ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

для студентів спеціальності «інформатика»

УДК 512.64: 514.12 (072)

ББК 22.143я81+22.151.54я81

В 68

Рекомендовано до друку методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки (протокол № 12 від 27 січня 2010 р.)

Рецензенти:

Філозоф Леонтій Іванович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу Волинського національного університету імені Лесі Українки;

Чепрасова Тетяна Іванівна, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри прикладної математики Волинського національного університету імені Лесі Українки

В 67 **Волошина Т.В. Вибрані питання лінійної алгебри та аналітичної геометрії**: навчальний посібник. - Луцьк: РВВ «Вежа» Волинського нац. ун-ту імені Лесі Українки, 2010.– 116 с.

У посібнику стисло вкладено теоретичні питання з дисципліни «Алгебра і геометрія», зокрема розглянуто системи лінійних рівнянь, основні алгебраїчні структури, многочлени, елементи векторної алгебри, взаємне розміщення прямих і площин. Кожний розділ доповнено прикладами розв’язання типових задач.

Посібник призначено для підготовки до державного бакалаврського екзамену студентів спеціальності «інформатика».

УДК 512.64: 514.12 (072)

ББК 22.143я81+22.151.54я81

© Волошина Т.В., 2010

Передмова

Запропонований посібник створений для того, щоб допомогти студентам спеціальності «інформатика» швидко і якісно підготуватися до державного бакалаврського екзамену. Дисципліна «Алгебра і геометрія» належить до циклу фундаментальних з підготовки бакалаврів спеціальності «інформатика» і викладається на першому-другому курсі. На державний іспит виносяться найважливіші питання, які мають прикладне значення. Їх перелік наведено на початку посібника. Вони достатньо дрібні і конкретизовані, проте значною мірою охоплюють дисципліну. Окрім теоретичних питань студентам пропонуються тестові завдання, які є модифікованими типовими задачами із відповідних розділів курсу.

Матеріал, що виноситься на екзамен можна умовно розділити на п’ять частин, кожній із яких відповідає розділ даного посібника. Розглянуто системи лінійних алгебраїчних рівнянь, елементи векторної алгебри, многочлени від однієї змінної, основні алгебраїчні структури та взаємне розміщення прямих і площин, заданих рівняннями. Кожний розділ містить стисло викладений теоретичний матеріал, приклади та зразки розв’язання типових задач. Громіздкі доведення теорем і виведення формул пропущені. Посібник можна використовувати у якості довідника при підготовці до аудиторних занять, контрольних робіт, курсових. У кінці наведено список літератури, в якій даний матеріал викладено більш детально.

Перелік питань з «Алгебри і геометрії», що виносяться на державний екзамен

1. Системи лінійних рівнянь. Класифікація систем лінійних рівнянь за кількістю розв’язків. Рівносильні системи. Метод послідовного виключення змінних розв’язування систем лінійних рівнянь.

2. Матриці, дії з матрицями. Визначники матриць, їх властивості. Обернена матриця, критерій її існування, методи обчислення. Матричний метод розв’язування систем лінійних рівнянь.

3. Числові вектори. Лінійна залежність та лінійна незалежність системи векторів. Ранг системи векторів. Ранг матриці. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь (теорема Кронекера-Капеллі).

4. Геометричні вектори. Лінійні операції над векторами. Колінеарність векторів.

5. Скалярний добуток векторів, його властивості. Застосування до розв’язування задач (обчислення довжини вектора, кута між векторами).

6. Векторний добуток векторів. Застосування до розв’язування задач (обчислення площі паралелограма, трикутника).

7. Мішаний добуток векторів. Застосування до розв’язування задач (обчислення об’єму паралелепіпеда, піраміди, перевірка векторів на компланарність).

8. Рівняння прямої на площині (загальне рівняння прямої, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, канонічне рівняння прямої). Взаємне розміщення прямих на площині. Кут між прямими, умови паралельності та перпендикулярності прямих. Відстань від точки до прямої.

9. Загальне рівняння площини. Взаємне розміщення площин. Кут між площинами, умови паралельності та перпендикулярності площин. Відстань від точки до площини.

10. Рівняння прямої у просторі. Взаємне розміщення прямої і площини. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності та перпендикулярності. Взаємне розміщення прямих у просторі. Кут між прямими. Умови паралельності, перпендикулярності, мимобіжності прямих.

11. Кільце многочленів від однієї змінної. Теорема про ділення многочленів з остачею. Схема Горнера.

12. Корені многочлена. Теорема Безу та наслідок з неї. Кратність кореня многочлена. Основна теорема алгебри.

13. Раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами.

14. Означення групи, кільця, поля. Приклади. Найпростіші властивості груп. Ізоморфізм груп. Приклади ізоморфних груп.

15. Лінійний векторний простір. Означення, приклади, найпростіші властивості. Поняття базису лінійного векторного простору.

Розділ 1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

1.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні поняття.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та матриці як правило розглядають над числовими полями.

Числове поле – множина чисел, замкнена відносно 4 арифметичних дій: додавання, віднімання, множення та ділення. Зауважимо, що ділення на нуль заборонене. Поле будемо позначати літерою P.

Приклади числових полів: множина всіх раціональних чисел $\mathbf{Q}$, множина всіх дійсних чисел $\mathbf{R}$, множина всіх комплексних чисел $\mathbf{C}$. Справедливі включення $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Множина всіх цілих чисел $\mathbf{Z}$ поля не утворює, бо результат ділення двох цілих чисел не завжди буде цілим числом (кажуть, що множина цілих чисел $\mathbf{Z}$ не замкнена відносно дії ділення).

Найчастіше будемо розглядати поле дійсних чисел $\mathbf{R}$.

У загальному випадку *система лінійних алгебраїчних рівнянь* (*СЛАР*) з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3j}x_j + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

де всі коефіцієнти a_{ij}, b_i є елементами деякого числового поля P.

Якщо $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_m = 0$, то система (1) називається *однорідною*. Якщо ж серед чисел $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m$ хоча б одне відмінне від 0, то система (1) називається *неоднорідною*.

Розв'язком СЛАР з n невідомими називається впорядкований набір з n чисел із поля P виду $(c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n)$, таких що при підстановці їх у систему (1) перетворюють кожне рівняння цієї системи в тотожність.

Впорядкований набір з n чисел із поля P будемо також називати *n-вимірним числовим вектором*.

Із коефіцієнтів СЛАР (1) можна утворити прямокутну таблицю розміру

$$m \times n: \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

яку будемо називати *числовою матицею типу* $m \times n$, а числа a_{ij} – її *елементами*.

Для системи (1) матриця (2) називається *основною матрицею системи*, а

$$\text{матриця} \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad (3)$$

розширеною матрицею системи. Числовий вектор-стовпець $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ для СЛАР (1) називається *вектором-стовпцем вільних членів*.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається *сумісною*, якщо існує хоча б один її розв’язок. Якщо система лінійних алгебраїчних рівнянь не має розв’язків, то її називають *несумісною*.

Сумісні СЛАР можуть мати або рівно один або безліч розв’язків. Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв’язок. Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається *невизначеною*, якщо вона має безліч розв’язків.

Дві СЛАР називаються *рівносильними*, якщо у них однакові множини розв’язків, тобто кожен розв’язок першої системи є розв’язком другої, і навпаки, кожен розв’язок другої системи є розв’язком першої.

Елементарні перетворення СЛАР:

- поміняти місцями два рівняння;
- помножити обидві частини якого-небудь рівняння на деяке число з поля відмінне від 0;
- додати до одного рівняння інше.

Теорема 1. При виконанні елементарних перетворень зі СЛАР отримуємо систему, рівносильну до початкової.

Кажуть, що СЛАР має *стандартну форму*, якщо її розширена матриця має вигляд:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_{1\,r+1} & \cdots & t_{1\,n} & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & t_{2\,r+1} & \cdots & t_{2\,n} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & t_{3\,r+1} & \cdots & t_{3\,n} & d_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t_{r\,r+1} & \cdots & t_{r\,n} & d_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m \end{array}\right). \tag{4}$$

По стандартній формі легко з’ясувати, якими є розв’язки СЛАР.

СЛАР несумісна тоді і тільки тоді, коли $r < m$ і існує хоча б одне $d_i \neq 0$, для $r+1 \leq i \leq m$.

СЛАР має єдиний розв’язок $(d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n)$ тоді і тільки тоді, коли $r = n$ і $d_{r+1} = d_{r+2} = \cdots = d_m = 0$.

В усіх інших випадках маємо безліч розв’язків СЛАР. Всю сукупність розв’язків можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - (t_{1\ r+1}x_{r+1} + t_{1\ r+2}x_{r+2} + \cdots + t_{1\ n}x_n), \\ x_2 = d_2 - (t_{2\ r+1}x_{r+1} + t_{2\ r+2}x_{r+2} + \cdots + t_{2\ n}x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r - (t_{r\ r+1}x_{r+1} + t_{r\ r+2}x_{r+2} + \cdots + t_{r\ n}x_n), \\ x_{r+1}, x_{r+2}, x_{r+3}, \cdots, x_n - \textit{довільні}. \end{cases} \tag{5}$$

Змінні $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ при цьому називаються *вільними змінними*, а $x_1, x_2, \cdots, x_r$ – *залежними*. Запис виду (5) називається *загальним розв’язком* СЛАР, розширена матриця якої має вигляд (4). Надаючи вільним змінним довільних значень, дістаємо відповідні значення залежних, і отримуємо таким чином часткові розв’язки СЛАР.

Теорема 2. Кожну СЛАР за допомогою елементарних перетворень можна звести до стандартної форми.

Метод Гауса розв’язання СЛАР базується на зведенні СЛАР до стандартної форми за допомогою елементарних перетворень.

1.2. Матриці, дії з матрицями

Прямокутна таблиця розміру $m \times n$ з числами із деякого поля P називається *матрицею* над цим полем. Матрицю записують:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{i\,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}, \qquad (2)$$

Кажуть, що матриця A має *тип* $m \times n$.

Для однотипних матриць вводять операцію поелементного *додавання*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Властивості додавання:

- комутативність (для довільних однотипних матриць A, B виконується рівність $A + B = B + A$);
- асоціативність (для довільних однотипних матриць A, B і C виконується рівність $(A + B) + C = A + (B + C)$);
- існування нульової матриці, елементами якої є всі нулі.

Наступною операцією є *множення матриці на число з поля*. Виконується ця операція також поелементно:

$$t \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1n} \\ ta_{21} & ta_{22} & \cdots & ta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ta_{m1} & ta_{m2} & \cdots & ta_{mn} \end{pmatrix}.$$

Множення матриць задається складніше. Нехай A – матриця типу $m \times k$, а B – матриця типу $k \times n$. Тоді матриця AB має тип $m \times n$. Щоб отримати елемент c_{ij} матриці AB, потрібно взяти i-тий рядок матриці A: $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \cdots, a_{ik})$ та j-тий стовпець матриці B: $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$. Тоді

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}. \tag{6}$$

Властивості множення матриць:

- некомутативність (у загальному випадку для матриць A, B $AB \neq BA$);
- асоціативність (для довільних матриць A, B і C, таких типів, що існує добуток $(A \cdot B) \cdot C$, виконується рівність $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$);
- існування одиничної матриці $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Ця матриця квадратна, і для довільної матриці A та відповідного типу матриці E виконується рівність $AE = EA = A$.

1.3. Визначники матриць

Нехай n – натуральне число. Розглянемо множину $M = \{1,2,3,\cdots,n\}$. Її елементи можна впорядкувати $n!$ способами. Кожну перестановку множини M будемо записувати у вигляді $< i_1, i_2, i_3, \cdots, i_n >$, де $i_k \in M$, $i_k \neq i_j$ при $k \neq j$. Впорядкована пара (i_k, i_j), $k < j$, перестановки $< i_1, i_2, i_3, \cdots, i_n >$ називається *правильною*, якщо $i_k < i_j$. Неправильні пари називаються *інверсіями*.

Перестановка $<i_1, i_2, i_3, \cdots, i_n>$ множини $M = \{1,2,3,\cdots,n\}$ називається *парною*, якщо вона містить парну кількість інверсій; і, відповідно, *непарною*, якщо вона містить непарну кількість інверсій. Парних і непарних перестановок однакова кількість, а саме $\frac{n!}{2}$.

Взаємно однозначне відображення множини $M = \{1,2,3,\cdots,n\}$ на саму себе називається *підстановкою* на множині M. Підстановки записують у вигляді $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$, де нижній рядок є перестановкою $<i_1, i_2, i_3, \cdots, i_n>$. Підстановка називається *парною* (*непарною*), якщо парною (непарною) є перестановка її нижнього рядка.

Розглянемо квадратну матрицю порядку n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2')$$

1. Утворимо всі можливі добутки із n елементів матриці A, так щоб всі співмножники цих добутків знаходилися в різних рядках та в різних стовпцях матриці.
2. Кожному такому добутку $a_{1\,i_1} \cdot a_{2\,i_2} \cdot a_{3\,i_3} \cdot \cdots \cdot a_{n\,i_n}$ поставимо у відповідність підстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ і обчислимо кількість інверсій у нижньому рядку $inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$.
3. Кожному добутку припишемо знак:
$$(-1)^{inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}} a_{1\,i_1} \cdot a_{2\,i_2} \cdot a_{3\,i_3} \cdot \cdots \cdot a_{n\,i_n}.$$
4. Додамо усі такі добутки з приписаними знаками і отримаємо число, яке назвемо *визначником* матриці A.

Визначник матриці A позначають $|A|$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{7}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{8}$$

Основні властивості визначника

1. Якщо у матриці є нульовий рядок, то її визначник дорівнює нулю.
2. Якщо у матриці поміняти місцями два рядки, то її визначник змінить знак, не змінюючи при цьому абсолютного значення.
3. Якщо матриця має два однакові рядки, то її визначник дорівнює нулю.
4. Якщо довільний рядок матриці поелементно помножити на число t, то ї її визначник збільшиться в t разів.
5. Із рядка матриці можна виносити спільний множник за знак визначника.
6. Якщо матриця має два пропорційні рядки, то її визначник дорівнює нулю.
7. Якщо до рядка матриці додати кратне іншого, то визначник матриці не зміниться.
8. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1}+a'_{k1} & a_{k2}+a'_{k2} & a_{k3}+a'_{k3} & \cdots & a_{kn}+a'_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{k1} & a'_{k2} & a'_{k3} & \cdots & a'_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

9. Позначимо через A^T *транспоновану* матрицю для матриці A:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Зауважимо, що матрицю A^T можна отримати з матриці A помінявши рядки матриці A на стовпці.

Для довільної матриці $|A^T| = |A|$.

10. Поняття визначника матриці симетричне відносно рядків та стовпців матриці. Тому всі властивості визначника матриці відносно стовпців такі ж, як і для рядків.

11. Матриця A називається *верхньою* (*нижньою*) *трикутною*, якщо $a_{ij} = 0$ для всіх $i < j$ ($j < i$). Матриця, яка є одночасно і верхньою, і нижньою трикутною називається *діагональною*. Елементи $a_{ii}, i = \overline{1,n}$ матриці A розташовані на її *головній діагоналі* і називаються *діагональними*.

    Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Основні методи обчислення визначників

1. Виконання елементарних перетворень рядків та стовпців матриці до тих пір, поки не отримаємо трикутну. Після цього скористатися властивістю 11. При виконанні елементарних перетворень враховувати властивості 2,4 та 7.

2. Розклад визначника за елементами рядка (стовпця)

Викреслимо з матриці A i-тий рядок та j-тий стовпець. Отримаємо підматрицю порядку $(n-1)$. Визначник підматриці, отриманої таким чином, називається *доповнюючим мінором елемента* a_{ij}, і позначається M_{ij}. *Алгебраїчним доповненням елемента* a_{ij} матриці A називається число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (11)$$

Має місце формула розкладу визначника за елементами i-того рядка:

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+\cdots+a_{in}A_{in}, \qquad (12)$$

або j-того стовпця:

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}+\cdots+a_{ni}A_{ni}, \qquad (12')$$

1.4. Числові векторні простори

Нехай P – числове поле. Розглянемо множину $P_n=\{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\,|\,\alpha_i\in P\}$ усіх впорядкованих наборів по n чисел із поля P. Такі впорядковані набори чисел із поля P будемо називати *числовими* n-*вимірними векторами*. Якщо $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ – числовий вектор, то числа $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ – його *координати*. Два числові вектори $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ і $\vec{b}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ називають *рівними*, якщо рівні всі їх відповідні координати, тобто $\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2,\cdots,\alpha_n=\beta_n$. Числовий вектор $\vec{0}=(0,0,\cdots,0)$, всі координати якого рівні нулю, називається *нульовим*.

Запровадимо на множині P_n дію *додавання*:

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\cdots,\ \alpha_n+\beta_n)$.

Властивості додавання числових векторів:

- комутативність (для довільних двох числових векторів $\vec{a},\vec{b}\in P_n$ виконується рівність $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$);
- асоціативність (для довільних трьох числових векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in P_n$ виконується рівність $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$);
- нульовий вектор нейтральний відносно дії додавання, тобто кожного вектора $\vec{a}\in P_n$ виконується рівність $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
- для кожного вектора $\vec{a}\in P_n$ існує такий вектор $\vec{b}\in P_n$, що виконується рівність $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$. Дійсно, для вектора $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ слід взяти $\vec{b}=(-\alpha_1,-\alpha_2,\cdots,-\alpha_n)$. Вектор $\vec{b}$ при цьому називають *протилежним вектором до вектора* $\vec{a}$ і позначають $-\vec{a}$.

Наступною операцією є *множення числового вектора на число з поля*. Виконується ця операція також поелементно:

$\lambda \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \cdots, \lambda\alpha_n)$.

Введені дії додавання і множення на число пов'язані *дистрибутивними* законами:

- $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ для довільних $\lambda \in P$ і $\vec{a}, \vec{b} \in P_n$;
- $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ для довільних $\lambda, \mu \in P$ і $\vec{a} \in P_n$.

Множина $P_n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in P\}$ усіх впорядкованих наборів по n чисел із поля P із введеними на ній діями додавання та множення на число з поля P називається *числовим векторним простором над полем* P. Натуральне число n при цьому називається *розмірністю* числового векторного простору P_n.

1.5. Лінійна залежність (незалежність) системи векторів

Лінійною комбінацією системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s \in P_n$ називається вираз $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_s\vec{a}_s$, де $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ – числа з поля P, які називають *коефіцієнтами* лінійної комбінації. Лінійна комбінація називається *тривіальною*, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють нулю.

Лінійна комбінація – це вектор. Очевидно, що тривіальна лінійна комбінація довільної системи векторів дорівнює нульовому вектору.

Множина усіх можливих лінійних комбінацій системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s \in P_n$ називається *лінійною оболонкою векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ і позначається $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s)$.

Якщо для вектора $\vec{b} \in P_n$ існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ з поля P, що $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_s\vec{a}_s$, то кажуть, що вектор $\vec{b}$ *лінійно виражається* через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ з коефіцієнтами $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$. Будемо писати $\vec{b} \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s)$. Очевидно, що нульовий вектор лінійно виражається через будь-яку систему векторів з нульовими коефіцієнтами, тобто $\vec{0} = 0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \cdots + 0\vec{a}_s$.

Означення 1. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ називається *лінійно незалежною*, якщо лише тривіальна лінійна комбінація цих векторів дорівнює нульовому вектору, тобто якщо $\vec{0}$ лінійно виражається через вектори системи лише одним способом: $\vec{0} = 0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \cdots + 0\vec{a}_s$.

Означення 2. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ називається *лінійно незалежною*, якщо із рівності $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_s\vec{a}_s = \vec{0}$ випливає, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_s = 0$.

Означення 1′. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ називається *лінійно залежною*, якщо існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, що дорівнює нульовому вектору, тобто якщо $\vec{0}$ лінійно виражається через вектори системи більше, ніж одним способом.

Означення 2′. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ називається *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ з поля P, серед яких не всі нулі, і для яких виконується рівність $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_s\vec{a}_s = \vec{0}$.

1.6. Властивості лінійно залежних та лінійно незалежних систем векторів

1. Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ – лінійно незалежна, а система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s, \vec{b}$ – лінійно залежна, то вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$.
2. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли у цій системі існує вектор, що лінійно виражається через решту векторів системи.
3. Кожна підсистема лінійно незалежної системи векторів буде лінійно незалежною.
4. Кожна надсистема лінійно залежної системи векторів буде лінійно залежною.
5. Якщо кожен із векторів системи $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m$ лінійно виражається через вектори системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ і при цьому $m > s$, то система векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m$ є лінійно залежною.

1.7. Базис числового векторного простору

Система векторів називається *базисом* числового векторного простору P_n, якщо вона лінійно незалежна, і кожен вектор числового векторного простору P_n лінійно виражається через вектори цієї системи.

Теорема 1. У числовому векторному просторі P_n існує базис.

Дійсно, система векторів

$$\vec{e}_1 = (1,0,0,\cdots,0),$$
$$\vec{e}_2 = (0,1,0,\cdots,0),$$
$$\vec{e}_3 = (0,0,1,\cdots,0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{e}_n = (0,0,0,\cdots,1),$$

лінійно незалежна, і довільний $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in P_n$ можна подати у вигляді $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n$.

Теорема 2. У числовому векторному просторі P_n кожен базис складається з n лінійно незалежних векторів. Кожна система із n лінійно незалежних векторів утворює базис у числовому векторному просторі P_n.

Наслідок. У числовому векторному просторі P_n не існує лінійно незалежної системи більше, ніж з n векторів.

Кількість векторів у базисі простору називається його *розмірністю*. Максимальна кількість лінійно незалежних векторів у просторі називається його *розмірністю*.

Теорема 3. Числовий векторний простір P_n має розмірність n.

Теорема 4. Кожен вектор простору виражається через вектори базису однозначно.

▲ Нехай $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ – базис простору P_n, а вектор $\vec{b} \in P_n$ виражається через базисні вектори більше, ніж одним способом, тобто $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n$.

Тоді $\vec{0} = (\lambda_1 - \alpha_1)\vec{a}_1 + (\lambda_2 - \alpha_2)\vec{a}_2 + \cdots + (\lambda_n - \alpha_n)\vec{a}_n$. Оскільки $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ – лінійно незалежна система, маємо $\lambda_1 - \alpha_1 = \lambda_2 - \alpha_2 = \cdots = \lambda_n - \alpha_n = 0$. Тому

$\lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2, \cdots, \lambda_n = \alpha_n$, і вектор $\vec{b}$ виражається через базисні вектори однозначно. ■

1.8. Поняття підпростору числового векторного простору

Підмножина $W \subseteq P_n$ називається *підпростором* числового векторного простору P_n, якщо вона замкнена відносно дії додавання векторів і множення векторів на число з поля P.

Приклади підпросторів:

1) P_n – числовий векторний простір є підпростором цього ж простору;
2) $\{\vec{0}\}$ – нульовий векторний підпростір;
3) $W_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, 0) \mid \alpha_i \in P, i = \overline{1,n}\} \subset P_n$.
4) Нехай $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ – система векторів простору P_n. Тоді лінійна оболонка $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s)$, породжена векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$, – підпростір числового векторного простору P_n.

Твердження 1. Кожен підпростір числового векторного простору P_n можна розглядати як лінійну оболонку, породжену деякою системою векторів простору P_n.

Максимальна лінійно незалежна підсистема системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ називається *базисом* лінійної оболонки $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s)$, а максимальна кількість лінійно незалежних векторів системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ називається *розмірністю* лінійної оболонки $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s)$ і позначається $\dim L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s)$.

1.9. Ранг системи векторів

Максимальна кількість лінійно незалежних векторів системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ називається *рангом системи векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ і позначається $rang(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s)$. Очевидно, $rang(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s) \le s$ і $rang(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s) = s$ тоді і тільки тоді, коли система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ – лінійно незалежна.

Очевидно, $\dim L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s) = rang(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s)$.

Дві системи векторів називаються *еквівалентними*, якщо кожен вектор однієї системи лінійно виражається через вектори іншої і навпаки.

Твердження. Дві еквівалентні лінійно незалежні системи векторів складаються із однакової кількості векторів.

Зауваження 1. Еквівалентні системи векторів мають однаковий ранг, бо породжують один і той же підпростір.

Зауваження 2. Елементарні перетворення системи векторів (поміняти місцями вектори системи; помножити вектор системи на число, відмінне від нуля; додати до одного вектора системи інший) не змінюють рангу системи.

1.10. Поняття рангу матриці

Кожну матрицю типу $m \times n$ можна розглядати як систему із m n-вимірних числових векторів-рядків та як систему із n m-вимірних числових векторів-стовпців. Для квадратної матриці має місце така теорема:

Теорема 1. Визначник квадратної матриці дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли її рядки лінійно залежні.

Зауважимо, що у теоремі 1 слово “рядки” можна замінити на слово “стовпці”.

Теорема 2. Ранг векторів-стовпців матриці дорівнює рангу векторів-рядків матриці.

Тому надалі будемо говорити про *ранг матриці* як про спільне значення рангу системи векторів-стовпців і рангу системи векторів-рядків матриці.

1.11. Критерій сумісності та критерій визначеності СЛАР

Теорема (*Кронекера-Капеллі*). Система лінійних алгебраїчних рівнянь буде сумісною тоді і тільки тоді, коли ранг її основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці системи.

Теорема (*критерій визначеності СЛАР*). Система лінійних алгебраїчних рівнянь буде визначеною тоді і тільки тоді, коли ранг її основної матриці дорівнює рангу її розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих в системі.

Теорема (*Крамера*). Система лінійних алгебраїчних рівнянь з квадратною основною матрицею буде мати єдиний розв’язок тоді і тільки тоді, коли визначник цієї матриці відмінний від нуля.

Теорема. Система лінійних алгебраїчних рівнянь з квадратною основною матрицею буде сумісною для довільних правих частин тоді і тільки тоді, коли визначник цієї матриці відмінний від нуля.

Для СЛАР з квадратною основною матрицею, визначник якої відмінний від нуля, існують формули для знаходження їх єдиного розв’язку.

Позначимо через Δ визначник основної матриці системи, через Δ_i – визначник матриці, утвореної з основної матриці СЛАР заміною її i-того стовпця на стовпець вільних членів. Тоді $\Delta \neq 0$ і єдиний розв’язок СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}. \end{cases} \tag{1}$$

Формули (1) називають *формулами Крамера*, а метод розв’язання СЛАР з квадратною основною матрицею, визначник якої відмінний від нуля, *методом Крамера*. Зауважимо, що не кожну СЛАР можна розв’язати цим методом. Щоб застосувати формули (1), основна матриця системи має бути квадратною і невиродженою.

1.12. Обернена матриця, критерій її існування та методи обчислення

Будемо розглядати квадратні матриці порядку n. Такі матриці можна додавати і множити. В результаті таких дій будемо отримувати знову квадратні матриці порядку n. Квадратна матриця $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, у якої усі діагональні елементи одиниці, а решта елементів – нулі, називається *одиничною*. Вона виконує роль нейтрального елемента відносно операції множення матриць, тобто для кожної квадратної матриці A порядку n $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Матриця B називається *оберненою* до матриці A, якщо $A \cdot B = B \cdot A = E$. Позначають обернену до матриці A через A^{-1}.

Теорема (*критерій існування оберненої матриці*). Для матриці A існує обернена матриця тоді і тільки тоді, коли $|A| \neq 0$.

Існує два способи обчислення оберненої матриці.

Перший спосіб.

1. Обчислюємо визначник $|A|$. Якщо $|A| = 0$, то матриці оберненої до A не існує.
2. Кожний елемент a_{ij} матриці A заміняємо на його алгебраїчне доповнення A_{ij}.
3. Отриману матрицю з алгебраїчних доповнень транспонуємо. Матрицю $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ називають *приєднаною* до матриці A.
4. Ділимо кожний елемент приєднаної матриці $\widetilde{A}$ на визначник $|A| \neq 0$.

Тобто
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Другий спосіб.

Другий спосіб полягає у одночасному розв'язуванні n СЛАР з однаковою основною матрицею A методом Гаусса. Розглянемо матрицю

$$\left(A\,|\,E\right)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$ Будемо виконувати з нею елементарні перетворення рядків, поки на місці матриці A не отримаємо одиничну матрицю E. Тоді після вертикальної риски отримаємо A^{-1}.

$$\left(A\,|\,E\right)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)\sim\cdots$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{array}\right)=(E\,|\,A^{-1}).$$

1.13. Визначник добутку матриць

Теорема. Для довільних квадратних матриць A, B однакового порядку має місце рівність $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

Наслідок. Якщо $|A|\neq 0$, то існує A^{-1} і $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

1.14. Підпростір розв'язків однорідної СЛАР

Зауважимо для початку, що однорідна СЛАР завжди сумісна, оскільки має нульовий розв'язок $(0,0,0,0,\cdots,0)$.

Теорема 1. Якщо ранг основної матриці однорідної СЛАР з n невідомими дорівнює r, то множина всіх розв'язків цієї системи утворює підпростір розмірності $n-r$ у числовому векторному просторі P_n.

Базис підпростору розв'язків однорідної СЛАР називається *фундаментальною системою розв'язків* (*ФСР*) однорідної СЛАР. Кожний розв'язок однорідної СЛАР можна отримати як лінійну комбінацію ФСР.

Щоб побудувати ФСР однорідної СЛАР потрібно спочатку її розв'язати методом Гаусса. Нехай загальних розв'язок однорідної системи:

$$\begin{cases} x_1 = -t_{1\,r+1}x_{r+1} - t_{1\,r+2}x_{r+2} - \cdots - t_{1\,n}x_n, \\ x_2 = -t_{2\,r+1}x_{r+1} - t_{2\,r+2}x_{r+2} - \cdots - t_{2\,n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -t_{r\,r+1}x_{r+1} - t_{r\,r+2}x_{r+2} - \cdots - t_{r\,n}x_n, \\ x_{r+1}, x_{r+2}, x_{r+3}, \cdots, x_n - \textit{довільні}. \end{cases} \tag{3}$$

Тоді покладемо $x_{r+1} = 1$, а решті вільних змінних надамо значення нуль. Обчислимо значення залежних змінних $x_1 = -t_{1\,r+1}$, $x_2 = -t_{2\,r+1}$, … , $x_r = -t_{r\,r+1}$. Отримали частковий розв'язок $\vec{f}_1 = (-t_{1\,r+1}, -t_{2\,r+1}, \cdots, -t_{r\,r+1}, 1, 0, \cdots, 0)$. Аналогічно, надаючи по черзі кожній вільній змінній значення 1, а решті вільних змінних значення 0, і обчислюючи відповідні значення залежних змінних, отримуємо часткові розв'язки $\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_{n-r}$.

$\vec{f}_1 = (-t_{1\,r+1}, -t_{2\,r+1}, \cdots, -t_{r\,r+1}, 1, 0, \cdots, 0)$,

$\vec{f}_2 = (-t_{1\,r+2}, -t_{2\,r+2}, \cdots, -t_{r\,r+2}, 0, 1, \cdots, 0)$,

………………………………………

$\vec{f}_{n-r} = (-t_{1\,n}, -t_{2\,n}, \cdots, -t_{r\,n}, 0, 0, \cdots, 1)$.

1.15. Зв'язок між розв'язками неоднорідної і відповідної однорідної СЛАР

Теорема. Будь-який розв'язок неоднорідної СЛАР можна подати у вигляді суми фіксованого часткового розв'язку цієї системи і деякого розв'язку відповідної однорідної СЛАР. З іншого боку, сума розв'язку неоднорідної СЛАР і розв'язку відповідної однорідної СЛАР буде розв'язком неоднорідної СЛАР.

Наслідок. Загальний розв'язок неоднорідної СЛАР можна подати у вигляді $\vec{a} = \vec{c} + \lambda_1\vec{f}_1 + \lambda_2\vec{f}_2 + \cdots + \lambda_{n-r}\vec{f}_{n-r}$, де $\vec{c}$ – частковий розв'язок неоднорідної СЛАР, $\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_{n-r}$ – фундаментальна система розв'язків однорідної СЛАР, а $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-r}$ – довільні числа з поля P.

1.16. Приклади розв’язання типових задач

Завдання № 1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 - 3x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 8x_5 = 9 \end{cases}.$$

Розв’язання

Випишемо розширену матрицю системи і будемо виконувати елементарні перетворення її рядків:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 9 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -4 & -8 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -9 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 4 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right).$$

Відповідна система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} + 4x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 3 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 = 3 \end{cases}.$$

Тоді загальний розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 3 + x_3 + x_4 + 3x_5 \\ x_3, x_4, x_5 - \text{довільні} \end{cases}.$$

Система сумісна і невизначена.

Відповідь. Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна і невизначена та її загальний розв’язок має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 3 + x_3 + x_4 + 3x_5 \\ x_3, x_4, x_5 - \text{довільні} \end{cases}.$$

Завдання № 2. Дослідити на сумісність і розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера та матричним способом:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - x_3 = -19 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначник основної матриці системи:

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 8 + 84 + 7 - 40 + 12 = 50$. $\Delta \neq 0$. Тому система сумісна і визначена.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -19 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -95 + 36 - 12 + 3 - 60 + 228 = 100,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -19 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -15 - 6 - 399 + 21 + 9 + 190 = -200,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -19 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 84 - 152 + 133 - 24 + 12 = 50.$$

Тоді за формулами Крамера маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -4,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, для основної матриці A системи існує обернена. Знайдемо її. Для цього обчислимо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{21} = (-1)^{1+2} M_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -24$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 13$$

$$A_{12} = -M_{12} = 11 \qquad A_{22} = M_{22} = 2 \qquad A_{32} = -M_{32} = 1$$

$$A_{13} = M_{13} = 1 \qquad A_{23} = -M_{23} = 32 \qquad A_{33} = M_{33} = -9$$

Обернена матриця до матриці A має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Отже, $A^{-1} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -7 & -24 & 13 \\ 11 & 2 & 1 \\ 1 & 32 & -9 \end{pmatrix}$.

Систему у матричній формі можна записати у вигляді: $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Помножимо цю рівність зліва на матрицю A^{-1}. Маємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -7 & -24 & 13 \\ 11 & 2 & 1 \\ 1 & 32 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ -200 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, розв’язок системи $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1$.

Для перевірки підставимо знайдений розв’язок у систему:

$$\begin{cases} -2 + 4 \cdot (-4) - 1 = -19 \\ 2 \cdot 2 + (-4) + 3 \cdot 1 = 3 \\ 7 \cdot 2 + 4 \cdot (-4) + 5 \cdot 1 = 3 \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1$.

Завдання № 3. Знайти фундаментальну систему розв’язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \qquad\qquad - 8x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 6x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 - 2x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}.$$

Розв’язання

Випишемо основну матрицю системи лінійних алгебраїчних рівнянь і будемо виконувати елементарні перетворення її рядків, тобто будемо розв’язувати систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -8 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & 10 & -2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -6 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Запишемо відповідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ \qquad x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Тоді загальний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 2x_4 + 2x_5 \\ x_2 = -6x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ x_3, x_4, x_5 - \text{довільні} \end{cases}.$$

Будемо надавати по черзі одній із вільних змінних значення 1, а решті вільних змінних – значення 0. Обчислимо відповідні значення залежних змінних, і отримаємо три часткові розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які і утворять фундаментальну систему розв'язків.

Покладемо $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$. Тоді $x_1 = -2$ і $x_2 = -6$.

Маємо частковий розв'язок $\vec{f}_1 = (-2, \quad -6, \quad 1, \quad 0, \quad 0\ )$.

Покладемо $x_4 = 1$, $x_3 = x_5 = 0$. Тоді $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ і відповідний частковий розв'язок $\vec{f}_2 = (\ 2, \quad -2, \quad 0, \quad 1, \quad 0\ )$.

Насамкінець покладемо $x_5 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$, і отримаємо частковий розв'язок $\vec{f}_3 = (2, \quad 2, \quad 0, \quad 1, \quad 0\ )$.

Числові вектори $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ та $\vec{f}_3$ складають шукану фундаментальну систему розв'язків.

Відповідь:

$$\vec{f}_1 = (-2, \quad -6, \quad 1, \quad 0, \quad 0\ ).$$

$$\vec{f}_2 = (\ 2, \quad -2, \quad 0, \quad 1, \quad 0\ ).$$

$$\vec{f}_3 = (\ 2, \quad 2, \quad 0, \quad 1, \quad 0\ ).$$

Завдання № 4. Обчислити визначник матриці:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Спочатку зробимо нулі в нижньому рядку матриці віднявши від другого стовпця перший, і від третього стовпця перший, помножений на 4:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 6 & 11 & 1 \\ 1 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці при цьому не зміниться.

Розкладемо визначник отриманої матриці за останнім рядком:

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 & 11 & 1 \\ 1 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{41} = (-1)^{4+1} M_{41} = -\begin{vmatrix} 6 & 11 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 6 & 11 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(6 \cdot (-4) \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 11 + 1 \cdot 1 \cdot 6 - 2 \cdot 1 \cdot (-4) - 6 \cdot 6 \cdot 1 - 1 \cdot 11 \cdot 5) =$$
$$= -2(-120 + 22 + 6 + 8 - 36 - 55) = -2 \cdot (-175) = 350.$$

Відповідь: $|A| = 350$.

Завдання № 5. Знайти матрицю, обернену до заданої:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Одним із методів знаходження оберненої матриці є її обчислення за формулою $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, як у задачі 2.

Застосуємо метод елементарних перетворень. Для цього допишемо до заданої матриці одиничну матрицю третього порядку і будемо виконувати елементарні перетворення рядків до тих пір, поки на місці заданої матриці не отримаємо одиничну. Тоді зліва від неї буде шукана обернена матриця.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right).$$

Відповідь:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Завдання № 6. Знайти добуток матриць

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 2+0\cdot 1+(-3)\cdot(-4) & 2\cdot 5+0\cdot(-2)+(-3)\cdot 0 & 2\cdot 0+0\cdot(-3)+(-3)\cdot 2 \\ 3\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot(-4) & 3\cdot 5+2\cdot(-2)+(-1)\cdot 0 & 3\cdot 0+2\cdot(-3)+(-1)\cdot 2 \\ 1\cdot 2+(-1)\cdot 1+4\cdot(-4) & 1\cdot 5+(-1)\cdot(-2)+4\cdot 0 & 1\cdot 0+(-1)\cdot(-3)+4\cdot 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 16 & 10 & -6 \\ 12 & 11 & -8 \\ -15 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

Відповідь:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 10 & -6 \\ 12 & 11 & -8 \\ -15 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

Завдання № 7. Обчислити ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -14 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Будемо виконувати елементарні перетворення рядків та стовпців матриці, які не змінюють рангу:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -14 & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 14 & 9 \\ 0 & -42 & -27 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 14 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримали два ненульових рядки. Отже, ранг матриці дорівнює два.

Відповідь: $\text{rang}\ A=2$.

Завдання № 8. Перевірити на лінійну залежність систему векторів:

$$\vec{a}_1(1,\ \ -1,\ \ 0),\ \vec{a}_2(2,\ \ 1,\ \ 1),\ \vec{a}_3(-3,\ \ 2,\ \ 1).$$

Розв'язання

Утворимо із числових векторів матрицю:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Довести, що вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ лінійно незалежні можна двома способами. Перший спосіб полягає у обчисленні рангу матриці A. Якщо цей ранг дорівнює кількості векторів (у даному випадку їх 3), то ці вектори лінійно незалежні. Якщо матриця A – квадратна, то замість рангу можна обчислити її визначник. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ будуть лінійно незалежними тоді і тільки тоді, коли $|A| \neq 0$.

Продемонструємо перший спосіб:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Звідси $rang\ A = 3$. Отже, вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – лінійно незалежні.

Другий спосіб:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 + 0 - 0 - 2 + 2 = 4 \neq 0.$$ Отже, вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – лінійно незалежні.

Відповідь: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – лінійно незалежні.

Завдання № 9. Довести, що вектори $\vec{a}_1(-1,\ 2,\ 4)$, $\vec{a}_2(3,\ 2,\ -2)$, $\vec{a}_3(0,\ 3,\ 5)$ утворюють базис у просторі. Розкласти вектор $\vec{x}(-6,\ -1,\ 9)$ за цим базисом.

Розв'язання

Утворимо з числових векторів матрицю типу 3×3 і обчислимо її визначник:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 36 + 0 - 0 - 6 - 30 = -10 \neq 0.$$

Оскільки визначник утвореної матриці відмінний від нуля, її вектори-стовпці – лінійно незалежні. Цих векторів три, і вони мають по три компоненти. Тому вони утворюють базис.

За означенням базису, будь-який вектор, зокрема і $\vec{x}$, лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ з деякими коефіцієнтами, які визначаються однозначно. Таким чином, для $\vec{x}$ існують і єдині числа

x_1, x_2, x_3 такі, що виконується рівність $x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + x_3 \cdot \vec{a}_3 = \vec{x}$. У розгорнутому вигляді її можна записати:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Це система лінійних алгебраїчних рівнянь у векторній формі. Запишемо її ще у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо цю систему методом Гауса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & -6 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 3 & -13 \\ 0 & 10 & 5 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 3 & -13 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Отже, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$. Тому $\vec{x} = -2\vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Відповідь: $\vec{x} = -2\vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Розділ 2. Геометричні вектори. Скалярний, векторний та мішаний добутки.

2.1. Геометричні вектори. Основні поняття.

Геометричний вектор – це направлений відрізок, що сполучає дві точки площини або простору, які називаються початком та кінцем вектора. Довжина вектора називається його *модулем*.

Вектор називається *нульовим*, якщо його початок збігається з кінцем. Модуль вектора – невід’ємне число; модуль нульового вектора дорівнює нулю.

Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Нульовий вектор вважається колінеарним до довільного вектора.

Означення 1. Геометричні вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, мають однаковий напрям і довжину.

Означення 2. Геометричні вектори називаються *рівними*, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням.

У геометрії не розрізняють рівні вектори, у яких різні початки.

Позначаються геометричні вектори маленькими літерами латинського алфавіту із стрілочкою над літерою. Наприклад, $\vec{a}$, $\vec{b}$. Якщо при цьому відомо, що початок вектора у точці A, а кінець – у точці B, то пишуть $\overrightarrow{AB}$.

Вектор $\vec{b}$ називається *протилежним до вектора* $\vec{a}$, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні, мають рівні модулі і протилежно направлені. Позначають протилежний до $\vec{a}$ вектор $-\vec{a}$.

Модуль вектора $\vec{a}$ позначають $|\vec{a}|$.

Одиничний вектор – це вектор, модуль якого дорівнює одиниці.

2.2. Лінійні операції над геометричними векторами

Операція додавання векторів

Нехай маємо два вектори $\vec{a},\vec{b}$. Виконаємо паралельне перенесення вектора $\vec{b}$ так, щоб його початок сумістився з кінцем вектора $\vec{a}$. Сполучимо відрізком початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$. Вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{b}$ будемо називати *сумою* векторів $\vec{a},\vec{b}$. Описане вище правило побудови суми двох векторів називають *правилом трикутника*.

Суму двох векторів можна побудувати ще одним способом. Виконаємо паралельне перенесення вектора $\vec{b}$ так, щоб його початок сумістився з початком вектора $\vec{a}$. Побудуємо на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралелограм. Вектор, направлений вздовж діагоналі цього паралелограма, початок якого збігається зі спільним початком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а кінець – з протилежною вершиною паралелограма, є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Це правило побудови суми векторів називається *правилом паралелограма*.

Введена операція додавання векторів комутативна і асоціативна. Нульовий вектор нейтральний відносно додавання, тобто для довільного вектора $\vec{a}$ маємо $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. Сума двох взаємно протилежних векторів дорівнює нульовому вектору, тобто для довільного вектора $\vec{a}$ маємо $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Множення вектора на число

Добутком вектора $\vec{a}$ *на число* λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який задовольняє наступні три умови:

1) $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;
2) вектори $\vec{a}$ і $\lambda\vec{a}$ – колінеарні;
3) вектори $\vec{a}$ і $\lambda\vec{a}$ – співнаправлені, якщо $\lambda>0$, і вектори $\vec{a}$ і $\lambda\vec{a}$ – протилежно направлені, якщо $\lambda<0$.

Операція множення вектора на число має такі основні властивості:

1) для довільних чисел λ,μ і вектора $\vec{a}$ $\quad\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\cdot\mu)\vec{a}$;
2) для довільного вектора $\vec{a}$ $\quad 1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;
3) для довільного вектора $\vec{a}$ $\quad 0\cdot\vec{a}=\vec{0}$;
4) для довільного вектора $\vec{a}$ $\quad -1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.

Введені операції додавання векторів та множення вектора на число пов'язані між собою двома *дистрибутивними законами*:

1) для довільних чисел λ, μ і вектора $\vec{a}$ $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

2) для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і числа λ $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

Операція віднімання векторів – протилежна до операції додавання. *Різницею векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, для якого $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$. Побудувати різницю векторів $\vec{a} - \vec{b}$ можна за *правилом трикутника*. Виконаємо паралельне перенесення вектора $\vec{b}$ так, щоб його початок сумістився з початком вектора $\vec{a}$. Сполучимо відрізком кінці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{a}$ буде різницею векторів $\vec{a} - \vec{b}$.

Лема про колінеарні вектори. Для того, щоб вектори $\vec{a}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$ були колінеарні необхідно і достатньо, щоб існувало таке дійсне число λ, що $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Зауваження. Властивості лінійних операцій над геометричними векторами схожі із властивостями лінійних операцій над числовими векторами. Числові векторні простори – широке узагальнення геометричних.

Із зауваження випливає, що означення лінійної залежності, всі поняття введені у числових векторних просторах, теореми для геометричних векторів зберігаються. Окремо слід розглянути питання про базис і розмірності просторів геометричних векторів.

Система векторів називається *базисом* векторного простору , якщо вона лінійно незалежна, і кожен вектор векторного простору лінійно виражається через вектори цієї системи.

Із леми про колінеарні вектори випливає, що два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні.

У геометрії розглядають геометричні вектори площини та геометричні вектори простору.

Теорема 1. У площині кожна впорядкована пара неколінеарних векторів утворює базис. З іншого боку, кожен базис у площині складається з двох неколінеарних векторів.

Вектори називаються *компланарними*, якщо у просторі існує площина, до якої всі ці вектори паралельні.

Очевидно, що будь-яка пара векторів компланарна. Системи більше, ніж з двох векторів можуть бути як компланарними, так і некомпланарними.

Теорема 2. У просторі кожна впорядкована трійка некомпланарних векторів утворює базис. З іншого боку, кожен базис у просторі складається з трьох некомпланарних векторів.

Оскільки кожен вектор простору можна єдиним способом подати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів, можна ввести поняття координат вектора у заданому базисі.

Координати вектора у заданому базисі – це коефіцієнти лінійної комбінації, у вигляді якої даний вектор виражається через базисні вектори.

Теорема 3. Координати суми векторів дорівнюють сумам відповідних координат цих векторів. Координати вектора, помноженого на число, дорівнюють координатам цього вектора, помноженим на це число.

Отже, вибравши базис кожному геометричному вектору можна поставити у відповідність впорядковану пару (для векторів у площині) або впорядковану трійку (для векторів у просторі) дійсних чисел, тобто числовий вектор із простору $\mathbf{R}_2$ або $\mathbf{R}_3$. Лінійні операції з геометричними векторами, що задані своїми координатами в деякому фіксованому базисі, зводяться до лінійних операцій з відповідними числовими векторами.

Часто у просторі вибирають декартову прямокутну систему координат. А у якості базису вибирають одиничні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направлені вздовж координатних осей Ox, Oy та Oz.

Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь v називається число, яке дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута між вектором і додатнім напрямком осі, тобто $$np_v\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, v}).$$

Геометричний зміст координат вектора. Координати вектора – це проекції вектора на координатні осі Ox, Oy та Oz.

Теорема 4. Вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх координати пропорційні.

Теорема 5. Вектори $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ і $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

2.3. *Скалярний добуток векторів*

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \qquad (1)$$

Для довільного вектора $\vec{a}$ $\quad (\vec{a}, \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{a}) = 0$.

Оскільки для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $\quad np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, маємо

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b}. \qquad (2)$$

Властивості скалярного добутку

1) для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$. Кажуть, що скалярний добуток *комутативний*.

2) для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і числа λ $\quad (\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$.

Кажуть, що числовий множник можна виносити із першого аргументу скалярного добутку.

▲ За означенням скалярного добутку і множення вектора на число маємо $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\lambda\vec{a}, \vec{b}}) = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\lambda\vec{a}, \vec{b}})$. $\qquad (3)$

Розглянемо випадки.

1) Нехай $\lambda = 0$. Тоді $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (0 \cdot \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{0}, \vec{b}) = 0$ і $\lambda(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \cdot (\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Тому для $\lambda = 0$ рівність $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$ виконується.

2) Нехай $\lambda > 0$. Тоді $|\lambda| = \lambda$ і вектори $\vec{a}$ та $\lambda\vec{a}$ – колінеарні і однаково направлені. Тому $(\widehat{\lambda\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Із (3) випливає

$$(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \lambda(\vec{a},\vec{b}).$$

3) Нехай $\lambda < 0$. Тоді $|\lambda| = -\lambda$ і вектори $\vec{a}$ та $\lambda\vec{a}$ – колінеарні і протилежно направлені. Тому $(\widehat{\lambda\vec{a},\vec{b}}) = \pi - (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$. Із (3) випливає

$$(\lambda\vec{a},\vec{b}) = -\lambda\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\pi - (\widehat{\vec{a},\vec{b}})) = \lambda\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \lambda(\vec{a},\vec{b}).$$

Отже, рівність $(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b})$ виконується для всіх чисел λ і векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$. ■

3) для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ $\quad (\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c})$.

Кажуть, що скалярний добуток *адитивний* по першому аргументу.

▲ Рівність очевидна при $\vec{c} = \vec{0}$. Нехай тепер $\vec{c} \neq \vec{0}$.

Тоді $\quad (\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = |\vec{c}|\cdot np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}|\cdot(np_{\vec{c}}\vec{a} + np_{\vec{c}}\vec{b}) = |\vec{c}|\cdot np_{\vec{c}}\vec{a} + |\vec{c}|\cdot np_{\vec{c}}\vec{b} =$
$= (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c})$. ■

4) для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і числа λ $\quad (\vec{a},\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b})$.

Кажуть, що числовий множник можна виносити із другого аргументу скалярного добутку.

5) для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ $\quad (\vec{c},\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{c},\vec{a}) + (\vec{c},\vec{b})$.

Кажуть, що скалярний добуток *адитивний* по другому аргументу.

6) Скалярний добуток двох векторів додатний, якщо кут між ними гострий.

7) Скалярний добуток двох векторів від'ємний, якщо кут між ними тупий.

8) Скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

▲ Якщо вектори ненульові, то їх модулі не дорівнюють нулю. Тому із (1) випливає, що косинус кута між векторами дорівнює нулю. Отже, цей кут прямий. З іншого боку, якщо вектори перпендикулярні, то косинус кута між векторами дорівнює нулю і з (1) маємо скалярний добуток цих векторів також дорівнює нулю.

Нульовий вектор вважається перпендикулярним до будь-якого вектора. З іншого боку, для довільного вектора $\vec{a}$ $(\vec{a},\vec{0}) = (\vec{0},\vec{a}) = 0$. ■

9) для довільного вектора $\vec{a}$ $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$.

Теорема. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами у декартовій прямокутній системі координат: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Тоді

$$(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{4}$$

▲ Оскільки вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – попарно перпендикулярні, $(\vec{i},\vec{j}) = (\vec{i},\vec{k}) = (\vec{j},\vec{k}) = 0$. Вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – одиничні, тому за властивістю 9, $(\vec{i},\vec{i}) = (\vec{j},\vec{j}) = (\vec{k},\vec{k}) = 1$.

Використовуючи властивості 2-5 скалярного добутку, отримуємо:

$$(\vec{a},\vec{b}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2(\vec{i},\vec{i}) + x_1y_2(\vec{i},\vec{j}) + x_1z_2(\vec{i},\vec{k}) +$$
$$+ y_1x_2(\vec{j},\vec{i}) + y_1y_2(\vec{j},\vec{j}) + y_1z_2(\vec{j},\vec{k}) + z_1x_2(\vec{k},\vec{i}) + z_1y_2(\vec{k},\vec{j}) + z_1z_2(\vec{k},\vec{k}) =$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$ ■

Наслідок 1. Для вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{5}$$

Наслідок 2. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами у декартовій прямокутній системі координат: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Тоді

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{6}$$

2.4. Векторний добуток векторів

Векторним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що задовольняє умови:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$ і до вектора $\vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$; (7)

3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку.

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається $[\vec{a},\vec{b}]$.

Для довільного вектора $\vec{a}$ $[\vec{a},\vec{0}]=[\vec{0},\vec{a}]=\vec{0}$.

Властивості векторного добутку

1) для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$. Кажуть, що векторний добуток *антикомутативний*.

2) для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і числа λ $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$. Кажуть, що числовий множник можна виносити із першого аргументу векторного добутку.

▲ Доведення подібне до доведення такої властивості для скалярного добутку. ■

3) для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$. Кажуть, що векторний добуток *адитивний* по першому аргументу.

4) для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і числа λ $[\vec{a},\lambda\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$.

5) для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ $[\vec{c},\vec{a}+\vec{b}]=[\vec{c},\vec{a}]+[\vec{c},\vec{b}]$.

6) Два вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нульовому вектору.

▲ Якщо хоча б один із векторів нульовий, то твердження очевидне.

Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$ – ненульові колінеарні вектори. За лемою про колінеарні вектори, існує таке число λ, що $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. Тоді $[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},\lambda\vec{a}]=\lambda[\vec{a},\vec{a}]$. Оскільки кут між парою рівних векторів дорівнює 0, модуль векторного добутку $[\vec{a},\vec{a}]$ також дорівнює 0 (із (7)). Отже, $[\vec{a},\vec{a}]=\vec{0}$. Тому $[\vec{a},\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{a}]=\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$.

З іншого боку, якщо векторний добуток двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює нулю, то із (7) випливає, що $\sin(\vec{a},\stackrel{\wedge}{\vec{b}})=0$. Звідси кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ або дорівнює 0°, або 180°. Отже, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні. ■

7) Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах.

▲ Доведення випливає із рівності (7) і формули для обчислення площі паралелограма. ■

Теорема. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами у декартовій прямокутній системі координат: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Тоді

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}. \qquad (8)$$

▲ Оскільки вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – попарно перпендикулярні, і утворюють праву трійку $[\vec{i},\vec{j}] = \vec{k}$, $[\vec{j},\vec{k}] = \vec{i}$, $[\vec{k},\vec{i}] = \vec{j}$. Із антикомутативності векторного добутку $[\vec{j},\vec{i}] = -\vec{k}$, $[\vec{k},\vec{j}] = -\vec{i}$, $[\vec{i},\vec{k}] = -\vec{j}$. Із властивості 6, $[\vec{i},\vec{i}] = [\vec{j},\vec{j}] = [\vec{k},\vec{k}] = \vec{0}$.

Використовуючи властивості 1-5 векторного добутку, отримуємо:

$$[\vec{a},\vec{b}] = [x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}] = x_1x_2[\vec{i},\vec{i}] + x_1y_2[\vec{i},\vec{j}] + x_1z_2[\vec{i},\vec{k}] +$$

$$+ y_1x_2[\vec{j},\vec{i}] + y_1y_2[\vec{j},\vec{j}] + y_1z_2[\vec{j},\vec{k}] + z_1x_2[\vec{k},\vec{i}] + z_1y_2[\vec{k},\vec{j}] + z_1z_2[\vec{k},\vec{k}] =$$

$$= x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} -$$

$$-(x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \ ■$$

2.5. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$, тобто вектор $\vec{a}$ множиться на вектор $\vec{b}$ векторно, а результат цього множення множиться на вектор $\vec{c}$ скалярно.

Зауважимо, що трійку векторів можна впорядкувати 6 способами:

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$	$\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$
$\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$	$\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{b}$
$\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$	$\vec{c}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$

Впорядковані трійки векторів у кожному із стовпчиків мають однакову орієнтацію. При цьому в одному зі стовпчиків усі трійки ліві, а в іншому – праві.

Теорема. Мішаний добуток $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятого зі знаком "+", якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – права, і зі знаком "–" в противному разі. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Наслідок 1. Для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ $\quad ([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = (\vec{a},[\vec{b},\vec{c}])$. Тому надалі будемо позначати мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ так $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Наслідок 2. Для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}).$$

Теорема. Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задані координатами у декартовій прямокутній системі координат: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$. Тоді

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

▲ Використаємо формули (4) і (8).

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}, \quad x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k} \right) =$$

$$x_3 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \ \blacksquare$$

Наслідок 3. Вектори $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ і $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$ – компланарні тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

2.6. Приклади розв'язання типових задач

Завдання № 1. Дано вершини трикутника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$. Знайти його внутрішні кути.

Розв'язання

Знайдемо внутрішній кут $\angle A$ трикутника. Для цього розглянемо вектори $\overrightarrow{AB}(-3;0;-4)$ та $\overrightarrow{AC}(4;0;-3)$, що виходять із вершини A. Їх скалярний добуток $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -3\cdot 4 + 0\cdot 0 + (-4)\cdot(-3) = 0$. Отже, вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ – перпендикулярні. Тому $\angle A = 90^\circ$.

Знайдемо тепер внутрішній кут $\angle B$ трикутника. Для цього розглянемо вектори $\overrightarrow{BA}(3;0;4)$ та $\overrightarrow{BC}(7;0;1)$, що виходять із вершини B. Їх скалярний добуток $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = 3\cdot 7 + 0\cdot 0 + 4\cdot 1 = 25$. Знайдемо довжини цих векторів: $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = 5$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7^2+0^2+1^2} = 5\sqrt{2}$.

$$\cos\angle ABC = \cos(\overrightarrow{BA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BC}) = \frac{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{25}{5\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, кут $\angle B = 45^\circ$. Кут $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Відповідь: $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = \angle C = 45^\circ$. Трикутник прямокутний і рівнобедрений.

Завдання № 2. Дано піраміду з вершинами $A(5;1;-4)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;3;-4)$, $D(2;2;2)$. Знайти об'єм піраміди та довжину висоти, опущеної на грань ABC.

Розв'язання

Розглянемо три вектори, що виходять з однієї вершини, наприклад з точки A, і направлені вздовж ребер піраміди: $\overrightarrow{AB}(-4;1;3)$, $\overrightarrow{AC}(-2;2;0)$, $\overrightarrow{AD}(-3;1;6)$. Знайдемо об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах:

$$V_{паралелепіпеда} = |(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})| = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = |-24| = 24.$$

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6} V_{паралелепіпеда} = \frac{24}{6} = 4.$$

Для того, щоб знайти довжину висоти, опущеної на грань ABC, знайдемо площу основи піраміди – площу трикутника ABC. Розглянемо одну з його вершин, наприклад A, і два вектори $\overrightarrow{AB}(-4;1;3)$ та $\overrightarrow{AC}(-2;2;0)$, що виходять із цієї вершини і збігаються зі сторонами цього трикутника.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-6\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} = 3\sqrt{3}.$$

Із того, що $V_{піраміди} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h_D$, випливає $h_D = \frac{3V_{піраміди}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot 4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

Відповідь: $V_{піраміди} = 4$, $h_D = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

Розділ 3. Прямі і площини. Їх взаємне розміщення.

3.1. Рівняння прямої на площині. Взаємне розміщення прямих на площині.

Нехай на площині задано декартову прямокутну систему координат.

Співвідношення виду $F(x,y)=0$ називається *рівнянням з двома змінними* x,y, якщо $F(x,y)=0$ – не тотожна рівність, тобто коли існують такі x^*,y^*, що $F(x^*,y^*)\neq 0$.

Рівнянням даної кривої (лінії) у вибраній системі координат називається рівняння виду
$$F(x,y)=0, \qquad (1)$$
яке задовольняють координати всіх точок кривої, і не задовольняють координати жодної точки, що не належить цій кривій.

3.1.1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай на площині задано декартову прямокутну систему координат.

Розглянемо пряму l, яка не паралельна до осі Oy. Кут, що утворює пряма з додатним напрямком осі Ox називається *кутом нахилу прямої*. Тангенс цього кута називається *кутовим коефіцієнтом прямої*. Якщо пряма проходить через дві точки $M_1(x_1,y_1)$ та $M_2(x_2,y_2)$, то її кутовий коефіцієнт можна обчислити за формулою:
$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad (2)$$

Можна довести, що кожну пряму непаралельну до осі Oy, можна задати рівнянням виду:
$$y=k\cdot x+b, \qquad (3)$$
яке називається *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*, тут k – кутовий коефіцієнт прямої, а b – величина відрізка, який відсікає пряма на осі Oy. З іншого боку, кожне рівняння виду (3) задає деяку пряму з кутовим коефіцієнтом k, яка відсікає на осі Oy відрізок величини b.

Зауважимо, що пряму паралельну до осі Oy не можна задати рівнянням з кутовим коефіцієнтом, бо в цьому випадку кут її нахилу дорівнює 90°, а тангенс такого кута не існує.

Якщо $b = 0$, то рівняння (3) набуває вигляду $y = k \cdot x$. У цьому випадку пряма проходить через початок координат $O(0,0)$. Якщо $k = 0$, то рівняння (3) набуває вигляду $y = b$. У цьому рівнянні відсутня змінна x, тому абсциса точок цієї прямої може набувати яких завгодно дійсних значень. Така пряма паралельна до координатної осі Ox.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, такої що проходить через точку $M(x_1, y_1)$ має вигляд:

$$y = k(x - x_1) + y_1. \tag{4}$$

Складемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$. Кутовий коефіцієнт цієї прямої дорівнює $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Підставимо його у рівняння (4):

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1. \tag{5}$$

Якщо відомі кутові коефіцієнти k_1, k_2 двох прямих, то один із кутів φ між цими прямими можна обчислити за формулою:

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \tag{6}$$

У паралельних прямих кутові коефіцієнти однакові:

$$k_1 = k_2, \tag{7}$$

Це *ознака паралельності прямих*, заданих рівняннями з кутовими коефіцієнтами.

Якщо кут φ між прямими, заданими рівняннями з кутовим коефіцієнтом, 90°, то його тангенса не існує. Із формули (6) випливає, що знаменник дробу $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$ перетворюється в 0. Отже, виконується умова:

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \tag{8}$$

З іншого боку, із $k_1 \cdot k_2 = -1$ випливає, що прямі з кутовими коефіцієнтами k_1, k_2 – перпендикулярні. Рівність (8) – *умова перпендикулярності прямих*, заданих рівняннями з кутовим коефіцієнтом.

3.1.2. Загальне рівняння прямої

Теорема 1. У декартовій прямокутній системі координат кожна пряма задається алгебраїчним рівнянням першого порядку

$$Ax + By + C = 0, \tag{9}$$

і навпаки, кожне алгебраїчне рівняння першого порядку задає деяку пряму.

Рівняння (9) називають *загальним рівнянням прямої*.

Оскільки (9) – рівняння, його коефіцієнти A, B одночасно у 0 не перетворюються, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$.

Геометричний зміст коефіцієнтів A, B у загальному рівнянні прямої – це координати вектора $\vec{n}(A, B)$, перпендикулярного до цієї прямої. Цей вектор – ненульовий. Його називають *вектором нормалі*.

Якщо хоча б один із коефіцієнтів рівняння (9) дорівнює нулю, таке рівняння прямої називається *неповним*. Розглянемо випадки неповних рівнянь прямої.

1) $C = 0$. Рівняння (9) набуває вигляду $Ax + By = 0$. Пряма проходить через початок координат $O(0,0)$.

2) $A = 0$. При цьому $B \neq 0$. Рівняння (9) набуває вигляду $By + C = 0$. Звідси $y = -\frac{C}{B} = const$. Пряма паралельна до осі Ox. Якщо додатково, $C = 0$, то рівняння (9) набуває вигляду $y = 0$. Пряма збігається з координатною віссю Ox.

3) $B = 0$. При цьому $A \neq 0$. Рівняння (9) набуває вигляду $Ax + C = 0$. Звідси $x = -\frac{C}{A} = const$. Пряма паралельна до осі Oy. Якщо додатково, $C = 0$, то рівняння (9) набуває вигляду $x = 0$. Пряма збігається з координатною віссю Oy.

Твердження 1. Два рівняння $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ задають *одну і ту ж пряму* тоді і тільки тоді, коли їх коефіцієнти пропорційні

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{10}$$

Твердження 2. Два рівняння $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ задають *пару паралельних прямих* тоді і тільки тоді, коли:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \tag{11}$$

Твердження 3. Два рівняння $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ задають *пару прямих, що перетинаються* в точці тоді і тільки тоді, коли:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}. \tag{12}$$

У випадку, коли $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ єдиний розв'язок системи лінійних рівнянь $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$ можна знайти за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{C_2B_1 - C_1B_2}{A_1B_2 - A_2B_1}, \\ y = \dfrac{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}. \end{cases} \tag{13}$$

Впорядкована пара чисел (x, y), визначених за формулою (13), і є *координатами точки перетину прямих*, заданих рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Якщо у рівнянні (9) всі коефіцієнти $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то рівняння (9) називається *повним*. У цьому випадку виконаємо перетворення:

$$Ax + By + C = 0 \iff Ax + By = -C \iff \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Позначимо $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$. Тоді рівняння набуває вигляду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{14}$$

Рівняння (6) називають *рівнянням прямої "у відрізках"*. Коефіцієнти a, b, c – величини відрізків, які відсікає пряма на координатних осях Ox та Oy відповідно.

Кут φ *між прямими*, заданими загальними рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{15}$$

Зокрема, умова перпендикулярності цих прямих:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \tag{16}$$

3.1.3. Нормальне рівняння прямої

Для прямої l розглянемо пряму n, перпендикулярну до неї і таку, що проходить через початок координат O. Нехай точка P – точка перетину цих прямих. На прямій n виберемо додатний напрям, який збігається із напрямком вектора $\overrightarrow{OP}$. Побудована для прямої l пряма n із вибраним на ній додатним напрямом називається *нормаллю* до прямої l.

Позначимо через α кут, утворений нормаллю до прямої l з додатним напрямком координатної осі Ox, через p – відстань від початку координат до прямої l. Тоді пряма l задається рівнянням виду:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0. \tag{17}$$

Це рівняння називають *нормальним рівнянням прямої*.

Щоб перейти від загального рівняння (9) прямої до нормального, потрібно рівняння (9) помножити на *нормуючий множник*

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{18}$$

Знак μ вибирають протилежним до знаку коефіцієнта C у загальному рівнянні (9).

3.1.4. Відстань від точки до прямої

Позначимо відстань від точки M до прямої l через d. *Відхиленням точки* M *від прямої* l будемо називати число $+d$, якщо точка M і початок координат O лежать по різні боки від прямої l, і число $-d$, якщо точка M і початок координат O лежать по один бік від прямої l. Відхилення точки M від прямої l будемо позначати $\delta(M,l)$. Очевидно, $\delta(M,l) = \pm d(M,l)$ і $d(M,l) = |\delta(M,l)|$.

Теорема 2. Відхилення точки $M(x^*, y^*)$ від прямої l, заданої нормальним рівнянням (17) дорівнює:

$$\delta(M,l) = x^* \cdot \cos\alpha + y^* \cdot \sin\alpha - p. \tag{19}$$

Наслідок 1. Відстань від точки $M(x^*, y^*)$ до прямої l, заданої нормальним рівнянням (17) дорівнює:

$$d(M,l) = |x^* \cdot \cos\alpha + y^* \cdot \sin\alpha - p|. \tag{20}$$

Наслідок 2. Відстань від точки $M(x^*, y^*)$ д прямої l, заданої загальним рівнянням (9) дорівнює:

$$d(M,l) = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{21}$$

3.1.5. Канонічне та параметричні рівняння прямої

Для прямої α розглянемо який-небудь паралельний ненульовий вектор $\vec{a}(l,m)$. Він називається *напрямним вектором прямої* α. Нехай точка $M(x_0, y_0)$ належить прямій α. Тоді пряму можна задати *канонічним рівнянням*:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{22}$$

Для прямої, заданої канонічним рівнянням введемо *параметр* $t = \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$. Тоді система

$$\begin{cases} x = l \cdot t + x_0, \\ y = m \cdot t + y_0, \end{cases} \tag{23}$$

де параметр t набуває усіх дійсних значень, задає ту ж пряму. Система (23) – *параметричне задання прямої*.

3.1.6. Взаємне розміщення прямих, заданих канонічними рівняннями

Кут між прямими $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}$ та $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}$ можна вважати рівним кутові між їх напрямними векторами $\vec{a}_1(l_1,m_1)$ та $\vec{a}_2(l_2,m_2)$. Тому його можна обчислити за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}. \qquad (24)$$

Зокрема, умова перпендикулярності цих прямих:

$$l_1l_2+m_1m_2=0. \qquad (25)$$

Прямі на площині можуть збігатися, бути паралельними або перетинатися в одній точці.

Твердження 1. Рівняння $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}$ та $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}$ задають *пару прямих, що перетинаються* в одній точці, тоді і тільки тоді, коли виконується умова:

$$\frac{l_1}{l_2}\neq\frac{m_1}{m_2}. \qquad (26)$$

Рівняння $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}$ та $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}$ задають *пару паралельних прямих*, тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases}\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2},\\ \frac{x_1-x_2}{l_2}\neq\frac{y_1-y_2}{m_2}.\end{cases} \qquad (27)$$

Рівняння $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}$ та $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}$ задають *пару прямих, що збігаються* тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases}\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2},\\ \frac{x_1-x_2}{l_2}=\frac{y_1-y_2}{m_2}.\end{cases} \qquad (28)$$

3.2. Рівняння площини та прямої у просторі

Нехай у просторі задано декартову прямокутну систему координат.

Співвідношення виду $F(x,y,z)=0$ називається *рівнянням з трьома змінними* x,y,z, якщо $F(x,y,z)=0$ – не тотожна рівність, тобто коли існують такі x^*,y^*,z^*, що $F(x^*,y^*,z^*)\neq 0$.

Поверхнею, заданою рівнянням $F(x,y,z)=0$ в деякій системі координат, називається геометричне місце точок простору, координати яких перетворюють дане рівняння в тотожну рівність при їх підстановці замість відповідних змінних.

Рівнянням даної поверхні у вибраній системі координат називається рівняння виду

$$F(x,y,z)=0, \tag{1}$$

яке задовольняють координати всіх точок поверхні, і не задовольняють координати жодної точки, що не належить поверхні.

Лінією (*кривою*) у просторі називається перетин двох поверхонь.

Нехай $F_1(x,y,z)=0$ і $F_2(x,y,z)=0$ – рівняння двох поверхонь у просторі, які перетинаються по лінії L. Тоді L – геометричне місце точок простору, що належать обом поверхням. Координати усіх точок кривої L і тільки цих точок задовольняють обидва рівняння $F_1(x,y,z)=0$ і $F_2(x,y,z)=0$. Отже, система рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{2}$$

задає лінію L у просторі.

3.2.1. Загальне рівняння площини

Теорема 1. У декартовій прямокутній системі координат кожна площина задається алгебраїчним рівнянням першого порядку

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{3}$$

Теорема 2. У декартовій прямокутній системі координат кожне рівняння виду (3) задає площину.

Геометричний зміст коефіцієнтів A, B, C у рівнянні площини – це координати вектора, перпендикулярного до цієї площини.

Твердження 1. Два рівняння $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ задають одну і ту ж площину тоді і тільки тоді, коли їх коефіцієнти пропорційні
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \qquad (4)$$

Твердження 2. Два рівняння $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ задають пару паралельних площин тоді і тільки тоді, коли
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \qquad (5)$$

Зауваження. Якщо не виконується умова $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то рівняння $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ задають пару площин, що перетинаються по прямій.

Якщо у рівнянні (3) всі коефіцієнти $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, то рівняння (3) називається *повним*.

У цьому випадку виконаємо перетворення:
$$Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz = -D \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Позначимо $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$. Тоді рівняння набуває виду
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (6)$$

Рівняння (6) називають *рівнянням площини "у відрізках"*. Коефіцієнти a, b, c – величини відрізків, які відсікає площина на координатних осях Ox, Oy і Oz відповідно.

Кут φ *між площинами*, заданими загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, обчислюється за формулою
$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (7)$$

Зокрема, умова перпендикулярності цих площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{8}$$

Рівняння площини, що проходить через точки задані координатами $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

3.2.2. Нормальне рівняння площини

Для площини π розглянемо пряму n, перпендикулярну до неї і таку, що проходить через початок координат O. Нехай точка P – точка перетину площини з прямою. На прямій n виберемо додатний напрям, який збігається із напрямком вектора $\overrightarrow{OP}$. Побудована для площини пряма n із вибраним на ній додатним напрямом називається *нормаллю* до площини.

Позначимо через α, β і γ кути, які утворює нормаль до площини з додатними напрямками координатних осей Ox, Oy і Oz відповідно, через p – відстань від початку координат до площини. Тоді площину π задає рівняння виду:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0. \tag{10}$$

Це рівняння називають *нормальним рівнянням площини*.

Щоб перейти від загального рівняння (3) площини до нормального, потрібно рівняння (3) помножити на *нормуючий множник*

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{11}$$

Знак μ вибирають протилежним до знаку коефіцієнта D у загальному рівнянні (3).

3.2.3. Відстань від точки до площини

Позначимо відстань від точки M до площини π через d. *Відхиленням точки M від площини π* будемо називати число $+d$, якщо точка M і початок координат O лежать по різні боки від площини π, і число $-d$, якщо точка M і початок координат O лежать по один бік від площини π.

Відхилення точки M від площини π будемо позначати $\delta(M,\pi)$. Очевидно, $\delta(M,\pi) = \pm d(M,\pi)$ і $d(M,\pi) = |\delta(M,\pi)|$.

Теорема. Відхилення точки $M(x^*, y^*, z^*)$ від площини π, заданої нормальним рівнянням (10) дорівнює:

$$\delta(M,\pi) = x^* \cdot \cos\alpha + y^* \cdot \cos\beta + z^* \cdot \cos\gamma - p. \tag{12}$$

Наслідок 1. Відстань від точки $M(x^*, y^*, z^*)$ до площини π, заданої нормальним рівнянням (10) дорівнює:

$$d(M,\pi) = |x^* \cdot \cos\alpha + y^* \cdot \cos\beta + z^* \cdot \cos\gamma - p|. \tag{13}$$

Наслідок 2. Відстань від точки $M(x^*, y^*, z^*)$ до площини π, заданої загальним рівнянням (3) дорівнює:

$$d(M,\pi) = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{14}$$

3.2.4. Рівняння прямої у просторі

Пряму можна розглядати як перетин двох різних площин. Тому якщо не виконується умова $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то система рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

задає пряму. З іншого боку, кожна пряма у просторі може бути задана системою рівнянь (15).

Для довільних дійсних чисел α, β, таких що $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, рівняння

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \tag{16}$$

задає площину, що проходить через пряму (15).

Для прямої α розглянемо який-небудь паралельний ненульовий вектор $\vec{a}(l,m,n)$. Він називається *напрямним вектором прямої* α. Нехай точка $M(x_0, y_0, z_0)$ належить прямій α. Тоді пряму можна задати *канонічними рівняннями прямої*:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{17}$$

Для прямої, заданої канонічними рівняннями введемо *параметр* $t=\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$. Тоді система

$$\begin{cases} x=l\cdot t+x_0, \\ y=m\cdot t+y_0, \\ z=n\cdot t+z_0 \end{cases} \tag{18}$$

де параметр t набуває усіх дійсних значень, задає ту ж пряму. Система (18) – *параметричне задання прямої у просторі*.

Алгоритм переходу від системи (15) до канонічних рівнянь прямої.

1) Знайти який-небудь розв'язок системи (15). Можна одну із змінних x,y,z покласти рівною нулю і розв'язати систему відносно решти змінних. Знайдену трійку дійсних чисел (x_0,y_0,z_0), що задовольняє систему (15), можна взяти у якості координат точки на прямій.

2) Обчислити векторний добуток векторів $\vec{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ і $\vec{n}_2(A_2,B_2,C_2)$. Тоді вектор $\vec{a}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ можна взяти у якості напрямного вектора прямої, заданої системою (15). Справді, пряма (15) лежить одночасно в двох площинах $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, а тому перпендикулярна до векторів нормалей $\vec{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ і $\vec{n}_2(A_2,B_2,C_2)$ цих площин. Тому напрямний вектор прямої перпендикулярний до векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$. Одним із таких векторів є $[\vec{n}_1,\vec{n}_2]$.

3) Використовуючи знайдені напрямний вектор $\vec{a}(l,m,n)$ прямої та точку на цій прямій $M(x_0,y_0,z_0)$, записати канонічні рівняння (17).

3.3. Взаємне розміщення площин та прямих у просторі

3.3.1. Взаємне розміщення площин

Площини, задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, можуть збігатися, бути паралельними або перетинатися по прямій.

Теорема 1. Два рівняння $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ задають *одну і ту ж площину* тоді і тільки тоді, коли їх коефіцієнти пропорційні
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \qquad (1)$$

Два рівняння $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ задають *пару паралельних площин* тоді і тільки тоді, коли
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \qquad (2)$$

Два рівняння $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ задають *пару площин, що перетинаються по прямій*, тоді і тільки тоді, коли *не виконується* умова
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (3)$$

Пряму, що є перетином площин, заданих рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, можна задати системою:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Нагадаємо, що вектор $\vec{n}(A, B, C)$ перпендикулярний до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ і його називають *вектором нормалі* цієї площини. Використовуючи цей факт і скалярний добуток векторів нормалей двох площин, можна обчислювати кути між площинами.

Кут φ між площинами, заданими загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, обчислюється за формулою
$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (5)$$

Зокрема, *умова перпендикулярності* цих площин:
$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (6)$$

Часто доводиться знаходити *відстань між паралельними площинами*, заданими рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Для цього потрібно розглянути довільну точку M на першій площині π_1 і знайти відстань від неї до другої площини π_2. Знайдемо який-небудь розв’язок

(x_0, y_0, z_0) рівняння $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$. Це будуть координати точки $M \in \pi_1$. Тоді відстань між паралельними площинами:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(M, \pi_2) = \frac{|A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{7}$$

3.3.2. Взаємне розміщення прямої та площини

Пряма $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ та площина $Ax + By + Cz + D = 0$ можуть або бути паралельними, або перетинатися в одній точці, або пряма може лежати у площині.

Нагадаємо, що ненульовий вектор $\vec{a}(l, m, n)$ паралельний до прямої $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ і називається її *напрямним вектором*; а точка $M(x_0, y_0, z_0)$ належить цій прямій.

Теорема 2. Пряма $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ *перетинає площину* $Ax + By + Cz + D = 0$ у одній точці тоді і тільки тоді, коли

$$A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n \neq 0. \tag{8}$$

Пряма $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ *лежить у площині* $Ax + By + Cz + D = 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Пряма $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ *паралельна до площини* $Ax + By + Cz + D = 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases} \tag{10}$$

У випадку, коли пряма перетинає площину, часто доводиться знаходити координати точки їх перетину та кут між цією прямою та площиною.

Щоб знайти *координати точки перетину* прямої $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ та площини $Ax + By + Cz + D = 0$ потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Найпростіше в цьому випадку ввести параметр $t = \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$, виразити через нього змінні x, y, z: $\begin{cases} x = l \cdot t + x_0, \\ y = m \cdot t + y_0, \\ z = n \cdot t + z_0, \end{cases}$

і підставити їх у рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$. Отримаємо лінійне рівняння відносно параметра t. Розв'язавши його, обчислюємо відповідні x, y, z за формулами $\begin{cases} x = l \cdot t + x_0, \\ y = m \cdot t + y_0, \\ z = n \cdot t + z_0. \end{cases}$ Це і є шукані координати точки перетину прямої з площиною.

Кут між прямою $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ *та площиною* $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (11)$$

Умова *перпендикулярності прямої* $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ *та площини* $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}. \qquad (12)$$

Відстань між паралельними прямою $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ *та площиною* $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою:

$$d(\alpha, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (13)$$

3.3.3. Взаємне розміщення прямих

Дві прямі $\dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$ та $\dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$ у просторі можуть збігатися, бути паралельними, перетинатися в одній точці або ж бути мимобіжними.

Щоб з'ясувати, який із цих випадків має місце, найпростіше спочатку розглянути координати напрямних векторів цих прямих: $\vec{a}_1(l_1, m_1, n_1)$ та $\vec{a}_2(l_2, m_2, n_2)$.

Твердження 1. Умова $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ виконується тоді і тільки тоді, коли прямі $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ та $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ або *паралельні*, або *збігаються*.

Розрізнити ці два випадки можна підставивши у рівняння однієї з прямих координати точки на другій прямій. Якщо рівності $\frac{x_2 - x_1}{l_1} = \frac{y_2 - y_1}{m_1} = \frac{z_2 - z_1}{n_1}$ виконуються, то ці прямі збігаються, а в противному разі – ці прямі паралельні.

Теорема 3. Прямі $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ та $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ будуть *мимобіжними* тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{14}$$

Твердження 2. Прямі $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ та $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ *перетинаються* в одній точці тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \\ rang\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix} = 2. \end{cases} \tag{15}$$

Кут між прямими $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ та $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ визначається як кут між їх напрямними векторами, тому його можна обчислити за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (16)$$

Зокрема, *умова перпендикулярності* цих прямих:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \qquad (17)$$

Часто доводиться шукати координати точки перетину прямих $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ та $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$. Для цього потрібно розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \\ \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}. \end{cases}$ Найпростіше в цьому випадку ввести параметр $t = \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$, виразити через нього змінні x, y, z: $\begin{cases} x = l_1 \cdot t + x_1, \\ y = m_1 \cdot t + y_1, \\ z = n_1 \cdot t + z_1, \end{cases}$ і підставити їх у рівняння другої прямої $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$. Розв'язавши їх відносно параметра t, обчислюємо відповідні x, y, z за формулами $\begin{cases} x = l_1 \cdot t + x_1, \\ y = m_1 \cdot t + y_1, \\ z = n_1 \cdot t + z_1, \end{cases}$ Це і є шукані координати точки перетину прямих.

Часто доводиться також обчислювати відстань між мимобіжними прямими або ж відстань між паралельними прямими.

Задача 1. Відстань між мимобіжними прямими

Нехай прямі $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ та $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ – мимобіжні. Запишемо рівняння площини π, що проходить через першу пряму паралельно до другої. Вектори $\vec{a}_1(l_1, m_1, n_1)$ та $\vec{a}_2(l_2, m_2, n_2)$ будуть паралельними до цієї площини, а точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \pi$. Тому рівняння шуканої площини:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

Розкриємо визначник і запишемо рівняння цієї площини у вигляді $Ax+By+Cz+D=0$. Тепер відстань між мимобіжними прямими α_1, α_2 буде рівна відстані між паралельними прямою $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ та площиною $Ax+By+Cz+D=0$. За формулою (13) знаходимо цю відстань:

$$d(\alpha_1,\alpha_2)=d(\alpha_2,\pi)=d(M_2,\pi)=\frac{|Ax_2+By_2+Cz_2+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Задача 2. Відстань між паралельними прямими

Нехай прямі $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ та $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ – паралельні. Запишемо рівняння площини π, що проходить через точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ першої прямої, перпендикулярно до обох паралельних прямих α_1,α_2. Отже, напрямний вектор однієї з цих прямих можна взяти у якості вектора нормалі цієї площини: $l_1(x-x_1)+m_1(y-y_1)+n_1(z-z_1)=0$. Запишемо рівняння цієї площини у вигляді $Ax+By+Cz+D=0$. Знайдемо точку перетину площини π і другої прямої $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ (див. вище п.2 «Взаємне розміщення прямої і площини»). Нехай це точка $A(x_0,y_0,z_0)$. Тепер відстань між паралельними прямими α_1,α_2 буде рівна відстані між точками M_1 та A. Її можна обчислити за формулою:

$$d(\alpha_1,\alpha_2)=d(M_1,A)=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}.$$

3.4. Приклади розв'язання типових задач

Завдання № 1. Знайти відстань між прямими $3x-6y+6=0$ та $3x-6y+2=0$.

Розв'язання

Прямі є паралельними, оскільки $\frac{3}{3}=\frac{-6}{-6}\neq\frac{6}{2}$. Виберемо яку-небудь точку на першій прямій. Наприклад, координати точки $A(-2;0)$ задовольняють рівняння $3x-6y+6=0$. Знайдемо відстань від точки A до другої прямої.

$$d(A,l_2)=\frac{|3\cdot(-2)-6\cdot 0+2|}{\sqrt{3^2+(-6)^2}}=\frac{4}{\sqrt{45}}=\frac{4\sqrt{5}}{15}.$$

Знайдена відстань і буде відстанню між паралельними прямими.

Відповідь: $d(l_1,l_2)=\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

Завдання № 2. Знайти кут між прямими $x+3y-9=0$ та $x-2y+4=0$.

Розв'язання

Вектори нормалей цих прямих $\vec{n}_1(1;3)$ та $\vec{n}_2(1;-2)$. Кут між цими векторами можна обчислити: $\cos\varphi=\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{1\cdot 1+3\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{1^2+(-2)^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отже, кут між векторами $\vec{n}_1(1;3)$ та $\vec{n}_2(1;-2)$ дорівнює 135°. Це один із кутів, що утворюється при перетині прямих $x+3y-9=0$ та $x-2y+4=0$. Гострий кут між цими прямими дорівнює 45°.

Відповідь: кут між прямим дорівнює 45°.

Завдання № 3. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-8}{3}$ і площини $2x+5y+z-3=0$, та кут між ними.

Розв'язання

Перейдемо до параметричного задання прямої. Покладемо, що $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-8}{3}=t$. Тоді пряма задається системою рівнянь:

$$\begin{cases} x = t + 5, \\ y = 2t + 3, \\ z = 3t + 8. \end{cases}$$

Щоб знайти координати точки перетину прямої і площини, потрібно розв'язати систему:

$$\begin{cases} x = t + 5, \\ y = 2t + 3, \\ z = 3t + 8, \\ 2x + 5y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

Підставимо у рівняння площини x, y, z, виражені через параметр t:

$$2(t+5) + 5(2t+3) + (3t+8) - 3 = 0.$$

Звідси маємо $t = -2$. Тоді $\begin{cases} x = 3, \\ y = -1, \\ z = 2. \end{cases}$ Отже, координати точки перетину прямої з площиною $A(3;-1;2)$.

Знайдемо кут φ між прямою і площиною. Для цього розглянемо напрямний вектор $\vec{a}(1;2;3)$ прямої та вектор $\vec{n}(2;5;1)$ нормалі до площини.

$$\sin\varphi = |\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{n})| = \frac{|(\vec{a},\vec{n})|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|1\cdot 2 + 2\cdot 5 + 3\cdot 1|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{2^2+5^2+1^2}} = \frac{15}{\sqrt{14}\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{105}}{14}.$$

Отже, $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{105}}{14}$.

Відповідь: $A(3;-1;2)$ – точка перетину прямої з площиною, $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{105}}{14}$ – кут між прямою і площиною.

Завдання № 4. З'ясувати, як розміщені у просторі прямі:

а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{3}$ та $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{3}$;

б) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{3}$ та $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$;

в) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{3}$ та $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$.

Розв'язання

а) У перших двох прямих напрямні вектори однакові: $\vec{a}_1(2;1;3)$ та $\vec{a}_2(2;1;3)$. Координати у них, очевидно, пропорційні. Отже, прямі $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{3}$ та $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{3}$ або збігаються, або паралельні. Перша пряма проходить через точку $A(2;-3;0)$. Підставимо її координати у рівняння другої прямої: $\frac{2-1}{2}\neq\frac{-3+1}{1}\neq\frac{0-1}{3}$. Точка A не належить другій прямій. Отже, прямі $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{3}$ та $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{3}$ паралельні.

б) Напрямні вектори $\vec{a}_1(2;1;3)$ та $\vec{a}_2(4;-1;2)$ прямих $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{3}$ та $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$ мають непропорційні координати: $\frac{2}{4}\neq\frac{1}{-1}\neq\frac{3}{2}$. Тому ці вектори неколінеарні, а відповідні їм прямі або мимобіжні, або перетинаються в одній точці. Точка $A_1(2;-3;0)$ належить першій прямій, а точка $A_2(-1;1;2)$ – другій. Розглянемо вектор $\overrightarrow{A_1A_2}(-3;4;2)$. Перевіримо вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ на компланарність:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6+48-4-8-16-9=5\neq 0.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ – некомпланарні. А тому прямі $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{3}$ та $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$ – мимобіжні.

в) У прямих $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{3}$ та $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$ напрямні вектори $\vec{a}_1(2;1;3)$ та $\vec{a}_2(4;-1;2)$ такі ж, як і в попередньому пункті. Отже, прямі або мимобіжні, або перетинаються в одній точці. Точка $A_1(1;-1;1)$ належить першій прямій, а точка $A_2(-1;1;2)$ – другій. Розглянемо вектор $\overrightarrow{A_1A_2}(-2;2;1)$. Перевіримо вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ на компланарність:

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 24 - 2 - 4 - 8 - 6 = 0.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ – компланарні, але при цьому $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ – неколінеарні. Тому прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{3}$ та $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$ перетинаються в одній точці.

Відповідь: а) паралельні; б) мимобіжні; в) перетинаються в одній точці.

Розділ 4. Многочлени, їх корені

4.1. Кільце многочленів від однієї змінної. Подільність у кільці многочленів.

Вираз виду $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, де $n \in \mathbf{N}$, $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – довільні числа з поля P, називається *многочленом* n*-ого степеня від змінної* x. Числа $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ називаються *коефіцієнтами* цього многочлена, зокрема коефіцієнт $a_0 \neq 0$ при найвищому степеню змінної x називається *старшим коефіцієнтом многочлена*, а коефіцієнт a_n – *вільним членом*. При цьому кажуть що многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ розглядається *над полем* P. Позначають многочлени від змінної x так: $f(x), g(x), r(x), \ldots$. Наприклад, многочлен $f(x) = x^2 + 5x + 2$ – многочлен другого степеня над полем раціональних чисел. *Многочленом нульового степеня від змінної* x *над полем* P називається довільне ненульове число з поля P. Наприклад, $g(x) = \sqrt{2}$ – многочлен нульового степеня над полем дійсних чисел. Розглядають також *нульовий многочлен* над полем P – нуль поля P. Зручно вважати, у нульового многочлена невизначений степінь. Іноді буває зручно вважати, що у нульового многочлена нульовий степінь. Степінь многочлена $f(x)$ будемо позначати $\deg f(x)$.

Зауважимо, що поряд із зростаючою нумерацією коефіцієнтів многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ часто використовують і спадну нумерацію $f(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$. Тут старший коефіцієнт b_n має найбільший індекс, який дорівнює степеню многочлена, а індекси коефіцієнтів збігаються з показниками степеня змінної x, біля якої вони стоять.

Будемо розглядати многочлени лише над числовими полями такими як $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}$. Множину всіх многочленів від однієї змінної з коефіцієнтами із поля P будемо позначати через $P[x]$.

Многочлени $f(x), g(x) \in P[x]$ будемо називати *рівними*, якщо рівні їх відповідні коефіцієнти, тобто коефіцієнти при однакових степенях змінної x. Очевидно, степені рівних многочленів – рівні.

Перетворимо множину $P[x]$ в алгебраїчну структуру з двома бінарними операціями. Для цього задамо дві дії: додавання і множення на множині $P[x]$.

Для зручності використаємо спадну нумерацію коефіцієнтів многочленів. Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Припустимо, що $n \geq m$. Покладемо $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_n = 0$ і під *сумою многочленів* $f(x), g(x) \in P[x]$ будемо розуміти многочлен:

$$f(x) + g(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \text{ де } c_i = a_i + b_i,\ i = \overline{0, n}.$$

Очевидно, що введена операція додавання є бінарною операцією на множині $P[x]$. Вона комутативна і асоціативна. Це випливає із комутативності та асоціативності додавання чисел у полі P. Роль нейтрального елемента відносно додавання виконує нульовий многочлен $\omega(x) = 0$. Для кожного многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ із $P[x]$ можна знайти такий многочлен $t(x) \in P[x]$, що $f(x) + t(x) = 0$. Очевидно, що многочлен $t(x) = (-a_n) x^n + (-a_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (-a_1) x + (-a_0)$. Отже, відносно введеного додавання многочленів множина $P[x]$ усіх многочленів над полем P утворює *абелеву групу*.

Зауважимо також, що $\deg(f(x) + g(x)) = \max(\deg f(x), \deg g(x))$.

Введемо тепер операцію множення на $P[x]$. Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.

Під *добутком многочленів* $f(x), g(x) \in P[x]$ будемо розуміти многочлен:

$$f(x)\cdot g(x) = d_{n+m}x^{n+m} + d_{n+m-1}x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0, \qquad \text{де} \qquad d_i = \sum_{k+r=i} a_k b_r,$$

$i = \overline{0, n+m}$.

Зокрема, $d_0 = a_0 b_0$, $d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$, …, $d_{n+m} = a_n b_m$.

Очевидно, що введена операція додавання є бінарною операцією на множині $P[x]$. Вона комутативна і асоціативна (виконайте перевірку самостійно) . Це випливає із комутативності та асоціативності множення чисел у полі P. Роль нейтрального елемента відносно множення виконує многочлен $\varepsilon(x) = 1$.

Перевіримо дистрибутивність множення многочленів відносно додавання.

Нехай маємо многочлени $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, $h(x) = c_l x^l + c_{l-1}x^{l-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, $c_l \neq 0$. Коефіцієнт d_i при x^i многочлена $f(x)\cdot(g(x)+h(x))$ дорівнює

$$d_i = \sum_{k+r=i} a_k \cdot (b_r + c_r) = \sum_{k+r=i} a_k \cdot b_r + \sum_{k+r=i} a_k \cdot c_r = d_i' + d_i'', \qquad \text{де} \qquad d_i', d_i'' \quad -$$

коефіцієнти при x^i многочленів $f(x)\cdot g(x)$ та $f(x)\cdot h(x)$. Звідси випливає, що $f(x)\cdot(g(x)+h(x)) = f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot +h(x)$. Отже, дистрибутивний закон виконується для введених дій.

Отже, множина $P[x]$ усіх многочленів над полем P утворює *комутативне кільце з одиницею*.

Зауважимо, що $\deg f(x)\cdot g(x) = \deg f(x) + \deg g(x)$.

Перевіримо, чи для кожного ненульового многочлена існує обернений, тобто з'ясуємо, чи утворює $P[x]$ поле відносно введених операцій додавання і множення.

Нехай для ненульового многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ із $P[x]$ існує обернений $f^{-1}(x)$. Тоді $f(x)\cdot f^{-1}(x) = 1$. Звідси

$\deg f(x) + \deg f^{-1}(x) = 0$. Така рівність для невід’ємних чисел $\deg f(x), \deg f^{-1}(x)$ можлива лише у випадку, коли $\deg f(x) = \deg f^{-1}(x) = 0$. Отже, обернений многочлен існує лише для многочлена нульового степеня. Справді, для $f(x) = c \in P \setminus \{0\}$ існує число $c^{-1} \in P$, таке, що $c \cdot c^{-1} = 1$. Отже, $f^{-1}(x) = c^{-1}$ – многочлен нульового степеня.

Отже, $P[x]$ не утворює поля.

Кільце многочленів від однієї змінної $P[x]$ схоже на кільце $\mathbf{Z}$ цілих чисел. Для многочленів, як і для цілих чисел виконується теорема про ділення з остачею.

Теорема (*про ділення з остачею*). Для довільних двох многочленів $f(x)$ і $t(x) \neq 0$ над полем P існують такі многочлени $q(x), r(x) \in P[x]$, що $f(x) = t(x) \cdot q(x) + r(x)$, де $\deg r(x) < \deg t(x)$ або $r(x) = 0$. Многочлени $q(x)$ і $r(x)$ визначаються однозначно і називаються $q(x)$ – *часткою* (*неповною*), $r(x)$ – *остачею від ділення многочлена* $f(x)$ *на* $t(x) \neq 0$.

До кінця лекції усі многочлени розглядаються над одним і тим же полем P.

Приклад. Поділити многочлен $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 2$ на многочлен $t(x) = x^2 - 3$.

Ділення многочленів будемо виконувати в стовпчик.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} 5x^3 + 4x^2 \qquad\quad - 2 \\ \underline{5x^3 \qquad\; - 15x \quad\;\;} \end{array} & \begin{array}{l} \quad x^2 - 3 \\ \hline 5x + 4 = q(x) \end{array} \\
\begin{array}{r} 4x^2 + 15x - 2 \\ -\underline{4x^2 \qquad\;\; - 12} \\ 15x + 10 = r(x) \end{array} &
\end{array}
$$

Отже, $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 2 = (x^2 - 3)(5x + 4) + (15x + 10)$.

Якщо остача від ділення многочлена $f(x)$ на $t(x) \neq 0$ дорівнює нулю, то кажуть, що *многочлен* $f(x)$ *ділиться на многочлен* $t(x)$. При цьому многочлен $t(x)$ називають дільником многочлена $f(x)$.

Лема. Многочлен $t(x) \neq 0$ є дільником многочлена $f(x)$ тоді і тільки тоді, коли існує такий многочлен $q(x)$, що $f(x) = t(x) \cdot q(x)$.

▲ Якщо $t(x) \neq 0$ – дільник многочлена $f(x)$, то існує такий многочлен $q(x)$, що $f(x) = t(x) \cdot q(x) + 0 = t(x) \cdot q(x)$.

З іншого боку, якщо існує такий $q(x)$, що $f(x) = t(x) \cdot q(x)$, то $f(x) = t(x) \cdot q(x) + 0$. Тоді $q(x)$ – частка від ділення $f(x)$ на $t(x)$, а $r(x) = 0$ – остача від ділення $f(x)$ на $t(x)$. Звідси $f(x)$ ділиться на многочлен $t(x)$. ■

Будемо позначати ситуацію, коли $f(x)$ ділиться на $t(x)$, так: $f(x) \vdots t(x)$; а ситуацію, коли $t(x)$ – дільник $f(x)$, так $t(x) \mid f(x)$.

На множині $P[x]$ виникає бінарне відношення – відношення подільності. Розглянемо його основні властивості.

Властивості подільності многочленів

1. Кожен многочлен із $P[x]$ ділиться на будь-який многочлен нульового степеня над полем P.

▲ Нехай $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$, а многочлен нульового степеня $g(x) = c \in P \setminus \{0\}$. Тоді $f(x) = c \cdot \left(\frac{a_0}{c} x^n + \frac{a_1}{c} x^{n-1} + \frac{a_2}{c} x^{n-2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{c} x + \frac{a_n}{c} \right)$. За лемою, $f(x) \vdots g(x)$. ■

2. Відношення подільності *транзитивне*, тобто із того, що $f(x) \vdots t(x)$, а $t(x) \vdots g(x)$, випливає, що $f(x) \vdots g(x)$.

▲ За лемою, існують многочлени $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in P[x]$, такі що $f(x) = t(x) \cdot \varphi_1(x)$, $t(x) = g(x) \cdot \varphi_2(x)$. Тоді $f(x) = t(x) \cdot \varphi_1(x) = g(x) \cdot (\varphi_2(x) \cdot \varphi_1(x))$, тобто існує многочлен $\varphi(x) = \varphi_2(x) \cdot \varphi_1(x) \in P[x]$, що $f(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$. Отже, за лемою, $f(x) \vdots g(x)$. ■

3. Якщо $f_1(x) \vdots t(x)$, $f_2(x) \vdots t(x)$, …, $f_k(x) \vdots t(x)$, то для довільних многочленів $h_1(x), h_2(x), \cdots, h_k(x) \in P[x]$

$$(f_1(x) \cdot h_1(x) + f_2(x) \cdot h_2(x) + \cdots + f_k(x) \cdot h_k(x)) \vdots t(x).$$

▲ За лемою, існують многочлени $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_k(x)\in P[x]$, такі що $f_1(x)=t(x)\cdot\varphi_1(x)$, $f_2(x)=t(x)\cdot\varphi_2(x)$, … , $f_k(x)=t(x)\cdot\varphi_k(x)$. Тоді

$$f_1(x)\cdot h_1(x)+f_2(x)\cdot h_2(x)+\cdots+f_k(x)\cdot h_k(x)=$$
$$=t(x)\cdot\varphi_1(x)\cdot h_1(x)+t(x)\cdot\varphi_2(x)\cdot h_2(x)+\cdots+t(x)\cdot\varphi_k(x)\cdot h_k(x)=$$
$$=t(x)\cdot(\varphi_1(x)\cdot h_1(x)+\varphi_2(x)\cdot h_2(x)+\cdots+\varphi_k(x)\cdot h_k(x))\,\vdots\, t(x).\ ■$$

4. Якщо $f(x)\,\vdots\, t(x)$, то для довільного $c\in P\setminus\{0\}$ $f(x)\,\vdots\,(c\cdot t(x))$.

▲ За лемою із $f(x)\,\vdots\, t(x)$ випливає, що існує такий многочлен $q(x)\in P[x]$, що $f(x)=t(x)\cdot q(x)$. Тоді для довільного $c\in P\setminus\{0\}$ існує обернений $c^{-1}\in P$ і $f(x)=(c\cdot t(x))\cdot(c^{-1}\cdot q(x))$. Існує многочлен $q_1(x)=c^{-1}\cdot q(x)\in P[x]$, такий що $f(x)=(c\cdot t(x))\cdot q_1(x)$. За лемою, $f(x)\,\vdots\,(c\cdot t(x))$. ■

5. Якщо $f(x)\,\vdots\, t(x)$ і $t(x)\,\vdots\, f(x)$, то існує таке число $c\in P\setminus\{0\}$, що $f(x)=c\cdot t(x)$.

▲ За лемою, існують многочлени $\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in P[x]$, такі що $f(x)=t(x)\cdot\varphi_1(x)$, $t(x)=f(x)\cdot\varphi_2(x)$.

Тоді $f(x)=t(x)\cdot\varphi_1(x)=f(x)\cdot(\varphi_2(x)\cdot\varphi_1(x))$. Звідси $\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)=1$. Отже, многочлени $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ – взаємно обернені у кільці $P[x]$. Тому $\deg\varphi_1(x)=\deg\varphi_2(x)=0$, і існує таке число $c\in P\setminus\{0\}$, що $\varphi_1(x)=c$. Тоді $f(x)=t(x)\cdot\varphi_1(x)=c\cdot t(x)$. ■

6. Якщо $f(x)\,\vdots\, t(x)$, то для довільного $c\in P$ $c\cdot f(x)\,\vdots\, t(x)$.

▲ Оскільки $c\cdot f(x)\,\vdots\, f(x)$, а $f(x)\,\vdots\, t(x)$, із транзитивності відношення подільності випливає, що $c\cdot f(x)\,\vdots\, t(x)$. ■

Многочлени, що діляться один на одного називаються *асоційованими*. Вони відрізняються один від одного на числовий множник. Наприклад, асоційованими будуть многочлени x^4+x^3-1 та $2x^4+2x^3-2$.

4.2. Елементи теорії подільності у кільці многочленів

Усі многочлени у цій лекції розглядаються над одним і тим же полем P.

Многочлен $d(x)$ називається *найбільшим спільним дільником многочленів* $f(x)$ та $g(x)$, якщо для нього виконуються умови:

1) $f(x)\vdots d(x)$ і $g(x)\vdots d(x)$;

2) із того, що для многочлена $t(x)$ $f(x)\vdots t(x)$ і $g(x)\vdots t(x)$ випливає, що $d(x)\vdots t(x)$.

Тобто *найбільшим спільним дільником многочленів* називається такий їх спільний дільник, що ділиться на будь-який спільний дільник цих многочленів.

Будемо позначати $d(x) = НСД(f(x), g(x))$. Зауважимо, що найбільший спільний дільник многочленів не може бути нульовим многочленом.

Із такого означення випливає, що якщо $d(x)$ – найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$, то кожний многочлен асоційований з $d(x)$ також буде найбільшим спільним дільником цих многочленів.

Оскільки нульовий многочлен ділиться на будь-який ненульовий многочлен, то для кожного ненульового многочлена $f(x)$ множина усіх спільних дільників многочлена $f(x)$ і нульового многочлена $\omega(x) = 0$ збігається з множиною усіх дільників многочлена $f(x)$. Тому $НСД(f(x), 0) = f(x)$. Якщо ж розглянути випадок, коли обидва многочлени нульові, то множина усіх спільних дільників цих многочленів є множиною усіх ненульових многочленів. Оскільки не існує ненульового многочлена, який би ділився на всі ненульові многочлени, то найбільшого спільного дільника двох нульових многочленів не існує.

Теорема 1 (*про існування найбільшого спільного дільника для многочленів*). Якщо серед многочленів $f(x)$ і $g(x)$ хоча б один ненульовий, то існує їх найбільший спільний дільник і він єдиний з точністю до асоційованості.

▲ Розглянемо множину
$M(f, g) = \{f(x)\cdot s(x) + g(x)\cdot t(x) \mid s(x), t(x) \in P[x]\}$. У цій множині містяться многочлени $f(x)$ і $g(x)$. Справді, $f(x) = f(x)\cdot 1 + g(x)\cdot 0 \in M(f, g)$,

аналогічно і для $g(x)$. Отже, множина $M(f,g)$ – непорожня. Виберемо у ній ненульовий многочлен найменшого степеня. Позначимо цей многочлен через $d(x)$. Тоді існують такі многочлени $s_0(x), t_0(x) \in P[x]$, що $d(x) = f(x) \cdot s_0(x) + g(x) \cdot t_0(x) \in M(f,g)$.

Доведемо, що кожен многочлен із множини $M(f,g)$ ділиться на $d(x)$. Розглянемо довільний $h(x) \in M(f,g)$. Тоді існують такі многочлени $s(x), t(x) \in P[x]$, що $h(x) = f(x) \cdot s(x) + g(x) \cdot t(x)$. Поділимо многочлен $h(x)$ на $d(x)$ з остачею: $h(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$. Нехай $r(x) \neq 0$. Тоді $\deg r(x) < \deg d(x)$.

$$r(x) = h(x) - d(x) \cdot q(x) = f(x) \cdot s(x) + g(x) \cdot t(x) - (f(x) \cdot s_0(x) + g(x) \cdot t_0(x)) \cdot q(x) =$$

$$= f(x) \cdot (s(x) - s_0(x) \cdot q(x)) + g(x) \cdot (t(x) - t_0(x) \cdot q(x)) \in M(f,g).$$

Отже, у множині $M(f,g)$ ми знайшли ненульовий многочлен степеня меншого за степінь многочлена $d(x)$, а це суперечить вибору $d(x)$. Тому $r(x) = 0$. А це означає, що $h(x) \vdots d(x)$.

Оскільки кожен многочлен із множини $M(f,g)$ ділиться на $d(x)$, то і $f(x) \vdots d(x)$, і $g(x) \vdots d(x)$.

Нехай тепер $\varphi(x)$ – спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$, тобто $f(x) \vdots \varphi(x)$, і $g(x) \vdots \varphi(x)$. Тоді за властивістю 3 із минулої лекції, $d(x) = f(x) \cdot s_0(x) + g(x) \cdot t_0(x) \vdots \varphi(x)$. Отже, $d(x) = НСД(f(x), g(x))$.

Доведемо, що найбільший спільний дільник многочленів єдиний з точністю до асоційованості. Нехай існує многочлен $d_1(x)$, який також є найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Тоді з одного боку $d_1(x) \vdots d(x)$, а з іншого $d(x) \vdots d_1(x)$. Отже, многочлени $d(x), d_1(x)$ – асоційовані.■

Наслідок. Якщо $d(x) = НСД(f(x), g(x))$, то існують такі многочлени $s_0(x), t_0(x) \in P[x]$, що $d(x) = f(x) \cdot s_0(x) + g(x) \cdot t_0(x) \in M(f,g)$.

Для відшукання найбільшого спільного дільника двох многочленів застосовують алгоритм Евкліда. Він ґрунтується на двох лемах.

Лема 1. Для ненульового многочлена $f(x)$ $НСД(f(x),0)=f(x)$.

Це твердження обґрунтовано ще на початку лекції.

Лема 2. Якщо при діленні многочлена $f(x)$ на ненульовий многочлен $t(x)$ отримуємо $f(x)=t(x)\cdot q(x)+r(x)$, де $q(x)$ – частка, а $r(x)$ – остача від ділення $f(x)$ на $t(x)\neq 0$, то з точністю до асоційованості виконується рівність $НСД(f(x),t(x))=НСД(t(x),r(x))$.

▲ Позначимо через $d(x)$ – найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $t(x)$, а $d_1(x)$ – найбільший спільний дільник многочленів $t(x)$ і $r(x)$.

Оскільки $r(x)=f(x)-t(x)\cdot q(x)$ і $f(x)\vdots d(x)$, $t(x)\vdots d(x)$, то $r(x)\vdots d(x)$. Так як $r(x)\vdots d(x)$ і $t(x)\vdots d(x)$, то і $НСД(t(x),r(x))=d_1(x)\vdots d(x)$.

З іншого боку, із $f(x)=t(x)\cdot q(x)+r(x)$ і того, що $t(x)\vdots d_1(x)$, $r(x)\vdots d_1(x)$, випливає, що $f(x)\vdots d_1(x)$. Оскільки $f(x)\vdots d_1(x)$ і $t(x)\vdots d_1(x)$, то і їх найбільший спільний дільник $d(x)$ також ділиться на $d_1(x)$.

$d_1(x)\vdots d(x)$, а $d(x)\vdots d_1(x)$. Отже, многочлени $d(x), d_1(x)$ – асоційовані. ■

Алгоритм Евкліда

Нехай $f(x)$ і $t(x)$ – многочлени, серед яких хоча б один ненульовий, для яких потрібно знайти найбільший спільний дільник. Якщо один із них нульовий, то їх найбільшим спільним дільником буде інший, за лемою 1. Якщо ж обидва ненульові, то можна виконати ділення з остачею многочлена $f(x)$ на $t(x)$: $f(x)=t(x)\cdot q_1(x)+r_1(x)$. Тоді за лемою 2, з точністю до асоційованості $НСД(f(x),t(x))=НСД(t(x),r_1(x))$. Будемо тепер шукати найбільший спільний дільник многочленів $t(x)$ і $r_1(x)$. Якщо $r_1(x)=0$, то використовуючи лему 1, знаходимо $НСД(f(x),t(x))=НСД(t(x),r_1(x))=НСД(t(x),0)=t(x)$. Якщо ж $r_1(x)\neq 0$, то виконуємо ділення з остачею многочлена $t(x)$ на $r_1(x)$: $t(x)=r_1(x)\cdot q_2(x)+r_2(x)$. Знову за лемою 2, з точністю до асоційованості

$НСД(t(x), r_1(x)) = НСД(r_1(x), r_2(x))$. Будемо тепер шукати найбільший спільний дільник многочленів $r_1(x)$ і $r_2(x)$. Якщо $r_2(x) = 0$, то використовуючи лему 1, знаходимо $НСД(f(x), t(x)) = НСД(t(x), r_1(x)) = НСД(r_1(x), r_2(x)) = НСД(r_1(x), 0) = r_1(x)$.

І так далі. Зауважимо, що описаний процес скінченний, бо на кожному кроці зменшується степінь ненульової остачі. Справді,

$$\deg t(x) > \deg r_1(x) > \deg r_2(x) > \cdots > \deg r_k(x).$$

А спадна послідовність невід'ємних чисел – скінченна. Нехай на k-ому кроці ми отримали останню ненульову остачу $r_k(x)$, а вже $r_{k+1}(x) = 0$, тобто

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x) \cdot q_k(x) + r_k(x), \qquad r_{k-1}(x) = r_k(x) \cdot q_{k+1}(x) + r_{k+1}(x) = r_k(x) \cdot q_{k+1}(x).$$

Тоді $НСД(r_{k-2}(x), r_{k-1}(x)) = НСД(r_{k-1}(x), r_k(x)) = НСД(r_k(x), 0) = r_k(x)$.

Отже, $НСД(f(x), t(x)) = НСД(t(x), r_1(x)) = НСД(r_1(x), r_2(x)) = \cdots =$ $= НСД(r_{k-1}(x), r_k(x)) = НСД(r_k(x), 0) = r_k(x)$.

Висновок. Найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $t(x)$ з точністю до асоційованості є остання ненульова остача від ділення $r_k(x)$, отримана на k-ому кроці алгоритму Евкліда.

Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ називаються *взаємно простими*, якщо їх найбільший спільний дільник з точністю до асоційованості дорівнює 1.

Теорема 2 (*критерій взаємної простоти многочленів*). Многочлени $f(x) \in P[x]$ і $g(x) \in P[x]$ будуть взаємно простими тоді і тільки тоді, коли існують такі многочлени $s(x), t(x) \in P[x]$, що $f(x) \cdot s(x) + g(x) \cdot t(x) = 1$.

▲ Знову як і в теоремі 1 розглянемо множину $M(f, g) = \{f(x) \cdot s(x) + g(x) \cdot t(x) \mid s(x), t(x) \in P[x]\}$. При доведенні теореми 1 ми показали, що ненульовий многочлен $d(x)$ найменшого степеня із множини $M(f, g)$ буде найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Тоді із існування многочленів $s(x), t(x) \in P[x]$, таких що $f(x) \cdot s(x) + g(x) \cdot t(x) = 1$, випливає, що $1 \in M(f, g)$. Многочлен $\varepsilon(x) = 1$ – є ненульовим многочленом нульового степеня, він асоційований з кожним многочленом нульового степеня. Тому $\varepsilon(x)=1$ – ненульовий многочлен найменшого степеня із множини $M(f,g)$. Тоді $1=d(x)=НСД(f(x),g(x))$, отже, $f(x)$ і $g(x)$ – взаємно прості.

З іншого боку, якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ – взаємно прості, то $1=НСД(f(x),g(x))$. За наслідком із теореми 1, існують такі многочлени $s(x),t(x)\in P[x]$, що $f(x)\cdot s(x)+g(x)\cdot t(x)=1$. ■

Властивості взаємно простих многочленів

Властивість 1. Якщо многочлен $h(x)$ взаємно простий з многочленом $f(x)$ та із многочленом $g(x)$, то він взаємно простий із їх добутком $f(x)\cdot g(x)$.

▲ За критерієм взаємної простоти, існують такі многочлени $s_1(x),t_1(x),s_2(x),t_2(x)\in P[x]$, що $f(x)\cdot s_1(x)+h(x)\cdot t_1(x)=1$ і $g(x)\cdot s_2(x)+h(x)\cdot t_2(x)=1$.

Помножимо ці дві рівності:

$$(f(x)\cdot s_1(x)+h(x)\cdot t_1(x))\cdot(g(x)\cdot s_2(x)+h(x)\cdot t_2(x))=1.$$

Звідси $(f(x)\cdot g(x))\cdot s_1(x)\cdot s_2(x)+h(x)\cdot(g(x)\cdot s_2(x)\cdot t_1(x)+$ $+f(x)\cdot s_1(x)\cdot t_2(x)+h(x)\cdot t_1(x)\cdot t_2(x))=1$. За критерієм взаємної простоти, $h(x)$ взаємно простий із добутком многочленів $f(x)\cdot g(x)$. ■

Властивість 2. Якщо добуток $f(x)\cdot g(x)$ многочленів $f(x)$ і $g(x)$ ділиться на многочлен $h(x)$, взаємно простий з многочленом $f(x)$, то многочлен $g(x)$ ділиться на $h(x)$.

▲ За критерієм взаємної простоти, існують такі многочлени $s(x),t(x)\in P[x]$, що $h(x)\cdot s(x)+f(x)\cdot t(x)=1$. Помножимо цю рівність на $g(x)$. Маємо: $g(x)=h(x)\cdot(s(x)\cdot g(x))+(f(x)\cdot g(x))\cdot t(x)$. Оскільки обидва доданки цієї суми діляться на $h(x)$, то і $g(x)$ ділиться на $h(x)$. ■

Ненульовий многочлен ненульового степеня $f(x)\in P[x]$ називається *незвідним над полем* P, якщо його не можна розкласти у добуток двох многочленів ненульового степеня над полем P. Можна сформулювати рівносильне означення.

Ненульовий многочлен ненульового степеня $f(x) \in P[x]$ називається *незвідним над полем* P, якщо його не можна розкласти у добуток двох многочленів над полем P, степені яких менші за степінь даного.

Зауважимо, що кожен ненульовий многочлен завжди можна подати у вигляді добутку таких двох многочленів: многочлена нульового степеня (ненульового числа з поля) і многочлена, асоційованого з даним (у асоційованих многочленів степені однакові). Такий розклад многочлена на два множники будемо називати *тривіальним*. Незвідний над полем P многочлен не розкладається на два множники над цим полем нетривіальним чином. Незвідні многочлени є аналогією простих чисел. Проте поняття незвідності многочлена суттєво залежить від поля, над яким цей многочлен розглядають. Так, наприклад, многочлен $x^2 + 1 \in \mathbf{R}[x]$ незвідний над полем дійсних чисел, але звідний над полем комплексних чисел. Справді, многочлен $x^2 + 1 \in \mathbf{C}[x]$ можна подати у вигляді добутку двох многочленів $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$, кожен із яких є многочленом над полем $\mathbf{C}$.

Очевидно, що многочлени першого степеня (лінійні многочлени) є незвідними над кожним полем.

Зауважимо, що ми не розглядаємо многочлени нульового степеня. Їх також не можна розкласти нетривіальним чином на два множники над кожним полем. Многочлени нульового степеня у кільці многочленів $P[x]$ є тими елементами, для яких існують обернені відносно множення, їх ще називають *дільниками одиниці* в кільці $P[x]$. У кільці цілих чисел $\mathbf{Z}$ множина усіх тих елементів, для яких існують обернені, складається з двох чисел: 1 і -1. Ці числа не є простими і не є складеними. Многочлени нульового степеня у кільці $P[x]$ відіграють приблизно ту ж роль. Тому їх не вважають ні незвідними, ні звідними над полем.

Лема 3. Два незвідні над полем P многочлени або взаємно прості, або асоційовані.

▲ Нехай многочлени $f(x)$ і $g(x)$ – незвідні над полем P і $d(x) = НСД(f(x), g(x))$.

Якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ – не взаємно прості, то $\deg d(x) > 0$. Тоді $f(x) = d(x) \cdot f_1(x)$ і $\deg f_1(x) = \deg f(x) - \deg d(x) < \deg f(x)$. Отже, незвідний многочлен $f(x)$ розкладається на два множники. Цей розклад має бути тривіальним, тобто $\deg f_1(x) = 0$ і $f_1(x) = c$ – ненульове число з поля P. Тоді $\deg f(x) = \deg d(x)$, а многочлени $f(x)$ і $d(x)$ – асоційовані. Аналогічно доводимо, що многочлени $g(x)$ і $d(x)$ – асоційовані. Отже, асоційованими є многочлени $f(x)$ і $g(x)$. ■

Теорема 3 (*про розклад многочлена на незвідні множники над полем*). Кожен ненульовий многочлен ненульового степеня над полем P розкладається на незвідні множники і цей розклад єдиний із точністю до порядку множників і їх асоційованості.

▲ Нехай $f(x) \in P[x]$, і $\deg f(x) > 0$. При цьому можливі два випадки: многочлен $f(x)$ – незвідний над полем P або многочлен $f(x)$ – звідний над цим полем.

Якщо $f(x)$ – незвідний над полем P, то він розкладається на незвідні множники, цей розклад містить один множник – $f(x)$.

Якщо ж $f(x)$ – звідний над полем P, то він розкладається на два такі множники $f(x) = h(x) \cdot g(x)$, що $h(x), g(x) \in P[x]$ і $\deg h(x) < \deg f(x)$, $\deg g(x) < \deg f(x)$. Може трапитися, що обидва многочлени $h(x), g(x)$ – незвідні над полем P. Тоді многочлен $f(x)$ розкладається над полем P на два незвідні множники. Якщо ж хоча б один із многочленів у розкладі $f(x) = h(x) \cdot g(x)$, наприклад $g(x)$, – звідний над P, то його подають у вигляді добутку $g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$, де $g_1(x), g_2(x) \in P[x]$ і $\deg g_1(x) < \deg g(x)$, $\deg g_2(x) < \deg g(x)$. Так продовжують до тих пір, поки всі множники у розкладі многочлена $f(x)$ не будуть незвідними над полем P. Цей процес скінченний, бо на кожному кроці степені множників зменшуються, але залишаються при цьому додатними. Тому на певному кроці дістанемо розклад многочлена $f(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) \cdots p_k(x)$ на незвідні множники над полем P.

Доведемо однозначність розкладу $f(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) \cdots p_k(x)$. Припустимо, що існує ще один розклад многочлена $f(x)$ на незвідні множники над полем P: $f(x) = t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot t_3(x) \cdots t_m(x)$. Із рівності $f(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) \cdots p_k(x) = t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot t_3(x) \cdots t_m(x)$ випливає, що $f(x) \vdots p_1(x)$. Тоді добуток $t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot t_3(x) \cdots t_m(x) \vdots p_1(x)$. Якщо кожен $t_i(x)$ взаємно простий із $p_1(x)$, то і їх добуток $f(x) = t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot t_3(x) \cdots t_m(x)$ – взаємно простий з $p_1(x)$, а це суперечить тому, що $f(x) \vdots p_1(x)$. Із цієї суперечності випливає, що існує такий многочлен $t_i(x)$, який не є взаємно простим із $p_1(x)$. Многочлени $t_i(x)$ та $p_1(x)$ – незвідні над полем P, тому, за лемою 3, $t_i(x)$ та $p_1(x)$ – асоційовані. Тоді існує таке число $\lambda_1 \in P$, що $t_i(x) = \lambda_1 \cdot p_1(x)$. У рівності

$$p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) \cdots p_k(x) = \lambda_1 \cdot p_1(x) \cdot t_1(x) \cdot t_2(x) \cdots t_{i-1}(x) \cdot t_{i+1}(x) \cdots t_m(x)$$

виконаємо скорочення на $p_1(x)$. Тоді

$$f_1(x) = p_2(x) \cdot p_3(x) \cdots p_k(x) = \lambda_1 \cdot t_1(x) \cdot t_2(x) \cdots t_{i-1}(x) \cdot t_{i+1}(x) \cdots t_m(x),$$

а тому $f_1(x) \vdots p_2(x)$. Аналогічно можна виконати скорочення на $p_2(x)$ і так далі на $p_3(x), \cdots, p_k(x)$. Множники $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_k(x)$ та $t_1(x), t_2(x), \cdots, t_m(x)$ вичерпаються одночасно, бо в противному разі отримали б, що многочлен ненульового степеня дорівнює числу із поля. Це неможливо, тому $m = k$. Тому з точністю до асоційованості многочлени у множинах $\{p_i(x)\}$ та $\{t_j(x)\}$ рівні. ■

4.3. Корені многочлена. Основна теорема алгебри.

Нехай многочлен $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \in P[x]$. *Значенням многочлена* $f(x)$ *при* $x = c \in P$ називається число $f(c) = a_0 c^n + a_1 c^{n-1} + a_2 c^{n-2} + \cdots + a_{n-1} c + a_n \in P$.

Число $c \in P$ називається *коренем* многочлена $f(x)$, якщо $f(c)=0$.

Очевидно, що поняття кореня многочлена розглядається для ненульових многочленів ненульового степеня.

Усі многочлени у цій лекції розглядаються над одним і тим же полем P.

Теорема (*Безу*). Значення многочлена $f(x)$ при $x=c$ дорівнює остачі від ділення многочлена $f(x)$ на многочлен $x-c$.

▲ За теоремою про ділення з остачею, існують такі многочлени $q(x), r(x)$, що $f(x)=(x-c)\cdot q(x)+r(x)$, при чому $\deg r(x) < \deg(x-c)=1$ або $r(x)=0$. Тому $r(x)$ – многочлен нульового степеня або нульова константа з поля, над яким розглядається многочлен $f(x)$. Отже, $r(x)=r$ – деяке число з цього поля. Підставимо у рівність $f(x)=(x-c)\cdot q(x)+r$ замість змінної x число c. Тоді $f(c)=(c-c)\cdot q(c)+r=r$, що і треба було довести. ■

Наслідок. Число $c \in P$ є коренем многочлена $f(x)$ тоді і тільки тоді, коли $f(x) \vdots (x-c)$.

Натуральне число k називається *показником кратності кореня c многочлена* $f(x)$, якщо $f(x) \vdots (x-c)^k$, а $f(x) \not\vdots (x-c)^{k+1}$. Корінь кратності 1 називається *простим*, а при $k>1$ корінь називається *кратним*.

Сформулюємо без доведення ***основну теорему алгебри***.

Теорема (*основна теорема алгебри*). Кожен многочлен ненульового степеня має корені у полі комплексних чисел.

Ця теорема є важливим досягненням у математиці, вперше була доведена Гауссом у XVIII столітті, знайшла багато застосувань у різних галузях математики. Через це її довго називали основною теоремою алгебри. Ця назва склалась історично. Проте, з одного боку, ця теорема не є чисто алгебраїчною, а з іншого боку – у сучасній алгебрі здебільшого вивчаються властивості абстрактних алгебраїчних структур, і згадана теорема перестала займати центральне місце у цих дослідженнях.

Доведень основної теореми існує дуже багато. Усі вони у тій чи іншій мірі спираються на топологічні властивості дійсних та комплексних чисел, тобто на властивості, пов’язані із поняттям неперервності.

Лема 1. Кожен многочлен степеня $n \in \mathbf{N}$ має не більше, ніж n коренів.

▲ Будемо розглядати поле комплексних чисел, бо в ньому многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ має найбільшу кількість коренів. Тоді, за основною теоремою алгебри, існує комплексний корінь x_1 многочлена $f(x)$. За наслідком із теореми Безу, $f(x) = (x - x_1) \cdot f_1(x)$. При цьому $\deg f_1(x) = n - 1$. Якщо $\deg f_1(x) = 0$, то $f(x) = a_0 \cdot (x - x_1)$ і у многочлена 1 степеня існує рівно один корінь. Якщо ж $\deg f_1(x) > 0$, то за основною теоремою алгебри, існує комплексний корінь x_2 многочлена $f_1(x)$. За наслідком із теореми Безу, $f_1(x) = (x - x_2) \cdot f_2(x)$. При цьому $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot f_2(x)$ і $\deg f_2(x) = n - 2$. Якщо $\deg f_2(x) = 0$, то $f(x) = a_0 \cdot (x - x_1)(x - x_2)$ і у многочлена 2 степеня існує не більше двох коренів (x_1 може збігатися з x_2). Якщо $\deg f_2(x) > 0$, то існує комплексний корінь x_3 многочлена $f_2(x)$. І так далі. На n-ому кроці ми отримаємо $f(x) = a_0 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)$. У цьому записі серед чисел $x_1, x_2, \cdots, x_n$ можуть бути однакові. Тому у многочлена $f(x)$ не більше, ніж n комплексних коренів. ■

Лема 2. Нехай число $c \in \mathbf{C}$ – корінь многочлена з дійсними коефіцієнтами $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbf{R}[x]$. Тоді спряжене число $\overline{c}$ – також корінь многочлена $f(x)$.

▲ Оскільки $f(\overline{c}) = a_0(\overline{c})^n + a_1(\overline{c})^{n-1} + a_2(\overline{c})^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\overline{c} + a_n =$

$= \overline{a_0} \cdot \overline{c^n} + \overline{a_1} \cdot \overline{c^{n-1}} + \overline{a_2} \cdot \overline{c^{n-2}} + \cdots + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{c} + \overline{a_n} =$

$= \overline{a_0c^n + a_1c^{n-1} + a_2c^{n-2} + \cdots + a_{n-1}c + a_n} = \overline{f(c)} = \overline{0} = 0$, число $\overline{c}$ – корінь многочлена $f(x)$. ■

Лема 3. Спряжені корені многочлена з дійсними коефіцієнтами мають однакову кратність.

▲ Нехай $c \in \mathbf{C}$ – корінь многочлена з дійсними коефіцієнтами $f(x) \in \mathbf{R}[x]$. Тоді, за лемою 2, спряжене число $\overline{c}$ – також корінь многочлена $f(x)$. За теоремою Безу, існує такий многочлен $q_1(x)$, що

$f(x)=(x-c)(x-\bar{c})\cdot q_1(x)$. Оскільки $(x-c)(x-\bar{c})=x^2-(c+\bar{c})x+|c|^2\in\mathbf{R}[x]$, то і $q_1(x)\in\mathbf{R}[x]$. Якщо c – корінь многочлена $q_1(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то спряжене число $\bar{c}$ – також корінь многочлена $q_1(x)$ і, за теоремою Безу, $f(x)=(x-c)^2(x-\bar{c})^2\cdot q_2(x)=(x^2-(c+\bar{c})x+|c|^2)^2\cdot q_2(x)$. При цьому $q_2(x)\in\mathbf{R}[x]$. І так далі продовжуємо до тих пір, поки на якомусь кроці для многочлена $q_k(x)\in\mathbf{R}[x]$ $q_k(c)\neq 0$. Тоді $q_k(\bar{c})\neq 0$ і $f(x)=(x-c)^k(x-\bar{c})^k\cdot q_k(x)$. Оскільки $q_k(x)$ не ділиться на $x-c$ та на $x-\bar{c}$, кратності обох коренів $c,\bar{c}$ однакові і дорівнюють k. ■

Теорема. Над полем дійсних чисел кожен многочлен $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ ненульового степеня n розкладається на незвідні множники: лінійні та квадратичні з від'ємним дискримінантом.

▲ Нехай спочатку многочлен $f(x)\in\mathbf{R}[x]$ має s дійсних коренів: $x_1,x_2,\cdots,x_s$. Тоді, за теоремою Безу, $f(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\dots\cdot(x-x_s)\cdot g_1(x)$. Многочлен $g_1(x)\in\mathbf{R}[x]$ дійсних коренів не має. Якщо $\deg g_1(x)=0$, то у розкладі многочлена $f(x)$ на незвідні множники усі множники лінійні. Якщо $\deg g_1(x)>0$, то за основною теоремою алгебри, існує комплексний корінь c_1 многочлена $g_1(x)\in\mathbf{R}[x]$. Тоді, за лемами 2,3, $\overline{c_1}$ – також корінь многочлена $g_1(x)$, і кратності коренів c_1 та $\overline{c_1}$ однакові.

$$g_1(x)=(x-c_1)^{k_1}(x-\bar{c}_1)^{k_1}\cdot g_2(x)=(x^2-(c_1+\bar{c}_1)x+|c_1|^2)^{k_1}\cdot g_2(x).$$

Многочлен $g_2(x)\in\mathbf{R}[x]$ і $g_2(c_1)\neq 0$, $g_2(\overline{c_1})\neq 0$. Якщо $\deg g_2(x)=0$, то розклад многочлена $f(x)$ на незвідні множники:

$$f(x)=a_0\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\dots\cdot(x-x_s)\cdot(x^2-(c_1+\bar{c}_1)x+|c_1|^2)^{k_1}.$$

Якщо $\deg g_2(x)>0$, то за основною теоремою алгебри, існує комплексний корінь c_2 многочлена $g_2(x)\in\mathbf{R}[x]$. Тоді, за лемами 2,3, $\overline{c_2}$ – також корінь многочлена $g_2(x)$, і кратності коренів c_2 та $\overline{c_2}$ однакові.

$$g_2(x)=(x-c_2)^{k_2}(x-\bar{c}_2)^{k_2}\cdot g_3(x)=(x^2-(c_2+\bar{c}_2)x+|c_2|^2)^{k_2}\cdot g_3(x).$$

І так далі будемо продовжувати до тих пір поки на деякому кроці не отримаємо $\deg g_{r+1}(x) = 0$. Процес скінченний, бо $\deg g_1 > \deg g_2 > \deg g_3 > \cdots$.

Отримаємо розклад многочлена $f(x)$ на незвідні множники:

$f(x) = a_0 \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_s) \cdot (x^2 - (c_1 + \overline{c}_1)x + |c_1|^2)^{k_1} \cdots (x^2 - (c_r + \overline{c}_r)x + |c_r|^2)^{k_r}$.

Зауважимо, що многочлени виду $x^2 - (c + \overline{c})x + |c|^2 = (x - c)(x - \overline{c})$ є квадратні тричлени з від'ємним дискримінантом, бо вони не мають дійсних коренів.

Якщо многочлен $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ не має дійсних коренів, то повторюючи міркування як для многочлена $g_1(x) \in \mathbf{R}[x]$, можна показати, що $f(x)$ розкладається лише на квадратичні множники з від'ємним дискримінантом. ■

Висновки

1. Над полем комплексних чисел кожен многочлен $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ ненульового степеня n розкладається на лінійні множники, тобто

$$f(x) = a_0 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n).$$

У цьому записі серед чисел $x_1, x_2, \cdots, x_n$ можуть бути однакові.

Розклад многочлена $f(x) = a_0 \cdot (x - c_1)^{k_1} \cdot (x - c_2)^{k_2} \cdot \cdots \cdot (x - c_m)^{k_m}$, де $c_1, c_2, \cdots, c_m$ – різні корені многочлена $f(x)$, $m \le n$, а $k_1, k_2, \cdots, k_m$ – їх кратності, називається *канонічним розкладом многочлена на лінійні множники*.

2. Над полем дійсних чисел кожен многочлен $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ ненульового степеня n розкладається на незвідні множники: лінійні та квадратичні з від'ємним дискримінантом.

4.4. Кратні корені многочлена та його похідної

Теорема 1. Якщо число c є коренем кратності $k \in \mathbf{N}$ многочлена $f(x)$, то воно є коренем кратності $k-1$ для його похідної $f'(x)$.

▲ Доведемо теорему для $k \geq 2$. Із наслідку з теореми Безу випливає, що $f(x) = (x-c)^k \cdot f_1(x)$, де $f_1(c) \neq 0$. Знайдемо похідну:

$f'(x) = k \cdot (x-c)^{k-1} \cdot f_1(x) + (x-c)^k \cdot f_1'(x) = (x-c)^{k-1} \cdot (k \cdot f_1(x) + (x-c) \cdot f_1'(x))$.

Звідси отримуємо $f'(x) \,\vdots\, (x-c)^{k-1}$. Позначимо $\varphi(x) = k \cdot f_1(x) + (x-c) \cdot f_1'(x)$. Оскільки $\varphi(c) = k \cdot f_1(c) + (c-c) \cdot f_1'(c) = k \cdot f_1(c) \neq 0$, то $\varphi(x)$ не ділиться на $(x-c)$. Тому $f'(x)$ не ділиться на $(x-c)^k$. Отже, c є коренем кратності $k-1$ для його похідної $f'(x)$. ■

Зауваження. Якщо число c є простим коренем многочлена $f(x)$, то для його похідної $f'(x)$ число c коренем не буде.

▲ Якщо у попередній теоремі розглянути $k = 1$, то

$f(x) = (x-c) \cdot f_1(x)$, де $f_1(c) \neq 0$, $f'(x) = f_1(x) + (x-c) \cdot f_1'(x)$.

Звідси $f'(c) = f_1(c) + (c-c) \cdot f_1'(c) = f_1(c) \neq 0$. Отже, число c не буде коренем похідної $f'(x)$. Оскільки $f'(x) \,\vdots\, (x-c)^0 = 1$, але $f'(x)$ не ділиться на $(x-c)^1$, то число c можна назвати «коренем кратності 0» для похідної $f'(x)$. Маючи саме це на увазі можна розглядати теорему 1 для довільного натурального k. ■

Теорема 2. Многочлен не має кратних коренів тоді і тільки тоді, коли він взаємно простий зі своєю похідною.

▲ Доведемо теорему для многочлена над полем комплексних чисел.

Нехай $f(x) = a_0 \cdot (x-c_1)^{k_1} \cdot (x-c_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-c_m)^{k_m}$, де $c_1, c_2, \cdots, c_m$ – різні корені многочлена $f(x)$, а $k_1, k_2, \cdots, k_m$ – їх кратності. Із теореми 1 випливає, що $f'(x) = (x-c_1)^{k_1-1} \cdot (x-c_2)^{k_2-1} \cdot \dots \cdot (x-c_m)^{k_m-1} \cdot \varphi(x)$. Многочлен $\varphi(x)$ має степінь $\deg \varphi(x) = m-1$, і жодне з чисел $c_1, c_2, \cdots, c_m$ не є коренем цього многочлена. Тому $\varphi(x)$ взаємно простий з кожним із многочленів $(x-c_i), i = \overline{1,m}$. Тому

$$НСД(f(x), f'(x)) = (x-c_1)^{k_1-1} \cdot (x-c_2)^{k_2-1} \cdot \dots \cdot (x-c_m)^{k_m-1}.$$

Якщо всі корені многочлена $f(x)$ прості, то $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 1$, і $НСД(f(x), f'(x)) = (x-c_1)^0 \cdots (x-c_m)^0 = 1$. Тому многочлен взаємно простий зі своєю похідною. З іншого боку, якщо $НСД(f(x), f'(x)) = 1$, то із рівності $1 = (x-c_1)^{k_1-1} \cdot (x-c_2)^{k_2-1} \cdot \dots \cdot (x-c_m)^{k_m-1}$ випливає, що $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 1$, тобто усі корені многочлена $f(x)$ прості. ■

Теореми 1 і 2 лягли в основу процедури відокремлення кратних множників многочлена.

Спочатку розглянемо таку задачу. Для многочлена $f(x)$ побудувати такий многочлен $q_1(x)$, щоб множини коренів обох многочленів збігалися, але при цьому всі корені $q_1(x)$ були прості.

Повторюючи доведення теореми 2, знайдемо $НСД(f(x), f'(x)) = d_1(x)$. Тоді многочлен

$$q_1(x) = \frac{f(x)}{d_1(x)} = \frac{a_0 \cdot (x-c_1)^{k_1} \cdot (x-c_2)^{k_2} \cdots (x-c_m)^{k_m}}{(x-c_1)^{k_1-1} \cdot (x-c_2)^{k_2-1} \cdots (x-c_m)^{k_m-1}} = a_0 \cdot (x-c_1) \cdot (x-c_2) \cdots (x-c_m)$$

і буде шуканим.

Розглянемо тепер многочлен $НСД(f(x), f'(x)) = d_1(x)$. Множина коренів цього многочлена збігається із множиною усіх кратних коренів многочлена $f(x)$, тобто таких коренів $f(x)$, у яких кратність більша 1. Але при цьому кратність кореня c_i многочлена $d_1(x)$ на одиницю менше кратності цього ж кореня у многочлена $f(x)$.

Проробимо описану вище процедуру для многочлена $d_1(x)$. Знайдемо $НСД(d_1(x), d_1'(x)) = d_2(x)$. Тоді многочлен $q_2(x) = \dfrac{d_1(x)}{d_2(x)}$ буде многочленом без кратних коренів, множина коренів якого збігається із множиною коренів многочлена $d_1(x)$ і з множиною кратних коренів многочлена $f(x)$. І так далі продовжуємо для многочленів $d_2(x)$, $d_3(x)$, …, $d_{r-1}(x)$, до тих пір поки на деякому кроці не отримаємо $d_r(x) = 1$. Це означає, що у многочлена $d_{r-1}(x)$ усі корені прості і вони збігаються із коренями кратності

$r=\max(k_1,k_2,\cdots,k_m)$ многочлена $f(x)$. Тоді $q_r(x)=\dfrac{d_{r-1}(x)}{d_r(x)}=\dfrac{d_{r-1}(x)}{1}=d_{r-1}(x)$.

Ми можемо побудувати многочлени $q_1(x),q_2(x),\ldots,q_r(x)$. Кожен $q_i(x)$ – многочлен без кратних коренів, множина коренів якого збігається із множиною коренів многочлена $f(x)$, що мають кратність $\geq i$. Тоді можна побудувати многочлени $\Phi_1(x)=\dfrac{q_1(x)}{q_2(x)},\Phi_2(x)=\dfrac{q_2(x)}{q_3(x)},\ldots,\Phi_{r-1}(x)=\dfrac{q_{r-1}(x)}{q_r(x)},\Phi_r(x)=q_r(x)$. Кожен $\Phi_i(x)$ – многочлен без кратних коренів, множина коренів якого збігається із множиною коренів многочлена $f(x)$, що мають кратність i, $i=\overline{1,r}$.

Тоді $f(x)=\Phi_1(x)\cdot\Phi_2^2(x)\cdot\Phi_3^3(x)\cdot\cdots\cdot\Phi_r^r(x)$.

Розглянемо приклад. Відокремити кратні множники многочлена $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2$.

Знайдемо похідну $f'(x)=4x^3+3x^2-6x-5$. За алгоритмом Евкліда знайдемо $НСД(f(x),f'(x))=d_1(x)$.

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4+4x^3-12x^2-20x-8 & 4x^3+3x^2-6x-5 \\ \cline{2-2}
\underline{4x^4+3x^3-\ 6x^2-5x} & \quad x+1 \\
\qquad x^3-6x^2-15x-8 & \\
(4)\quad 4x^3-24x^2-60x-32 & \\
\qquad \underline{4x^3+3x^2-6x-5} & \\
\qquad\quad -27x^2-54x-27=-27(x^2+2x+1) &
\end{array}
$$

Отже, з точністю до асоційованості $r_1(x)=x^2+2x+1$.

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3+3x^2-6x-5 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{4x^3+8x^2+4x} & \quad 4x-5 \\
\quad -5x^2-10x-5 & \\
\quad \underline{-5x^2-10x-5} & \\
\qquad\qquad 0=r_2(x) &
\end{array}
$$

Отже, $d_1(x) = x^2 + 2x + 1$. Шукаємо похідну $d_1'(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$. Тоді $d_2(x) = НСД(d_1(x), d_1'(x)) = x + 1$. Знову шукаємо похідну $d_2'(x) = 1$. Тоді $d_3(x) = НСД(d_2(x), d_2'(x)) = 1$ і $r = 3$.

Шукаємо многочлени $q_1(x), q_2(x), q_3(x)$:

$$q_1(x) = \frac{f(x)}{d_1(x)} = \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1),$$

$$q_2(x) = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x+1} = \frac{(x+1)^2}{x+1} = x + 1,$$

$$q_3(x) = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = \frac{x+1}{1} = x + 1.$$

Шукаємо многочлени $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x)$:

$$\Phi_1(x) = \frac{q_1(x)}{q_2(x)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} = x - 2,$$

$$\Phi_2(x) = \frac{q_2(x)}{q_3(x)} = \frac{x+1}{x+1} = 1,$$

$$\Phi_3(x) = q_3(x) = x + 1.$$

Тому $f(x) = (x-2)^1 \cdot 1^2 \cdot (x+1)^3 = (x-2) \cdot (x+1)^3$.

У практичних задачах часто обмежуються знаходженням многочлена $q_1(x) = \dfrac{f(x)}{НСД(f(x), f'(x))}$.

4.5. *Узагальнена теорема Вієта*

Коефіцієнти многочлена $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ виражаються через його корені $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ за допомогою рівностей, що називаються *формулами Вієта*:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -a_1, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = a_2, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1x_2x_3 \cdots x_n = (-1)^n a_n. \end{cases}$$

▲ Доведення проведемо методом математичної індукції. В якості бази індукції візьмемо відоме зі школи твердження теореми Вієта для квадратного тричлена: коефіцієнти многочлена $f(x) = x^2 + a_1 x + a_2$ виражаються через його корені x_1, x_2 за допомогою рівностей:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1, \\ x_1 x_2 = a_2. \end{cases}$$

Розглянемо многочлен $(k-1)$-ого степеня з коренями $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{k-1}$. Тоді $f(x) = x^{k-1} + a_1 x^{k-2} + a_2 x^{k-3} + \cdots + a_{k-2} x + a_{k-1} = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{k-1})$.

Припущення індукції. Для кожного многочлена $f(x)$ степеня $(k-1)$-ого виконуються рівності (1):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{k-1} = -a_1, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{k-2} x_{k-1} = a_2, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{k-3} x_{k-2} x_{k-1} = -a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 x_2 x_3 \cdots x_{k-1} = (-1)^{k-1} a_{k-1}. \end{cases} \qquad (*)$$

Індукційний крок. Розглянемо тепер многочлен k-ого степеня з коренями $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{k-1}, x_k$. Нехай

$$\widetilde{f}(x) = x^k + b_1 x^{k-1} + b_2 x^{k-2} + b_3 x^{k-3} + \cdots + b_{k-2} x^2 + b_{k-1} x + b_k.$$

Його можна подати у вигляді:

$$\widetilde{f}(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_k) = f(x)(x - x_k),$$

де многочлен $f(x)$ має степінь $k-1$ і для нього, за припущенням індукції, виконуються рівності (1). Тому

$$\widetilde{f}(x) = f(x)(x - x_k) = (x^{k-1} + a_1 x^{k-2} + a_2 x^{k-3} + \cdots + a_{k-2} x + a_{k-1})(x - x_k) =$$
$$= x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \cdots + a_{k-2} x^2 + a_{k-1} x - x_k x^{k-1} - x_k a_1 x^{k-2} - x_k a_2 x^{k-3} - \cdots$$
$$- x_k a_{k-2} x - x_k a_{k-1} = x^k + (a_1 - x_k) x^{k-1} + (a_2 - x_k a_1) x^{k-2} + (a_3 - x_k a_2) x^{k-3} + \cdots$$
$$+ (a_{k-2} - x_k a_{k-3}) x^2 + (a_{k-1} - x_k a_{k-2}) x - x_k a_{k-1}.$$

Для коефіцієнтів многочлена $\widetilde{f}(x)$ враховуючи (*) виконуються рівності:

$$-b_1 = -a_1 + x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k,$$

$$b_2 = a_2 - x_k a_1 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{k-2}x_{k-1} + x_k(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}) =$$

$$= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{k-1}x_k,$$

$$-b_3 = -a_3 + x_k a_2 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{k-3}x_{k-2}x_{k-1} + x_k(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots$$

$$+ x_{k-2}x_{k-1}) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{k-2}x_{k-1}x_k,$$

…………………………………………………………

$$(-1)^k b_k = -(-1)^{k-1} b_k = (-1)^{k-1} x_k a_{k-1} = x_1x_2x_3 \cdots x_{k-1}x_k.$$

Як бачимо, рівності (1) виконуються і для многочлена k-ого степеня.

Отже, рівності (1) виконуються для многочлена довільного натурального степеня. ■

Часто доводиться використовувати теорему Вієта для многочлена 3-ого степеня. Рівності (1) для $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ набувають вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a_1, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a_2, \\ x_1x_2x_3 = -a_3. \end{cases} \qquad (2)$$

4.6. Раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами

Зауважимо спочатку, що кожен многочлен із раціональними коефіцієнтами можна помножити на найменше спільне кратне знаменників усіх його коефіцієнтів і отримати многочлен з цілими коефіцієнтами. Корені многочлена при цьому, очевидно, не змінюються.

Теорема 1. *Якщо раціональне число* $\frac{p}{q}$, *де цілі числа* p,q *– взаємно прості, є коренем многочлена* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ *з цілими коефіцієнтами, то* $a_n \,\vdots\, p$, $a_0 \,\vdots\, q$.

▲ Нехай число $\frac{p}{q}$ – корінь многочлена $f(x)$. Тоді

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 \frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2 \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0. \qquad (**)$$

Помножимо цю рівність на q^{n-1}. Отримаємо: $a_0\dfrac{p^n}{q}+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}q+\dots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1}=0$. Звідси число $a_0\dfrac{p^n}{q}$ – ціле. Справді, $a_0\dfrac{p^n}{q}=-a_1p^{n-1}-a_2p^{n-2}q-\dots-a_{n-1}pq^{n-2}-a_nq^{n-1}\in\mathbf{Z}$. Тоді $(a_0\cdot p^n)\vdots q$. Оскільки p,q – взаємно прості, $a_0\vdots q$.

Тепер помножимо рівність (**) на $\dfrac{q^n}{p^n}$, матимемо:

$a_n\dfrac{q^n}{p^n}+a_{n-1}\dfrac{q^{n-1}}{p^{n-1}}+a_{n-2}\dfrac{q^{n-2}}{p^{n-2}}+\dots+a_1\dfrac{q}{p}+a_0=0$. Аналогічно помноживши цю рівність на p^{n-1} можна довести, що число $a_n\dfrac{q^n}{p}$ – ціле. Звідси $a_n\vdots p$. ■

Наслідок. Якщо старший коефіцієнт a_0 многочлена з цілими коефіцієнтами дорівнює 1, то всі раціональні корені цього многочлена – цілі і є дільниками вільного члена a_n.

Теорема 2. Якщо раціональне число $\dfrac{p}{q}$, де цілі числа p,q – взаємно прості, є коренем многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, то $f(1)\vdots(p-q)$, $f(-1)\vdots(p+q)$.

Зауважимо, що у теоремах 1, 2 сформульовані лише необхідні умови того, що раціональне число $\dfrac{p}{q}$ є коренем многочлена з цілими коефіцієнтами. Обернені твердження – хибні! Многочлен із цілими коефіцієнтами може не мати не лише раціональних, а навіть дійсних коренів. Тому пошук раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами починається зі складання списку раціональних чисел, які задовольняють умови теорем 1,2. Цей список скінченний, проте може виявитися досить довгим. Потім кожне число із цього списку потрібно безпосередньо перевірити, чи буде воно коренем заданого многочлена. Перевірку можна здійснювати, наприклад, за схемою Горнера.

4.7. Приклади розв’язання типових задач

Завдання № 1. Обчислити кратність кореня $x=3$ многочлена
$$f(x)=x^5-8x^4+19x^3-9x^2-27.$$

Розв’язання

Нагадаємо, як виконується *ділення многочленів за схемою Горнера*.

У нашій задачі потрібно виконати ділення многочлена $f(x)$ на лінійний многочлен $x-3$. Для цього складаємо таблицю, у першому стовпці якої міститься число 3 – корінь многочлена $x-3$. У верхньому рядку, починаючи з другого стовпця виписуємо усі коефіцієнти многочлена $f(x)$, не пропускаючи нульових, так при x^1 коефіцієнт дорівнює 0, і його потрібно вписати у відповідну клітинку. Нижній рядок таблиці, починаючи з другого стовпця заповнюємо так. Число з другого стовпця верхнього рядка записуємо і в нижньому рядку другого стовпця. Наступні клітинки нижнього рядка заповнюються зліва на право за наступним правилом: множимо число у клітинці зліва на корінь ($x=3$) і до отриманого добутку додаємо число з верхньої клітинки.

3	1	-8	19	-9	0	-27
	1	3·1+(-8)=-5	3·(-5)+19=4	3·4+(-9)=3	3·3+0=9	3·9+(-27)=0

У нижньому рядку, починаючи з другої до передостанньої клітинки, отримали коефіцієнти частки від ділення $f(x)$ на $x-3$. В останній клітинці нижнього рядка отримали остачу від ділення $f(x)$ на $x-3$. Тобто ми можемо записати: $f(x)=(x-3)(x^4-5x^3+4x^2+3x+9)+0$. Оскільки остача від ділення $f(x)$ на $x-3$ дорівнює 0, то $f(x)$ ділиться на $x-3$, і $x=3$ справді є коренем многочлена $f(x)=x^5-8x^4+19x^3-9x^2-27$.

Для того, щоб знайти кратність цього кореня, будемо ділити частку від ділення $f(x)$ на $x-3$, тобто многочлен $q_1(x)=x^4-5x^3+4x^2+3x+9$, на $x-3$, отриману частку $q_2(x)$ – знову на $x-3$, і так далі, до тих пір, поки не отримаємо ненульову остачу від ділення. Все ці обчислення зручно записувати у одній таблиці. Кожен наступний рядок отримується з попереднього рядка без його останньої клітинки.

	1	-8	19	-9	0	-27
	1	-5	4	3	9	0
3	1	-2	-2	-3	0	
	1	1	1	0		
	1	4	13			

Як бачимо, три остачі від ділення рівні 0, а четверта дорівнює 13. Отже, $f(x)=(x-3)^3(x^2+x+1) \vdots (x-3)^3$, але $f(x)=(x-3)^4(x+4)+13(x-3)^3$ не ділиться на $(x-3)^4$. Тому кратність кореня $x=3$ многочлена $f(x)$ дорівнює 3.

Відповідь. $x=3$ – корінь кратності 3 для многочлена $f(x)=x^5-8x^4+19x^3-9x^2-27$.

Завдання № 2. Знайти найменший раціональний корінь многочлена

$$f(x)=8x^6-4x^5-22x^4-7x^3-x^2+17x-6.$$

Розв'язання

Раціональні корені многочлена будемо шукати серед чисел вигляду $\frac{p}{q}$, де p – дільник вільного члена, тобто числа -6, а q – дільник старшого коефіцієнта, тобто числа 8. Випишемо усі раціональні числа такого вигляду:

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{8},\quad 2,\quad 3,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{3}{8},\quad 6,$$

$$-1,\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{4},\quad -\frac{1}{8},\quad -2,\quad -3,\quad -\frac{3}{2},\quad -\frac{3}{4},\quad -\frac{3}{8},\quad -6.$$

Якщо многочлен $f(x)$ має раціональні корені, то вони будуть числами із цього списку. По черзі будемо перевіряти, чи будуть ці числа коренями многочлена $f(x)$. Спочатку за допомогою схеми Горнера знайдемо $f(1)$ та $f(-1)$:

1	8	-4	-22	-7	-1	17	-6
	8	4	-18	-25	-26	-9	-15

-1	8	-4	-22	-7	-1	17	-6
	8	-12	-10	3	-4	21	-27

Отже, $f(1) = -15$ та $f(-1) = -27$. Числа $1, -1$ не є коренями многочлена $f(x)$. Щоб зменшити кількість таких перевірок застосуємо теорему 2 із 4.6.

Наприклад, для числа $-6 = \frac{-6}{1}$ $p = -6, q = 1$. Тоді $p + q = -5, p - q = -7$. Оскільки $f(-1) = -27$ не ділиться на $p + q = -5$, то число -6 не є коренем многочлена. А для числа $-\frac{1}{4}$ $p = -1, q = 4$. Тоді $p + q = 3, p - q = -5$. $f(1) = -15 \,\vdots\, (p - q)$, $f(-1) = -27 \,\vdots\, (p + q)$. Отже, число $-\frac{1}{4}$ потребує додаткової перевірки, чи є воно коренем многочлена. Так перевіряємо решту чисел зі списку.

Числа, що потребують додаткової перевірки випишемо окремо в порядку зростання:

$$-2, \quad -\frac{3}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \; -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad 2.$$

За схемою Горнера знайдемо $f(-2)$:

-2	8	-4	-22	-7	-1	17	-6
	8	-20	18	-43	85	-153	300

Оскільки $f(-2) = 300$, число -2 не є коренем многочлена $f(x)$.

За схемою Горнера знайдемо $f\left(-\frac{3}{2}\right)$:

$-\frac{3}{2}$	8	-4	-22	-7	-1	17	-6
	8	-16	2	-10	14	-4	0

Оскільки $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$, число $-\frac{3}{2}$ є коренем многочлена $f(x)$. І цей корінь найменший серед раціональних.

Якщо в задачі потрібно знайти *всі* раціональні корені многочлена, то потрібно виконати перевірку для всіх чисел із другого списку.

Відповідь. найменший раціональний корінь многочлена $f(x) = 8x^6 - 4x^5 - 22x^4 - 7x^3 - x^2 + 17x - 6$ дорівнює $x = -\frac{3}{2}$.

Розділ 5. Основні алгебраїчні структури: групи, кільця, поля, лінійні векторні простори

5.1. Напівгрупи, групи, кільця, поля.

Розглянемо непорожню множину M. *Бінарною операцією* $\circ$ *на множині* $M \neq \varnothing$ будемо називати відображення $\circ : M \times M \to M$, яке кожній впорядкованій парі елементів із множини M ставить у відповідність один елемент із цієї ж множини.

Пишуть $M \times M \ni (a,b) \mapsto c \in M$. Будемо позначати елемент $c = a \circ b$ і називати його *результатом бінарної операції* $\circ$, застосованої до пари (a,b).

Непорожню множину M із введеною на ній бінарною операцією $\circ$ називають *групоїдом* і позначають $(M,\circ)$. При цьому кажуть, що *бінарна операція* $\circ$ *замкнена на множині* M, або *множина* M *замкнена відносно бінарної операції* $\circ$.

Наприклад, бінарними операціями на множині $\mathbf{N}$ натуральних чисел будуть арифметичні операції додавання і множення. Справді, сума і добуток двох натуральних чисел завжди будуть натуральними числами. Проте арифметична операція віднімання на множині натуральних чисел не буде бінарною операцією, бо результат віднімання натуральних чисел не завжди буде натуральним числом. Але, якщо розглянути ту ж операцію віднімання на множині $\mathbf{Z}$ цілих чисел, то вона вже буде бінарною операцією на цій множині, оскільки різниця будь-яких двох цілих чисел завжди буде цілим числом.

Для позначення бінарної операції на множині найчастіше використовують такі позначення: $+, \cdot, \circ, \bullet, *, \oplus$. Саму бінарну операцію часто називають множенням, суперпозицією, композицією, додаванням. Проте слід зауважити, що ці назви умовні. Ми у більшості випадків будемо вживати *мультиплікативну термінологію* і називати бінарну операцію *множенням*, результат її застосування до пари елементів – їх *добутком*.

Бінарна операція $\circ$ називається *асоціативною* на множині M, якщо для довільних елементів $a,b,c \in M$ виконується рівність $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. Асоціативність бінарної операції на множині дозволяє розглядати добутки більше, ніж двох елементів цієї множини, і як завгодно групувати у таких добутках множники за допомогою дужок.

Непорожню множину M із введеною на ній асоціативною бінарною операцією $\circ$ називають *напівгрупою.*

Наприклад, бінарна операція віднімання на множині цілих чисел не буде асоціативною. Справді, $(5-3)-1 \neq 5-(3-1)$.

Приклади напівгруп

1) $(\mathbf{N},\cdot)$, $(\mathbf{N},+)$, $(\mathbf{Z},\cdot)$, $(\mathbf{Z},+)$;

2) множина $\mathbf{N}$ натуральних чисел відносно операції $*$ відшукання найбільшого спільного дільника для пари натуральних чисел;

3) множина $M_n(\mathbf{R})$ усіх квадратних матриць порядку n з дійсними елементами відносно операції множення матриць;

4) множина $M_n(\mathbf{R})$ відносно операції додавання матриць;

Елемент $e \in M$ називається *нейтральним відносно бінарної операції* $\circ$ на множині M, якщо для довільного елемента $a \in M$ виконується рівність $a \circ e = e \circ a = a$.

Наприклад, у напівгрупах $(\mathbf{N},\cdot)$ та $(\mathbf{Z},\cdot)$ нейтральним елементом буде число 1; у напівгрупі $(\mathbf{Z},+)$ – число 0; у напівгрупі $(M_n(\mathbf{R}),\cdot)$ – одинична матриця E порядку n; у напівгрупі $(M_n(\mathbf{R}),+)$ – нульова матриця порядку n. А от у напівгрупі $(\mathbf{N},+)$ нейтрального елемента немає, бо число 0 не є натуральним. У напівгрупі $(\mathbf{N},*)$, де $a*b = НСД(a,b)$, із того, що $a*e = НСД(a,e) = a$ для всіх натуральних a випливає, що натуральне число e повинно ділитися на кожне з натуральних чисел, що неможливо. Тому в напівгрупі $(\mathbf{N},*)$ також не існує нейтрального елемента.

Зауважимо, що часто нейтральний елемент напівгрупи називають *одиницею напівгрупи*, а саму напівгрупу, що містить нейтральний елемент, називають *напівгрупою з одиницею* або *моноїдом*.

Бінарна операція $\circ$ називається *комутативною* на множині M, якщо для довільних елементів $a, b \in M$ виконується рівність $a \circ b = b \circ a$.

Наприклад, бінарні операції у напівгрупах $(\mathbf{N}, \cdot)$, $(\mathbf{N}, +)$, $(\mathbf{Z}, \cdot)$, $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{N}, *)$ та $(M_n(\mathbf{R}), +)$ – комутативні, а у напівгрупі $(M_n(\mathbf{R}), \cdot)$ бінарна операція множення матриць некомутативна.

Напівгрупу з комутативною бінарною операцією називають *комутативною напівгрупою*.

Елемент $a \in M$ називається *оберненим до елемента* $b \in M$ у напівгрупі $(M, \circ)$ з одиницею e, якщо виконується рівність $a \circ b = b \circ a = e$. Із даного означення випливає, що елементи a і b обернені один до одного у напівгрупі, будемо казати, що вони *взаємно обернені*.

Зауважимо, що у напівгрупі з одиницею не для кожного елемента може існувати обернений. Так, у напівгрупі $(\mathbf{N}, \cdot)$ обернений існує лише для числа 1. Очевидно, що цей елемент обернений сам до себе. У напівгрупі $(M_n(\mathbf{R}), \cdot)$ обернений елемент існує лише для невироджених матриць.

Якщо бінарна операція на множині називається додаванням, то для зручності прийнято вживати так звану *адитивну термінологію.* При цьому взаємно обернені елементи називають *протилежними*, результат застосування бінарної операції називають *сумою*.

Означення. Непорожня множина G із введеною на ній бінарною операцією $\circ$ називається *групою*, якщо виконуються наступні три умови:

1) бінарна операція $\circ$ асоціативна на множині G, тобто для довільних $a, b, c \in G$ виконується рівність $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

2) існує нейтральний елемент $e \in G$ відносно бінарної операції $\circ$, тобто існує такий елемент $e \in G$, що для всіх $a \in G$ виконується рівність $a \circ e = e \circ a = a$;

3) для кожного елемента $a \in G$ існує обернений, тобто для кожного $a \in G$ існує такий елемент $b \in G$, що виконується рівність $a \circ b = b \circ a = e$.

Умови 1-3 із означення групи називаються *аксіомами групи*.

Приклади груп

1) $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{Q}, +)$, $(\mathbf{R}, +)$, $(\mathbf{C}, +)$;

2) $(\{1, -1\}, \cdot)$ $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbf{C} \setminus \{0\}, \cdot)$;

3) множина $GL_n(\mathbf{R})$ усіх невироджених квадратних матриць порядку n з дійсними елементами відносно операції множення матриць;

4) $(M_n(\mathbf{R}), +)$.

Група $(G, \circ)$ називається *абелевою*, якщо бінарна операція на ній комутативна, тобто для довільних $a, b \in G$ виконується рівність $a \circ b = b \circ a$.

Так, група $(GL_n(\mathbf{R}), \cdot)$ – неабелева, а групи $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{Q}, +)$, $(\mathbf{R}, +)$, $(\mathbf{C}, +)$, $(\{1, -1\}, \cdot)$ $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbf{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(M_n(\mathbf{R}), +)$ – абелеві.

Означення. Непорожня множина K із введеними на ній двома бінарними операціями: додаванням (+) та множенням ($\circ$), називається *кільцем*, якщо виконуються наступні умови:

1) відносно додавання множина K утворює абелеву групу;

2) бінарна операція множення $\circ$ асоціативна на множині K, тобто для довільних $a, b, c \in K$ виконується рівність $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

3) бінарні операції множення і додавання пов'язані *дистрибутивними законами*, тобто для довільних $a, b, c \in K$ виконуються рівності:

$$(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c;$$

$$c \circ (a + b) = c \circ a + c \circ b.$$

Умови із означення кільця називаються *аксіомами кільця*.

Найпростішим прикладом кільця є $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$. Це кільце називають *кільцем цілих чисел*. Кільце утворює також множина $P[x]$ усіх многочленів від однієї змінної із коефіцієнтами із деякого числового поля P. Це кільце називають *кільцем многочленів від однієї змінної*.

Нейтральний елемент відносно операції додавання у кільці називається *нулем кільця*, а нейтральний елемент відносно множення – *одиницею кільця*. Зауважимо, що існують кільця як з одиницею, так і без неї. Зокрема, $(\mathbf{Z},+,\cdot)$ – кільце з одиницею, її роль виконує, очевидно, число 1. Якщо ж розглянути множину усіх цілих парних чисел і на ній звичайні операції додавання і множення, то отримаємо кільце без одиниці.

Якщо операція множення у кільці комутативна, то кільце називається *комутативним*. Прикладом комутативного кільця може служити *кільце цілих чисел* $(\mathbf{Z},+,\cdot)$, прикладом некомутативного – *повне матричне кільце* $(M_n(\mathbf{R}),+,\cdot)$.

Зауважимо, що для комутативних кілець достатньо одного дистрибутивного закону.

Розглянемо особливий вид кілець. Комутативне кільце $(P,+,\circ)$ з одиницею називається *полем*, якщо у ньому для кожного відмінного від нуля елемента існує обернений відносно операції множення. Кільце з одного елемента полем не вважається.

Дамо строге аксіоматичне означення поля.

Означення. Множина P, у якій більше одного елемента, із введеними на ній двома бінарними операціями: додаванням (+) та множенням ($\cdot$), називається *полем*, якщо виконуються наступні умови:

1) відносно додавання множина P утворює абелеву групу (нейтральний елемент відносно додавання називають *нулем* поля і позначають символом 0);

2) бінарна операція множення $\cdot$ асоціативна на множині P, тобто для довільних $a,b,c\in P$ виконується рівність $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;

3) бінарна операція множення $\cdot$ комутативна на множині P, тобто для довільних $a,b\in P$ виконується рівність $a\cdot b=b\cdot a$;

4) існує нейтральний елемент відносно бінарної операції множення $\cdot$, тобто існує такий елемент $1\in P$, що для всіх $a\in P$ виконується

рівність $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (нейтральний елемент відносно множення називають *одиницею* поля і позначають символом 1);

5) для кожного відмінного від нуля елемента $a \in P$ існує обернений відносно операції множення, тобто для кожного $a \in P \setminus \{0\}$ існує такий елемент $b \in P$, що виконується рівність $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

6) бінарні операції множення і додавання пов'язані *дистрибутивним законом*, тобто для довільних $a, b, c \in P$ виконується рівність $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Умови із означення поля називаються *аксіомами поля*.

Зауважимо, що множина з одного елемента із бінарними операціями, що задовольняють аксіоми поля, *полем не вважається*. У цьому випадку нуль і одиниця збігаються. Якщо ж у множині P більше одного елемента, то можна довести, що роль нуля і роль одиниці виконують різні елементи.

Таким чином, поле P можна вважати утвореним двома абелевими групами: $(P, +)$ та $(P \setminus \{0\}, \circ)$ так, що бінарні операції $+$ та $\circ$ пов'язані дистрибутивним законом: для всіх $a, b, c \in P$ виконується рівність $(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$.

Прикладами полів є *числові поля*: $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbf{R}, +, \cdot)$, $(\mathbf{C}, +, \cdot)$. Їх елементи є числами. Зауважимо, що існують і нечислові поля.

5.2. Лінійний векторний простір

Нехай P – деяке поле. Домовимося його елементи називати *числами*. Для позначення чисел із поля будемо використовувати символи 0, 1 та маленькі букви грецького алфавіту, наприклад: $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$.

Розглянемо непорожню множину V з елементами довільної природи, які домовимось називати *векторами*. Вектори будемо позначати маленькими буквами латинського алфавіту зі стрілками, наприклад: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}_1, \vec{y}$.

Означення. Непорожня множина V називається *лінійним векторним простором над полем* P, якщо на ній введено такі дві операції:

I. бінарна операція *додавання*, відносно якої множина V утворює абелеву групу, тобто виконуються такі умови:

1) для довільних $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V$ виконується рівність $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

2) для довільних $\vec{a},\vec{b}\in V$ виконується рівність $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

3) існує такий елемент $\vec{0}\in V$, що для всіх $\vec{a}\in V$ виконується рівність $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (нейтральний елемент відносно додавання у множині V називається *нульовим вектором* і позначається $\vec{0}$);

4) для кожного $\vec{a}\in V$ існує такий елемент $\vec{b}\in V$, що виконується рівність $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$;

II. зовнішня операція *множення векторів із множини V на числа із поля P*, така що результатом цієї операції є вектор із множини V, і виконуються такі умови:

5) для кожного $\vec{a}\in V$ виконується рівність $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;

6) для довільних чисел $\alpha,\beta\in P$ і довільного вектора $\vec{a}\in V$ виконується рівність $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}$;

7) для довільних чисел $\alpha,\beta\in P$ і довільного вектора $\vec{a}\in V$ виконується рівність $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$;

8) для довільного чисел $\alpha\in P$ і довільних векторів $\vec{a},\vec{b}\in V$ виконується рівність $\alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$.

Умови 1)-8) називаються *аксіомами лінійного векторного простору*. Зокрема, аксіоми 1)-4) визначають властивості додавання векторів, аксіоми 5)-6) – властивості множення вектора на число, а аксіоми 7)-8) – пов’язують ці дві операції. Аксіома 6) виражає асоціативність множення вектора на число відносно множення чисел, аксіома 7) – дистрибутивність множення вектора на число відносно числового множника, а аксіома 8) – дистрибутивність множення вектора на число відносно векторного множника.

Приклади лінійних векторних просторів

1. **Числовий векторний простір P_n.** є лінійним векторним простором над полем P.

Елементами множини P_n є усі впорядковані набори виду $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ з n чисел із поля P. Їх називають *числовими* n-*компонентними векторами*. На множині P_n вводиться операція покомпонентного додавання, а також операція покомпонентного множення числового вектора на число із поля P. Легко переконатися, що ці операції задовольняють усі аксіоми лінійного векторного простору. Тому P_n утворює лінійний векторний простір над полем P.

2. **Множина Γ_2 усіх геометричних векторів площини та множина Γ_3 усіх геометричних векторів простору** утворюють лінійні векторні простори над полем дійсних чисел $\mathbf{R}$.

Справді, операція додавання геометричних векторів, запроваджена за правилом трикутника, та операція множення геометричних векторів на дійсне число задовольняють усі аксіоми лінійного векторного простору.

3. **Множина $M_n(P)$ усіх квадратних матриць порядку n з елементами із поля P** утворює лінійний векторний ппростір над полем P.

Операції додавання матриць і множення матриці на число із поля P задовольняють усі аксіоми лінійного векторного простору.

4. **Множина $P[x]$ усіх многочленів від однієї змінної з коефіцієнтами із поля P** утворює лінійний векторний ппростір над полем P.

Операції додавання многочленів та множення многочлена на число із поля P задовольняють усі аксіоми лінійного векторного простору.

5. **Множина $C[\alpha, \beta]$ усіх неперервних на відрізку $[\alpha, \beta]$ функцій** утворює лінійний векторний простір над полем дійсних чисел $\mathbf{R}$.

Операція поточкового додавання функцій та операція множення функції на дійсне число задовольняють усі аксіоми лінійного векторного простору.

Найпростіші властивості векторних просторів, які випливають із аксіом

1. Для довільного $\vec{a} \in V$ виконується рівність $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

▲ Оскільки для довільного $\vec{a} \in V$ виконується рівність $\vec{a} = 1 \cdot \vec{a} = (1+0) \cdot \vec{a} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{a} = \vec{a} + 0 \cdot \vec{a}$, а нульовий вектор $\vec{0}$ є єдиним нейтральним елементом відносно додавання векторів, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$. ■

Вектор $\vec{b} \in V$, для якого виконується рівність $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ називається *протилежним* до вектора $\vec{a}$. Його існування для довільного вектора $\vec{a} \in V$ випливає із третьої аксіоми лінійного векторного простору. Можна довести також, що для кожного вектора $\vec{a} \in V$ існує єдиний вектор $\vec{b}$ з такою властивістю. Протилежний до вектора $\vec{a}$ природно позначити через $-\vec{a}$.

2. Для довільного $\vec{a} \in V$ виконується рівність $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

▲ Із рівності $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a} = (1-1) \cdot \vec{a} = 1 \cdot \vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{a}$ і єдиності протилежного до $\vec{a}$ вектора випливає, що $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$. ■

3. Для довільного $\alpha \in P$ виконується рівність $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

▲ Справді, для довільного $\alpha \in P$ і довільного $\vec{a} \in V$ виконується рівність $\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{0}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{0}$. Із єдиності нейтрального елемента відносно додавання векторів випливає, що $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$. ■

Поняття лінійної комбінації, лінійної оболонки системи векторів, лінійної залежності системи векторів можна перенести з числових векторних просторів на абстрактні лінійні векторні простори. Нагадаємо ці поняття.

Лінійною комбінацією системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s \in V$ називається вираз $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_s\vec{a}_s$, де $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ – числа з поля P, які називають *коефіцієнтами* лінійної комбінації. Лінійна комбінація називається *тривіальною*, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють нулю.

Лінійна комбінація – це вектор із V. Очевидно, що тривіальна лінійна комбінація довільної системи векторів дорівнює нульовому вектору.

Множина усіх можливих лінійних комбінацій системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s \in V$ називається *лінійною оболонкою векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ і позначається $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s)$.

Якщо для вектора $\vec{b} \in V$ існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ з поля P, що $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_s \vec{a}_s$, то кажуть, що вектор $\vec{b}$ *лінійно виражається* через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ з коефіцієнтами $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$. Будемо писати $\vec{b} \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s)$. Очевидно, що нульовий вектор лінійно виражається через будь-яку систему векторів з нульовими коефіцієнтами, тобто $\vec{0} = 0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \cdots + 0\vec{a}_s$.

Означення 1. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ називається *лінійно незалежною*, якщо лише тривіальна лінійна комбінація цих векторів дорівнює нульовому вектору, тобто якщо $\vec{0}$ лінійно виражається через вектори системи лише одним способом: $\vec{0} = 0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \cdots + 0\vec{a}_s$.

Означення 2. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ називається *лінійно незалежною*, якщо із рівності $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_s \vec{a}_s = \vec{0}$ випливає, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_s = 0$.

Означення 1′. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ називається *лінійно залежною*, якщо існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, що дорівнює нульовому вектору, тобто якщо $\vec{0}$ лінійно виражається через вектори системи більше, ніж одним способом.

Означення 2′. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ називається *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ з поля P, серед яких не всі нулі, і для яких виконується рівність $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_s \vec{a}_s = \vec{0}$.

Властивості лінійно залежних та лінійно незалежних систем векторів для абстрактних лінійних векторних просторів також можна перенести з числових векторних просторів. Нагадаємо основні з них.

1. Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ – лінійно незалежна, а система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s, \vec{b}$ – лінійно залежна, то вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$.
2. Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли у цій системі існує вектор, що лінійно виражається через решту векторів системи.
3. Кожна підсистема лінійно незалежної системи векторів буде лінійно незалежною.
4. Кожна надсистема лінійно залежної системи векторів буде лінійно залежною.
5. Якщо кожен із векторів системи $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m$ лінійно виражається через вектори системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_s$ і при цьому $m > s$, то система векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m$ є лінійно залежною.

Доведення цих властивостей аналогічне доведенню для числових векторів.

Усі лінійні векторні простори можна розділити на два класи.

Перший клас складають ті простори, в яких існує лінійно незалежна система із n векторів, але не існує лінійно незалежних систем із більшою кількістю векторів. Такі лінійні векторні простори називаються *скінченновимірними*. Максимально можлива кількість векторів, що складають лінійно незалежну систему у векторному просторі, називається його *розмірністю*. Розмірність простору позначають $\dim V = n$, лінійний простір при цьому називають n-вимірним.

Другий клас складають такі простори, в яких існують лінійно незалежні системи векторів з як завгодно великої кількості векторів. Вони називаються *нескінченновимірними*.

Так, нескінченновимірними будуть простір $P[x]$ многочленів над полем P та простір $C[\alpha, \beta]$ неперервних на відрізку $[\alpha, \beta]$ функцій. У цих просторах многочлени $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n$ утворюють лінійно незалежну систему для довільного натурального n.

Ми будемо розглядати лише скінченновимірні векторні простори.

Означення. Система векторів називається *базисом* лінійного векторного простору V, якщо вона лінійно незалежна, і кожен вектор лінійного векторного простору V лінійно виражається через вектори цієї системи.

Теорема 1. У n-вимірному векторному просторі існує базис із n векторів. Кожна лінійно незалежна система із n векторів утворює базис у n-вимірному векторному просторі.

▲ У n-вимірному векторному просторі V існує лінійно незалежна система з n векторів. Нехай це система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Доведемо що ця система є базисом у V. Розглянемо довільний вектор $\vec{b} \in V$. Оскільки у просторі V кожна система із $n+1$ вектора буде лінійно залежною, система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ є лінійно залежною. Тому за властивістю 1, вектор $\vec{b} \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$. Отже, система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ утворює базис простору V. ■

Теорема 2. Кожен базис у n-вимірному векторному просторі складається з n векторів.

▲ Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ та $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m$ – два базиси у векторному просторі V, і $k < m$. Із того, що $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ – базис, випливає, що кожен із векторів системи $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m$ лінійно виражається через вектори системи $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$. Тоді за властивістю 5, система $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m$ – лінійно залежна, що суперечить тому, що дана система є базисом векторного простору. Отже, у двох базисах векторного простору однакова кількість векторів. За теоремою 1, у n-вимірному векторному просторі існує базис із n векторів. Отже, кожен базис у такому просторі складається з n векторів. ■

Отже, розмірність скінченновимірного векторного простору збігається із кількістю векторів у довільному його базисі. При цьому базис простору можна розглядати як максимальну лінійно незалежну систему векторів у векторному просторі.

Теорема 3. Кожен вектор простору виражається через вектори базису однозначно.

▲ Нехай $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ – базис простору P_n, а вектор $\vec{b} \in V$ виражається через базисні вектори більше, ніж одним способом, тобто $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n$.

Тоді $\vec{0} = (\lambda_1 - \alpha_1)\vec{a}_1 + (\lambda_2 - \alpha_2)\vec{a}_2 + \cdots + (\lambda_n - \alpha_n)\vec{a}_n$. Оскільки $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ – лінійно незалежна система, маємо $\lambda_1 - \alpha_1 = \lambda_2 - \alpha_2 = \cdots = \lambda_n - \alpha_n = 0$. Тому $\lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2, \cdots, \lambda_n = \alpha_n$, і вектор $\vec{b}$ виражається через базисні вектори однозначно. ■

Із теореми 3 випливає, що можна ввести поняття координат вектора.

Означення. Коефіцієнти лінійної комбінації, у вигляді якої вектор простору виражається через вектори базису, називаються *координатами вектора у цьому базисі*.

Перетворення координат вектора при зміні базису

Нехай маємо два базиси векторного простору V: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ та $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$. Деякий вектор $\vec{a} \in V$ лінійно виражається через вектори цих базисів наступним чином: $\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n = x_1'\vec{f}_1 + x_2'\vec{f}_2 + \cdots + x_n'\vec{f}_n$. Знайдемо зв'язок між координатними рядками $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ вектора $\vec{a}$ у двох базисах.

Вектори базису $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$ лінійно виражаються через вектори базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Будемо вважати, що нам відомо, як саме:

$$\vec{f}_1 = t_{11}\vec{e}_1 + t_{12}\vec{e}_2 + t_{13}\vec{e}_3 + \cdots + t_{1n}\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{n} t_{1j}\vec{e}_j ,$$

$$\vec{f}_2 = t_{21}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2 + t_{23}\vec{e}_3 + \cdots + t_{2n}\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{n} t_{2j}\vec{e}_j ,$$

………………………………………………...

$$\vec{f}_n = t_{n1}\vec{e}_1 + t_{n2}\vec{e}_2 + t_{n3}\vec{e}_3 + \cdots + t_{nn}\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{n} t_{nj}\vec{e}_j .$$

Матрицю, складену із коефіцієнтів t_{ij} будемо називати *матрицею переходу від базису* $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ *до базису* $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\ldots,\vec{f}_n$.

Будемо позначати її через $T_{e\to f}$. Оскільки, рядки цієї матриці збігаються з координатними рядками базисних векторів $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\ldots,\vec{f}_n$, вони є лінійно незалежними. Отже, матриця переходу $T_{e\to f}$ завжди невироджена, тобто $|T_{e\to f}|\neq 0$.

Підставимо рівності $\vec{f}_i=\sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij}\vec{e}_j$, $i=\overline{1,n}$ у формулу $\vec{a}=x_1'\vec{f}_1+x_2'\vec{f}_2+\cdots+x_n'\vec{f}_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i'\vec{f}_i$ і отримаємо:

$$\vec{a}=x_1'\vec{f}_1+x_2'\vec{f}_2+\cdots+x_n'\vec{f}_n=\sum_{i=1}^{n}x_i'\vec{f}_i=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}t_{ij}\vec{e}_j)x_i'=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i't_{ij})\vec{e}_j .$$

З іншого боку, $\vec{a}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\cdots+x_n\vec{e}_n=\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\vec{e}_j$. Із однозначності розкладу вектора через базисні вектори, випливає, що $x_j=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i't_{ij}$ для всіх $j=\overline{1,n}$, або ж у матричному вигляді:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_1',x_2',\ldots,x_n')\cdot T_{e\to f}. \qquad (1)$$

5.3. Ізоморфізми та гомоморфізми груп

Нехай $(G,\circ)$ та $(G',*)$ – групи.

Ізоморфізмом групи $(G,\circ)$ *на групу* $(G',*)$ будемо називати взаємно однозначне відображення (бієкцію) $\varphi: G\to G'$, яке узгоджене із груповими операціями у групах, тобто таке, що для довільних $a,b\in G$ $\varphi(a\circ b)=\varphi(a)*\varphi(b)$.

При цьому $\varphi(G)=G'$. Якщо існує ізоморфізм групи G на групу G', то ці групи називаються *ізоморфними*. Цю ситуацію позначають $G\cong G'$.

Відношення ізоморфності є відношенням еквівалентності на множині усіх груп. Один клас еквівалентності при цьому складають усі ізоморфні між собою групи. З точки зору алгебри ізоморфні групи однаково влаштовані, їх бінарні операції мають однакові властивості, а тому у теорії груп вивчають групи із точністю до ізоморфності. Таким чином уся увага приділяється дослідженню властивостей бінарної операції на множині, а природа елементів цієї множини не має суттєвого значення.

Ізоморфізмом групи $(G, \circ)$ *в групу* $(G', *)$ будемо називати ін'єктивне відображення $\varphi : G \to G'$, яке узгоджене із груповими операціями у групах, тобто таке, що для довільних $a, b \in G$ $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$.

При цьому $\varphi(G) \subseteq G'$, тобто відображення $\varphi : G \to G'$ може бути не сюр'єктивним, а група G' не збігатися із ізоморфним образом $\varphi(G)$ групи G. Якщо $\varphi : G \to G'$ – ізоморфізм групи G в групу G', то відображення $\varphi : G \to \varphi(G)$ – ізоморфізм групи G на групу $\varphi(G)$, що є підгрупою групи G'.

Гомоморфізмом групи $(G, \circ)$ *на групу* $(G', *)$ будемо називати сюр'єктивне відображення $\varphi : G \to G'$, яке узгоджене із груповими операціями у групах, тобто таке, що для довільних $a, b \in G$ $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$.

Гомоморфізмом групи $(G, \circ)$ *в групу* $(G', *)$ будемо називати відображення $\varphi : G \to G'$, яке узгоджене із груповими операціями у групах, тобто таке, що для довільних $a, b \in G$ $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$.

Зауважимо, що ізоморфізм груп – це частковий випадок гомоморфізму, а саме це ін'єктивний гомоморфізм.

Приклади

1. Відображення $\varphi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, яке кожному додатному дійсному числу $a \in \mathbf{R}^+$ ставить у відповідність $\ln a \in \mathbf{R}$, тобто $\varphi(a) = \ln a$, є ізоморфізмом групи $(\mathbf{R}^+, \cdot)$ на групу $(\mathbf{R}, +)$.

2. Відображення $\varphi : GL_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$, яке кожній квадратній невиродженій матриці A порядку n із дійсними елементами ставить у

відповідність її визначник $|A|$, є гомоморфізмом групи $GL_n(\mathbf{R})$ на групу $(\mathbf{R}\setminus\{0\},\cdot)$.

3. Нехай e' позначає нейтральний елемент групи G'. Відображення $\varphi: G \to G'$, таке, що $\varphi(g) = e'$ для кожного $g \in G$, називається *тривіальним* гомоморфізмом групи G в групу G'.

Властивості гомоморфізмів

Властивість 1. При гомоморфізмі $\varphi: G \to G'$ нейтральний елемент e групи G переходить у нейтральний елемент e' групи G', тобто $\varphi(e) = e'$.

▲ Для довільного $a \in G$ $\varphi(a) = \varphi(a \cdot e) = \varphi(a) * \varphi(e)$ і $\varphi(a) = \varphi(e) * \varphi(a)$. Отже, $\varphi(e) \in G'$ виконує роль нейтрального елемента у групі G', тобто $\varphi(e) = e'$. ■

Властивість 2. При гомоморфізмі $\varphi: G \to G'$ пара взаємно обернених елементів групи G переходить у пару взаємно обернених елементів групи G', тобто $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ для довільного $a \in G$.

▲ Для довільного $a \in G$ $e' = \varphi(e) = \varphi(a \cdot a^{-1}) = \varphi(a) * \varphi(a^{-1})$. Аналогічно $e' = \varphi(a^{-1}) * \varphi(a)$. Отже, елементи $\varphi(a)$ та $\varphi(a^{-1})$ – взаємно обернені у групі G'. ■

Властивість 3. Нехай $\varphi: G \to G'$ – ізоморфізм групи G на групу G'. Тоді обернене відображення $\varphi^{-1}: G' \to G$ – ізоморфізм групи G' на групу G.

▲ Пропонується довести самостійно. ■

Група G називається *циклічною*, якщо існує такий елемент $a \in G$, цілими степенями якого вичерпуються всі елементи групи G, тобто для кожного $b \in G$ знайдеться ціле число k, таке що $b = a^k$.

При цьому пишуть $G = \langle a \rangle$ і кажуть, що *елемент* $a \in G$ *породжує циклічну групу* G; а елемент $a \in G$ називають *твірним елементом* циклічної групи G.

Очевидно, що циклічні групи – абелеві.

Теорема 1. Кожна нескінченна циклічна група ізоморфна адитивній групі цілих чисел $(\mathbf{Z},+)$. Кожна циклічна група порядку n ізоморфна адитивній групі лишків $(\mathbf{Z_n},+)$ за модулем числа n.

▲ Доведемо теорему для циклічної групи $G=<a>$ порядку n. Розглянемо відображення $\varphi: G \to \mathbf{Z_n}$, побудоване за правилом $\varphi(a^k)=\overline{k}$, $k=0,1,2,\ldots,n-1$. Бієктивність φ очевидна.

$\varphi(a^k \cdot a^l)=\varphi(a^{k+l})=\overline{k+l}=\overline{k}+\overline{l}=\varphi(a^k)+\varphi(a^l)$ для довільних натуральних $k,l \in \{0,1,2,...,n-1\}$. Отже, φ – ізоморфізм групи G на групу $\mathbf{Z_n}$.

Аналогічно для нескінченної циклічної групи $G=<a>$ доводимо, що відображення $\varphi: G \to \mathbf{Z}$, де $\varphi(a^k)=k \in \mathbf{Z}$, також ізоморфізм. ■

Висновок. Циклічні групи однакових порядків ізоморфні.

Теорема 2 (*Келі*). Кожна скінченна група порядку n ізоморфна деякій підгрупі симетричної групи S_n.

Теорема 3 (*узагальнена теорема Келі*). Кожна група G ізоморфна деякій підгрупі симетричної групи $S(G)$ підстановок на множині G.

Задача. Які з наведених нижче груп ізоморфні до адитивної групи лишків $\mathbf{Z}_6$?

1. Симетрична група S_3.
2. Мультиплікативна група C_6 комплексних коренів 6-ого степеня з одиниці.
3. Адитивна група $\mathbf{Z}$ цілих чисел.
4. Група D_3 симетрій трикутника.
5. Мультиплікативна група усіх невироджених матриць порядку 3 над полем дійсних чисел.

Розв'язання. Група $\mathbf{Z}_6$ містить 6 елементів, тому вона не може бути ізоморфною нескінченним групам, а саме адитивній групі $\mathbf{Z}$ цілих чисел та мультиплікативній групі всіх невироджених матриць порядку 3 над полем дійсних чисел.

Додавання лишків операція комутативна, тому група $\mathbf{Z}_6$ – абелева. Групи S_3 та D_3 некомутативні. Тому вони не можуть бути ізоморфні групі $\mathbf{Z}_6$.

Мультиплікативна група C_6 комплексних коренів 6-ого степеня з одиниці є абелевою, бо множення комплексних чисел комутативне, містить 6 елементів. Крім того, ця група циклічна, бо кожен корінь $\xi_k = \cos\frac{\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi k}{3}$, $k = \overline{0,5}$, 6-ого степеня з одиниці можна подати у вигляді $\xi_k = (\xi_1)^k$, де $\xi_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. За теоремою про ізоморфність циклічних груп, C_6 ізоморфна до $\mathbf{Z}_6$.

Відповідь: $\mathbf{Z}_6 \cong C_6$.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Атанасян Л.С. Геометрія.-К.: Вища школа, 1976.-455 с.
2. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.-М.: Наука, 1979.-511 с.
3. Білоусова В.П., Ільїн І.Г. та ін. Аналітична геометрія.-К.: Вища школа, 1973.-327 с.
4. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.-М.: Наука, 1971.-271 с.
5. Завало С.Т. Курс алгебри.-К.: Вища школа, 1985.-503 с.
6. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Аналитическая геометрия.-М.: Наука, 1988.-223 с.
7. Ильин В.А., Позняк Е.Г. Линейная алгебра.-М.: Наука, 1974.-296 с.
8. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру.-М.$: Наука, 1973.-448 с.
9. Калужнін Л.А., Вишенський В.А, Шуб Ц.О. Лінійні простори.-К.: Вища школа, 1971.-344 с.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.-М.: Наука, 1971.-399 с.
11. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры.-М.: Наука, 1985.-336 с.
12. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія.-Львів: Бескид Біт, 2002.-262 с.
13. Чарін В.С. Лінійна алгебра.-К.: Техніка, 2004.-416 с.

Збірники задач

1. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.-СПб.: Профессия, 2002.-200 с.
2. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре.-М.: Просвещение, 1975.-320 с.
3. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.-М.: Наука, 1974.-384 с.
4. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре.-СПб.: Лань, 2001.- 288 с.
5. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Під ред. Рудавського Ю.К.-Львів: Бескид Біт, 2002.-256 с.

Зміст