УДК 517.9:519.61

А.В. Чичурин

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ШАЗИ И ИНТЕГИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШАЗИ С ШЕСТЬЮ ПОСТОЯННЫМИ ПОЛЮСАМИ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ *MATHEMATICA*

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение Шази третьего порядка с шестью постоянными полюсами. Используя возможности системы *Mathematica*, построен программный модуль, позволяющий находить решение соответствующей системы Шази и приведены программные средства, позволяющие находить решение уравнения Шази в численной или аналитической форме, а также осуществлять процесс визуализации и анимации частных решений.

Введение

В работе [1] Ж. Шази при решении задачи об отыскании дифференциальных уравнений третьего порядка Пенлеве-типа с шестью особыми точками построил дифференциальное уравнение вида

$$w''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{(w'-a_k{}')(w''-a_k{}'') + A_k (w'-a_k{}')^3 + B_k (w'-a_k{}')^2 + C_k (w'-a_k{}')}{w-a_k} + D\,w'' +$$

$$+E\,w' + \prod_{i=1}^{6}(w-a_i) \sum_{k=1}^{6} \frac{F_k}{w-a_k}\,. \qquad (1)$$

Уравнение (1) содержит 32 функции по $z: a_k, A_k, B_k, C_k, F_k$ $(k=\overline{1,6})$, D, E. Развивая метод Пенлеве [2] для уравнения (4), Шази получил систему из 31 алгебраического и дифференциальных уравнений, в которых в качестве неизвестных выступают 32 функции – коэффициенты уравнения (1) [1]:

$$\sum_{k=1}^{6} A_k = 0,\ \sum_{k=1}^{6} a_k A_k = -6,\ \sum_{k=1}^{6} a_k{}^2\, A_k = -2\sum_{k=1}^{6} a_k, \qquad (2)$$

$$2\,A_k^2 + \sum_j \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0\ , \qquad (3)$$

$$2D + \sum_{k=1}^{6}(B_k - 3a_k{}'A_k) = 0,\ \sum_{k=1}^{6} F_k = \sum_{k=1}^{6} a_k F_k = \sum_{k=1}^{6} a_k{}^2\, F_k = 0, \qquad (4)$$

$$-(-\frac{5}{2}A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j})B_k + \sum_j (\frac{1}{2}A_k + \frac{1}{a_k - a_j})B_j = -A_k{}' +$$

$$+A_k \sum_j \frac{a_k{}' - a_j{}'}{a_k - a_j} - 3\sum_j A_j \frac{a_k{}' - a_j{}'}{a_k - a_j} + \frac{3}{2}A_k \sum_{i=1}^{6} a_i{}' A_i, \qquad (5)$$

$$-(2\,A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j})C_k + \sum_j C_j \frac{1}{a_k - a_j} = B_k^2 - B_k{}' - B_k \sum_j \frac{a_k{}' - a_j{}'}{a_k - a_j} -$$

$$-\sum_j \frac{3\,A_j (a_k{}' - a_j{}')^2 + 2B_j (a_k{}' - a_j{}')}{a_k - a_j} + B_k\, D - E - \sum_j \frac{a_k{}'' - a_j{}''}{a_k - a_j}, \qquad (6)$$

$$-a_k'''-B_kC_k+C_k'+\sum_j \frac{(a_k'-a_j')(a_k''-a_j''-C_k)+A_j(a_k'-a_j')^3}{a_k-a_j}+$$

$$+\sum_j \frac{B_j(a_k'-a_j')^2+C_j(a_j'-a_k')}{a_k-a_j}+E\,a_k'+D\,(a_k''-C_k)+F_k\prod_j(a_k-a_j)=0\,. \tag{7}$$

Решение системы (2), (3) имеет вид [3; 4]

$$A_k=\frac{-6a_k^4+4\sigma_1a_k^3+3(\alpha_2-\sigma_2)a_k^2-3\beta_2a_k+3\beta_3-\sigma_4}{6a_k^5-5\sigma_1a_k^4+4\sigma_2a_k^3-3\sigma_3a_k^2+2\sigma_4a_k-\sigma_5}\quad (k=\overline{1,6})\,, \tag{8}$$

где основные симметрические многочлены σ_k, составленные из элементов a_k $(k=\overline{1,6})$, связаны с величинами α_2, β_2, β_3 следующими соотношениями

$$\beta_2=\frac{(3\alpha_2-\sigma_2)(2\alpha_2\sigma_1-3\sigma_3)-2\sigma_1\sigma_4+6\sigma_5}{18\alpha_2+\sigma_1^2-6\sigma_2}\,, \tag{9}$$

$$\beta_3=\frac{2\sigma_1\sigma_5-(3\alpha_2-\sigma_2)(12\alpha_2^2-4\alpha_2\sigma_2+\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4)-2\sigma_1\sigma_4+6\sigma_5}{2(18\alpha_2+\sigma_1^2-6\sigma_2)}\,, \tag{10}$$

а функция α_2 удовлетворяет уравнению 5-й степени:

$$\begin{gathered}1296\alpha_2^5-1296\sigma_2\alpha_2^4+216(2\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_3-\sigma_4)\alpha_2^3+24(\sigma_1^2\sigma_4-2\sigma_2^3-6\sigma_2(\sigma_1\sigma_3-2\sigma_4)-\\-9\sigma_1\sigma_5+54\sigma_6)\alpha_2^2+(12\sigma_1(\sigma_3(2\sigma_2^2-3\sigma_4)+6\sigma_2\sigma_5)+\sigma_1^2(9\sigma_2^3-8\sigma_2\sigma_4+144\sigma_6)-\\-12(4\sigma_2^2\sigma_4-9\sigma_3\sigma_5+72\sigma_2\sigma_6)-4\sigma_1^3\sigma_5)\alpha_2+(2\sigma_1\sigma_4-3\sigma_2\sigma_3-6\sigma_5)(\sigma_1^2\sigma_3-4\sigma_1\sigma_4+\\+12\sigma_5)+4(\sigma_1^2-6\sigma_2)^2\sigma_6=0\,.\end{gathered} \tag{11}$$

Таким образом, исследование уравнения (1) на первом этапе сводится к отысканию решений системы (4)–(7). Общий метод исследования этой системы и построения уравнения (1) приведен в работах [5; 6].

В данной работе строится программный модуль, позволяющий находить решение соответствующей системы Шази, а также приведены программные средства, позволяющие находить решение уравнения Шази вида

$$w'''=\sum_{k=1}^{6}\frac{w'\,w''+A_kw'^3+B_kw'^2+C_kw'}{w-a_k}+D\,w''+E\,w'+\sum_{k=1}^{6}\frac{F_k}{w-a_k}\prod_{i=1}^{6}(w-a_i) \tag{12}$$

с шестью постоянными полюсами a_k $(k=\overline{1,6})$ в численной или аналитической форме. На конкретном примере показано, как осуществлять процесс визуализации или анимации искомых частных решений.

Основной результат

Модуль, позволяющий по заданным значениям величин a_k $(k=\overline{1,6})$ находить решения соответствующей системы (4)–(7), а следовательно, построить уравнение (12) имеет вид:

```
constrEquationChazy[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, a6_] :=
 Module[{eqα2, sol1}, ρ1 = {a1 → a1, a2 → a2, a3 → a3, a4 → a4, a5 → a5, a6 → a6};
```

$$\texttt{equationChazy} = w'''[z] == \sum_{k=1}^{6}\frac{1}{w[z]-a_k}\left(w'[z]\,w''[z]+\mathcal{A}_k\,w'[z]^3+b_k\,w'[z]^2+c_k\,w'[z]\right)+d\,w''[z]+$$

$$e\,w'[z]+\sum_{k=1}^{6}\frac{f_k}{w_k[z]-a_k}\prod_{i=1}^{6}(w[z]-a_i);$$

$$\sigma_1 = \texttt{SymmetricPolynomial}[1,\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}];$$
$$\sigma_2 = \texttt{SymmetricPolynomial}[2,\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}];$$
$$\sigma_3 = \texttt{SymmetricPolynomial}[3,\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}];$$
$$\sigma_4 = \texttt{SymmetricPolynomial}[4,\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}];$$
$$\sigma_5 = \texttt{SymmetricPolynomial}[5,\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}];$$
$$\sigma_6 = \texttt{SymmetricPolynomial}[6,\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}];$$

$$\beta_2 = \frac{(3\alpha_2-\sigma_2)\,(2\alpha_2\sigma_1-3\sigma_3)-2\sigma_1\sigma_4+6\sigma_5}{18\alpha_2+\sigma_1^2-6\sigma_2};$$

$$\beta_3 = \left(-(3\alpha_2-\sigma_2)\left(12\alpha_2^2-4\alpha_2\sigma_2+\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4\right)+2\sigma_1\sigma_5\right)\Big/\left(2\left(18\alpha_2+\sigma_1^2-6\sigma_2\right)\right);$$

$$\begin{aligned}\texttt{eq}\alpha 2 = {} & 1296\alpha_2^5-1296\alpha_2^4\sigma_2-3\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2+\alpha_2^3\left(432\sigma_2^2+216\sigma_1\sigma_3-432\sigma_4\right)+2\sigma_1^3\sigma_3\sigma_4+12\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4-8\sigma_1^2\sigma_4^2-\\ & 6\sigma_1^2\sigma_3\sigma_5-36\sigma_2\sigma_3\sigma_5+48\sigma_1\sigma_4\sigma_5-72\sigma_5^2+4\sigma_1^4\sigma_6-48\sigma_1^2\sigma_2\sigma_6+144\sigma_2^2\sigma_6+\\ & \alpha_2^2\left(-48\sigma_2^3-144\sigma_1\sigma_2\sigma_3+24\sigma_1^2\sigma_4+288\sigma_2\sigma_4-216\sigma_1\sigma_5+1296\sigma_6\right)+\\ & \alpha_2\left(24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_3^2-8\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4-48\sigma_2^2\sigma_4-36\sigma_1\sigma_3\sigma_4-4\sigma_1^3\sigma_5+72\sigma_1\sigma_2\sigma_5+108\sigma_3\sigma_5+144\sigma_1^2\sigma_6-864\sigma_2\sigma_6\right)\ /.\ \rho 1;\end{aligned}$$

```
sol = Solve[eqα2 == 0, α2] // Union // Flatten ;
Print[StringForm[" polynom for α2 is `` all roots of polynomial: `` ", eqα2, sol ]];
```

$$\texttt{Do}\left[\texttt{If}\left[\left(\left(18\alpha_2+\sigma_1^2-6\sigma_2\right)\ /.\ \rho 1\ /.\ \texttt{sol[[i]]}\right)==0,\ \texttt{sol1}=\texttt{Delete[sol, i]},\right.\right.$$

```
  Print[StringForm[" solution exists for `` ", sol[[i, 1]] == sol[[i, 2]] ]]], {i, Length[sol]}];
Print[StringForm[" roots for solution of the Chazy system (sol1): `` ", sol1 ]];
```

$$\rho[k\_] = \mathcal{A}_k \to \left(-6a_k{}^4+4\sigma_1a_k{}^3+3(\alpha_2-\sigma_2)a_k{}^2-3\beta_2a_k+3\beta_3-\sigma_4\right)\Big/\left(6a_k{}^5-5\sigma_1a_k{}^4+4\sigma_2a_k{}^3-3\sigma_3a_k{}^2+2\sigma_4a_k-\sigma_5\right);$$

$$\texttt{eqb}[k\_] = -\left(-\frac{5}{2}\mathcal{A}_k+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{a_k-a_j}+\sum_{j=k+1}^{6}\frac{1}{a_k-a_j}\right)b_k+\sum_{j=1}^{k-1}\left(\frac{\mathcal{A}_k}{2}+\frac{1}{a_k-a_j}\right)b_j+\sum_{j=k+1}^{6}\left(\frac{\mathcal{A}_k}{2}+\frac{1}{a_k-a_j}\right)b_j == 0;$$

```
sysb = Table[eqb[i], {i, 1, 6}]; (* system of Bk *)
```

$$\texttt{eqc}[k\_] = -\left(2\mathcal{A}_k+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{a_k-a_j}+\sum_{j=k+1}^{6}\frac{1}{a_k-a_j}\right)c_k+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{c_j}{a_k-a_j}+\sum_{j=k+1}^{6}\frac{c_j}{a_k-a_j} == b_k{}^2+b_k\,d-e;$$

```
sysc = Table[eqc[i], {i, 1, 6}]; (* system of Ck *)
```

$$\texttt{eqf}[k\_] = -b_k\,c_k+D[c_k,\,x]-d\,c_k+f_k\left(\prod_{j=1}^{k-1}(a_k-a_j)\right)\prod_{j=k+1}^{6}(a_k-a_j) == 0;$$

```
sysf = Table[eqf[i], {i, 1, 6}]; (* system of Fk *)
```

$$\texttt{sysg} = \left\{2d+\sum_{k=1}^{6}b_k == 0,\ \sum_{k=1}^{6}f_k == 0,\ \sum_{k=1}^{6}a_k\,f_k == 0,\ \sum_{k=1}^{6}a_k{}^2\,f_k == 0\right\};$$

```
For[i = 1, i < Length[sol1] + 1 , i++, solA = {ρ[1], ρ[2], ρ[3], ρ[4], ρ[5], ρ[6]} /. ρ1 /. sol1[[i]] // Simplify;
 sysbn = sysb /. ρ1 /. sol1[[i]] /. solA // Flatten;
 solb = Solve[sysbn, {b1, b2, b3, b4, b5, b6}] // Simplify // Flatten;
 syscn = sysc /. ρ1 /. sol1[[i]] /. solA /. solb // Flatten;
 solc = Solve[syscn, {c1, c2, c3, c4, c5, c6}] // Simplify // Flatten;
 sysgn = sysg /. ρ1 /. sol1[[i]] /. solA /. solb // Flatten ;
 sysfn = sysf /. ρ1 /. sol1[[i]] /. solA /. solb /. solc // Flatten ;
 solf = Solve[Join[sysfn, sysgn], {f1, f2, f3, f4, f5, f6, d}] // Simplify // Flatten;
 Print[StringForm[" i=`` solSysChazy: `` eqChazy: ``", i,
   solSysChazy[i] = Join[solA, solb, solc, solf], eqChazy[i] = equationChazy /. ρ1 /. solSysChazy[i] ]]
  If[Coefficient[Coefficient[eqChazy[1][[2]], w''[z]], w'[z], 0] == 0,
```

$$\texttt{linearEqChazy}[i] = \texttt{eqChazy}[i]\ /.\ \left\{w'[z]\to\sqrt{y[w]},\ w''[z]\to\frac{y'[w]}{2},\ w'''[z]\to\frac{1}{2}\sqrt{y[w]}\ y''[w],\ w[z]\to w\right\}\ //$$

```
      Simplify // Flatten; ];
 Print[StringForm[" i=`` linearEqChazy: `` ", i, linearEqChazy[i] ]]
];]
```

Проиллюстрируем действие данного модуля. Введем, например, команду

`In[4]:= constrEquationChazy[1, -1, 3, -3, 1 / 3, -1 / 3]`. (13)

Это означает, что в качестве значений a_k $(k=\overline{1,6})$ выбраны соответственно величины $1,\ -1,\ 3,\ -3,\ 1/3,\ -1/3$. Напомним, что знак «==» означает в системе *Mathematica* знак «равно», а знак «$\to$» означает оператор прямой подстановки. В результате действия введенной команды (13) получим следующие соотношения:

$$\text{polynom for } \alpha 2 \text{ is } -\frac{132496}{9}-\frac{14179984\,\alpha_2}{243}+\frac{4587424\,\alpha_2^2}{243}+\frac{119392\,\alpha_2^3}{3}+13104\,\alpha_2^4+1296\,\alpha_2^5$$

$$\text{all roots of polynomial: } \left\{\alpha_2\to-\frac{91}{27},\ \alpha_2\to 1,\ \alpha_2\to\frac{1}{27}\left(-59-8\sqrt{43}\right),\ \alpha_2\to\frac{1}{27}\left(-59+8\sqrt{43}\right)\right\}$$

$$\text{solution exists for } \alpha_2 == 1$$

$$\text{solution exists for } \alpha_2 == \frac{1}{27}\left(-59-8\sqrt{43}\right)$$

$$\text{solution exists for } \alpha_2 == \frac{1}{27}\left(-59+8\sqrt{43}\right)$$

$$\text{roots for solution of the Chazy system (soll): } \left\{\alpha_2\to 1,\ \alpha_2\to\frac{1}{27}\left(-59-8\sqrt{43}\right),\ \alpha_2\to\frac{1}{27}\left(-59+8\sqrt{43}\right)\right\}$$

i=1 solSysChazy:

$$\left\{\mathcal{A}_1\to-1,\ \mathcal{A}_2\to 1,\ \mathcal{A}_3\to-\frac{7}{15},\ \mathcal{A}_4\to\frac{7}{15},\ \mathcal{A}_5\to-\frac{9}{5},\ \mathcal{A}_6\to\frac{9}{5},\ b_1\to 0,\ b_2\to 0,\ b_3\to 0,\ b_4\to 0,\ b_5\to 0,\ b_6\to 0,\ c_1\to\frac{1}{27}\left(2\,e+75\,c_5+60\,c_6\right),\ c_2\to\frac{1}{27}\left(-2\,e+60\,c_5+75\,c_6\right),\ c_3\to\frac{1}{81}\left(100\,e+375\,c_5+354\,c_6\right),\ c_4\to\frac{1}{81}\left(-100\,e+354\,c_5+375\,c_6\right),\ f_1\to 0,\ f_2\to 0,\ f_3\to 0,\ f_4\to 0,\ f_5\to 0,\ f_6\to 0,\ d\to 0\right\}$$

eqChazy:

$$w^{(3)}[z]==e\,w'[z]+\frac{c_5\,w'[z]-\frac{9}{5}\,w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{-\frac{1}{3}+w[z]}+\frac{\frac{1}{27}\left(2\,e+75\,c_5+60\,c_6\right)w'[z]-w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{-1+w[z]}+\frac{\frac{1}{81}\left(100\,e+375\,c_5+354\,c_6\right)w'[z]-\frac{7}{15}\,w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{-3+w[z]}+\frac{\frac{1}{81}\left(-100\,e+354\,c_5+375\,c_6\right)w'[z]+\frac{7}{15}\,w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{3+w[z]}+\frac{\frac{1}{27}\left(-2\,e+60\,c_5+75\,c_6\right)w'[z]+w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{1+w[z]}+\frac{c_6\,w'[z]+\frac{9}{5}\,w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{\frac{1}{3}+w[z]}$$

i=1 linearEqChazy:

$$\frac{1}{2}\sqrt{y[w]}\ y''[w]==\frac{1}{27\left(-9+91\,w^2-91\,w^4+9\,w^6\right)}\sqrt{y[w]}\ \Big(-7\,e+129\,e\,w^2-621\,e\,w^4+243\,e\,w^6+15\left(1+3\,w\right)^2\left(59-111\,w-15\,w^2+27\,w^3\right)c_5+15\left(1-3\,w\right)^2\left(-59-111\,w+15\,w^2+27\,w^3\right)c_6-3186\,y[w]+8100\,w^2\,y[w]-1458\,w^4\,y[w]+2457\,w\,y'[w]-4914\,w^3\,y'[w]+729\,w^5\,y'[w]\Big)$$

i=2 solSysChazy:

$$\Big\{\mathcal{A}_1\to\frac{1}{8}\left(-8+\sqrt{43}\right),\ \mathcal{A}_2\to 1-\frac{\sqrt{43}}{8},\ \mathcal{A}_3\to\frac{1}{48}\left(-31-\sqrt{43}\right),\ \mathcal{A}_4\to\frac{1}{48}\left(31+\sqrt{43}\right),\ \mathcal{A}_5\to-\frac{3}{16}\left(1+\sqrt{43}\right),\ \mathcal{A}_6\to\frac{3}{16}\left(1+\sqrt{43}\right),\ b_1\to 0,$$
$$b_2\to 0,\ b_3\to 0,\ b_4\to 0,\ b_5\to 0,\ b_6\to 0,\ c_1\to\frac{-4\,e-12\left(-9+\sqrt{43}\right)c_5+3\left(3+\sqrt{43}\right)c_6}{9\left(-6+\sqrt{43}\right)},\ c_2\to\frac{3\left(3+\sqrt{43}\right)c_5+4\left(e-3\left(-9+\sqrt{43}\right)c_6\right)}{9\left(-6+\sqrt{43}\right)},$$
$$c_3\to\frac{-15\left(7+4\sqrt{43}\right)c_5+8\left(5\left(-5+\sqrt{43}\right)e-6\left(4+\sqrt{43}\right)c_6\right)}{27\left(-6+\sqrt{43}\right)},\ c_4\to-\frac{48\left(4+\sqrt{43}\right)c_5+5\left(8\left(-5+\sqrt{43}\right)e+3\left(7+4\sqrt{43}\right)c_6\right)}{27\left(-6+\sqrt{43}\right)},\ f_1\to$$
$$0,\ f_2\to 0,\ f_3\to 0,\ f_4\to 0,\ f_5\to 0,\ f_6\to 0,\ d\to 0\Big\}$$

eqChazy:

$$w^{(3)}[z]==e\,w'[z]+\frac{\frac{\left(-15\left(7+4\sqrt{43}\right)c_5+8\left(5\left(-5+\sqrt{43}\right)e-6\left(4+\sqrt{43}\right)c_6\right)\right)w'[z]}{27\left(-6+\sqrt{43}\right)}+\frac{1}{48}\left(-31-\sqrt{43}\right)w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{-3+w[z]}+$$
$$\frac{\frac{\left(3\left(3+\sqrt{43}\right)c_5+4\left(e-3\left(-9+\sqrt{43}\right)c_6\right)\right)w'[z]}{9\left(-6+\sqrt{43}\right)}+\left(1-\frac{\sqrt{43}}{8}\right)w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{1+w[z]}+$$
$$\frac{\frac{\left(-4\,e-12\left(-9+\sqrt{43}\right)c_5+3\left(3+\sqrt{43}\right)c_6\right)w'[z]}{9\left(-6+\sqrt{43}\right)}+\frac{1}{8}\left(-8+\sqrt{43}\right)w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{-1+w[z]}+\frac{c_5\,w'[z]-\frac{3}{16}\left(1+\sqrt{43}\right)w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{-\frac{1}{3}+w[z]}+$$
$$\frac{c_6\,w'[z]+\frac{3}{16}\left(1+\sqrt{43}\right)w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{\frac{1}{3}+w[z]}+$$
$$\frac{-\frac{\left(48\left(4+\sqrt{43}\right)c_5+5\left(8\left(-5+\sqrt{43}\right)e+3\left(7+4\sqrt{43}\right)c_6\right)\right)w'[z]}{27\left(-6+\sqrt{43}\right)}+\frac{1}{48}\left(31+\sqrt{43}\right)w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{3+w[z]}$$

i=2 linearEqChazy:

$$\frac{1}{2}\sqrt{y[w]}\;y''[w] == -\Big(\sqrt{y[w]}\;\Big(-14e+\sqrt{43}\,e+258ew^2-19\sqrt{43}\,ew^2-1242ew^4+99\sqrt{43}\,ew^4+486ew^6-81\sqrt{43}\,ew^6+12(1+3w)^2\Big(-8\big(-5+\sqrt{43}\big)-3\big(-15+\sqrt{43}\big)w-16w^2+3\big(1+\sqrt{43}\big)w^3\Big)c_5+12(1-3w)^2\Big(8\big(-5+\sqrt{43}\big)-3\big(-15+\sqrt{43}\big)w+16w^2+3\big(1+\sqrt{43}\big)w^3\Big)c_6+1368y[w]-144\sqrt{43}\,y[w]+14652w^2y[w]-2358\sqrt{43}\,w^2y[w]-2916w^4y[w]+486\sqrt{43}\,w^4y[w]+4914wy'[w]-819\sqrt{43}\,wy'[w]-9828w^3y'[w]+1638\sqrt{43}\,w^3y'[w]+1458w^5y'[w]-243\sqrt{43}\,w^5y'[w]\Big)\Big)\Big/\Big(9\big(-6+\sqrt{43}\big)(-3+w)(-1+w)(1+w)(3+w)(-1+3w)(1+3w)\Big)$$

i=3 solSysChazy:

$$\Big\{\mathcal{A}_1\to-1-\frac{\sqrt{43}}{8},\ \mathcal{A}_2\to\frac{1}{8}\big(8+\sqrt{43}\big),\ \mathcal{A}_3\to\frac{1}{48}\big(-31+\sqrt{43}\big),\ \mathcal{A}_4\to\frac{1}{48}\big(31-\sqrt{43}\big),\ \mathcal{A}_5\to\frac{3}{16}\big(-1+\sqrt{43}\big),\ \mathcal{A}_6\to-\frac{3}{16}\big(-1+\sqrt{43}\big),\ b_1\to0,\ b_2\to0,\ b_3\to0,\ b_4\to0,\ b_5\to0,\ b_6\to0,\ c_1\to\frac{4e-12\big(9+\sqrt{43}\big)c_5+3\big(-3+\sqrt{43}\big)c_6}{9\big(6+\sqrt{43}\big)},\ c_2\to\frac{3\big(-3+\sqrt{43}\big)c_5-4\big(e+3\big(9+\sqrt{43}\big)c_6\big)}{9\big(6+\sqrt{43}\big)},\ c_3\to\frac{-15\big(-7+4\sqrt{43}\big)c_5+8\big(5\big(5+\sqrt{43}\big)e-6\big(-4+\sqrt{43}\big)c_6\big)}{27\big(6+\sqrt{43}\big)},\ c_4\to-\frac{48\big(-4+\sqrt{43}\big)c_5+5\big(8\big(5+\sqrt{43}\big)e+3\big(-7+4\sqrt{43}\big)c_6\big)}{27\big(6+\sqrt{43}\big)},\ f_1\to0,\ f_2\to0,\ f_3\to0,\ f_4\to0,\ f_5\to0,\ f_6\to0,\ d\to0\Big\}$$

$$\text{eqChazy: } w^{(3)}[z]==e\,w'[z]+\frac{-\frac{\left(48\left(-4+\sqrt{43}\right)c_5+5\left(8\left(5+\sqrt{43}\right)e+3\left(-7+4\sqrt{43}\right)c_6\right)\right)w'[z]}{27\left(6+\sqrt{43}\right)}+\frac{1}{48}\big(31-\sqrt{43}\big)w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{3+w[z]}+$$

$$\frac{\frac{\left(4e-12\left(9+\sqrt{43}\right)c_5+3\left(-3+\sqrt{43}\right)c_6\right)w'[z]}{9\left(6+\sqrt{43}\right)}+\left(-1-\frac{\sqrt{43}}{8}\right)w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{-1+w[z]}+$$

$$\frac{\frac{\left(-15\left(-7+4\sqrt{43}\right)c_5+8\left(5\left(5+\sqrt{43}\right)e-6\left(-4+\sqrt{43}\right)c_6\right)\right)w'[z]}{27\left(6+\sqrt{43}\right)}+\frac{1}{48}\big(-31+\sqrt{43}\big)w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{-3+w[z]}+$$

$$\frac{c_6w'[z]-\frac{3}{16}\big(-1+\sqrt{43}\big)w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{\frac{1}{3}+w[z]}+\frac{c_5w'[z]+\frac{3}{16}\big(-1+\sqrt{43}\big)w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{-\frac{1}{3}+w[z]}+$$

$$\frac{\frac{\left(3\left(-3+\sqrt{43}\right)c_5-4\left(e+3\left(9+\sqrt{43}\right)c_6\right)\right)w'[z]}{9\left(6+\sqrt{43}\right)}+\frac{1}{8}\big(8+\sqrt{43}\big)w'[z]^3+w'[z]\,w''[z]}{1+w[z]}$$

i=3 linearEqChazy:

$$\frac{1}{2}\sqrt{y[w]}\;y''[w]==\Big(\sqrt{y[w]}\;\Big(-14e-\sqrt{43}\,e+258ew^2+19\sqrt{43}\,ew^2-1242ew^4-99\sqrt{43}\,ew^4+486ew^6+81\sqrt{43}\,ew^6-12(1+3w)^2\Big(-8\big(5+\sqrt{43}\big)-3\big(15+\sqrt{43}\big)w+16w^2+3\big(-1+\sqrt{43}\big)w^3\Big)c_5-12(1-3w)^2\Big(8\big(5+\sqrt{43}\big)-3\big(15+\sqrt{43}\big)w-16w^2+3\big(-1+\sqrt{43}\big)w^3\Big)c_6+1368y[w]+144\sqrt{43}\,y[w]+14652w^2y[w]+2358\sqrt{43}\,w^2y[w]-2916w^4y[w]-486\sqrt{43}\,w^4y[w]+4914wy'[w]+819\sqrt{43}\,wy'[w]-9828w^3y'[w]-1638\sqrt{43}\,w^3y'[w]+1458w^5y'[w]+243\sqrt{43}\,w^5y'[w]\Big)\Big)\Big/\Big(9\big(6+\sqrt{43}\big)(-3+w)(-1+w)(1+w)(3+w)(-1+3w)(1+3w)\Big)$$

Таким образом, существует три решения системы Шази (solSysChazy) соответствующие корням $\alpha_2=1,\ \alpha_2=-\frac{8\sqrt{43}+59}{27},\ \alpha_2=\frac{8\sqrt{43}-59}{27}$. Для каждого i (i = 1, i = 2, i = 3) приведено уравнение Шази (eqChazy) с коэффициентами, которые получены при решении соответствующей системы Шази. Поскольку в каждом из трех решений оказалось, что коэффициент $D=0$, то внутри модуля была использована замена

$$w'(z)=\sqrt{y(w)}\,, \tag{13}$$

позволяющая свести построенное уравнение Шази к линейному уравнению (получается из уравнения linearEqChazy делением на $\sqrt{y(w)}$) второго порядка с шестью особыми точками. Так, например, для i = 1 с помощью команды

```
In[4]:= lineq[1] = (linearEqChazy[1][[1]] - linearEqChazy[1][[2]])/Sqrt[y[w]] == 0 // FullSimplify // TraditionalForm
```

получается искомое линейное уравнение:

$$\frac{1}{-9+91w^2-91w^4+9w^6}\Big(30(1+3w)^2(59+3w(-37+w(-5+9w)))c_5+30(1-3w)^2(-59+3w(-37+w(5+9w)))c_6-108(59-150w^2+27w^4)y[w]+54w(91-182w^2+27w^4)y'[w]+(-1+9w^2)(2e(7-66w^2+27w^4)-27(9-10w^2+w^4)y''[w])\Big)=0 \quad (14).$$

Уравнение (14) легко интегрируется с помощью команды

solutionLinear[1]=DSolve[(linearEqChazy[1]/.
{ $a_1 \to 1, a_2 \to -1, a_3 \to 3, a_2 \to -3, a_2 \to 1/3, a_2 \to -1/3$ **}, y[w], w]//Simplify]**

Общее решение уравнения (14) имеет вид:

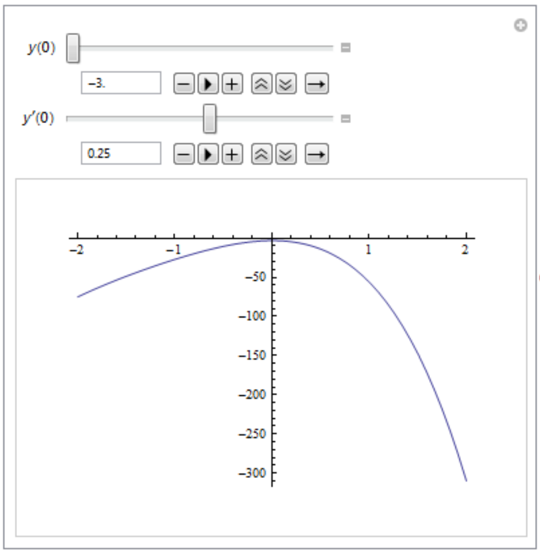
$$\Big\{\{y[w]\to 0\},\Big\{y[w]\to \frac{2e}{27}+e w^2+\frac{((-3+w)(-1+3w))^{3/2}\sqrt{-9+91w^2-91w^4+9w^6}\,C[1]}{\sqrt{(-1+w)(1+w)(3+w)(1+3w)}}-\frac{w(1+w^2)\sqrt{-9+91w^2-91w^4+9w^6}\,C[2]}{\sqrt{3-10w+3w^2}\sqrt{-3-10w+10w^3+3w^4}}+\left(\frac{5}{18}+5w\right)c_5+\left(-\frac{5}{18}+5w\right)c_6\Big\}\Big\} \quad (15)$$

где C[1] и C[2] – произвольные постоянные.

Построить графики частных решений дифференциального уравнения в системе *Mathematica* легко с помощью функции **Plot**, задав значения параметров, входящих в общее решение. Версии системы *Mathematic*а 6.0 и выше позволяют также строить частные решения, не определяя конкретных значений параметров, а задавая только интервалы их изменения с помощью модуля манипуляций **Manipulate**. Для уравнения (14) это выглядит следующим образом:

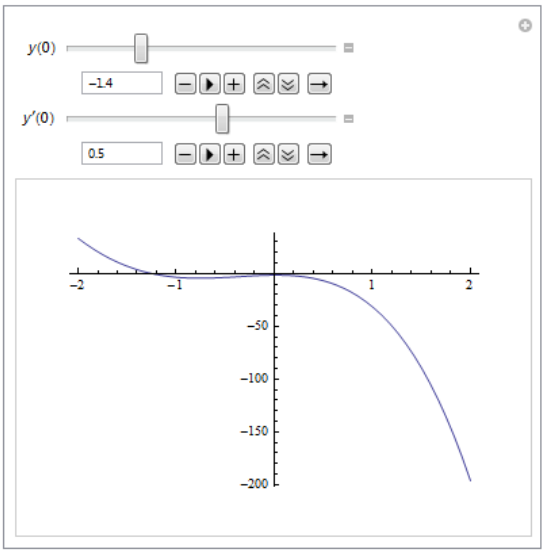
```
In[16]:= Manipulate[Plot[Evaluate[y[w] /. First[NDSolve[{(lineq[1] /. {c5 → 1, c6 → 2, e → 3}), y[0] == a, y'[0] == b}, y, {w, -10, 10}]]],
   {w, -2, 2}, ImagePadding → 25, PlotRange → Automatic],
  {{a, 1, TraditionalForm[y[0]]}, -3, 3},
  {{b, 0, TraditionalForm[y'[0]]}, -3, 3}]
```

Out[16]=

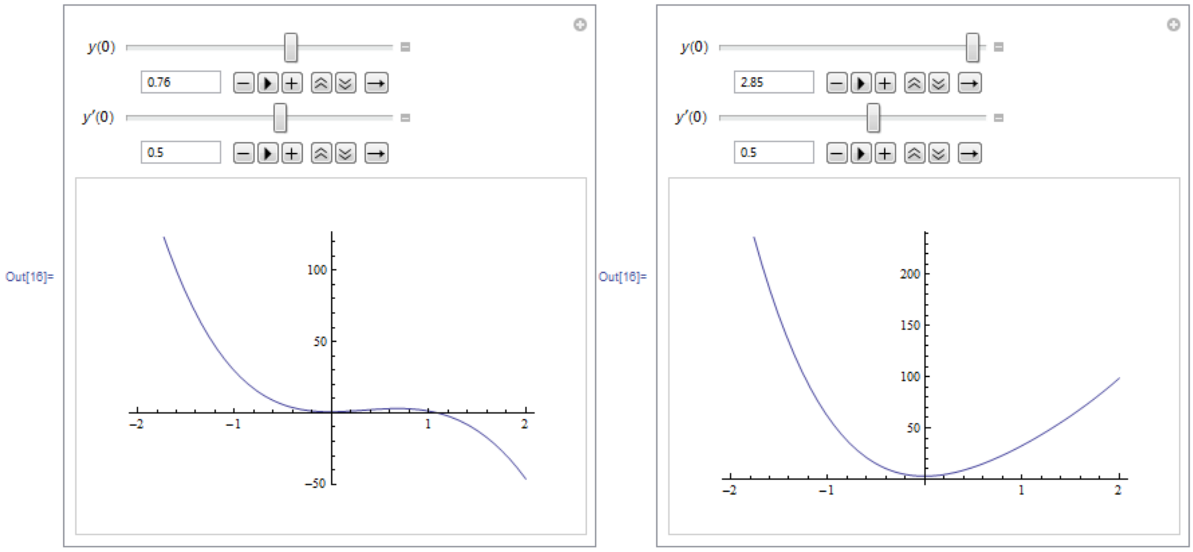


а)

Out[16]=



б)



в) **г)**

Рисунок – Графики частных решений дифференциального уравнения в системе *Mathematica*

Графики частных решений (Рисунок) изменяются с помощью двух слайдеров, которые автоматически создаются модулем **Manipulate** с помощью динамического объекта **Slider**, и изменение положения слайдеров отвечает изменению начальных условий y_0 и y_0'. Тем самым используется метод объектно-ориентированного программирования для осуществления анимации интегральных кривых в зависимости от изменения начальных условий.

Зная вид общего решения (15) уравнения (14), легко находим общий интеграл уравнения Шази eqChazy для i = 1 [7] (аналогично общий интеграл может быть получен и для двух других значений i):

```
Solve[z + 54 C[3] ==
  RootSum[4 e + 486 C[1] - 3240 C[1] #1 - 54 C[2] #1 + 54 e #1^2 + 6372 C[1] #1^2 - 3240 C[1] #1^3 - 54 C[2] #1^3 + 486 C[1] #1^4 + 15 c5 + 270 #1 c5 - 15 c6 + 270 #1 c6 &,
   Log[-#1 + w[z]] / (-60 C[1] - C[2] + 2 e #1 + 236 C[1] #1 - 180 C[1] #1^2 - 3 C[2] #1^2 + 36 C[1] #1^3 + 5 c5 + 5 c6) &], w[z]]
```

Замечание. Если при заданных значениях величин a1, a2, a3, a4, a5, a6 корни многочлена eqα2 выражаются через Root-объекты, то в приведенном модуле constrEquationChazy вместо команды

sol = solve [eqα2 = = 0, α2] // Union // Flatten;

следует написать команду

sol = N[solve [eqα2 = = 0, α2]] // Union // Flatten; sol1= sol;.

В результате все вычисления могут быть проведены с нужным числом значащих цифр, посредством задания соответствующих опций инструкции **N**.

Заключение

Используя модуль **constrEqua tionChazy [a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, a6_]** , удается найти решения системы Шази для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с шестью постоянными полюсами. Если при этом коэффициент $D = 0$, то данный модуль строит линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к которому сводится уравнение Шази. Используя команды DSolve или NDSolve, удается решить построенные уравнения и с помощью визуализационных средств системы

Mathematica определить поведение интегральных кривых. В частности, используя функции Manipulate или Animate, удается установить характер изменения интегральных кривых в зависимости от одного или более параметров, входящих в общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения Шази.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chazy, J. Sur les equations differentielles du troisieme ordre et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes / J. Chazy // Acta Math. – 1911. – Vol. 34. – P. 317–385.

2. Painleve, P. Lecons sur les theorie analytique des equations differentielles / P. Painleve // Professies a Stokholm. – Paris, 1897.

3. Мартынов, И.П. Использование системы *Mathematica* при решении системы уравнений Шази / И.П. Мартынов, А.В. Чичурин // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: Тезисы докладов межд. конф., Минск, 2007, Минск, ИМ НАНБ, 2007. – С. 89–91.

4. Мартынов, И.П. О решении системы уравнений Шази / И.П. Мартынов, А.В. Чичурин // Нелінійні Коливання. – 2009. – Т. 12. № 1. – С. 92–98.

5. Чичурин, А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса : Монография / А.В. Чичурин. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : Изд-во РУДН, 2003. – 163 с.

6. Чичурин, А.В. О компьютерном моделировании метода нахождения решений дифференциальных уравнений второго и третьего порядков с шестью особыми точками / А.В. Чичурин // Современные информационные компьютерные технологии mcIT-2010 : материалы II Международной науч.-практ. Конф. [Электронный ресурс] / УО «Гр.ун-т им. Я. Купалы». – Гродно, 2010. – 1 электр. компакт–диск (CD-R).

7. Wolfram Web Resources [Electronic resource] / ed. S. Wolfram. – Champaign, 2010. – Mode of access : www.wolfram.com – Date of access : 1.09.2010.

A.V. Chichurin. **Solution of Chasy System and Integration of Chazy Differential Equation with Six Permanent Poles with the Help of *Mathematica***

Chazy non-linear differential equation of the third order with six permanent poles is considered. Using the possibility of *Mathematica* system, program module allowing to find the solution to the corresponding Chazi system is built and program measures, allowing to find the solution to Chazi equation in a number or analytic form are given.