Доповіді Національної академії наук України

12 • 1996

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

УДК 517.55

О.М. Піддубний

Про граничні властивості спряженого інтеграла Коші-Пуассона

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В.К. Дзядиком)

Analogs of the Hardy - Littlewood theorem for derivatives of the Cauchy - Poisson integral and conjugate Cauchy - Poisson integral in the upper half-plane in terms of Zygmund's operator, which was constructed by a module of continuity of the first order, have been received.

1. Постановка задачі. Позначимо через L_p, $1 \le p \le \infty$, клас функцій $f(x)$, інтегровних на $-\infty < x < \infty$ із скінченною нормою, що визначається співвідношеннями

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^p du \right\}^{1/p}, \quad \text{якщо } 1 \le p < \infty,$$
$$\|f\|_p = \operatorname*{ess\,sup}_{-\infty<x<\infty} |f(x)|, \qquad \text{якщо } p = +\infty.$$

Сингулярним інтегралом Коші–Пуассона, побудованим за функцією $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, називається інтеграл

$$P(f;x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-u)}{y^2+u^2} du, \tag{1}$$

де $y > 0$. Інтеграл (1) є розв'язком задачі Дірiхле для рівняння Лапласа в верхній півплощині з граничною функцією $f(x) \in L_p$, $1 \le p < \infty$. Тому функція (1) є дійсною частиною аналітичної функції $H(z)$:

$$H(z) = P(f;x,y) + iQ(f;x,y), \qquad z = x + iy,$$

де функція $Q(f;x,y)$ для $y > 0$ і $x \in (-\infty;\infty)$ визначається інтегралом

$$Q(f;x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \frac{u}{y^2+u^2} du, \tag{2}$$

який називається спряженим інтегралом Коші–Пуассона. Границя $Q(f;x,y)$ при $y \to 0+$ дає функцію

$$f^{\sim}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\frac{du}{u}. \tag{3}$$

Формула (3) визначає оператор, який називається перетворенням Гільберта [1, с. 95].

Відомо [2, с. 306], що $f^{\sim}(x)$ існує не для всякої функції і не скрізь. Тому, якщо $f(x) \in L_p$, $1 \le p < \infty$, то під $f^{\sim}(x)$ розуміють головне значення інтеграла (3) в розумінні Коші. Якщо $f(x) \in L_p$, $1 \le p < \infty$, то $f^{\sim}(x)$ існує майже скрізь [2, с. 310].

Крім того, *відомо* [2, *с.* 126], *що для* $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, *інтеграл* (1) *існує для всіх* $x \in (-\infty, \infty)$ та $y > 0$ і при $f \in L_p \cap C^{\infty}$ задовольняє умову

$$\lim_{y\to 0+} \|P(f;x,y) - f(x)\|_p = 0.$$

На відміну від інтеграла Коші–Пуассона ядро спряженого інтеграла Коші–Пуассона вже не є апроксимативною одиницею, воно непарне і його норма в L_1 асимптотично збігається з $\ln\dfrac{1}{y}$ $(y \to 0+)$ та має інші особливості, пов'язані з випадками $p = 1$ і $p = \infty$. Незважаючи на це, в даній роботі показуємо, що для спряженого інтеграла Коші–Пуассона має місце повний аналог класичної теореми Харді–Літтлвуда навіть з більш точною мажорантою у формі оператора Зігмунда для L_p–норми похідних довільного порядку.

2. Аналог теореми Харді–Літтлвуда. Класична теорема Харді–Літтлвуда встановлює зв'язок між поведінкою на одиничному колі аналітичної функції та ростом похідної цієї функції при наближенні до межі [3, с. 397]. Для випадку модулів неперервності вищих порядків і аналітичних в крузі функцій ця теорема узагальнена в [4], а повний аналог теореми Харді–Літтлвуда для аналітичних функцій в областях з квазіконформною межею одержано в [5].

У даній роботі отримано аналоги теореми Харді–Літлвуда для інтеграла Коші–Пуассона і спряженого інтеграла Коші–Пуассона у верхній півплощині в термінах інтегрального модуля неперервності $\omega = \omega_p$, $1 \le p < \infty$, першого порядку та оператора Зігмунда $(Z\omega)(t)$, введеного формулою

$$(Z\omega)(t) = \int\limits_0^t \frac{\omega(u)}{u}du + t\int\limits_t^{\infty}\frac{\omega(u)}{u^2}du. \tag{4}$$

Позначимо через $H^{\omega}L_p$ клас функцій $f(x) \in L_p$, $1 \le p < \infty$, для яких $\|f(x+h) - f(x)\|_p \le \omega(|h|)$, де $\omega(t)$, $t > 0$, – функція типу модуля неперервності першого порядку [6, с. 167].

Теорема 1. *Якщо функція* $F(x) \in H^{\omega}L_p$, $1 \le p < \infty$, *і* $(Z\omega_p)(t)$ *– скінченна функція вигляду (4), то для спряженого інтеграла Коші–Пуассона* $Q(f;x,y)$ *справедлива оцінка*

$$\left\|\frac{\partial^k Q(f;x,y)}{\partial x^k}\right\|_p \le \frac{M_k}{\pi}\frac{(Z\omega_p)(y)}{y^k}, \tag{5}$$

де $M_k =$ const > 0, $y > 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Доведення. У випадку $k = 2m$, $m = 1, 2, \ldots$, маємо

$$\frac{\partial^{2m} Q(f;x,y)}{\partial x^{2m}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\frac{A_0 u^{2m+1} + A_1 u^{2m-1}y^2 + \cdots + A_m u y^{2m}}{(y^2+u^2)^{2m+1}}du,$$

де $A_0, A_1, \ldots, A_m$ – дійсні константи.

Оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_0 u^{2m+1} + A_1 u^{2m-1}y^2 + \cdots + A_m u y^{2m}}{(y^2+u^2)^{2m+1}}du = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

то

$$\frac{\partial^{2m} Q(f;x,y)}{\partial x^{2m}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [f(x-u) - f(x)]\frac{A_0 u^{2m+1} + A_1 u^{2m-1}y^2 + \cdots + A_m u y^{2m}}{(y^2+u^2)^{2m+1}}du.$$

Застосувавши узагальнену нерівність Мінковського [7, с. 601], одержуємо

$$\left\|\frac{\partial^{2m} Q(f;x,y)}{\partial x^{2m}}\right\|_p \le \frac{A}{\pi}\frac{(Z\omega_p)(y)}{y^{2m}},$$

де $A = \sum_{i=0}^{m} |A_i|$.

Для випадку $k = 2m-1$, $m = 1, 2, \ldots$, доведення аналогічне. Теорема доведена.

Наслідок. Якщо функція $\omega(t)$ задовольняє умову Зігмунда–Стечкіна [8, співвідношення (13.16) при $k = 1$]

$$\int_0^t \frac{\omega(u)}{u}du + t\int_t^{\infty}\frac{\omega(u)}{u^2}du = O(\omega(t)),$$

то нерівності (5) можна записати в класичній формі Харді–Літтлвуда

$$\left\|\frac{\partial^k Q(f;x,y)}{\partial x^k}\right\|_p \le C_k\frac{\omega(y)}{y^k}, \qquad C_k = \text{ const } > 0.$$

Для спряженого інтеграла Коші–Пуассона встановлено такі твердження.

Теорема 2. *Нехай $f(x) \in L_p(-\infty;\infty)$, $1 \le p < \infty$, і функція $Q(f;x,y)$ визначена у верхній півплощині $y > 0$ формулою (2). Тоді*

1) для довільних точок (x, y_1), (x, y_2) справедлива рівність

$$Q((Q(f;t,y_1);x,y_2) = Q(Q(f;t,y_2);x,y_1),$$

де $y_1 > 0$, $y_2 > 0$;

2) для довільних фіксованих $k = 1, 2, \ldots$ функція $Q(f;x,y)$ є у верхній півплощині k разів неперервно диференційовною за x функцією і справедлива нерівність типу С.Н. Бернштейна

$$\left\|\frac{\partial^k Q(f;x,y)}{\partial x^k}\right\|_p \le M\frac{\|f\|_p}{y^k}, \qquad M = \text{ const } > 0.$$

Доведення теореми 2 проводиться аналогічно до доведення відповідних тверджень роботи [9].

Відзначимо, що для інтеграла Коші–Пуассона (1) має місце повний аналог теореми 1 і відповідний наслідок до неї. Доведення цієї теореми проводиться за схемою доведення теореми 1.

Теорема 3. *Якщо функція* $f(x) \in H^{\omega}L_p$, $1 \le p < \infty$, *і* $(Z\omega_p)(t)$ *– скінченна функція вигляду (4), то для інтеграла Коші–Пуассона* $P(f;x,y)$ *справедлива оцінка*

$$\left\| \frac{\partial^k Q(f;x,y)}{\partial x^k} \right\|_p \le C \frac{(Z\omega_p)(y)}{y^k},$$

де $C =$ const > 0, $y > 0$, $k = 1, 2, \dots$.

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции об интегральных преобразованиях. – Харьков: Вища шк., 1984. – 120 с.

2. *Butzer P.L., Nessel R.J.* Fourier Analysis and Approximation. V.I. One–Dimensional Theory. – New York and London: Academic Press, 1971. – 556 p.

3. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

4. *Ковальчук Р.Н.* О модулях непрерывности функций, заданных в замкнутом круге // Первая республиканская математическая конференция молодых исследователей, вып. 2. – Киев: Изд. Ин–та математики АН УССР, 1965. – С. 333–340.

5. *Двейрин М.З.* Теорема Харди–Литтлвуда в областях с квазиконформной границей и ее приложения к гармоническим функциям // Сиб. мат. журн. – 1986. – **27**, N 3. – С. 68–73.

6. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

7. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

8. *Шевчук И.А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.

9. *Горбайчук В.И.* Об обратных теоремах приближения гармоническими функциями // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, N 3. – С. 309–314.

Волинський державний університет ім. Лесі Українки, Луцьк
Надійшло до редакції 04.05.95