 рік, то $P(1)=e^{-\lambda}=0{,}96$, *звідки* $\lambda \approx 0{,}04$.

Обчислимо тепер ймовірності P_i, що страховий випадок не відбудеться в i-му кварталі:

$$P_1=P(1/4)=e^{-0.01}\approx 0{,}99;$$

$$P_2=P(2/4)=e^{-0.02}\approx 0{,}98;$$

$$P_3=P(3/4)=e^{-0.03}\approx 0{,}97;$$

$$P_4=P(1)=0{,}96.$$

Отримані ймовірності грають роль вагових коефіцієнтів для кожного доданку в рівнянні балансу. Так, рівняння (16) та (17) перетворяться, відповідно, у рівняння:

$$0{,}01\cdot(\pi-(S-3\pi))+0{,}02\cdot(\pi+\pi v-(S-2\pi))+0{,}01\cdot(\pi+\pi v+\pi v^2-(S-\pi))+$$

$$+0{,}03\cdot(\pi+v+\pi v^2+\pi v^3-S)+0{,}96\cdot(\pi+\pi v+\pi v^2+\pi v^3)=0$$

та

$$0{,}01\cdot(\pi-(S-3\pi))+0{,}02\cdot(\pi+\pi v-(S-2\pi)v)+0{,}01\cdot(\pi+\pi v+\pi v^2-(S-\pi)v^2)+$$

$$+0{,}03\cdot(\pi+v+\pi v^2+\pi v^3-Sv^3)+0{,}96\cdot(\pi+\pi v+\pi v^2+\pi v^3)=0.$$

Очевидно, збільшення ймовірностей настання страхової події у другому – четвертому кварталах призведе до збільшення значення періодичної премії порівняно з попереднім прикладом.

Зауважимо, що нами проаналізовано угоду з фіксованою виплатою S, але, якщо шкода розподілена за певним відомим законом, то у розрахунках замість страхової суми S використовується умовне математичне сподівання відшкодування страховика при настанні страхової події.

6. Поняття про початковий капітал (резерв) та перестрахування

Для підвищення ймовірності виживання страхової компанії необхідно створити резерв або заключити угоду про перестрахування. Будемо розглядати компанії з великим однорідним портфелем угод та використовувати у розрахунках нормальну апроксимацію розподілу кількості страхових випадків.

Приклад. Нехай портфель страхової компанії складається з N=3000 однорідних угод, ймовірність страхової події в кожній х яких складає p=0,003, а страхова сума S=250000 у.о. Розрахувати відносну ризикову надбавку, яка б забезпечила ймовірність не розорення не нижчу за 95% та розрахувати суму резерву при збереженні тої самої ймовірності не розорення та при умові, що відносна ризикова надбавка дорівнює середньо ринковому значенню 12% .

Розв'язок. В умовах прикладу ймовірність розорення ε=0,05, тоді

t=НОРМСТОБР(0,95)≈1,64. Відносна ризикова надбавка

$$\Theta = t\sqrt{\frac{q}{np}} = 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}997}{3000\cdot 0{,}003}} \approx 0{,}55,$$

тобто становить 55%, що абсолютно неприйнятно з точки зору конкурентоздатності.

Зауважимо, що середня кількість страхових випадків становить $Np=3000\cdot 0{,}003=9$, а їх максимальна кількість з ймовірністю 0,95 становить

$$Np+t\sqrt{Npq} = 9+1{,}64\sqrt{3000\cdot 0{,}003\cdot 0{,}997} \approx 13{,}93 \approx 14.$$

Ризикова премія покриє лише 9 страхових випадків. Відносна надбавка становить 12%, тобто покриє відшкодування в $np\Theta=9\cdot 0{,}12\approx 1$ випадках. Тоді відшкодування в решті можливих 4 випадках страховик повинен покрити за рахунок власного резерву, який має становити 4·250000=1000000 (у.о.).

Приклад. В угоді так званого квотного перестрахування доля перестраховика складає 20% по кожному ризику, але не більше 25000 у.о. по кожному випадку. Страховик (цедент, перестрахувальник, тобто той, хто перестраховує свій ризик) прийняв від страхувальника 3 ризики: 100, 125 та 150 тис. у.о. По всіх трьох угодах відбулися страхові випадки, які призвели до повного знищення майна. Скільки заплатить перестраховик цеденту?

Розв'язок. Розміри відшкодувань перестраховика складають 20% від суми ризику, тобто 20, 25 та 30 тис. у.о. відповідно, але в останньому випадку в силу обмеження відшкодування становитиме лише 25 тис. у.о. Таким чином, загальна сума відшкодувань становитиме 20+25+25=70 (тис. у.о.).

Розглянемо наступну задачу. У великому однорідному портфелі страховик відшкодовує збитки до рівня a включно, від рівня a до рівня b включно передає на перестрахування (сума ризику, більша за b, залишається незабезпеченою, тобто в принципі може призвести до розорення страховика). Необхідно визначити об'єм відповідальності перестраховика. Для цього за принципом еквівалентності ризиків сторін необхідно знайти ризикову премію в угоді перестрахування, а також обрахувати ризикову надбавку, шляхом обчислення відхилення ризику перестраховика від середнього. Таким чином буде обрахована нетто-премія страховика в угоді перестрахування.

Нехай Z – ризик перестраховика, тоді його середнє значення, яке дорівнює ризиковій премії в угоді перестрахування, становить

$$\boldsymbol{MZ}=\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}, \tag{18}$$

де a і b – межі відповідальності страховика, $f(x)$ – щільність розподілу ризику.

Приклад. Нехай в умовах попереднього прикладу страховику необхідно підвищити надійність з 95% до 99% за рахунок перестрахування. Оцінити ризикову премію в угоді перестрахування.

Розв'язок. В умовах попереднього прикладу максимальна кількість страхових випадків становить 14 з ймовірністю 95% . Якщо ж надійність підвищується до 99%, то ймовірність розорення зменшується до ε=0,01, звідки

t=НОРМСТОБР(0,99)≈2,33. В цьому випадку максимально можлива кількість страхових випадків становитиме

$$Np+t\sqrt{Npq}=9+2{,}33\sqrt{3000\cdot 0{,}003\cdot 0{,}997}\approx 16.$$

Таким чином, межі відповідальності перестраховика становлять від 14 до 16 страхових випадків

Оскільки для великого портфелю можна застосувати нормальну апроксимацію, будемо вважати, що ризик перестраховика розподілений за нормальним законом $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ з середнім $\mu=Np=9$ та дисперсією $\sigma^2=Npq\approx 9$. Межі відповідальності: $a=14,\ b=16$. Тоді, згідно (18), ризикова премія в угоді перестрахування дорівнює

$$\boldsymbol{MZ=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\int_{14}^{16}(x-14)e^{-\frac{(x-3)^2}{18}}dx=\frac{3}{\sqrt{2\pi}}(e^{-\frac{121}{18}}-e^{-\frac{169}{18}})+\frac{11}{2}\left(\Phi\left(\frac{11}{3}\right)-\Phi\left(\frac{13}{3}\right)\right)},$$

де $\Phi(x)$ – інтегральна функція Лапласа.

Якщо відома відносна ризикова надбавка, то можна порахувати нетто-премію перестраховика:

$$НП=РП(1+\Psi),$$

де НП – нетто-премія, РП – ризикова премія, Ψ – відносна ризикова надбавка.

Зауважимо, що в цілому перестрахування одиниці ризику коштує дорожче, ніж страхування цієї одиниці, тому цемент без суттєвих причин не звертається до перестраховика.

7. Поняття франшизи в угодах страхування

Іноді відповідальність страховика обмежена не тільки зверху, але й знизу, коли у відшкодуванні збитків, менших за певну межу, приймає участь сам страхувальник. Таке обмеження знизу відповідальності страховика називається франшизою. Звичайно, наявність франшизи призводить до зменшення величини ризикової премії.

Франшиза можу бути умовною та безумовною. Якщо ми маємо справу з безумовною франшизою, наприклад у 1000 у.о., то з кожної вимоги про виплату відшкодування буде відніматися ця сума. Таким чином, якщо збитки менші за франшизу у 1000 у.о., то немає сенсу звертатися за відшкодуванням у страхову компанію. Якщо ж збитки становлять *X*, де *X > 1000*, то сума відшкодувань становитиме *Y=X-1000* (у.о.):

$$Y=\begin{cases} 0, \text{якщо } X \le 1000, \\ X-1000, \text{якщо } X > 1000. \end{cases}$$

Якщо ж угода передбачає умовну франшизу, то страховик звільняється від відшкодувань збитків, менших за її величину, але повністю відшкодовує збитки, які перевищують її, тобто відшкодування

$$Y=\begin{cases} 0, \text{якщо } X \le 1000, \\ X, \text{якщо } X > 1000. \end{cases}$$

Нехай величина збитків *X* є випадковою із щільністю розподілу *f(x).* Тоді, якщо страхова сума дорівнює *S*, а безумовна франшиза становить *L*, то середня величина відшкодування *Y* (яка дорівнює ризиковій премії) дорівнює

$$\mathbf{MY}=\int_L^S (x-L)f(x)dx. \tag{19}$$

У разі умовної франшизи середня величина відшкодування становитиме

$$\mathbf{MY}=\int_L^S xf(x)dx. \tag{20}$$

Приклад. Нехай розподіл шкоди *X* заданий у таблиці:

X	50	100	150	250	1000
p	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

Порахувати величину ризикової премії при відсутності франшизи, а також при безумовній та умовній франшизі 200 у.о.

Розв'язок. При відсутності франшизи ризикова премія дорівнює

$$MX=50\cdot 0{,}3+100\cdot 0{,}3+150\cdot 0{,}2+250\cdot 0{,}1+1000\cdot 0{,}1=200\ (у.о).$$

У разі безумовної франшизи у 200 у.о. розподіл відшкодування страховика зміниться на

X	50	800	0
p	0,1	0,1	0,8

Тоді ризикова премія становитиме

$$MX=50\cdot 0,1+800\cdot 0,1=85.$$

У разі умовної франшизи у 200 у.о. розподіл відшкодування страховика зміниться на

X	250	1000	0
p	0,1	0,1	0,8

Тоді ризикова премія становитиме

$$MX=250\cdot 0,1+1000\cdot 0,1=125.$$

Таким чином, франшиза суттєво знижує вартість страхування. Але франшизу доцільно застосовувати не у всіх угодах. Наприклад, при страхуванні автомобіля від угону подія або відбувається, або ні, тобто проміжних варіантів немає, і франшизу не застосовують.

II. Задачі

1. Автомобіль вартістю 10000 у.о. застрахований від угону на повну вартість, а також від аварії. Ймовірність угону становить 0,03, при цьому шкода дорівнює повній вартості автомобіля. Ймовірність аварії становить 0,05, в цьому випадку шкода розподілена рівномірно.

Визначити:

a) одночасні ризикові премії при роздільному страхуванні,
b) одночасні ризикові премії при комбінованому страхуванні,
c) обчислити нетто-премії при роздільному страхуванні, вважаючи ризикові надбавки рівними середньоквадратичним відхиленням, а портфель складається з 2500 однорідних угод,

Розв'язок.

a) При роздільному страхуванні маємо:

ризикова премія при страхуванні від угону становить S·p=10000·0,03=300 у.о.,

а при страхуванні від аварії , оскільки шкода X розподілена рівномірно на $[0{,}10000]$, то середня шкода при умові настання страхового випадку дорівнює MX=5000, відповідно ризикова премія дорівнює MX·p=5000·0,05=250.

b) При комбінованому страхуванні необхідно враховувати той факт, що ймовірність настання одночасно угону та аварії практично неможлива (ймовірність дорівнює 0,03·0,05=0,0015), тобто ймовірність настання угону означає відсутність аварії, а настання аварії означає відсутність угону, тобто сумарна ризикова премія за комбінованим страхуванням дорівнює

$S \cdot P(У \cdot \overline{A}) + MX \cdot P(\overline{У} \cdot A)$=10000·0,03·0,95+5000·0,97·0,05=527,50 у.о. (де подія У - угон, подія А – аварія), що, очевидно, менше за 300+250=550 при роздільному страхуванні.

c) При страхуванні від угону маємо об'єм портфелю n=2500, ймовірність страхового випадку p=0,03, тобто середньоквадратичне відхилення СКВ= $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2500 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97} \approx 8{,}53$. Тобто ризикова надбавка становить 8,53 у.о. і нетто-премія дорівнює 300+8,53=308,53 у.о.

Аналогічно, при страхуванні від аварії маємо ризикову надбавку $\sqrt{2500 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} \approx 10{,}90$ у.о., тобто нетто-премія дорівнює 250+10,90=260,90 у.о.

2. Автомобіль вартістю 12000 у.о. застрахований від аварії, ймовірність якої дорівнює 0,05. Шкода розподілена рівномірно. Знайти одночасну ризикову премію та проаналізувати зміни цієї премії при наявності умовної та безумовної франшизи у розмірі 1000, 2000, 3000 у.о.

Розв'язок.

Одночасна ризикова премія РП= MX·p, де X – шкода, p – ймовірність страхового випадку. Тобто РП=12000/2·0,05=300 у.о. Нехай L - франшиза, C – повна вартість автомобіля, f(x) – щільність розподілу шкоди, p – ймовірність страхового випадку. Тоді, якщо L – безумовна франшиза, то

РП= $p \cdot \int_{L}^{C-L} x \cdot f(x)dx = 0{,}05 \cdot \frac{1}{12000} \int_{L}^{12000-L} xdx \approx 2{,}08 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 \Big|_{L}^{12000-L}$.

Тобто у випадку безумовної франшизи будемо мати:

Франшиза (у.о.)	1000	2000	3000
РП (у.о.)	250	200	150

У випадку умовної франшизи

РП= $p \cdot \int_{L}^{C} x \cdot f(x)dx = 0{,}05 \cdot \frac{1}{12000} \int_{L}^{12000} xdx \approx 2{,}08 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 \Big|_{L}^{12000}$.

Тобто у цьому випадку будемо мати:

Франшиза (у.о.)	1000	2000	3000
РП (у.о.)	297,92	291,67	281,25

3. У портфелі - 1000 однорідних угод страхування автомобілів від угону. Автомобілі страховані на повну вартість 12000 у.о.. Ймовірність страхового випадку становить 0,02.

Знайти:

a) одночасну ризикову премію,
b) нетто-премію, вважаючи ризикову надбавку, рівною середньоквадратичному відхиленню,
c) квартальну ризикову премію при рівномірному розподілі ймовірності страхового випадку на протязі року при умові, що знецінення грошей становить 12% у рік.

Розв'язок.

a) Одночасна ризикова премія по одній угоді складає РП=p·S=0,02·12000=240 у.о. , де S – страхова сума, яка в нашому випадку співпадає з вартістю, p – ймовірність страхового випадку.

b) Середньоквадратичне відхилення дорівнює

СКВ=$\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ = $\sqrt{1000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}$ ≈4,23. Тобто нетто-премія дорівнює

НП=240+4,23=244,23 по кожній угоді портфеля (n – його об'єм).

c) Оскільки ймовірність страхового випадку розподілена рівномірно, то ймовірність настання такого випадку на протязі одного кварталу дорівнює 0,02/4=0,005. Нехай ромір квартальної ризикової преміє дорівнює П. Тобто за 1-й квартал страховик отримає ризикову премію $РП_1$=П. Ризикову премію за 2-й квартал страховик отримає лише, якщо не трапиться страховий випадок у 1-му кварталі, тобто з ймовірністю 0,995. Враховуючи знецінення грошей за 1-й квартал у розмірі 12/4=3% маємо, $РП_2$=П·0,995/1,03≈0,966·П.

Ризикову премію за 3-й квартал страховик отримає лише, якщо не трапиться страховий випадок у 1-му і 2-му кварталах, тобто з ймовірністю 0,995·0,995. До того часу гроші знеціняться у $(1{,}03)^2$ разів. Тобто $РП_3=П\cdot 0{,}995^2/(1{,}03)^2\approx 0{,}933\cdot П$. Аналогічно, $РП_4=П\cdot 0{,}995^3/(1{,}03)^3\approx 0{,}901П$. Для знаходження квартальної премії складемо рівняння:

12000·0,02=П(1+0,0,966+0,933+0,901)=3,8·П. Звідки, П=63,16. Тобто в умовах розстрочки річна ризикова премія складе 4·63,16=252,64 у.о.

4. Котедж куплено за 200000 у.о. Через 2 роки власник вирішив його застрахувати від пожежі. Страховик оцінив об'єкт у 180000 у.о. Сторони домовилися про страхову суму 150000 у.о. і заключили угоду на 1 рік. Через півроку будинок згорів. Експерт оцінив те, що від нього залишилося у 60000 у.о. Яку компенсацію отримає страхувальник?

Розв'язок:

а) Якщо між страховиком і страхувальником була заключна угода за правилом пропорційного страхування, то при умові повного знищення об'єкту страхувальник отримав би $150000\cdot\frac{150000}{180000}=125000$ у.о. Але відшкодування буде зменшене на 60000 у.о. (які страхувальник може отримати, якщо, наприклад, продасть об'єкт). Тобто страхувальник отримає 125000–60000=65000 у.о.

б) У випадку угоди за правилом першого ризику, оскільки шкода не перевищує страхову суму 150000 у.о., то вона має бути виплачена повністю за вирахуванням 60000 у.о., тобто відшкодування становить 150000-60000=90000 у.о.

5. При виникненні страхового випадку, ймовірність якого 0,05, величина шкоди розподілена дискретно за законом

X (у.о.)	200	500	800	1000
P	0,3	0,4	0,2	0,1

Знайти середню величину та дисперсію збитків страховика.

Розв'язок:

Нехай X – шкода, A – подія, яка полягає у тому, що стався страховий випадок. Тоді середня шкода при умові, що стався страховий випадок)

$M(X/A)\cdot=200\cdot0,3+500\cdot0,4+800\cdot0,2+1000\cdot0,1=520$ у.о..

Тоді середня шкода (середні збитки страховика)

$MX= M(X/A)\cdot p+0\cdot(1\text{-}p)=520\cdot0,05=26$ у.о..

Дисперсія шкоди знаходиться за формулою $D(X)=D(X/A)\cdot p+M(X/A)^2\cdot p\cdot(1\text{-}p)$.

Очевидно, при виникненні шкоди умовний розподіл X^2 має вигляд:

X^2	40000	250000	640000	1000000
P	0,3	0,4	0,2	0,1

Тобто, $M(X/A)^2=40000\cdot0,3+250000\cdot0,4+640000\cdot0,2+1000000\cdot0,1=340000$.

$D(X/A)= M(X/A)^2 - M^2(X/A)=340000 - 520^2=69600$.

Тобто шукана дисперсія шкоди (збитків страховика)

$D(X)=69600\cdot0,05+340000\cdot0,05\cdot0,95=19630$.

6. Знайти в умовах задачі 5 середні збитки страховика, якщо об'явлена франшиза 300 у.о. (безумовна; умовна)

Розв'язок:

а) У випадку умовної франшизи у 300 у.о., оскільки середні збитки становлять 520 у.о., тобто перевищують величину франшизи, відшкодування має бути виплачено повністю, тобто у розмірі 520 у.о.

б) У випадку безумовної франшизи у 300 у.о. величина виплат повинна бути зменшена на 300, тобто становитиме 520-300=220 у.о.

7. Знайти в умовах задачі 5 середню величину збитків страховика, якщо страхова сума складала 700 у.о. (у разі пропорційного відшкодування; у разі відшкодування за правилом першого ризику).

Розв'язок:

З умови задачі випливає, що вартість об'єкту складає 1000 у.о., у той час, як страхова сума лише 700 у.о. Тобто

а) у випадку пропорційного відшкодування, розмір середніх збитків страховика складе $520\cdot\frac{700}{1000}$=364 у.о., т.я. по сути в умовах пропорційного відшкодування шкода розподілена за законом

X (у.о.)	0,7·200	0,7·500	0,7·800	0,7·1000
P	0,3	0,4	0,2	0,1

б) у випадку відшкодування за правилом першого ризику (оскільки, якщо розмір шкоди перевищує 700 у.о., то компенсується лише 700 у.о.) шкода має наступний розподіл

X (у.о.)	200	500	700
P	0,3	0,4	0,3

Тобто середня шкода становить 200·0,3+500·0,4+700·0,3=470 у.о.

8. В угоді вогневого страхування котеджу вартістю 200000 у.о. оцінити «економію» страхувальника на розмірі ризикової премії, якщо він заключить «комбіновану» угоду, порівняно із загальною вартістю чотирьох окремих угод. Угода передбачає страхування від наступних випадків:

від пожежі, ймовірність якої дорівнює 0,004,

від удару блискавки, ймовірність якого 0,002,

від вибуху, ймовірність якого 0,003,

від падіння літального апарату, ймовірність чого становить 0,001.

<u>Розв'язок:</u>

У випадку роздільного страхування середня ризикова премія становитиме при страхуванні

- від пожежі – $200000 \cdot 0{,}004 = 800$,
- від удару блискавки – $200000 \cdot 0{,}002 = 400$,
- від вибуху – $200000 \cdot 0{,}003 = 600$,
- від падіння літального апарату – $200000 \cdot 0{,}001 = 200$.

Тобто сумарна середня ризикова премія складе 800+400+600+200=2000 у.о.

У випадку комбінованого страхування, скористаємось тим, що одночасно може відбутися лише одна страхова подія. Тобто здійснення одного страхового випадку означає, що решта три випадки не здійснилися. Очевидно, наступлення страхових випадків незалежне, тому ймовірність пожежі дорівнює

$0{,}004 \cdot (1-0{,}002) \cdot (1-0{,}003) \cdot (1-0{,}001) = = 0{,}004 \cdot 0{,}998 \cdot 0{,}997 \cdot 0{,}999 = 0{,}00398$,

ймовірність удару блискавки дорівнює $0{,}002 \cdot 0{,}996 \cdot 0{,}997 \cdot 0{,}999 = 0{,}00198$,

ймовірність вибуху дорівнює $0{,}003 \cdot 0{,}996 \cdot 0{,}998 \cdot 0{,}999 = 0{,}00298$, ймовірність падіння літального апарату дорівнює 0,001·0,998·0,997·0,996=0,00099.

Таким чином, середня ризикова премія становитиме

200000·(0,00398+0,00198+0,00298+0,00099)= 1986 у.о. Тобто економія порівняно з роздільним страхування становить 2000-1986=14 у.о.

9. На страховому ринку даний ризик страхують дві компанії. Портфель однієї з них містить 400 однакових угод, а іншої – 900 угод. Яку ризикову премію і яку нетто-премію назначить кожний з страховиків, якщо страхова сума дорівнює 1000 у.о., ймовірність страхового випадку складає 0,01, майно знищується повність і, відповідно, шкода повністю компенсується. Страховики зобов’язані забезпечити ймовірність виживання 95%, не маючи початкового капіталу і не користуючись перестрахуванням.

Розв’язок:

З інтегральної теореми Лапласа випливає, що

$P\{|m-np|<t\sqrt{npq}\}=2\Phi(t)$, де $\Phi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функція Лапласа. Звідки ймовірність розорення страховика $\varepsilon = P\{m>np+t\sqrt{npq}\}=(1-2\Phi(t))/2=0{,}5-\Phi(t)$ *), де m - кількість страхових випадків, n - об’єм портфелю, p - ймовірність страхового випадку, q=1-p.

Ймовірність виживання становить 95%, тобто ймовірність розорення (перевищення кількістю страхових випадків «правої границі», рівної np+t·$\sqrt{npq}$) ε=1-0,95=0,05. Звідки Φ(t)=0,5-0,05=0,45 і за таблицями функції Лапласа t=1,64. Середня кількість страхових випадків становить n·p, абсолютна надбавка дорівнює d= t·$\sqrt{npq}$ =1,64·$\sqrt{n\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99}$. Відносна надбавка

$\Theta = \frac{d}{np} = t \cdot \sqrt{\frac{q}{np}}$. Ризикова премія становить РП=S·p, а нетто-премія – НП=S·p·(1+Θ)=S·p(1+$t \cdot \sqrt{\frac{q}{np}}$), де S – страхова сума.

Виконаємо необхідні підрахунки. РП = 1000·0,01=10 у.о. незалежно від об'єму портфелю.

Нехай n=400. Тоді $НП_1$=1000·0,01·(1+$1{,}64\sqrt{\frac{0{,}99}{400 \cdot 0{,}01}}$)≈18,16 у.о. А якщо n=900, то $НП_2$=1000·0,01·(1+$1{,}64\sqrt{\frac{0{,}99}{900 \cdot 0{,}01}}$)≈15,44 у.о.

*) Зауваження: якщо замість функції Лапласа користуватися функцією стандартного нормального розподілу Fст(t)= $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, то ймовірність розорення ε= $P\{m > np + t\sqrt{npq}\} = 1 - F_{cm}(t)$. Звідки $F_{ст}$(t)=1 - ε і шукане значення t можна знайти як значення функції Excel НОРМСТОБР у точці 1- ε, тобто у нашому випадку НОРМСТОБР(1-0,05).

10. Портфель містить 800 угод, в кожній з яких страхова сума дорівнює 5000 у.о., а ймовірність страхового випадку 0,01. Ризикова надбавка не може перевищувати 25%. Страховик зобов'язаний забезпечити надійність 99%. Який початковий капітал він повинен мати?

Розв'язок:

Ймовірність розорення ε=0,5-Φ(t)=1-$F_{ст}$(t) (см. задачу 9 та зауваження до неї). В нашому випадку ε=1-0,99=0,01. Звідки за таблицями функції Лапласа або, користуючись функцією Excel НОРМСТОБР, знаходимо t: t≈2,33.

Нетто-премія НП=S·p·(1+Θ)=S·p(1+ $t\cdot\sqrt{\frac{q}{np}}$), де S – страхова сума., p - ймовірність страхового випадку, q=1 - p, n - об'єм портфелю, Θ - відносна ризикова надбавка. Тобто НП=5000·0,01·(1+2,33· $\sqrt{\frac{0{,}99}{800\cdot 0{,}01}}$)=91 у.е. Значить, для забезпечення необхідної надійності у 99% страховик повинен зібрати 800·91=72800 у.о. нетто-премій. Але, за умовою, надбавка не може перевищувати 25%, тобто Θ ≤ 0,25. Таким чином, НП=S·p·(1+Θ)≤5000·0,01·(1+0,25)=62,5. Тобто загальна сума зібраних нетто-премій не буде більшою за 62,5·800= 50000 у.о. Таким чином, різницю 71800-50000=21800 у.о. страховик повинен забезпечити власним капіталом (при умові відсутності перестрахування).

11. В умовах задачі 10 страховик не має власних коштів і повинен заключити угоду про перестрахування. У перестраховика ризикова надбавка дорівнює 30%. Обчислити нетто-премію в угоді перестрахування.

Розв'язок:

Нехай X - шкода страховика по одній угоді, Y – сумарна шкода страховика по усьому портфелю, Z - шкода перестраховика. Нехай A - випадкова подія, яка полягає у настанні страхового випадку. Оскільки, при умові настання події A, X=5000 з ймовірністю 1 (тобто при настанні події A шкода X – константа), то M(X/A)=5000 і D(X/A)=0. Тоді (см. задачу 5) MX=5000·0,01=50, $D(X)=D(X/A)\cdot p+M(X/A)^2\cdot p\cdot(1-p).=5000^2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99\approx 25\cdot 10^4$. Тоді μ=MY=n·MX=800·50=40000, $D(Y)=n^2\cdot D(X)=800^2\cdot 25\cdot 10^4=16\cdot 10^{10}$, звідки $\sigma=\sqrt{D(Y)}=4\cdot 10^5$.

За умов задачі 10, перестраховику має бути переданий ризик від a=50000 до b=72800 у.о., оскільки страховиком буде зібрано лише 50000 у.о. нетто-премій, а для забезпечення надійності у 99% потрібно зібрати 72800 у.о. Виходячи з нормальної апроксимації сумарної шкоди у портфелі, середня шкода перестраховика дорівнює

$$M(Z)= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(x-a)dx=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}})+\frac{a-\mu}{2}(\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}))\approx$$

≈372,40 у.о. Це є ризикова премія в угоді перестрахування. Враховуючи надбавку у 30%, маємо нетто-премію в угоді перестрахування 372,4·1,3=484,12 у.о.

12. Портфель складає 500 однорідних угод, ймовірність страхового випадку 0,01, страхова сума 10 о.с.с.- виплачується повністю при настанні страхового випадку, надбавка складає 20%. Знайти надійність, забезпечену нетто-премією.

Розв’язок:

Нетто-премія НП= S·p·(1+Θ)=10·0,01(1+0,2)=0,12 о.с.с..

Відносна надбавка $\Theta=\frac{d}{np}=t\cdot\sqrt{\frac{q}{np}}$ =t· $\sqrt{\frac{0,99}{500\cdot 0,01}}$ =0,44·t=0,2. Звідки

t=0,2/0,44≈0,45. Тобто ймовірність розорення $\varepsilon=0,5-\Phi(t)=1-F_{ст}(t)=0,33$. Надійність, яку забезпечує нетто-премія у 0,12 о.с.с., дорівнює лише 1-0,33=0,67, тобто 67%.

13. В портфелі компанії 30 угод з ймовірністю страхового випадку 0,01 та страховою сумою 1000 у.о. Які кошти повинен мати страховик, щоб з практичною достовірністю (0,999) гарантувати виконання своїх зобов’язань, якщо ризикова надбавка не може перевищувати 25%.

Розв’язок:

Оскільки ймовірність розорення $\varepsilon=0,5-\Phi(t)=1-F_{ст}(t)=0,001$, то t≈3,09.

Нетто-премія по кожній угоді становитиме НП= $S \cdot p \cdot (1+\Theta)=1000 \cdot 0{,}01(1+0{,}25)=12{,}5$ у.о., тобто по усьому портфелю $12{,}5 \cdot 30=375$ у.о. В той же час, для забезпечення надійності у 0,999 нетто-премія по одній угоді має складати $НП=S \cdot p(1+ t \cdot \sqrt{\frac{q}{np}})=1000 \cdot 0{,}01 \cdot (1+ 3{,}09 \cdot \sqrt{\frac{0{,}99}{30 \cdot 0{,}01}}) \approx 66{,}1$ у.о., тобто по усьому портфелю – 66,1*30=1983 у.о. Таким чином, страховик повинен мати власні кошти у розмірі

1983-375=1608 у.о.

Використана література

1. Бауэрс Н. и др. Актуарная математика.
2. Джалладова І.А., Шарапов О.Д. Сучасні аспекти актуарної математики.
3. Ковтун І.О. та ін. Основи актуарних розрахунків.
4. Корнилов И.А. Актуарные расчеты в имущественном страховании.
5. Корнилов И.А. Основы страховой математики
6. Миронкин Ю.Н. и др. Актуарные расчеты
7. Фалин Г.И. и др. Актуарная математика в задачах.