УДК 517.5

О. М. Піддубний
(Ін–т математики НАН України, Київ, Волинський держ. ун–т, Луцьк)

ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗНАЧЕННЯМИ ОПЕРАТОРІВ ОДНОГО КЛАСУ

We proof the inverse theorem of approximation of functions, defined on the unit circle by operators from classes $\mathfrak{B}_1$. Some application of main theorem with regard to boundary properties of generalized Poisson operator P_l in the unit disc are given.

Одержано обернену теорему наближення функцій, визначених на колі операторами класу $\mathfrak{B}_1$ і наведено одне її застосування до дослідження граничних властивостей узагальненого оператора Пуассона P_l в одиничному крузі.

1. Постановка задачі. Нехай $\mathbb{T} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ — одиничне коло в комплексній площині, $L_p(\mathbb{T})$ – простір функцій визначених на $\mathbb{T}$, сумовних в p–му $(1 \le p < \infty)$ степені з нормою

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p |d\zeta| \right)^{1/p}$$

і $C(\mathbb{T})$ — простір функцій, неперервних на $\mathbb{T}$ з нормою $\|f\|_C = \max_{\zeta\in\mathbb{T}} |f(\zeta)|$. Заради зручності записів покладемо $L_\infty(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$.

Нехай далі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — круг одиничного радіуса в $\mathbb{C}$. Кожну точку $z = re^{i\theta}$ в $\mathbb{D}$ будемо ототожнювати з точкою (θ, r) в декартовову добутку $[-\pi, \pi] \times [0, 1]$.

Означення 1. *Оператор F, визначений на $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, який кожній функції $f \in L_p(\mathbb{T})$ ставить у відповідність функцію u_f, визначену в крузі $\mathbb{D}$ належить класові $\mathfrak{B}_1$, якщо його образ u_f задовольняє умови:*

α) *для будь-яких $f, g \in L_p(\mathbb{T})$, має місце рівність*

$$u_{f+g} = u_f + u_g;$$

β) для довільних точок $(\theta, r_1), (\theta, r_2)$ круга $\mathbb{D}$ виконується рівність

$$u_{u_f(\cdot, r_1)}(\theta, r_2) = u_{u_f(\cdot, r_2)}(\theta, r_1);$$

γ) для будь-якого цілого числа n і $r \in [0, 1)$ функція $F(f)(r\cdot)$ є n разів диференційовною і для похідної

$$u_f^{(n)}(\theta, r) := \frac{d^n}{d\zeta^n} F(f)(r\zeta)$$

виконується нерівність типу Бернштейна

$$\left\| u_f^{(n)}(\cdot, r) \right\|_{L_p([-\pi,\pi])} \leq M \frac{\|f\|_p}{(1-r)^\sigma}, \qquad (1)$$

де $\sigma = \sigma(n)$ — деяке число, $0 \leq \sigma(n) \leq n$ і M — стала, незалежна від r, до того ж, якщо функція f є k разів ($k \in \mathbb{N}$) диференційовною, то $u_f^{(k)}(\cdot, r) = u_{f^{(k)}}(\cdot, r)$.

Зазначимо, що клас $\mathfrak{B}_1$ означається подібно до того, як визначався клас $\mathfrak{B}$, введений в [1]. Відмінність полягає лише в оцінці L_p- норми похідної в умові γ), а саме, для класу $\mathfrak{B}$ $\sigma = n$.

Метою даної роботи є отримати обернену теорему наближення функцій з $L_p(\mathbb{T})$ значеннями операторів класу $\mathfrak{B}_1$.

Більш точно, з'ясовується те, якими диференціально – гладкісними властивостями володіє функція f в залежності від збіжності до нуля відхилень $\|f(\cdot) - u_f(\cdot, r)\|_p$ при $r \to 1-$.

В такій постановці задача про обернені теореми наближення розв'язана в [1] для операторів класу $\mathfrak{B}$.

2. Основний результат міститься в наступному твердженні.

Теорема 1. *Нехай $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$. Якщо оператор $F \in \mathfrak{B}_1$ і для деякого $k \in \mathbb{Z}_+$ виконується умова*

$$\|u_f(\cdot, r) - f(\cdot)\|_p \leq A(1-r)^k \omega(1-r), \quad r \to 1-, \qquad (2)$$

де A — додатна константа, $\omega(\cdot)$ — функція типу модуля неперервності порядку $n \in \mathbb{N}$, яка у випадку, коли $k \geq 1$ задовольняє умову Діні

$$\int_0^1 \frac{\omega(x)}{x} dx < \infty, \qquad (3)$$

то функція f має на $\mathbb{T}$ абсолютно неперервні похідні до порядку $k-1$ включно і похідну $f^{(k)} \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, інтегральний (при $p = \infty$ – звичайний) модуль неперервності якої $\omega_n(f^{(k)}, t)$ порядку n задовольняє співвідношення

$$\omega_n(f^{(k)}, t) \le \begin{cases} A_1 t^{\sigma(n)} \displaystyle\int_t^1 \frac{\omega(x)}{x^{\sigma(n)+1}} dx, & k = 0, \\ A_2 \left[\displaystyle\int_0^t \frac{\omega(x)}{x} dx + t^{\sigma(n)} \int_t^1 \frac{\omega(x)}{x^{\sigma(n)+1}} dx \right], & k \ge 1, \end{cases} \tag{4}$$

де A_1, A_2 - додатні константи, які не залежать від t, $0 < t \le 1/2$.

Зауважимо, якщо в (1) $\sigma = n$, то $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$ і дана теорема цілком збігається з теоремою 1.1 роботи [1].

Слід зазначити також, що теорема 1 є аналогом обернених теорем наближення тригонометричними та алгебраїчними многочленами [2, с.233, 263].

Оператори, які забезпечують вказану в теоремі 1 швидкість наближення існують. Зокрема, такими операторами можуть бути оператори, описані в роботі [3].

3. Доведення теореми 1. Заради спрощення записів перепозначимо $f(\theta) := f(e^{i\theta})$ і будемо розглядати $f(\theta)$ як функцію визначену на $[-\pi, \pi]$.

Випадок, коли $k = 0$ доводиться тим самим методом що й в періодичному випадку [2, с. 234, 235]. Тому ми зупинимося лише на технічних моментах, які дають можливість застосувати такий метод.

Нехай $0 < h \le 1/2$ і $r_n = 1 - 1/2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Виберемо таке натуральне N, щоб

$$\frac{1}{2^{N+1}} < h \le \frac{1}{2^N} \tag{5}$$

і розглянемо тотожність

$$f(\theta) = u_f(\theta, r_0) + \sum_{j=1}^{N} [u_f(\theta, r_j) - u_f(\theta, r_{j-1})] +$$

$$+ [f(\theta) - u_f(\theta, r_N)], \quad N \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

на основі якої побудуємо для функції f різницю порядку n з кроком h:

$$\Delta_h^n f(\theta) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m f(\theta + mh) = S_1(\theta, h) + S_2(\theta, h), \qquad (7)$$

де

$$S_1(\theta, h) := \sum_{j=1}^{N} \Delta_h^n \left[u_f(\theta, r_j) - u_f(\theta, r_{j-1})\right], \qquad (8)$$

$$S_2(\theta, h) := \Delta_h^n \left[f(\theta) - u_f(\theta, r_N)\right]. \qquad (9)$$

Оцінимо кожен з доданків в (7).

Приступаючи до оцінки S_1, покладемо

$$f_j(\theta) := f(\theta) - u_f(\theta, r_j), \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Тоді згідно з умовами α) та β)

$$u_f(\theta, r_j) - u_f(\theta, r_{j-1}) = u_{f_{j-1}}(\theta, r_j) - u_{f_j}(\theta, r_{j-1}). \qquad (10)$$

Отже, зобразивши різницю n–го порядку, яка міститься в S_1 в інтегральній формі (див., наприклад, [2, с. 159]), а потім застосувавши інтегральну нерівність Мінковського, на основі властивості γ), умови (2) при $k = 0$ тотожності (10) і нерівності $\omega(2t) \le 2^n \omega(t)$, отримаємо оцінку

$$\|S_1(\cdot, h)\|_p \le M h^n \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\|f_{j-1}\|_p}{(\frac{1}{2^j})^\sigma} + \frac{\|f_j\|_p}{(\frac{1}{2^{j-1}})^\sigma} \right] \le$$

$$\le MAh^n \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\omega(\frac{1}{2^{j-1}})}{(\frac{1}{2^j})^\sigma} + \frac{\omega(\frac{1}{2^j})}{(\frac{1}{2^{j-1}})^\sigma} \right] \le K_1 h^n \sum_{j=1}^{N} 2^{\sigma j} \omega(\frac{1}{2^j}),$$

де $K_1 = MA(2^n + 1)$.

Для S_2 згідно з умовою (2) при $k = 0$, монотонності функції ω та умови (5) маємо оцінку

$$\|S_2(\cdot, h)\|_p = \left\| \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m (f(\cdot + mh) - u_f(\cdot + mh, r_N)) \right\|_p \le$$

$$\leq A\sum_{m=0}^{n} C_n^m \omega(\frac{1}{2^N}) = A2^n \omega(\frac{1}{2^N}) \leq K_2\omega(h), \qquad (11)$$

де $K_2 = 2^{2n}A$.

Отже,

$$\|\Delta_h^n f\|_p \leq K_1 h^n \sum_{j=1}^{N} 2^{\sigma j}\omega(\frac{1}{2^j}) + K_2\omega(h).$$

З цього місця стає можливим застосувати метод, згаданий вище, який дає оцінку

$$\omega_n(f,h) \leq 2^{n+1}K_1 h^n \int_h^1 \frac{\omega(x)dx}{x^{\sigma+1}} + K_3\omega(h) \leq A_1 h^\sigma \int_h^1 \frac{\omega(x)dx}{x^{\sigma+1}},$$

де A_1 — константа, яка залежить тільки від M, A, n і не залежить від h.

Випадок, коли $k \geq 1$. Покажемо спочатку, існує така послідовність натуральних чисел $\{N_\nu\}_{\nu\geq 1}$, що в рівності (6) можна перейти до границі при $\nu \to \infty$, внаслідок чого отримаємо співвідношення

$$f(\theta) = u_f(\theta, r_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[u_f(\theta, r_j) - u_f(\theta, r_{j-1})\right], \qquad (12)$$

де при $1 \leq p < \infty$ ряд збігається в p–середньому, а при $p = \infty$ ряд збігається рівномірно.

Справді, для частинної суми цього ряду

$$S_N(\theta) = u_f(\theta, r_0) + \sum_{j=1}^{N} \left[u_f(\theta, r_j) - u_f(\theta, r_{j-1})\right]$$

використовуючи (6), (10) та умову (2), одержуємо

$$\|f(\cdot) - S_N(\cdot)\|_p = \|f(\cdot) - u_f(\cdot, r_N)\|_p \leq A(\frac{1}{2^N})^k \omega(\frac{1}{2^N}).$$

Звідси випливає, що ряд (12) збігається в p–середньому до функції f, а при $p = +\infty$ до неперервної функції f. У випадку $1 \leq p < \infty$ за відомою теоремою (теоремою Ф. Рісса) (див., наприклад, [4, с. 388]) одержуємо, що існує підпослідовність $\{S_{N_\nu}\}_{\nu\geq 1}$ частинних сум ряду (12), яка збігається майже скрізь на $[-\pi,\pi]$ до функції f.

При довільному натуральному $q\leq k$ розглянемо ряд

$$u_f^{(q)}(\theta,r_0)+\sum_{j=1}^{\infty}\left[u_f^{(q)}(\theta,r_j)-u_f^{(q)}(\theta,r_{j-1})\right], \tag{13}$$

де

$$u^{(q)}(\theta,r_j)=\frac{d^q}{d(e^{i\theta})^q}\left(F(f)(r_je^{i\theta})\right).$$

Продиференціювавши у вказаному сенсі рівність (10), використавши властивість $\gamma)$ та умову (2), одержимо оцінку норм членів цього ряду:

$$\begin{aligned}\left\|u_f^{(q)}(\cdot,r_j)-u_f^{(q)}(\cdot,r_{j-1})\right\|_p&=\left\|u_{f_{j-1}}^{(q)}(\cdot,r_j)-u_{f_j}^{(q)}(\cdot,r_{j-1})\right\|_p\leq\\ &\leq\left\|u_{f_{j-1}}^{(q)}(\cdot,r_j)\right\|_p+\left\|u_{f_j}^{(q)}(\cdot,r_{j-1})\right\|_p\\ &\leq M\left(\frac{\|f(\cdot)-u_f(\cdot,r_{j-1})\|_p}{(\frac{1}{2^j})^{\sigma_1}}+\frac{\|f(\cdot)-u_f(\cdot,r_j)\|_p}{(\frac{1}{2^{j-1}})^{\sigma_1}}\right)\leq\\ &\leq MA\left[\frac{(\frac{1}{2^{j-1}})^k\omega(\frac{1}{2^{j-1}})}{(\frac{1}{2^j})^{\sigma_1}}+\frac{(\frac{1}{2^j})^k\omega(\frac{1}{2^j})}{(\frac{1}{2^{j-1}})^{\sigma_1}}\right]\leq K\omega(\frac{1}{2^j}),\end{aligned} \tag{14}$$

де $\sigma_1=\sigma_1(q)\leq q\leq k$, K — додатна константа, яка залежить від k,d,σ_1. Оскільки $\omega\uparrow$, то при всіх $j=1,2,\ldots,$

$$\int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}}\frac{\omega(x)}{x}dx\geq\ln 2\ \omega(\frac{1}{2^j}).$$

Тому з (14) випливає

$$\left\|u_f^{(q)}(\cdot,r_{j+1})-u_f^{(q)}(\cdot,r_j)\right\|_p\leq\frac{K}{\ln 2}\int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}}\frac{\omega(x)}{x}dx. \tag{15}$$

В силу умови (3) маємо, що

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}}\frac{\omega(x)}{x}dx\leq\int_0^1\frac{\omega(x)}{x}dx<\infty.$$

З останніх фактів робимо висновок, що при $1 \le p < \infty$ ряд (13) збігається в метриці простору $L_p(\mathbb{T})$, а при $p = +\infty$ — рівномірно. Тому за теоремою Ф. Рісса для кожного $q = 1, 2, \ldots, k$ існує підпослідовність $\{S_{n_m}^{(q)}\}_{m \ge 1}$ частинних сум ряду (13), яка збігається майже скрізь на $\mathbb{T}$ до деякої функції $f_q \in L_p[-\pi, \pi]$.

Покажемо, що майже скрізь $f_q = f^{(q)}$. Для цього розглянемо функції

$$\varphi_q(\theta) := f_{q-1}(\theta) - f_{q-1}(\theta_0) - \int_{\mathbb{T}(\theta_0, \theta)} f_q(\zeta) d\zeta,$$

де θ_0 — точка, в якій ряд (13) збігається при всіх $q = 1, 2, \ldots, k$ і $\mathbb{T}(\theta_0, \theta)$ — дуга кола $\mathbb{T}$, задана рівнянням $\zeta = e^{it}$, $t \in [\theta_0, \theta]$.

З міркувань, які будуть наведені нижче випливає, що для функції $S_{n_m}^{(q)}$ має місце формула Ньютона–Лейбніца

$$\int_{\mathbb{T}(\theta_0, \theta)} S_{n_m}^{(q)}(\zeta) d\zeta = S_{n_m}^{(q-1)}(e^{i\theta}) - S_{n_m}^{(q-1)}(e^{i\theta_0}).$$

Враховуючи це легко показати, що

$$\|\varphi_q\|_p \le \left\| f_{q-1} - S_{n_m}^{(q-1)} \right\|_p + \left| f_{q-1}(\theta_0) - S_{n_m}^{(q-1)}(e^{i\theta_0}) \right| +$$

$$+ \left\| \int_{\mathbb{T}(\theta_0, \theta)} [f_q(\zeta) - S_{n_m}^{(q)}(\zeta)] d\zeta \right\|_p .$$

З цього співвідношення при $m \to \infty$ одержуємо, що майже для всіх $\theta \in [-\pi, \pi]$ $\varphi_q(\theta) = 0$, тобто

$$f_{q-1}(\theta) - f_{q-1}(\theta_0) = \int_{\mathbb{T}(\theta_0, \theta)} f_q(\zeta) d\zeta.$$

Згідно з (12) майже скрізь на $\mathbb{T}$ $f_0 = f$. Тому

$$f(\zeta) - f(\zeta_0) = \int_{\mathbb{T}(\theta_0, \theta)} f_1(\zeta) d\zeta, \tag{16}$$

де $\zeta_0 = e^{i\theta_0}$ і $\zeta = e^{i\theta}$.

Отже, функція $f(e^{i\cdot})$ є абсолютно неперервною і за теоремою Лебега

$$\frac{d}{d\theta}f(e^{i\theta}) = f_1(e^{i\theta})\frac{d}{d\theta}e^{i\theta}.$$

Звідки випливає

$$\frac{df(e^{i\theta})}{de^{i\theta}} = f_1(e^{i\theta}) \quad \forall\, \theta \in [-\pi, \pi],$$

тобто $f_1(\zeta) = f'(\zeta)$ для всіх $\zeta \in \mathbb{T}$. Подібно доводиться, що при $1 \le p < \infty$ остання рівність виконується майже скрізь на $\mathbb{T}$.

За допомогою таких міркувань послідовно отримуємо, що скрізь на $\mathbb{T}$ $f_1 = f', \ldots, f_{q-1} = f^{(q-1)}$ і майже скрізь $f_q = f^{(q)}$.

Отже, функція f збігається з функцією, яка має абсолютно неперервну похідну $(k-1)$–го порядку, і похідну $f^{(k)} \in L_p(\mathbb{T})$, яка є границею в середньому послідовності $\{S_n^{(k)}\}_{n\ge 1}$.

Цим доведено, що майже для всіх $\theta \in [-\pi, \pi]$ виконується рівність

$$g(\theta) := f^{(k)}(e^{i\theta}) = u_f^{(k)}(\theta, r_0) + \sum_{j=1}^{\infty}\left[u_f^{(k)}(\theta, r_j) - u_f^{(k)}(\theta, r_{j-1})\right].$$

Оцінимо інтегральний модуль гладкості порядку N функції g. Для цього зауважимо, що аналогічно до попередньої рівності доводиться справедливість для майже всіх $\theta \in [-\pi, \pi]$ рівності

$$g(\theta) = u_f^{(k)}(\theta, r_j) + \sum_{m=j+1}^{\infty}\left[u_f^{(k)}(\theta, r_m) - u_f^{(k)}(\theta, r_{m-1})\right].$$

З цієї рівності, використовуючи (15), одержуємо

$$\left\|g(\theta) - u_f^{(k)}(\theta, r_j)\right\|_p \le \sum_{m=j+1}^{\infty}\left\|u_f^{(k)}(\theta, r_m) - u_f^{(k)}(\theta, r_{m-1})\right\|_p \le$$

$$\le 2K\sum_{m=j+1}^{\infty}\int_{2^{-m}}^{2^{-(m-1)}}\frac{\omega(x)}{x}dx = 2K\int_0^{2^{-j}}\frac{\omega(x)}{x}dx. \tag{17}$$

Позначимо

$$\Omega(t) := \int_0^t \frac{\omega(x)}{x} dx, \ t > 0$$

і

$$u_g(\theta, r) := u_f^{(k)}(\theta, r).$$

Функція Ω має властивості модуля неперервності порядку n [2, с. 162, 236], а за умовою γ) $u_g(\theta, r) = u_{f^{(k)}}(\theta, r)$. Тому нерівність

$$\|g(\cdot) - u_g(\cdot, r_j)\|_p \leq M_1 \Omega(1 - r_j),$$

яка випливає з (17) означає, що ми маємо L_p– оцінку відхилення функції g від $u_g(\cdot, r_j)$ типу оцінки (2) при $k = 0$. Отже, на основі вже доведеного твердження теореми при $k = 0$ стосовно до функції g маємо нерівність

$$\omega_n(g; t) = \omega_n(f^{(k)}; t) \leq C t^\sigma \int_t^1 \frac{\Omega(x)}{x^{\sigma+1}} dx.$$

Інтегрування частинами останнього інтегралу дає оцінку (4) при $k \geq 1$.

Теорему доведено.

4. Застосування. У ролі оператора F розглянемо узагальнений оператор Пуассона P_l:

$$P_l(f)(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) K_l(z e^{-it}) dt \quad (z \in \mathbb{D}), \tag{18}$$

де

$$K_l(re^{it}) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^{k^l} \cos kt \quad (0 < r < 1, \ l > 0).$$

Зазначимо, що K_1 ($l = 1$) збігається з ядром Пуассона, а оператор P_1 є звичайним оператором Пуассона.

В [5] показано, що функції $u(\theta, r) = P_l(f)(re^{i\theta})$ при натуральних значеннях l є розв'язками крайової задачі для рівняння (в полярних координатах)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{(-1)^{l+1}}{r^2} \frac{\partial^{2l} u}{\partial \theta^{2l}} = 0 \tag{19}$$

з умовою

$$u(\theta, r)\Big|_{r=1} = f(e^{i\theta}), \tag{20}$$

Рівність (20) розуміється так, що

$$\lim_{r\to 1-} \int_0^{2\pi} |u(\theta, r) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0.$$

У даному пункті теорема 1 застосовується до вивчення граничної поведінки розв'язків крайової задачі (19), (20) в контексті оберненої теореми.

Теорема 2. *Нехай* $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$. *Якщо для функції* $u(\theta, r) = P_l(f)(re^{i\theta})$ *виконується нерівність*

$$\|u(\cdot, r) - f(\cdot)\|_p \le A\omega(1-r),\ 0 < r < 1,\ A = \mathrm{const} > 0,$$

де ω *— функція типу модуля неперервності, то*

$$\omega(f, t) \le At^{1/l} \int_t^1 \frac{\omega(x)dx}{x^{1/l+1}}, \quad 0 < t \le \frac{1}{2}, \tag{21}$$

де A *— додатна константа, яка не залежить від* r.

Теорема 2 виводиться з теореми 1 при $n = 1$ і $\sigma = 1/l$ шляхом перевірки умов α), β) і γ) означення 1, тобто перевірки включення $P_l \in \mathfrak{B}_1$.

Виконання умови α) є очевидним.

Для перевірки умови β) досить зауважити, що

$$u_{u_f(\cdot, r_1)}(\theta, r_2) - u_{u_f(\cdot, r_2)}(\theta, r_1) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \int_0^{2\pi} \Big[K_l(r_1 e^{-i(t-\tau)}) K_l(r_2 e^{-i(\tau-\theta)}) -$$

$$- K_l(r_2 e^{-i(t-\tau)}) K_l(r_1 e^{-i(\tau-\theta)})\Big] d\tau dt,$$

і те, що внутрішній інтеграл дорівнює нулеві згідно з рівністю Парсеваля.

Для перевірки умови γ) продиференціюємо рівність (18):

$$\frac{\partial u(\theta,r)}{\partial\theta}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{it})\frac{\partial}{\partial\theta}K_l(re^{-i(t-\theta)})dt$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i(t+\theta)})\frac{\partial}{\partial t}K_l(re^{-it})dt.$$

Звідси за інтегральною нерівністю Мінковського випливає оцінка

$$\left\|\frac{\partial u(\cdot,r)}{\partial\theta}\right\|_p\le\frac{\|f\|_p}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial}{\partial t}K_l(re^{-it})\right|dt. \tag{22}$$

Для обчислення похідної $\partial(K_l(re^{-it}))/\partial t$ запишемо ядро K_l у вигляді

$$K_l(re^{it})=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^{k^l}\cos kt=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{|k|^l\ln r}e^{ikt}.$$

Отже,

$$\frac{\partial K_l(re^{it})}{\partial t}=\frac{i}{2}\sum_{k\ne0}ke^{|k|^l\ln r}e^{ikt}. \tag{23}$$

Застосувавши до ряду в (23) формулу підсумування Пуассона (див., наприклад, [6, с. 119]), одержимо

$$\frac{\partial K_l(re^{it})}{\partial t}=\frac{i}{2}\sum_{k\ne0}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{|x|^l\ln r}e^{ix(t-2\pi k)}dx. \tag{24}$$

Підставляючи (24) в нерівність (22), одержимо

$$\left\|\frac{\partial u(\cdot,r)}{\partial\theta}\right\|_p\le\frac{\|f\|_p}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{|x|^l\ln r}e^{ix(t-2\pi k)}dx\right|dt\le$$

$$\le\frac{\|f\|_p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}xe^{|x|^l\ln r}e^{ix(t-2\pi k)}dx\right|dt=$$

$$=\frac{\|f\|_p}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)}\left|\int_{-\infty}^{\infty}xe^{|x|^l\ln r}e^{ixt}dx\right|dt=$$

$$= \frac{\|f\|_p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x e^{|x|^l \ln r} e^{ixt} dx \right| dt.$$

Звідси

$$\left\| \frac{\partial u(\cdot, r)}{\partial \theta} \right\|_p \leq \frac{\|f\|_p}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} x e^{-yx^l} \sin(xt)\, dx \right| dt, \qquad (25)$$

де $y = -\ln r$.

Останній інтеграл оцінено в [7, лема 4.7]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} x e^{-yx^l} \sin(xt)\, dx \right| dt \leq C y^{-1/l}.$$

Отже, в поєднанні з (25) останнє співвідношення й доводить виконання умови γ) для оператора P_l.

1. *Горбайчук В. Й.* Обратные теоремы приближения специальными операторами продолжения и и х приложения к некоторым задачам математической физики.— Киев, 1991. —38 с. — (Препр./АН УССР. Ин–т математики; 91.28).

2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. — 602 С.

3. *Савчук В. В.* Наближення голоморфних функцій середніми Тейлора–Абеля–Пуасона // Укр. мат. журн., 2007, т.59, №9.- С. 1253 — 1260.

4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 544 с.

5. *Бугров С. Я.* Неравенства типа Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка// Mathematica(Cluj) — 1968. — **5**(28). — С. 5—25.

6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. — М.: Мир, 1965. — Т.1. — 615 с.

7. *Бугров С. Я.* Дифференциальные свойства решений некоторого класса дифференциальных уравнений высшего порядка // Матем. сборник. — 1964. — **63**, № 1. — С. 59 — 121.