Гембарська С.Б.

Волинський національний університет імені Лесі Українки
gembar@mail.lutsk.ua

ДОТИЧНІ ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ЧОТИРИГАРМОНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ПУАССОНА В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ

Теореми П. Фату [1] про поведінку аналітичних (гармонійних) в крузі функцій узагальнювалися як за рахунок розширення класів досліджуваних функцій, так і за рахунок вибору методів підходу до межових точок. Порівняння дотичних і недотичних підходів до межі круга $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$ привело Літтлвуда [2] до твердження, що існує така обмежена грмонічна функція h в $\mathcal{D}$ така, що

$$\lim_{|z|\to 1, z\in C_\theta} h(z) \tag{1}$$

не існує майже для всіх θ, $0 \le \theta \le 2\pi$, де C_θ одержується з довільної дотичної кривої C_0 в $\mathcal{D}$ до кола в точці $z = 1$ обертанням на кут θ.

В 1990 р. Аікава Хіроакі [3] довів, що сформульоване твердження має місце для всіх θ, $0 \le \theta \le 2\pi$. В роботах [4], [5] встановлено, шо даний результат справедливий для обмежених бігармонійних та тригармонійних функцій з певними властивостями їх на одиничному колі.

Розв'язком задачі Діріхле для рівняння $\Delta^4 u = 0$ в крузі $\mathcal{D}$, де функція $u = u(re^{i\varphi})$, $0 \le r < 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, задовольняє крайовим умовам

$$u\Big|_{\partial\mathcal{D}} = g_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\mathcal{D}} = g_1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{\partial\mathcal{D}} = g_2, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\Big|_{\partial\mathcal{D}} = g_3,$$

де g_0, g_1, g_2, g_3 — функції, задані на межі х певними властивостями, що забезпечують існування і єдиність розв'язку цієї задачі, є функція

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{(1-r^2)^4}{12\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Bigg[\Bigg(\frac{6(1-r\cos(\varphi-t))^3}{(r^2 2r\cos(\varphi-t)+1)^4} - \frac{3r\cos(\varphi-t)(1-r\cos(\varphi-t))}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^3} -$$

$$- \frac{\frac{3}{4} r\cos(\varphi-t)}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^2} \Bigg) g_0(e^{it}) + 3\Bigg(\frac{\frac{r}{2}\cos(\varphi-t)}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^2} -$$

$$-\frac{2(r\cos(\phi-t)-1)^2}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^3}\Bigg)g_1(e^{it})+3\frac{1-r\cos(\varphi-t)}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^2}g_2(e^{it})$$

$$-\frac{1}{r^2-2r\cos(\varphi-t)+1}g_3(e^{it})\Bigg]dt. \qquad (2)$$

Якщо на одиничному колі $g1=g_2=g_3=0$, то розв'язком відповідної задачі Діріхле є чотиригармонійний інтеграл Пуссона:

$$u_{g_0}(re^{i\phi}))=\frac{(1-r^2)^4}{12\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Bigg[\frac{6(1-r\cos(\varphi-t))^3}{(r^2 2r\cos(\varphi-t)+1)^4}-$$

$$-\frac{3r\cos(\varphi-t)(1-r\cos(\varphi-t))}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^3}-\frac{\frac{3}{4}r\cos(\varphi-t)}{(r^2-2r\cos(\varphi-t)+1)^2}\Bigg]g_0(e^{it})dt.$$

Теорема. Існує обмежена чотири гармонійнафункція $p(z)$ в $\mathcal{D}$ така, що

$$\lim_{|z|\to 1, z\in C_\theta} p(z)$$

не існує для всіх θ, $0\le\theta\le 2\pi$.

1. Fatou P. Series trigonometriqes et series du Taylor // Acta Math. - 1906. - 30. - P. 335-400.
2. Littlewood J.E. On a theorem of Fatou // J. London Math. Soc. - 1927. - 2. - P. 172-176.
3. Aikawa H. Harmonic function having no tangential limits // Proc. Amer. Soc. - 1990. - 108, № 2. - P. 457-464.
4. Гембарська С.Б. Дотичні граничні значення бігармонійного інтеграла Пуассона в крузі // Укр. мат. журн. - 1997. - 49, № 9. - С. 1171-1176.
5. Гембарська С.Б. Існування тригармонійних в крузі функцій, які в кожній точці не мають дотичних границь // Ряди Фур'є: теорія і застосування // Праці Інституту математикм НАН України. Т. 20. - К.: Ін-т математики НАН України, 1998. - С. 92-100.