УДК 517.5

Р.В. Товкач (Волинський національний університет, Луцьк)

Наближення деяких класів періодичних функцій багатьох змінних

В роботі знайдено точний порядок відхилень сум Фейера на класі неперервних функцій що визначається заданою мажорантою найкращих наближень.

Р.В. Товкач

Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных.

В работе получен точный порядок отклонений сумм Фейера на классе непрерывных функций который определяется заданной мажорантой наилучших приближений.

R.V. Tovkach

On the approximation some classes of periodic functions of several variables.

In work the exact order of deviations of the Fejer's sums on a class of continuous functions which is received defined by the set majorant of the best approximations.

Розглянемо $C(T^d)$ - простір неперервних 2π -періодичних по кожній змінній функцій $f(x), x \in T^d$, $T^d = (-\pi;\pi]^d$ з нормою $\|f\|_C = \max_x | f(x)| < \infty$.

Позначимо через W множину, що складається з поліедрів V з раціональними вершинами, зіркових відносно початку координат, який є внутрішньою точкою V. Позначення nV потрібно розуміти як множину точок x таких, що $\frac{x}{n} \in V$, тобто $nV = \{x : \frac{x}{n} \in V\}$.

Нехай $f(\cdot) \in C(T^d)$,

$$S_n(f;V;x) = \sum_{k\in nV} c_k e^{i(k,x)}, \tag{1}$$

$$\sigma_n(f;V;x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f;V;x). \tag{2}$$

- відповідно частинні суми її ряду Фур'є і суми Фейера.

Нехай далі $T_{n,V}$ - множина тригонометричних поліномів з гармоніками з nV, тобто

$$T_{n,V} = \{t_n : t_n(x) = \sum_{k\in nV} a_k e^{i(k,x)}\},$$

де a_k - довільні комплексні числа.

Позначимо через $E_{n,V}(f)_C$ - найкраще наближення функцій $f(\cdot)$ тригонометричними поліномами з $T_{n,V}$ в метриці C, тобто

$$E_{n,V}(f)_C = \inf_{t_n\in T_{n,V}} \|f - t_n(x)\|_C\,.$$

Для заданої послідовності $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}, k = 0, 1, 2, \ldots$ з монотонно спадними членами (тобто $\varepsilon_k \downarrow 0, k \to \infty$) позначимо через $C(\varepsilon)$ клас функцій $f \in C(T^d)$ таких, що

$$E_{n,V}(f)_C \le \varepsilon_{n+1}.$$

Метою даної роботи є визначення точного порядку спадання величини

$$U_n(C(\varepsilon),\sigma) = \sup_{f\in C(\varepsilon)} \|f(x) - \sigma_n(f;V;x)\|_{C(T^d)}.$$

Теорема. *Для $n \in \mathbb{N}$ має місце співвідношення*

$$\frac{B_1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_{k+1} \le U_n(C(\varepsilon),\sigma) \le \frac{B_2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_{k+1}, \tag{3}$$

– де константи B_1 і B_2 залежать від розмірності d простору і гомотета V, але не залежать від n і f.

В одномірному випадку таке твердження доведено С.Б.Стєчкіним [2], а при $d > 1$ для $V = \Pi = \{x : |x_j| \le \ \gamma_j, j = 1, 2, \dots, d\}$ С.П.Байбородовим [3]. Також слід відмітити результати О.І.Кузнєцової [4] для поліедрів.

Доведення. Згідно теореми 2 в [1] для $\forall f \in C(\varepsilon)$ маємо

$$U_n(f;\sigma) = \|f(x) - \sigma_n(f;V;x)\|_{C(T^d)} \le \frac{B_2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}E_{k,V}(f)_C \le \frac{B_2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_{k+1}.$$

Тому

$$U_n(C(\varepsilon),\sigma) \le \frac{B_2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_{k+1}. \tag{4}$$

Для доведення оберненої нерівності для класу функцій $C(\varepsilon)$

$$U_n(C(\varepsilon),\sigma) \ge \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_{k+1} \tag{5}$$

побудуємо функцію $f_1(\cdot) \in C(\varepsilon)$ не залежну від n, для якої

$$U_n(f_1,\sigma) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_{k+1}. \tag{6}$$

Нехай $a_k > 0$ і $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^d} a_k < \infty$. Тоді для функції

$$f_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^d} a_k \prod_{j=1}^{d}\cos k_j x_j = \sum_{l=1}^{\infty}\ \sum_{\nu\in lV\setminus(l-1)V} a_\nu \prod_{j=1}^{d}\cos \nu_j x_j \tag{7}$$

будемо мати

$$E_{n,V}(f_0)_C \le \|f_0(x) - S_n(f_0;V;x)\|_C \le$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{N}^d\setminus nV} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu. \tag{8}$$

Для величини $U_n(f_0,\sigma)$ знайдемо оцінку зверху використовуючи нерівність (8)

$$U_n(f_0,\sigma) = \frac{1}{n+1}\left\|\sum_{k=0}^{n}(f_0(x) - S_k(f_0;V;x))\right\|_C \leq$$

$$\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|f_0(x) - S_k(f_0;V;x)\|_C \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\sum_{l\in\nu V\setminus(\nu-1)V} a_l =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k \sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu + \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu. \tag{9}$$

Крім того, враховуючи (7), маємо

$$U_n(f_0,\sigma) \geq |f_0(0) - \sigma_n(f_0;V;0)| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu - \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu\right| =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k \sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu + \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu. \tag{10}$$

З співвідношень (9) і (10) слідує, що

$$U_n(f_0,\sigma) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k \sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu + \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu. \tag{11}$$

Позначимо через $s(n)$ кількість точок $k = (k_1, k_2, \ldots, k_d)$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,d}$, в множині $nV\setminus(n-1)V$, тобто

$$s(n) = \sum_{k\in nV\setminus(n-1)V} 1.$$

Тепер визначимо функцію $f_1(x)$ наступним чином

$$f_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1})\frac{1}{s(k)}\sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V}\prod_{i=1}^{d}\cos\nu_i x_i \qquad (12)$$

Для так визначеної функції $f_1(x)$, згідно (8),маємо

$$E_{n,V}(f_1)_C\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1})\frac{1}{s(k)}s(k)=\varepsilon_{n+1}.$$

А значить $f_1(\cdot)\in C(\varepsilon)$. Покажемо, що

$$U_n(f_1,\sigma)=\|f_1(x)-\sigma_n(f_1;V;x)\|_C=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_{k+1}.$$

На основі рівності (11), знайдемо

$$U_n(f_1,\sigma)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1})\frac{1}{s(k)}s(k)+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1})\frac{1}{s(k)}s(k)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_{k+1}.$$

Тобто для функції $f_1(x)$, визначеної рівністю (12), виконуються співвідношення (6), а значить має місце і співвідношення (5). Теорему доведено.

Наслідок. *Якщо $f(\cdot)\in C(T^d)$, то для $\forall\ r\in\mathbb{N}$*

$$U_n(f,\sigma)\leq\frac{B_3}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\omega_r(f;\frac{1}{k+1}), \qquad (13)$$

де B_3 залежить від розмірності простору d, гомотета V і числа r, а

$$\omega_r(f;\frac{1}{k+1})=\sup_{\sqrt{t_1^2+t_2^2+\cdots+t_d^2}\leq\frac{1}{k+1}}\left\|\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{r-\nu}C_\nu^r f(x_1+\nu t_1,\ldots,x_d+\nu t_d)\right\|_C.$$

Доведення. Очевидно, що для довільного $k\in(\mathbb{N}\cup 0)$, існують числа $\mu_i(\mu_i\in(\mathbb{N}\cup 0))$, такі, що

$$E_{k,V}(f)_C\leq E_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_d}(f)_C, \qquad (14)$$

де

$$E_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_d}(f)_C=\inf_{t_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_d}}\|f(x)-t_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_d}(x_1,x_2,\ldots,x_d)\|_C$$

- повне найкраще наближення функції $f(x_1, x_2, \dots, x_d) \in C(T^d)$ тригонометричними поліномами $t_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_d}(x_1, x_2, \dots, x_d)$ порядку $\le \mu_i$ відповідно по змінних $x_i (i = 1, 2, \dots, d)$. Тепер скористаємося узагальненою теоремою Джексона (див.[5], теорема 2.4.1, стор.113) на основі якої

$$E_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_d}(f)_C \le B_3 \omega_r(f; \rho);\ \ \rho = \sqrt{\mu_1^{-2} + \mu_2^{-2} + \dots + \mu_d^{-2}}. \tag{15}$$

Враховуючи (3), (14) і (15) отримаємо співвідношення (13). Наслідок доведено.

1. *Задерей Н.М., Товкач Р.В.* Наближення періодичних функцій багатьох змінних сумами Фейера. // Теорія наближень функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. – Т7 , №1. — С. 341-347.

2. *Стечкин С.Б.* О приближении периодических функций суммами Фейера. // Труды МИАН СССР. — 1961. — Т.62. — С. 48–60.

3. *Байбородов С.П.* О приближении функций многих переменных прямоугольными суммами Валле Пуссена // Мат. заметки. — 1981. — **29**, №5. — С. 711-730.

4. *Кузнецова О.И.* Сильная суммируемость, неравенства Сидона, интегрируемость. // Ряди Фур'є: теорія і застосування : Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – Т20. — С. 142-150.

5. *Тиман М.Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. — Дніпропетровськ : Поліграфіст, 2000. — 320 с.